



AUTARQUIA ASSOCIADA À UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

**MODELO MATEMÁTICO DA INFLUÊNCIA DA DISTRIBUIÇÃO
DE PARTÍCULAS DE SiC NAS TENSÕES TÉRMICAS EM
COMPÓSITOS DE MATRIZ METÁLICA**

ZOROASTRO DE MIRANDA BOARI

**Tese apresentada como parte dos
requisitos para obtenção do Grau de
Doutor em Ciências na Área de
Tecnologia Nuclear - Materiais**

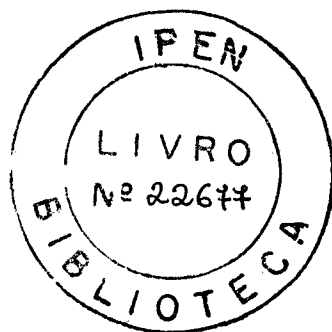
**Orientador:
Prof. Dr. Waldemar Alfredo Monteiro**

**São Paulo
2003**

**INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES
AUTARQUIA ASSOCIADA À UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

**MODELO MATEMÁTICO DA INFLUÊNCIA DA DISTRIBUIÇÃO
DE PARTÍCULAS DE SiC NAS TENSÕES TÉRMICAS EM
COMPÓSITOS DE MATRIZ METÁLICA**

ZOROASTRO DE MIRANDA BOARI



**Tese apresentada como parte dos
requisitos para obtenção do grau de
Doutor em Ciências na Área de
Tecnologia Nuclear — Materiais**

**Orientador:
Prof. Dr. Waldemar Alfredo Monteiro**

SÃO PAULO

2003

Dedicatória

À minha querida esposa Heloisa e aos meus queridos filhos Carolina, Gustavo, Daniel e Fernando pela paciência, incentivo e carinhos sempre presentes.

À minha querida mãe pelo estímulo e carinho.

À memória de meu pai, sempre presente, pela sua dedicação

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Waldemar Alfredo Monteiro

Pela incansável orientação e dedicação sempre presentes nas horas mais difíceis. Pelo apoio e amizade incondicionais. Pela justiça de suas atitudes.

Meus sinceros agradecimentos por ter me ajudado a superar esta etapa.

À Divisão de Mecânica Estrutural do Centro de Engenharia Nuclear, ao Prof. Dr. Mighel MattarNeto pela cessão dos computadores para as simulações numéricas e ao Prof. Dr. Carlos Alexandre de Jesus Miranda pela cessão dos computadores e pelas valiosas idéias e sugestões.

Ao Laboratório de Transformação de Fase da Escola de Engenharia da USP-São Carlos pela fase experimental e ao Prof. Dr. João Manuel Domingos de Almeida Rollo por ceder os equipamentos para a fase experimental e também por suas valiosas idéias e sugestões.

Ao Msc. Gilberto Marcondes por ter oferecido o analisador de imagens e por suas valiosas idéias e sugestões.

Ao Centro de Ciência e Tecnologia de Materiais e ao seu gerente Prof. Dr. Arnaldo H. P. de Andrade pelo acesso aos laboratórios.

À Profa. Dra. Ana Helena Bressiani pela atenção e doação das amostras de SiC.

Aos colegas Roberto Baginski e Roberto Vicente pelas idéias e sugestões.

À D. Ilda, minha sogra pelo estímulo sempre presente.

Aos colegas: Rodrigo, Henrique, Franklin, Edval, Edson, Edilson, Oscar, Américo, Sidney, Franciné, Hamilta e em especial ao Luca pela inestimável ajuda, sem a qual seria muito difícil a realização deste trabalho.

Ao Celso e Nildemar pela inestimável ajuda no microscópio eletrônico de varredura.

Aos amigos: Ademauro, Alexius, Ari, Delson, Marcelo, Mario, Meldonian, Pires, Renato e Roberto pelo incentivo e amizade.

Às secretárias da CPG: Ilze, Vera e Ana pela atenção e eficiência.

Ao IPEN – Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares de São Paulo, órgão público, que contribuiu para a realização deste trabalho e que reúne pessoas altamente competentes, produzindo pesquisa de qualidade.

Enfim a todas as pessoas que ajudaram direta ou indiretamente na elaboração deste trabalho, meus sinceros agradecimentos.

MODELO MATEMÁTICO DA INFLUÊNCIA DA DISTRIBUIÇÃO DE PARTÍCULAS DE SiC NAS TENSÕES TÉRMICAS EM COMPÓSITOS DE MATRIZ METÁLICA

RESUMO

Dados experimentais publicados sobre a distribuição de partículas de SiC em matrizes de alumínio e sua influência na resistência do compósito são revistos neste trabalho. Um modelamento matemático relacionando o material compósito e a distribuição de SiC é muito difícil de ser obtido, mas análises qualitativas indicam que as características microestruturais são muito influenciadas pelos reforços de SiC e sua distribuição. Por exemplo, na matriz adjacente aos reforços de cerâmica há uma realçada nucleação e crescimento de precipitados, especialmente, Mg_2Si . Desvios na uniformidade da distribuição de reforços podem marcadamente influenciar as características de deformação plástica, embora seus efeitos possam ser negligenciados nas propriedades elásticas. Para o caso da distribuição uniforme, a razão de deformação depende de variáveis físicas e geométricas. Neste caso, o tratamento matemático utiliza técnicas de elementos finitos, método de Eshelby ou mecanismos de discordâncias. Este trabalho mostra a distribuição de tensões elásticas de longo e curto alcance ao redor de reforços e dentro de agrupamentos de partículas. Para tanto, recorreu-se ao programa Ansys 5.5, considerando-se apenas cargas térmicas. Este trabalho também estuda a relação entre distribuição de partículas e a resistência do compósito e propõe um modelo matemático para o comportamento elástico, considerando partículas de SiC em matriz de alumínio. Isto é possível, se uma função de distribuição de probabilidade é usada para relacionar a distribuição com a resistência do material por meio das tensões térmicas de Eshelby.

MATHEMATICAL MODEL OF THE INFLUENCE OF SiC PARTICLES DISTRIBUTION ON THERMAL STRESSES IN METAL MATRIX COMPOSITES

ABSTRACT

This work reviews some experimental results that have been published about aluminum matrix reinforced with SiC distribution and their influence in composite material resistance. It is too difficult to obtain a mathematical model relating the composite material and SiC distribution, but qualitative analyses indicate that micro structural characteristics were very influenced by SiC particulate distribution. For example, in the matrix adjacent to the ceramic reinforcement there are an enhanced nucleation and growth of the precipitates, specially Mg_2Si . Recent studies recognized that deviations from the periodicity of reinforcement distribution can markedly influence the plastic deformation characteristics even when they have a neglected effect on the elastic properties. For over all constructive response of the composite is influenced by the physical and geometrical properties of the reinforcing phases. The finite element method, the Eshelby method and dislocation mechanisms are usually employed in formulation of the constitutive response. This work shows the stress distribution around the particles and inside the clusters. The finite element code used for the present study was Ansys 5.5, it was considered only thermal stress distribution around particles equally distributed and evolution of the elastic stresses. This work also studies the relationship between particles distribution and composite resistance and proposes a mathematical model to elastic behavior, considering SiC particles in aluminum matrix. This is possible if a distribution function of probability is used to relating the distribution with the material resistance through of the Eshelby's thermal stress.

SUMÁRIO

	Página
INTRODUÇÃO	1
I - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	3
I.1 – Teoria dos compósitos	3
I.1.1 – Compósitos reforçados por partículas	3
I.1.2 – Compósitos de fibras	4
I.1.3 – Microestrutura e resistência de compósitos de matriz de alumínio com reforços de SiC	4
I.1.4 – Comportamento mecânico de compósitos com distribuição uniforme e não uniforme de reforços	6
I.1.4.1 – Distribuição uniforme	7
I.1.4.1.a - Partículas esféricas	8
I.1.4.1.b – Fibras e whiskers	8
I.1.4.2 – Distribuição não uniforme	9
I.1.4.2.a – Agrupamento de partículas	9
I.1.4.2.b – Agrupamentos horizontais de whiskers	10
I.1.4.2.c – Agrupamentos verticais de whiskers	12
I.1.5 - Comentários	13
I.2 – Base teórica para a determinação dos mecanismos de resistência dos materiais compósitos por meio de elementos finitos.	14
I.3 – Modelo numérico	14
II - SIMULAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS USANDO O PROGRAMA ANSYS – VERSÃO 5.5 PARA PARTÍCULAS ISOLADAS E DISTRIBUIÇÃO UNIFORME DE PARTÍCULAS, CONSIDERANDO REGIME ELÁSTICO.	23
II.1 - Introdução	23
II.2 – Partículas isoladas	24
II.3 – Partículas em arranjos simétricos	25
II.3.1 – Arranjo pentagonal	25
II.3.2 – Arranjo quadrado	26
II.4 – Discussão dos resultados	27
II.4.1 – Partículas isoladas	27
II.4.2 – Arranjos simétricos – distribuição uniforme de partículas	29
II.4.2.1 – Arranjo pentagonal	29
II.4.2.2 – Arranjo quadrado	34
II.5 – Influência do tamanho de partícula na distribuição de tensões	37
II.6 - Comentários	41
III – SIMULAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS USANDO O PROGRAMA ANSYS-VERSÃO 5.5 PARA DISTRIBUIÇÃO NÃO UNIFORME DE PARTÍCULAS, CONSIDERANDO REGIME ELÁSTICO	42
III.1 – Introdução	42
III.2 – Comentários	47

LISTA DE FIGURAS

Fig. I.1 – Previsões por elementos finitos dos efeitos de agrupamentos verticais sobre o comportamento mecânico do AA2124, reforçado com 13,2 % de cilindros unitários de SiC, obtido por Chirstman et al. Linhas de isotensão são dadas em GPa.	10
Fig. I.2 – Agrupamento horizontal de “whiskers” e seus efeitos. A fig.b representa tensões (GPa) e a fig.c representa deformações.	11
Fig. I.3 - Agrupamento vertical de “whiskers. A fig.b representa tensões (GPa) e a fig.c representa deformações.	12
Fig. I.4 – Gráfico de tensão – deformação	15
Fig. I.5 – Representando uma célula unitária	17
 Fig.II.1 – Mostra o modelo de partícula quadrada em matriz de alumínio de dimensões infinitas.	25
Fig.II.2 – Mostra o modelo de partícula circular em matriz de alumínio de dimensões infinitas.	25
Fig.II.3 – Arranjo pentagonal – a) partículas quadradas; b) partículas circulares	25
Fig.II.4 - Arranjo quadrado - a) partículas quadradas; b) partículas circulares	26
Fig.II.5 – Tensões equivalentes de von Mises, considerando a partícula quadrada em matriz de dimensões infinitas	28
Fig.II.6 – Tensões equivalentes de von Mises, considerando a partícula circular em matriz de dimensões infinitas	28
Fig.II.7 – Tensões máximas em função da distância entre partículas para o arranjo pentagonal de partículas quadradas e partículas circulares	30
Fig.II.8 – Campos de tensão quando as partículas quadradas estão afastadas de 5L	31
Fig.II.9 – Campos de tensão quando as partículas quadradas estão afastadas de 1,5L	32
Fig.II.10 - Campos de tensão quando as partículas circulares estão afastadas de 5L	33
Fig.II.11 - Campos de tensão quando as partículas circulares estão afastadas de 1,5 L	33
Fig.II.12 –Arranjo quadrado de partículas quadradas em modelo de 5 L	35
Fig.II.13 - Arranjo quadrado de partículas quadradas em modelo de 1,5 L	35
Fig.II.14 - Arranjo quadrado de partículas circulares em modelo de 5 L	36
Fig.II.15 - Arranjo quadrado de partículas circulares em modelo de 1,5 L	36
Fig.II.16 - Efeito do tamanho de partícula na tensão máxima. Os dados foram obtidos em modelos de mesmo tamanho	38
Fig.II.17 - Efeito de partículas quadradas de $L = 1 \mu\text{m}$ no campo de tensões	39
Fig. II.18 - Efeito de partículas quadradas de $L = 3 \mu\text{m}$ no campo de tensões	39
Fig. II.19 - Efeito de partículas circulares de $L = 1 \mu\text{m}$ no campo de tensões	40
Fig. II.20 - Efeito de partículas circulares de $L = 3 \mu\text{m}$ no campo de tensões	40
 Fig. III.1 – Malha gerada em elementos finitos – elementos triangulares	44
Fig. III.2- Campos de tensão – Partículas circulares dispostas aleatoriamente	44
Fig. III.3 - Campos de tensão – Partículas dispostas aleatoriamente	45
Fig. III.4 – Campos de tensão – Partículas circulares dispostas aleatoriamente	49
Fig. III.5 – Campos de tensão – Partículas dispostas aleatoriamente	49
 Fig. IV.1 – Curva da função de distribuição de tensões em compósitos de Al/SiC45%, $n(\sigma)$ é chamada de função de distribuição	75

Fig. V.1 – Fluxograma apresentando o processo adotado neste trabalho	77
Fig. V.2 – Granulometria do Carbetto de Silício	78
Fig. V.3 – Jarra e esferas de aço usadas no misturador	78
Fig. V.4 – Detalhes do moinho atritor	79
Fig. V.5 – Moinho atritor utilizado no processamento dos pós	80
Fig. V.6 – Máquina extrusora pronta para extrusão de barras de Al/SiC	81
Fig. V.7 - Representação esquemática do equipamento de compactação do pó	83
Fig. V.8 - Representação esquemática do equipamento para extrusão a quente	84
Fig. V.9 - Barra extrudada de Al/SiC30% não moído	84
Fig. V.10–Amostra de compósito de Al/SiC com 20% de fração volumétrica obtida a 380 °C e pressão de 26t	85
Fig. V.11–Amostra de compósito de Al/SiC com 30% de fração volumétrica obtida a 400 °C e pressão de 28t	85
Fig. V.12–Curva de aquecimento e resfriamento das amostras na dilatométrica	87
Fig. V.13- Micrografia da amostra de Al/SiC20%	88
Fig. V.14–Gráfico obtido por EDS da amostra de compósito Al/SiC20%	88
Fig. V.15–Micrografia da amostra de Al/SiC30%	89
Fig. V.16–Gráfico obtido por EDS da amostra de compósito Al/SiC30%	89
Fig. VI.1–Curva da função de distribuição de tensões para frações volumétricas de 10% e 60 % de SiC em matriz de Alumínio	93
Fig. VI.2– Simulação em elementos finitos de Al/SiC 17,9% - tensões em Pa	94
Fig. VI.3–Curva da função de distribuição de tensões obtido por meio do modelo matemático para Al/SiC 17,9%	95
Fig. VI.4–Simulação em elementos finitos de Al/SiC 24,4 % - tensões em Pa	95
Fig. VI.5–Curva da função de distribuição de tensões obtido por meio do modelo matemático para Al/SiC 24,4%	96
Fig. VI.6–Simulação de elementos finitos de Al/SiC 31 % - tensões em Pa	96
Fig. VI.7–Curva da função de distribuição de tensões obtido por meio do modelo matemático para Al/SiC 31%	97
Fig. VI.8–Simulação de elementos finitos de Al/SiC 35 % - tensões em Pa	97
Fig. VI.9– Curva da função de distribuição de tensões obtido por meio do modelo matemático para Al/SiC 35%	98
Fig. VI.10–Simulação em elementos finitos para 70Cu-30Zn/SiC17,9% - tensões em Pa	108
Fig. VI.11–Simulação em elementos finitos para 70Cu-30Zn/SiC27,8% - tensões em Pa	109
Fig. VI.12–Simulação em elementos finitos para 70Cu-30Zn/SiC35,2% - tensões em Pa	109
Fig. VI.13–Curvas obtidas por meio do modelo matemático e que correspondem às simulações em elementos finitos das figuras VI.10, VI.11 e VI.12 acima	110
Fig.1.A – Compósito de matriz metálica com inclusão metálica simulando uma inclusão real	124
Fig.2.A – Compósito de matriz metálica com inclusão real	124

LISTA DE TABELAS

Tabela II.1 – Tensões máximas e mínimas em função das aproximações interpartículas no arranjo pentagonal. Medidas em Pa	29
Tabela II.2 - Tensões máxima e mínima em função do tamanho de partícula.	37
Tabela III.1 – Tabela que reúne os níveis de tensão e frações volumétricas nas 23 simulações feitas em programa Ansys – versão 5.5	46
Tabela IV.1 – Arranjos possíveis de partículas nas células	50
Tabela IV.2 – Constantes elásticas de Voigt	63
Tabela V.1 – Composição química do pó de alumínio	77
Tabela V.2 – Parâmetros para mistura e moagem	80
Tabela V.3 – Temperaturas de compactação e vácuo alcançado neste processo	82
Tabela V.4 – Temperaturas e pressões de extrusão	82
Tabela VI.1 – Cálculos de tensão mais provável, média e média quadrática, usando o modelo matemático	92
Tabela VI.2 – Cálculos de tensão mais provável, média e médias quadrática usando o modelo matemático para cada simulação apresentada acima	99
Tabela VI.3 – Valores médios de tensão em elementos finitos e tensões representativas do modelo matemático para o Al/SiC	101
Tabela VI.4 – Valor de tensão obtido por meio do coeficiente de expansão térmica do compósito Al/SiC56%, comparando os resultados com o método de Eshelby e com o modelo matemático	104
Tabela VI.5 – Valores médios de tensão em elementos finitos e tensões representativas do modelo matemático para o 70Cu-30Zn/SiC	111

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área total da matriz
a_i	Área de cada célula
α_m	Coefficiente de expansão térmica do material
$\alpha_{M,R}$	Coefficiente de expansão térmica da matriz ou do reforço
α, β	Multiplicadores de Lagrange
C	Dimensão lateral do modelo de compósito
$C_I = C^*_{ijkl}$	Matriz de constantes elásticas da inclusão
$C_M = C_{ijkl}$	Matriz de constantes elásticas da base de alumínio
d	Distância característica entre fibras – Distância lateral entre fibras
d_0	Dimensão da parte superposta entre duas fibras
D	Maior dimensão da seção transversal da fibra
$d\varepsilon_{ij}$	Incremento do tensor deformação total
$d\varepsilon_{ij}^E$	Incremento do tensor deformação elástica
$d\varepsilon_{ij}^P$	Incremento do tensor deformação plástica
$d\sigma'_{ij}$	Incremento do tensor desviador de tensão
$d\sigma_{kk}$	Incremento dos componentes da tensão hidrostática
$d\bar{\varepsilon}$	Incremento de deformação plástica efetiva
$\varepsilon_{Al, c}$	Contração referente à matriz de alumínio e ao compósito
ε_{SiC}	Contração referente ao carbetto de silício
δ_{ij}	Delta de Kronecker
δ_{wXi}	Trabalho realizado pelas forças de volume
$\delta_{w\phi i}$	Trabalho realizado pelas forças de superfície
ΔT	Variação de temperatura
ε_{ij}	Componentes do tensor deformação total
ε_{ij}^E	Componentes do tensor deformação elástica
ε_{ij}^P	Componentes do tensor deformação plástica
ε_{ij}^T	Componentes de deformação térmica
ε_{kl}	Tensor deformação em função do deslocamento
ε^*_{kl}	Tensor deformação térmica

ε_{kl}^{**}	Tensor deformação devido às diferenças entre os coeficientes de expansão térmica dos constituintes do compósito
$\langle \varepsilon \rangle_M$	Deformação média na matriz
E	Módulo de Young
$E_{M,R}$	Módulo de Young da matriz ou do reforço
$\dot{\varepsilon}$	Razão de deformação por fluência
$\bar{\varepsilon}$	Deformação plástica efetiva
$\dot{\bar{\varepsilon}}$	Razão de deformação plástica efetiva
$\dot{\varepsilon}_0$	Razão de deformação de referência
f	Fração volumétrica de partículas
g_i	Probabilidade “a priori” de uma distribuição
G	Módulo de elasticidade transversal
h^3	Volume infinitesimal ou volume da célula
I	Matriz identidade
L	Dimensão lateral da partícula
L_f	Comprimento da fibra
λ	Constante de Lamé
λ_i	Parâmetro que representa a microestrutura da matriz
m	Expoente que representa a razão de endurecimento por deformação
n_i	Número de partículas na i – ésima célula
N	Número total de partículas
N_e	Expoente que representa o endurecimento por deformação em função da temperatura
ν	Coefficiente de Poisson
P	Probabilidade total de uma distribuição
P_p	Probabilidade “a priori” de qualquer distribuição de N partículas entre K células
P_t	Probabilidade termodinâmica
$S = S_{ijkl}$	Tensor de Eshelby
S_s	superfície
σ	Tensão associada a uma partícula
σ_A	Tensão Aplicada

$\bar{\sigma}$	Tensão média
$\overline{\overline{\sigma}}$	Tensão média quadrática
$\bar{\sigma}_e$	Tensão efetiva
$\langle \sigma \rangle_I$	Tensão média na inclusão
$\sigma_{interface}$	Propriedades da interface fibra- matriz
σ_{ij}	Componentes do tensor tensão
σ'_{ij}	Tensor desviador de tensão
$\langle \sigma \rangle_M$	Tensão média na matriz (back stress)
σ_{pij}	Tensão mais provável
$\sigma_{x,y,z}$	Coordenadas do espaço de fase referentes à tensão
T	Temperatura
T_0	Temperatura de referência na qual o corpo permanece livre de tensão
T_i	Componentes do sistema de forças superficiais
θ	Ângulo de alinhamento de fibras relativo à direção da carga aplicada
u_i	Componentes do deslocamento
$\bar{u}_i$	Densidade de energia de deformação
u_p	Quantidade de energia associada a cada partícula
U	Quantidade total de energia das N partículas
U_i	Energia de deformação armazenada no corpo
V	Volume
V_f	Fração volumétrica de fibras na matriz
V_p	Volume ocupado pelas partículas no espaço comum de posição
X_i	Componentes do sistema de forças de volume
x,y,z	Coordenadas do espaço de fase referentes à posição

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, a comunidade científica tem buscado melhorar a combinação de propriedades entre reforços e matrizes metálicas. Segundo Taya e Arsenault[1], os compósitos de matriz metálica têm diversas vantagens que são muito importantes para seu uso como material estrutural, a saber: alta resistência; alto módulo de elasticidade; alta tenacidade; baixa sensibilidade à variação de temperatura e choque térmico (estabilidade dimensional); alta condutividade elétrica e térmica; alta resistência a ambientes de vácuo, em relação aos polímeros[2]; não são atacados por compostos orgânicos como combustíveis e solventes e podem ser conformados e tratados como qualquer outra liga metálica, segundo Mourisco[3].

No entanto, as propriedades mecânicas destes materiais dependem das frações volumétricas, formas, tamanhos e distribuição da fase dispersa, além da microestrutura da matriz.

Nesta área de ciência dos materiais, há uma preocupação constante em representar o comportamento mecânico dos materiais compósitos por meio de modelamentos matemáticos. No entanto, Withers e Clyne[4] concordam que, devido à complexidade das interações entre reforços e matriz, é difícil um modelo que represente globalmente a resistência do compósito. Além disso, algumas questões, como a distribuição de reforços em matrizes, carecem de modelamento. Segundo pesquisadores consultados[5,6,7], um modelamento para a distribuição de reforços seria muito bem vindo, sendo um campo aberto a pesquisas. Assim, este trabalho apresenta uma revisão bibliográfica dos fatores, como microestrutura, forma e distribuição de reforços em matriz metálica, que influem na resistência dos compósitos. O **objetivo desta tese** é encontrar um modelo matemático para o comportamento elástico do material que relacione a distribuição aleatória de partículas em matriz metálica com as tensões térmicas produzidas, no resfriamento, pela diferença nos coeficientes de expansão térmica entre os materiais constituintes do compósito. Trata-se de investigar o comportamento mais provável da interação entre esses reforços dentro da matriz. Para tanto, a mecânica estatística será usada para estabelecer a probabilidade de uma partícula possuir uma dada posição, fazendo corresponder a essa posição uma determinada tensão. É uma abordagem estatística frente ao enfoque determinista. Com este modelo pretende-se calcular as tensões mais prováveis e as tensões médias em função da fração volumétrica do compósito.

O modelo de elementos finitos será usado para se calcular as tensões equivalentes de von Mises em matrizes com distribuição não uniforme de reforços, ou seja, as técnicas de elementos finitos serão adotadas para achar as tensões térmicas geradas na contração do material compósito durante resfriamento no caso da distribuição aleatória de partículas. A finalidade é comparar a distribuição de tensões térmicas obtidas por este método com a distribuição de tensões obtidas com o modelo matemático. Além disto, com o modelo em elementos finitos será calculada a tensão média ponderada com a ajuda de um analisador de imagens.

A fim de que se possa analisar os desvios que o modelo apresenta com a prática, buscar-se-á, por meio de um dilatômetro, o valor médio do coeficiente de expansão térmica, em função da fração volumétrica, para que se possa indiretamente calcular as tensões térmicas que ocorrem no material e comparar os resultados com aqueles obtidos através do modelo matemático.

Para que a validade do modelo possa ser comprovada, trocar-se-á o material da matriz, usando-se o latão e refazendo-se as simulações em elementos finitos para, em seguida, comparar estes dados com os resultados obtidos por meio do modelo matemático.

Acredita-se que este projeto seja de importância para a comunidade científica e, especialmente, para as aplicações deste material na engenharia, particularmente, na indústria automobilística.

I – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

I.1 - Teoria dos compósitos

I.1.1 - Compósitos reforçados por partículas

Estes compósitos podem ser classificados em *compósitos de partículas grandes e compósitos fortalecidos por dispersão*. A distinção entre os dois, além do tamanho das partículas, está no mecanismo usado para reforçar o material.

As partículas grandes têm dimensões de 0,1 até 50 μm e tendem a restringir o movimento da matriz nas vizinhanças de cada partícula, no caso de se aplicar uma carga no material compósito. Assim, a matriz transfere alguma tensão para as partículas, as quais suportam uma fração da carga aplicada[8]. O grau de reforço ou o crescimento da resistência mecânica depende da ligação na interface partícula - matriz. As partículas pequenas, compósitos reforçados por dispersão, têm diâmetros entre 0,01 e 0,1 μm . Neste caso, o mecanismo de resistência é similar ao endurecimento por precipitação, com a vantagem de a resistência não desaparecer com a temperatura. A matriz suporta a maior porção da carga aplicada, enquanto as partículas resistem ao movimento de discordâncias.

Em qualquer caso, o módulo de elasticidade do compósito depende da fração volumétrica e do tamanho do reforço, sendo mais dependente da fração volumétrica, embora esta dependência não seja linear[9]. O módulo de elasticidade depende também da forma do reforço[10]

O módulo de elasticidade pode ser medido por ensaios de tração, por ultra-som (sensível às porosidades e intermetálicos) [3] e pode ser previsto pelas técnicas de Eshelby[4] .

A resistência mecânica, aqui representada pelo limite de escoamento, limite de resistência, alongamento e estrição, pode ser avaliada pelas técnicas de Eshelby e medida por ensaios, embora seja difícil medir o limite de escoamento devido, em parte, à alta taxa de encruamento inicial, à extensa microplasticidade e ao seu comportamento não linear.

Em primeira análise, o aumento de resistência mecânica é, portanto, devido à resistência que as partículas de SiC e a densidade de discordâncias ao redor das partículas impõem à movimentação das discordâncias do material.

I.1.2 - Compósitos de fibras

Neste caso, os reforços podem ser contínuos (fibras longas com diâmetros entre 3 e 200 μm e comprimentos desejados) ou descontínuos. Além disto, temos os “whiskers”, cristais singulares em forma de filamentos metálicos ou não metálicos com diâmetro médio entre 20 e 100 μm e alta resistência.

A transferência de carga da matriz para a fase dispersa, quando o compósito é solicitado externamente, é máxima no caso dos reforços contínuos e decresce com a razão de aspecto do reforço[10,11,12].

I.1.3 - Microestrutura e resistência de compósitos de matriz de alumínio com reforços de SiC

Para Humphreys, Basu e Djazeb[13] o comportamento mecânico de compósitos não depende apenas da liga da matriz e do reforço, mas também da microestrutura, a qual é função, junto com os dois primeiros fatores, da história do processamento termomecânico do material.

As propriedades mecânicas de compósitos reforçados por fibras contínuas são bem entendidas a partir da teoria de resistência das fibras, por meio da fração volumétrica do reforço e suas propriedades, tais como a sua geometria e módulo de elasticidade, além das características da matriz, estudadas por Kelly e McMillan[14]. No entanto, há algumas incertezas, no caso de fibras longas, principalmente, na interface fibra/matriz. Em compósitos reforçados por partículas a situação é menos clara e a microestrutura vem a ser um fator relevante para a resistência destes materiais cujos mecanismos passamos a descrever abaixo.

O processo de endurecimento de compósitos é parecido com a precipitação incoerente, onde as discordâncias, em seu movimento, têm que contornar o precipitado ou, no caso, a partícula, diferentemente da precipitação coerente, onde as discordâncias atravessam esse precipitado[15] (fenômeno dependente do tamanho de partícula[16]). O refinamento microestrutural e a homogeneização da distribuição de partículas

aumentam significativamente a resistência mecânica, na temperatura ambiente, de compósitos que sofreram processo termomecânico. Assim, tratamentos térmicos alteram a densidade de discordâncias e o conteúdo de precipitados. A combinação de trabalho mecânico e tratamento térmico freqüentemente alteram o tamanho de grão e a microestrutura do compósito[13].

O encruamento é outro importante processo de endurecimento. Este, em metais ou ligas, consiste no endurecimento por deformação plástica o que aumenta a densidade de discordâncias e, portanto, a possibilidade destas se bloquearem mutuamente, resistindo ao seu movimento.

No caso de compósitos, este aumento de densidade de discordâncias é devido a diferenças nos coeficientes de expansão térmica, que provocam o encruamento no material, dificultando o escorregamento posterior e aumentando a sua dureza. Além disto, as partículas de SiC e os campos de tensão (de curto e longo alcance) interagem com as discordâncias reduzindo a sua mobilidade[15]. Assim, o encruamento inicial dos compósitos é muito mais alto do que das ligas não reforçadas.

No encruamento há uma faixa longa de tensão, a qual é originada de uma deformação não relaxada na interface partícula - matriz. Esta tensão pode ser avaliada pelo método da inclusão equivalente de Eshelby. Esta tensão elástica alta em torno das partículas favorece a produção de precipitados Mg_2Si próximo dessas partículas, especialmente, nas ligas Al - Mg - Si (ligas da série 6xxx)[13]. Os cálculos, segundo Eshelby, não prevêem uma relaxação plástica que sempre ocorre em regiões de alta energia de deformação. Esta relaxação plástica produz as discordâncias geometricamente necessárias ("punching dislocation": emaranhado de discordâncias que tem a finalidade de aliviar as tensões residuais térmicas - tensões elásticas)[4,17,18,19].

Segundo Humphreys e Miller[19] , um aumento da cinética de envelhecimento tem sido observado para diferentes tipos de reforços de cerâmica, tais como SiC e B_4C e para diversas ligas comerciais, particularmente, as das séries 2xxx, 6xxx e 8xxx.

Vários autores (dentre eles Clyne e Withers[4]) têm atribuído isto à realçada nucleação e crescimento de precipitados na matriz adjacente aos reforços cerâmicos, causados por um grande número de discordâncias geradas pelas diferentes contrações térmicas durante resfriamento.

O endurecimento por solução é outro processo importante em matrizes de Al - 4%Mg, originado da reação entre o Mg e a camada rica em SiO_2 , produzindo o MgO e a liga Al

- Mg - Si que é um endurecedor muito eficiente (Salvo, Legoux, L' Esperance e Suery 1991 apud Humphreys)[13].

O resfriamento rápido também contribui para a resistência devido às diferenças nos coeficientes de expansão térmica e balanço de tensões internas.

Durante o processo termomecânico, os compósitos de matriz metálica reforçados com partículas podem se recrystalizar. Se as partículas forem maiores do que 1µm a recrystalização pode ocorrer por nucleação estimulada por partículas, resultando dimensões de grãos relacionadas com o número de partículas por unidade de volume, geralmente menores que das ligas não reforçadas[19].

I.1.4 - Comportamento mecânico de compósitos com distribuição uniforme e não uniforme de reforços

Nos últimos anos, o reforço de metais com partículas e fibras têm feito crescer a resistência e dureza, mesmo a altas temperaturas homólogas, dos compósitos. As respostas elásticas do material são bem entendidas, porém para as respostas plásticas, as conclusões não são muito claras. De qualquer maneira, quando se compara compósitos metálicos reforçados por partículas ou “whiskers” com ligas monolíticas, percebe-se que os compósitos apresentam um maior módulo de elasticidade e resistência, porém uma menor ductilidade e tenacidade à fratura.

No caso da distribuição uniforme, o que se percebe é que as propriedades mecânicas são fortemente dependentes da microestrutura, da morfologia, das dimensões e da fração volumétrica. Neste caso, a resistência mecânica, particularmente, a fluência dependerá dos parâmetros físicos e geométricos[20], conforme a equação (I.1):

$$\dot{\epsilon} = f(\sigma_A, T, \lambda_i, V_f, L_f/D, d/L, d_0/L, \theta, \sigma_{\text{interface}}) \quad \text{I.1}$$

σ_A = tensão aplicada

T = temperatura

λ_i = parâmetro que representa a microestrutura da matriz

V_f = fração volumétrica da fibra

L_f/D = razão de aspecto da fibra

d/L_f = espaçamento relativo entre fibras

d_0/L_f = grau de superposição de fibras

θ = ângulo de alinhamento de fibras (relativamente à direção da carga aplicada)

$\sigma_{interface}$ = propriedades na interface fibra - matriz.

No entanto, para Taya et al [18] e Brockenbrough et al[21], desvios na uniformidade da distribuição (compósitos com agrupamentos de reforços) podem influenciar marcadamente as características de deformação plástica, podendo, seus efeitos, serem negligenciados na resposta elástica desses materiais. A explicação para essa influência está nas mudanças da distribuição de tensões na matriz, devido aos agrupamentos de reforços.

Na tentativa de estabelecer os fatores que determinam o comportamento mecânico dos compósitos, vários autores[18,20,21,22,23] citam os seguintes mecanismos que influem na resistência desses materiais:

- a) transferência de carga da matriz para o reforço;
- b) acréscimo de discordâncias entre a matriz e o reforço;
- c) compressão do material da matriz ao redor dos reforços;
- d) tensões térmicas por causa das diferenças nos coeficientes de expansão térmica;
- e) ligação entre reforços e matriz;
- f) nucleação, crescimento e coalescência de vazios na interface entre a matriz e os reforços, levando-os ao desligamento, possivelmente, durante o carregamento;
- g) presença de quinas acentuadas nos reforços, as quais atuam como concentradores de tensão e são os principais locais para o desligamento interfacial;
- h) distribuição de reforços na matriz (as variáveis geométricas associadas com a distribuição de partículas desempenham um papel importante nas propriedades mecânicas e térmicas dos compósitos, possivelmente, devido à compressão no material da matriz).

I.1.4.1. Distribuição uniforme

No trabalho de Christman, Needleman e Suresh[24] o conceito de célula unitária é particularmente útil para o estudo dos compósitos com distribuição uniforme de reforços, onde se considera o caso de simetria e a compatibilidade geométrica entre as células vizinhas.

A lei constitutiva considera a ligação perfeita na interface.

A resposta constitutiva é marcadamente afetada pelas dimensões, forma e distribuição da fase dispersa.

Os itens seguintes mostram, para a distribuição uniforme, como a forma do reforço influi na resistência do material compósito.

I.1.4.1.a Partículas esféricas

Segundo Christman, Needleman e Suresh[24], para partículas esféricas, a resistência não cresce tão acentuadamente quanto para whiskers com as mesmas frações volumétricas. A taxa de encruamento é também pouco acentuada em relação às ligas não reforçadas. A máxima tensão na matriz, nas vizinhanças das esferas é diversas vezes menor que as previstas para compósitos reforçados por whiskers. Também faltam grandes concentrações de tensão para causar mais deformação plástica nas vizinhanças dos reforços.

As partículas esféricas parecem ser irrealistas, uma vez que, na prática, não há, normalmente, partículas perfeitamente esféricas. Para se contornar este problema, no estudo deste caso, pode-se substituir as pequenas esferas por cilindros unitários.

I.1.4.1.b Fibras e whiskers

Diferentes geometrias e empacotamentos de fibras produzem diferentes níveis de tensão dentro da matriz do compósito. Fibras quadradas exibem maior resistência que fibras circulares, pois nos cantos vivos a deformação plástica, portanto o encruamento, é acentuada, uma vez que a tensão nessa região é elevada, facilitando os mecanismos de resistência já expostos. No entanto, nesta região pode haver nucleação de vazios, mesmo a deformações baixas, levando a interface à degradação, de tal maneira que o desligamento torna-se inevitável. Algumas explicações levam a crer que a interface seja mais complexa que o que tem sido modelado. Por exemplo, o desligamento é mais frequente em fibras perfeitamente alinhadas do que no caso de superposição. Além disto, tensões residuais podem provocar a quebra do reforço e coalescência de vazios. O nível desta tensão junto à superfície do reforço é sensível à razão de aspecto da fibra. Se a ligação na interface for perfeita, haverá distribuição de tensão ao longo da extensão do reforço, de modo que a tensão cresce próximo ao centro da fibra, chegando a ser 5 vezes

maior[20]. Também nos cantos vivos, devido à concentração de tensões, pode-se ter fluência terciária, levando à falha do material.

As fibras normalmente dão compósitos globalmente mais resistentes, particularmente, na região elástica e durante a fase inicial da plasticidade. Após isto, as curvas tensão-deformação tornam-se praticamente paralelas[24].

I.1.4.2 - Distribuição não uniforme

A formação dos agrupamentos parece ser inerente ao processo de fabricação do compósito e o controle da distribuição de reforços é extremamente difícil de ser obtido. O comportamento mecânico dos compósitos é influenciado pelos agrupamentos, variando de acordo com o grau de aglomeração e geometria do reforço[24,25].

Verifica-se, pelas fig. I.1, I.2 e I.3, as mudanças que ocorrem na triaxialidade e deformações na matriz de compósito devido aos desvios, em relação à distribuição uniforme, das posições dos reforços, agrupando-os primeiramente na vertical, mantendo os espaçamentos horizontais constantes, depois, agrupando-os na horizontal, enquanto que a distância entre reforços na vertical permanece constante. Por causa da condição de deformação plana, uma análise bi-dimensional é suficiente para se estudar as quantidades de campo e a resposta constitutiva desses compósitos[24]. Constata-se uma enorme influência dos agrupamentos nesta resposta. É possível que se a homogeneidade da distribuição decrescer, a resistência do compósito decresça até ser alcançado um nível crítico, abaixo do qual o compósito não apresenta vantagem em relação à liga não reforçada.

I.1.4.2 a - Agrupamento de partículas

Para Christman et al[24], a resistência de compósitos (fig. I.1.a), neste caso, parece ser levemente menor que das ligas com distribuição uniforme (0% de agrupamento). Notar que na região elástica a influência dos agrupamentos é muito pequena. No entanto esta afirmação merece ser verificada. Para frações volumétricas baixas de reforço, isto parece ser verdade, no entanto, para frações volumétricas altas, o módulo de elasticidade varia significativamente com a distribuição. A transição entre frações volumétricas baixas e altas depende da forma do reforço e das propriedades elásticas relativas entre as duas fases[25,26]. O valor do limite de escoamento é devido,

primeiramente, ao endurecimento por deformação. Isto ocorre por causa da extensa transição elasto - plástica causada por uma distribuição não uniforme de partículas. Esta transição não é tão grande em ligas não reforçadas[27].

As figs. I.1.b,c mostram as linhas de isotensão, obtidas pelo método de elementos finitos, para o caso de partículas quadradas dispostas de formas diferentes com o objetivo de se analisar as diferenças que ocorrem na distribuição de tensões para esses dois casos.

Além da razão de aspecto do reforço e fração volumétrica, os agrupamentos influem bastante para a não uniformidade da distribuição de tensões no material. O estado de tensão no agrupamento pode promover a quebra precoce da partícula, o desligamento na interface e formação de vazios na matriz dúctil[28,29], trincas e produção de agrupamentos de precipitados, especialmente, Mg_2Si em ligas de Al - Mg - Si (série 6xxx). Resta saber em que medida isto acontece.

A recristalização, freqüentemente iniciada junto às partículas, está de alguma forma relacionada com os agrupamentos.

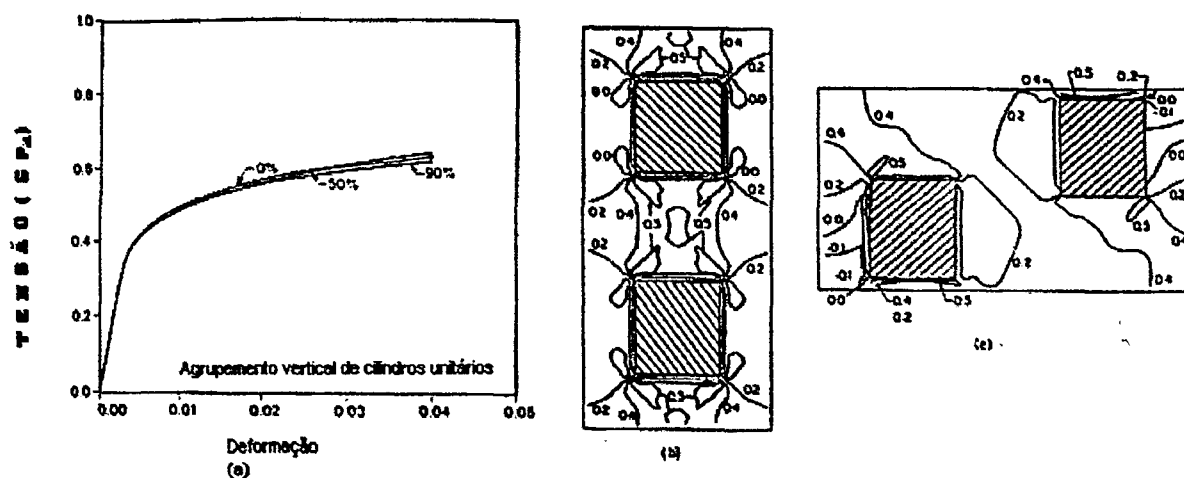


Fig.I.1 - Previsões por elementos finitos dos efeitos de agrupamento de partículas sobre o comportamento mecânico do alumínio AA2124 reforçado com 13,2 % de cilindros unitários de SiC, obtido por Christman et al[24]. Linhas de isotensão são dadas em GPa

I.1. 4.2 b - Agrupamentos horizontais de whiskers

Neste caso agrupa-se os whiskers na direção horizontal e vertical de acordo com a fig.I.2. Assim, agrupa-se os whiskers na direção x, mantendo-se constante a distância

entre os reforços na direção y . Um acréscimo na quantidade de agrupamentos horizontais de whiskers em comparação com a distribuição uniforme, leva, o compósito, a um limite de escoamento e resistência plástica menores, mantendo o módulo de elasticidade praticamente inalterado[24]. Neste caso, resta-nos saber se a afirmação é verdadeira para frações volumétricas baixas e altas.

A fig. I.2.b mostra as linhas de isotensão a fim de compará-las com a fig.I.3.b correspondente ao caso de agrupamento vertical de whiskers.

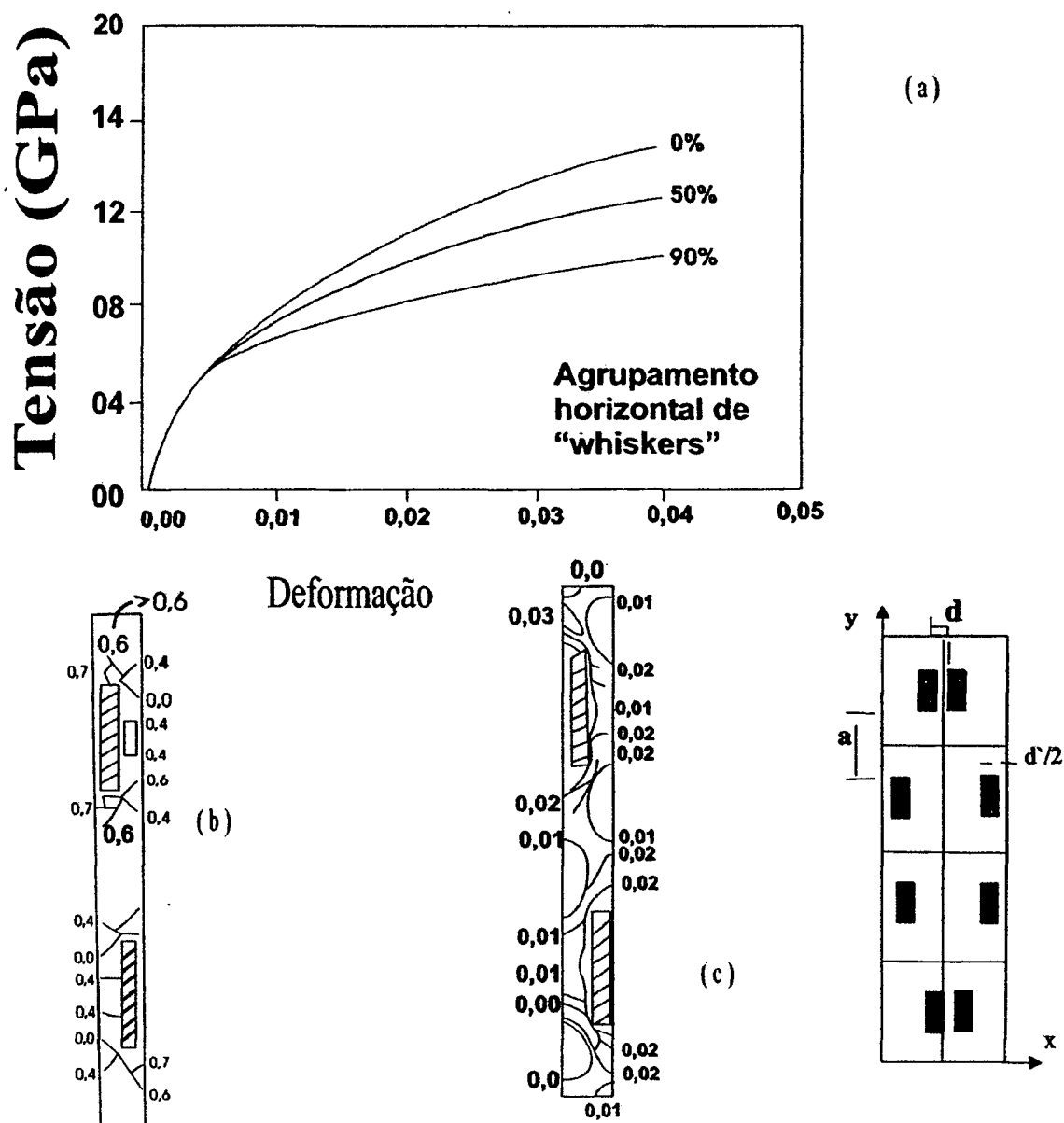


Fig. I.2 - Agrupamento horizontal de "whiskers" e seus efeitos[24]. A fig.b representa tensões (GPa) e a fig.c representa deformações

I.1.4.2 c - Agrupamentos verticais de whiskers

Nos agrupamentos verticais mantém-se constantes as distâncias entre whiskers na direção x , porém na direção y esses reforços são aproximados.

Segundo Christman et al[24], para este tipo, a redução no limite de escoamento e resistência plástica é mais drástica. No entanto, a diferença entre as curvas (para 50% e 90%) é menor (fig.I.3.a). A deformação plástica e os valores de tensão na matriz, incluindo regiões próximas dos cantos vivos, são menores para 90% de agrupamento vertical do que para 90% de agrupamento horizontal.

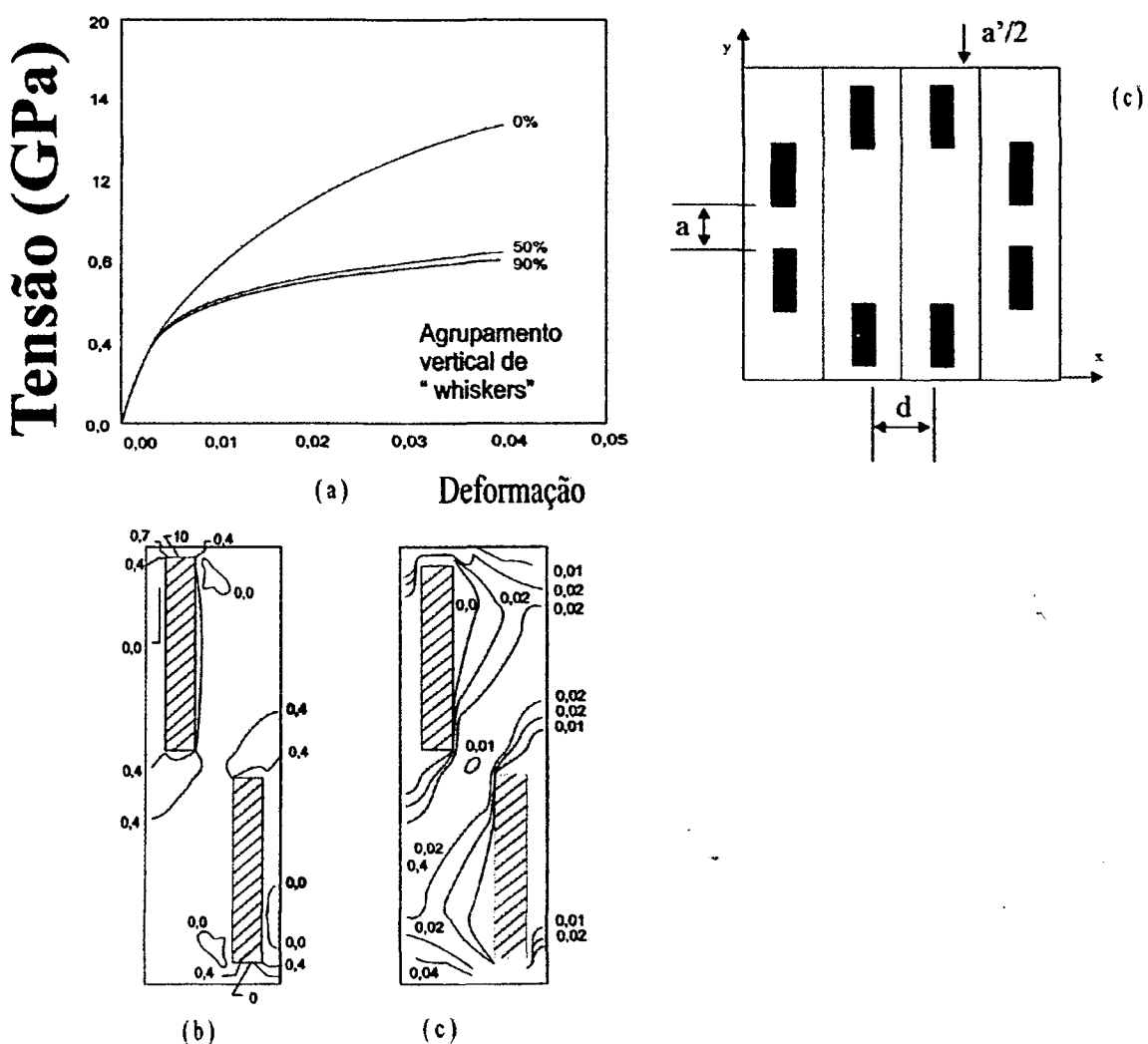


Fig.I.3 - Agrupamento vertical de "whiskers" [24]. A fig.b representa as tensões em GPa e a fig.c representa as deformações

A redução nos valores de isotensão neste caso, quando comparados com a distribuição uniforme, é causada pela superposição de campos de tensão triaxial de tração e de compressão. Esta é a razão para a pequena diferença entre as curvas de 50% de agrupamento e 90%. No caso dos agrupamentos horizontais, esta superposição não é tão acentuada.

I.1.5 – Comentários

A influência dos agrupamentos em compósitos contendo partículas é menor que em compósitos contendo “whiskers”[24].

Os reforços têm a função de redistribuir as tensões e deformações dentro do compósito mudando o efeito da carga da matriz para o reforço. Isto reduz a possibilidade de fluência na matriz, pois uma parte da carga é dirigida para os reforços[20]. As diferenças na resistência à fluência são funções de flutuações no conteúdo local de reforços.

Defeitos e cavidades, produzidos durante processo, reduzem a resistência interfacial, como acontece na precipitação interfacial ou segregação dos constituintes na interface (fenômenos acentuados nos agrupamentos)[29].

Porosidades têm sido atribuídas aos agrupamentos durante o processo de fabricação, o qual tem relação com as dimensões e frações volumétricas.

Analisando o comportamento de compósitos em deformação plástica, na temperatura ambiente, pode-se afirmar, que agrupamentos verticais têm influência maior que agrupamentos horizontais e deram uma resistência menor que o material com distribuição uniforme.

Há uma série de modelos que relacionam a distribuição de reforços com a resistência do material compósito, porém pouco se conhece como caracterizar essas propriedades geométricas em função das propriedades físicas do material compósito. Há na literatura modelos pré-existentes, ou seja, com distribuição não uniforme, mas já definida, em que se relaciona essa distribuição com a resistência do compósito. No entanto, desconhece-se que haja um modelo estatístico, o qual será apresentado neste trabalho.

I.2 - Base teórica para a determinação dos mecanismos de resistência dos materiais compósitos por meio de elementos finitos

Os mecanismos de falhas que influem na resistência dos compósitos[29] são:

- 1) Falha dúctil por nucleação, crescimento e coalescência de vazios na matriz;
- 2) Falha frágil do reforço;
- 3) Desligamento e fratura ao longo da interface entre a matriz e o reforço;

Os seguintes fatores representam o grau pelo qual os mecanismos de falha influem na deformação global e resistência à fratura[29]:

- 1) Dimensões, forma, concentração e distribuição espacial de reforços;
- 2) Concentração de impurezas presentes nas fases constituintes dos compósitos;
- 3) Processo e procedimentos de tratamentos térmicos, incluindo alguns tratamentos de envelhecimento, nos quais os compósitos estão sujeitos a cargas mecânicas.
- 4) O ambiente térmico e químico no qual as propriedades mecânicas são avaliadas.

I.3 - Modelo numérico

Dois tipos de forças externas podem atuar sobre um corpo[30]:

- Forças de superfície: São as forças distribuídas sobre a superfície do corpo, tal como a pressão de um corpo sobre o outro. As componentes das forças de superfície nas direções x, y e z , serão denotadas por ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z , respectivamente.
- Forças de massa ou de volume ou de corpo : São as forças distribuídas ao longo do volume do corpo, tais como as forças magnéticas e gravitacionais ou de inércia (caso o corpo esteja em movimento). As componentes das forças de volume serão designadas por X_x, X_y, X_z , segundo os eixos coordenados x, y, z . Assim, o peso do corpo é uma força de volume.

Apliquemos ao compósito um sistema de forças de superfície $\{ T_i \}$ e de volume X . Variando-se os deslocamentos de u_i para $u_i + \delta u_i$, verificamos que os trabalhos realizados pelas forças de superfície e de volume são :

$$\delta w_{\phi} = \int_s \{T_i\}^T \{\delta u_i\} ds_s \quad \text{I.2}$$

$$\delta w_{Xi} = \int_V \{X_i\}^T \{\delta u_i\} dv \quad \text{I.3}$$

Neste caso,

$$\{\delta u_i\} = \{\delta u_x, \delta u_y, \delta u_z\}^T \quad \text{I.4}$$

$$\{T_i\} = \{\phi_x, \phi_y, \phi_z\}^T \quad \text{I.5}$$

$$\{X_i\} = \{X_x, X_y, X_z\}^T \quad \text{I.6}$$

São os componentes, segundo o sistema cartesiano de referência, da variação dos deslocamentos, das forças de superfície e de corpo, respectivamente.

Neste caso, o incremento de trabalho será a soma :

$$\delta w = \delta w_{\phi} + \delta w_{Xi} = \int_s \{T_i\}^T \{\delta u_i\} ds_s + \int_V \{X_i\}^T \{\delta u_i\} dv \quad \text{I.7}$$

Por outro lado, consideremos a fig. I.4, então temos:

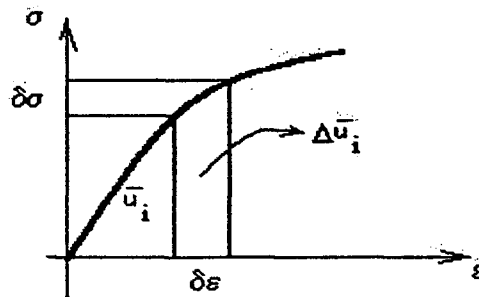


Fig.I.4 – Gráfico de tensão - deformação

$\bar{u}_i$ - área abaixo da curva no gráfico $\sigma - \epsilon$ representa a densidade de energia de deformação.

A energia de deformação U_i armazenada no corpo é dada por:

$$U_i = \int_V \bar{u}_i dV \quad \text{I.8}$$

Variando-se os deslocamentos de u_i para $u_i + \delta u_i$, ocorrerão incrementos correspondentes nas deformações ϵ para $\epsilon + \delta\epsilon$ e γ para $\gamma + \delta\gamma$.

Neste caso, para achar a variação $\delta\bar{u}_i$ da densidade de energia de deformação, pode-se fazer:

$$\delta\bar{u}_i = \sigma_{xx} \delta\epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta\epsilon_{yy} + \sigma_{zz} \delta\epsilon_{zz} + \tau_{xy} \delta\gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta\gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta\gamma_{xz} = \{\sigma_{ij}\}^T \{\delta\epsilon_{ij}\} \quad \text{I.9}$$

$$\{\sigma_{ij}\} = \{\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{xz}\}^T \quad \text{I.10}$$

$$\{\delta\epsilon_{ij}\} = \{\delta\epsilon_{xx} \ \delta\epsilon_{yy} \ \delta\epsilon_{zz} \ \delta\gamma_{xy} \ \delta\gamma_{yz} \ \delta\gamma_{xz}\}^T \quad \text{I.11}$$

A variação na energia de deformação é

$$\delta U_i = \int_V \delta\bar{u}_i dV = \int_V \{\sigma_{ij}\}^T \{\delta\epsilon_{ij}\} dV \quad \text{I.12}$$

Assim, pode-se provar[30] :

$$\int_S \{T_i\}^T \{\delta u_i\} dS_s + \int_V \{X_i\}^T \{\delta u_i\} dV = \int_V \{\sigma_{ij}\}^T \{\delta\epsilon_{ij}\} dV \quad \text{I.13}$$

A equação I.13 representa a igualdade entre os trabalhos virtuais interno e externo e qualquer um dos lados da equação equivale às equações de equilíbrio do elemento compósito.

Assim, usando a formulação Lagrangeana e considerando as forças de corpo ausentes[26], o princípio de trabalho virtual será:

$$\int_V \{\sigma_{ij}\}^T \{\delta\epsilon_{ij}\} dV = \int_S \{T_i\}^T \{\delta u_i\} dS_s \quad \text{I. 14}$$

σ_{ij} - Componentes do tensor tensão

ϵ_{ij} - Componentes do tensor deformação

T_i - Componentes do sistema de forças superficiais

u_i - Componentes de deslocamento

V e S_s - Volume e superfície do corpo

Um exemplo de tratamento em elementos finitos aplicado em compósito de matriz metálica reforçada por fibras foi dado por Brockenbrough et al[21]. Este exemplo é interessante, pois mostra um método para tratar problemas de distribuição aleatória de fibras em base metálica, embora esta tese se refira a problemas de distribuição de partículas. Brockenbrough et al[21] recomenda que se use o sistema cartesiano, considerando-o tri-dimensional, onde o eixo das fibras está ao longo do eixo z . Na configuração não deformada, a malha forma um quadrado $a \times a$ num plano transversal, conforme mostra a figura I.5.

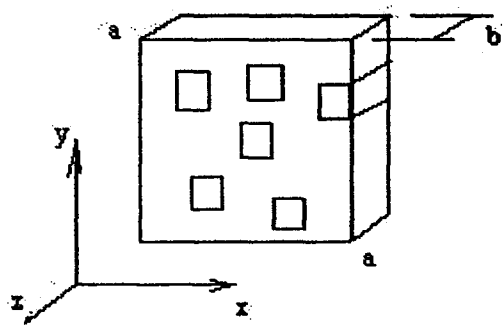


Fig.I.5 - Representando uma célula unitária

Agora podemos escrever as condições de contorno:

$$\begin{aligned}
 \dot{u}_x &= 0 \quad , \quad \dot{T}_y = \dot{T}_z = 0 \quad \text{para} \quad x = 0 \\
 \dot{u}_y &= 0 \quad , \quad \dot{T}_x = \dot{T}_z = 0 \quad \text{para} \quad y = 0 \\
 \dot{u}_z &= 0 \quad , \quad \dot{T}_x = \dot{T}_y = 0 \quad \text{para} \quad z = 0
 \end{aligned}
 \tag{I.15}$$

As condições nas outras faces são previstas desde que a forma reta do paralelepípedo da célula unitária permaneça reta durante a deformação.

$$\begin{aligned}
\dot{u}_x &= \dot{\alpha}(t) \quad , \quad \dot{T}_y = \dot{T}_z = 0 \quad \text{para} \quad x = a \\
\dot{u}_y &= \dot{\beta}(t) \quad , \quad \dot{T}_x = \dot{T}_z = 0 \quad \text{para} \quad y = a \\
\dot{u}_z &= \dot{\gamma}(t) \quad , \quad \dot{T}_x = \dot{T}_y = 0 \quad \text{para} \quad z = b
\end{aligned}
\tag{I.16}$$

Onde

$$\dot{\alpha}(t), \dot{\beta}(t) \text{ e } \dot{\gamma}(t)$$

São valores que foram determinados a partir das seguintes condições nas faces $x = a$, $y = a$ e $z = b$.

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}(t) &= \int_0^b \int_0^a \dot{T}_x dy dz = 0 \quad \text{para} \quad x = a \\
\dot{\beta}(t) &= \frac{1}{ab} \int_0^b \int_0^a \dot{T}_y dx dz = \dot{\sigma} \quad \text{para} \quad y = a \\
\dot{\gamma}(t) &= \int_0^a \int_0^a \dot{T}_z dx dy = 0 \quad \text{para} \quad z = b
\end{aligned}
\tag{I.17}$$

Para $\dot{\sigma}$, sendo a razão de tensão aplicada na face $y = a$, submetida à força variável $\dot{T}_y$

Assume-se que na interface fibra - matriz a ligação é perfeita

O sistema cartesiano pode ser trocado por um sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , sendo as quantidades de campo independentes de θ , como o fez Shen et al. [26].

Por outro lado, considerando a teoria da elasticidade (Timoshenko / Goodier[31]), a relação constitutiva para cada fase pode ser dada pela expressão abaixo:

$$\sigma_{ij} = 2G_{(1)} \varepsilon_{ij} + \lambda_{(1)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \tag{I. 18}$$

Para

$$2G = \frac{E}{1 + \nu} \quad \text{I.19}$$

Onde

$$\lambda = \frac{2G \nu}{1 - 2\nu} \quad \text{I. 20}$$

Supondo que a matriz e o reforço sejam materiais isotrópicos e elásticos lineares, sendo:

E - Módulo de Young

ν - Coeficiente de Poisson

δ_{ij} - Delta de Kronecker

G - Módulo de elasticidade transversal

λ - Constante de Lamé

(l) = M,R denotando matriz ou reforço, respectivamente.

O material compósito é considerado como um sólido elasto-viscoplástico[32], de endurecimento isotrópico, onde, para o caso geral, a deformação total pode ser decomposta em componentes elástico, plástico e térmico, por meio da equação[33, 34, 35]:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^E + \epsilon_{ij}^P + \epsilon_{ij}^T \quad \text{I.21}$$

Para tratar os problemas de deformação em compósitos de Al/SiC, que são sólidos elasto-plásticos, pode-se considerar as equações constitutivas de Prandtl – Reuss. Neste caso, o incremento de deformação total ($d\epsilon_{ij}$) é obtido somando-se o incremento de deformação elástica ($d\epsilon_{ij}^E$) com o incremento de deformação plástica ($d\epsilon_{ij}^P$):

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^E + d\epsilon_{ij}^P \quad \text{I.22}$$

$$d\varepsilon_{ij}^E = \frac{1+\nu}{E} d\sigma'_{ij} + \frac{1-2\nu}{E} \frac{d\sigma_{kk}}{3} \delta_{ij} \quad \text{I.23}$$

$d\sigma'_{ij}$ é chamado incremento do tensor desviador de tensão.

A regra que dá a plasticidade pode ser considerada como segue abaixo[35]:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}_e} \sigma'_{ij} \quad \text{I.24}$$

$$\bar{\sigma}_e = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}} \quad \text{I.25}$$

Onde $\bar{\sigma}_e$ é a tensão efetiva

$$d\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p} \quad \text{I.26}$$

Onde $d\bar{\varepsilon}$ é o incremento de deformação plástica efetiva

A curva *tensão efetiva – deformação plástica efetiva* é determinada experimentalmente[36]

A razão de deformação plástica efetiva, segundo Shen et al [37], pode ser dada por:

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \dot{\varepsilon}_0 \left(\frac{\bar{\sigma}_e}{g(\bar{\varepsilon})} \right)^{1/m} \quad \text{I.27}$$

$$g(\bar{\varepsilon}) = \sigma_0 \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_0} + 1 \right)^N. \quad 1.28$$

$$\text{Onde } \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E} \quad 1.29$$

Os autores acima mencionados usaram os seguintes dados ao estudarem compósitos com matriz de liga Al-3.5wt%Cu reforçada com 20 vol.% de partículas de SiC.

Sendo $\sigma_0 = 175$ MPa (limite de escoamento usado para o material da matriz), $\dot{\varepsilon}_0 = 0,002s^{-1}$ (razão de deformação de referência) , $\varepsilon_0 = 0,004$ (deformação de referência), $m = 0,004$ (expoente que representa a razão de endurecimento por deformação) e $N = 0,2$ é o expoente que representa o endurecimento por deformação em função da temperatura), $E_M = 71,8$ GPa (módulo de elasticidade da matriz), $\nu_M = 0,33$ (coeficiente de Poisson do material da matriz), $E_R = 450$ GPa (módulo de elasticidade do reforço), $\nu_R = 0,17$ (coeficiente de Poisson do material do reforço) [36,37].

A função acima representa a tensão uniaxial em função da resposta de deformação plástica para uma razão de deformação dada.

Para deformações térmicas em cada fase, podemos escrever:

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha_m \Delta T \delta_{ij} \quad 1.30$$

Concluindo a revisão bibliográfica, pode-se afirmar que há basicamente três métodos para se modelar matematicamente o comportamento mecânico de compósitos: o método que considera a mecânica das discordâncias, o método por elementos finitos e o método de Eshelby.

O tratamento matemático que usa o método de elementos finitos sempre foi o mais usado para modelar o comportamento mecânico dos compósitos de matriz metálica e continua sendo uma ferramenta extremamente potente para essa finalidade como se pode comprovar por meio dos trabalhos de Wilkins et al[38] ou por meio de Teixeira et

al[39] ou então por Geni et al[40]. Este método, para o cálculo das tensões, é mais eficiente quando se trata de partículas grandes, embora possa ser usado para quaisquer tamanhos de partículas.

O método que considera a mecânica das discordâncias é mais eficiente quando se trata de partículas pequenas, pois considera que as inclusões são parecidas com precipitados incoerentes.

Há ainda o método de Eshelby, para a determinação dessas tensões, preferido por vários autores como Clyne et al [4] ou Kato et al [41], que considera as inclusões real e equivalente cujas definições encontram-se no Apêndice A. .

Há também técnicas experimentais que determinam as tensões por meio de difração de raio X e por meio de nanoindentação, como mostra o trabalho de Cheng et al [42].

II - SIMULAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS USANDO O PROGRAMA ANSYS-VERSÃO 5.5 PARA PARTÍCULAS ISOLADAS E DISTRIBUIÇÃO UNIFORME DE PARTÍCULAS, CONSIDERANDO REGIME ELÁSTICO

II.1 – Introdução

O compósito estudado é constituído de matriz de liga de Al - Cu (2024) reforçada com partículas de carboneto de silício. O objetivo desta simulação foi determinar os efeitos que a diferença nos coeficientes de expansão térmica entre os constituintes provoca na resistência do material, uma vez que esta diferença produz uma maior densidade de discordâncias ao redor das partículas.

As propriedades físicas da liga de alumínio[4], usadas na simulação, são:

- 1) Módulo de Young: 73 GPa
- 2) Massa específica: 2800 Kg/m³
- 3) Coeficiente de dilatação térmica: $23.6 \cdot 10^{-6} \text{ C}^{-1}$
- 4) Coeficiente de Poisson: 0,33
- 5) Módulo de elasticidade transversal: 50 GPa

As propriedades físicas do carboneto de silício[4] estão listadas abaixo:

- 1) Módulo de Young: 450GPa
- 2) Massa específica: 3200 Kg/m³
- 3) Coeficiente de dilatação térmica: $4 \cdot 10^{-6} \text{ C}^{-1}$
- 4) Coeficiente de Poisson: 0,17
- 5) Módulo de elasticidade transversal: 190 GPa

Espera-se que o compósito possua uma combinação dessas propriedades, para ter um bom desempenho enquanto material de engenharia. A razão deste doutorado é buscar a compreensão desse desempenho, sendo a simulação por elementos finitos uma das estratégias para tanto. Para estas simulações, as propriedades físicas dos materiais foram consideradas sem levar em conta as suas variações devido às mudanças de temperatura. Para todos os modelos, usou-se os seguintes parâmetros de temperatura e dimensões de partícula:

- 1) Temperatura inicial de referência : 600°C

- 2) Temperatura final : 20°C
- 3) Dimensão lateral da partícula : $L = 0,20 \cdot 10^{-6} \text{ m}$

Usou-se o método de elementos finitos dentro do contexto de modelo de célula unitária bi-dimensional cujas condições de simetria e contorno (II.1) são descritas abaixo:

$$\begin{aligned}
 T_x = T_y = 0 ; \quad u_x = 0 ; \quad & \text{para } x = 0 \\
 u_y = 0 ; \quad & \text{para } y = 0 \\
 u_x = -DL \quad & \text{para } x = 2C + L \\
 u_y = -DL \quad & \text{para } y = 2C + L
 \end{aligned}
 \tag{II.1}$$

onde $DL = (2C+L) \cdot 23,6 \cdot 10^{-6} \cdot 580$ (contração da matriz)

Em todos os modelos optou-se por cargas térmicas, para condições de contorno e características do material descritas acima. Conseguiu-se um bom refinamento de malhas para esta etapa de análise em regime elástico.

II.2 - Partículas isoladas

Considerou-se o modelo de uma partícula quadrada e outro de partícula circular na base de alumínio de dimensões tão grandes que podem ser pensadas como infinitas, ou seja, a fração volumétrica é extremamente pequena (fig. II.1 e II.2). Neste modelo a dimensão lateral é $C = 10.L$ e a intenção é verificar a influência da forma da partícula na distribuição de tensão, ou seja, verificar quão maior é a concentração de tensão na quina da partícula quadrada.

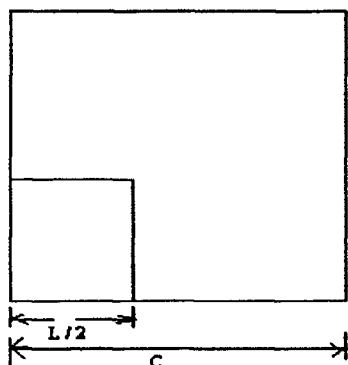


Fig.II.1 - Mostra o modelo de partícula quadrada em matriz de alumínio de dimensões infinitas

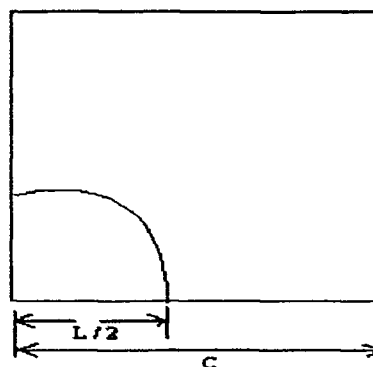


Fig.II.2 - Mostra o modelo de partícula circular em matriz de alumínio de dimensões infinitas

II.3 - Partículas em arranjos simétricos

II.3.1 - Arranjo pentagonal

Neste arranjo as partículas estão uniformemente distribuídas, nas configurações mostradas na figura II.3 abaixo, onde se vê o caso de partículas quadradas e o caso de partículas circulares. O objetivo desta configuração é verificar a influência na distribuição de tensões ao redor de uma partícula devido à presença das outras e qual a diferença nos campos de tensão quando são trocadas as formas dessas partículas.

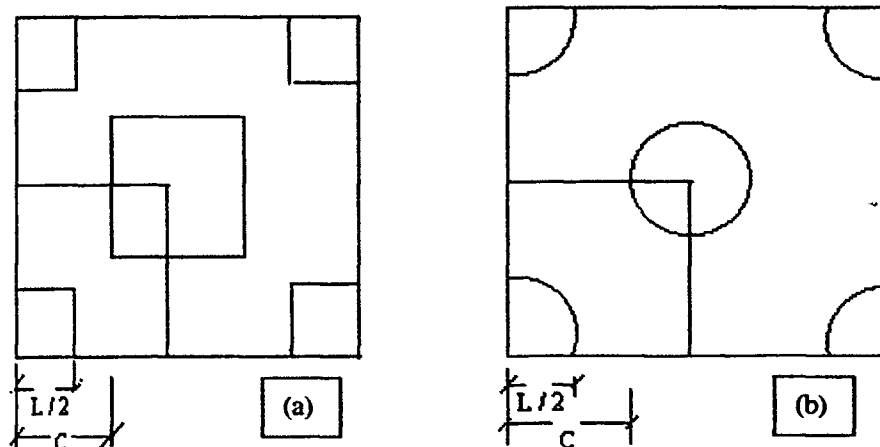


Fig.II.3 - Arranjo pentagonal - (a) partículas quadradas; (b) partículas circulares

II.3.2 - Arranjo quadrado

Este é o caso de distribuição uniforme de partículas quadradas em um modelo e partículas circulares no outro (Fig. II.4). O objetivo é saber se, trocando a configuração, haverá diferenças na distribuição de tensões e se a forma da partícula para este tipo de disposição é um fator importante para a determinação dessas tensões.

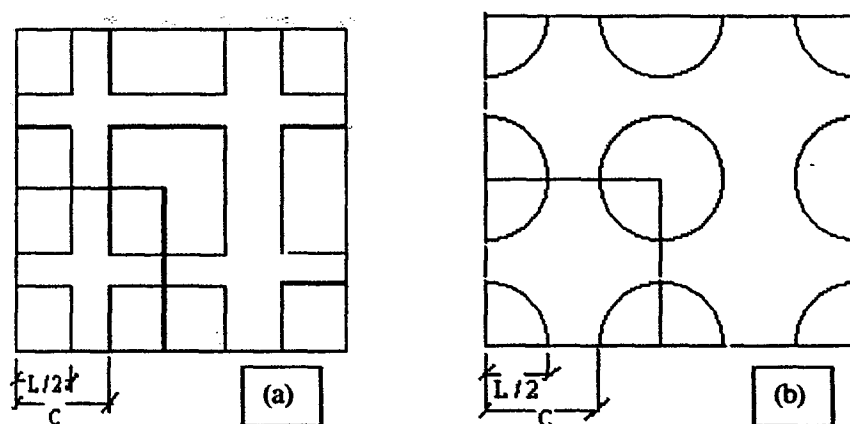


Fig.II.4 - Arranjo quadrado - (a) partículas quadradas; (b) partículas circulares

Como o objetivo desses arranjos é testar a influência de uma partícula sobre a sua vizinha mais próxima, foram feitas simulações para as duas configurações, nas quais as partículas sofreram sucessivas aproximações, variando C de acordo com os seguintes valores: $10,0L$; $5,0L$; $4,0L$; $3,5L$; $3,0L$; $2,5L$; $2,0L$; $1,5L$. Como referência, foram usados somente os efeitos da variação da temperatura e as condições de simetria e de contorno referiram-se às restrições de deslocamento.

As dimensões do modelo são dadas por $C = a_n \cdot L$ para $a_n = 10,0$; $5,0$; $4,0$; $3,5$; $3,0$; $2,5$; $2,0$; $1,5$

Para o presente estudo sobre a influência da distância entre partículas de carboneto de silício, uniformemente distribuídas em matriz de alumínio, optou-se por calcular e plotar as tensões equivalentes de von Mises. Deve-se notar que a fração volumétrica aumenta na medida em que diminui o valor de a_n .

II.4 – Discussão dos resultados

II.4.1 - Partículas isoladas

As figuras II.5 e II.6 mostram as curvas de isotensão para os casos de partículas quadradas e circulares. As tensões determinadas pelo programa foram as tensões equivalentes de von Mises.

Pode-se notar que no caso de partículas quadradas, devido às quinas, há alta concentração de tensões ao redor destas. Em relação às partículas circulares, nota-se que as tensões nestes casos são menores que àquelas das partículas quadradas, não se esquecendo que é muito difícil encontrarem-se partículas perfeitamente circulares. Assim, as partículas quadradas são mais reais, por apresentarem cantos vivos. Observa-se que a tensão máxima ocorre bem próximo da quina da partícula quadrada e também muito próximo do contorno da partícula circular, o que, neste caso, concordaria com as observações de Shen et al [37] e Zhirui et al [43].

As curvas de isotensão das figuras II.5 e II.6 mostram pontos onde os níveis de tensão superam muito o limite de escoamento do alumínio (175 Mpa), o que levaria o material ao colapso, se não fosse o fato de a matriz permitir, por ser dúctil, grandes deformações plásticas, surgindo altas densidades de discordâncias ao redor das partículas e, assim, aparecendo os mecanismos de resistência do material.

Este mecanismo surge quando o material, que está sob grande carga, tende a deformar-se plasticamente, movimentando discordâncias, as quais, encontrando as altas densidades de discordâncias ao redor das partículas, apresentam grandes chances de se anularem mutuamente, dificultando, assim, a deformação do material. Além disso, para ligas de alumínio com 4% Mg, aparecem ao redor das partículas, precipitados Mg_2Si , aumentando a possibilidade de haver endurecimento por precipitação, além de contar com a produção, devido a altas energias de deformação, de discordâncias geometricamente necessárias.

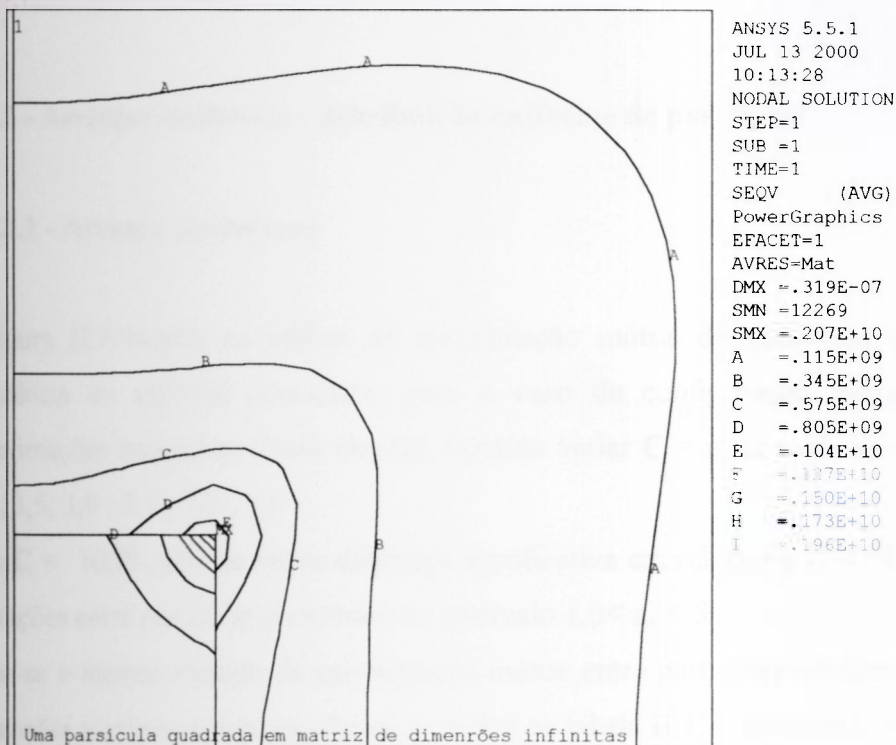


Fig. II.5 - Tensões equivalentes de von Mises , considerando a partícula quadrada em matriz de dimensões infinitas. ($\Delta t = 580^{\circ}\text{C}$)

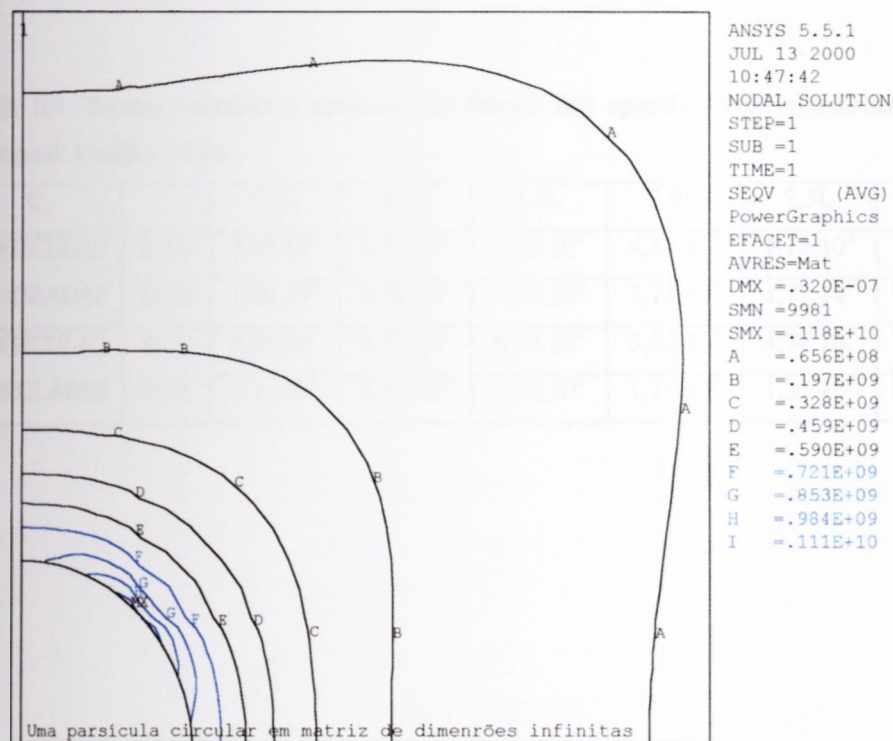


Fig. II.6 - Tensões equivalentes de von Mises , considerando a partícula circular em matriz de dimensões infinitas. ($\Delta t = 580^{\circ}\text{C}$)

II.4.2 - Arranjos simétricos - distribuição uniforme de partículas

II.4.2.1 - Arranjo pentagonal

A figura II.7 mostra os efeitos da aproximação mútua de partículas quadradas na resistência do material compósito, para o caso de configuração pentagonal. Estas aproximações sucessivas foram obtidas, fazendo variar $C = a_n L$, onde $a_n = 10,0 ; 5,0 ; 4,0 ; 3,5 ; 3,0 ; 2,5 ; 2,0 ; 1,5$

Para $C = 10,0L$, não se notou diferença significativa em relação a $C = 5L$. As maiores interações entre partículas ocorreram no intervalo $1,0 < a_n < 5,0$.

Usou-se o mesmo método de aproximação mútua entre partículas circulares e os dados de tensões máximas e mínimas foram reunidos na tabela II.1. e construído o gráfico para comparação.

Tabela II.1. Tensões máximas e mínimas em função das aproximações interpartículas no arranjo pentagonal. Medidas em Pa

C		5,0L	4,0L	3,5L	3,0L	2,5L	2,0L	1,5L
PARTÍCULAS	SMN	$5,90.10^7$	$5,57.10^7$	$5,29.10^7$	$4,86.10^7$	$4,18.10^7$	$2,97.10^7$	$0,557.10^7$
QUADRADAS	SMX	$1,76.10^9$	$1,74.10^9$	$1,74.10^9$	$1,75.10^9$	$1,77.10^9$	$1,83.10^9$	$2,22.10^9$
PARTÍCULAS	SMN	$6,05.10^7$	$5,79.10^7$	$5,58.10^7$	$5,26.10^7$	$4,74.10^7$	$3,82.10^7$	$1,99.10^7$
CIRCULARES	SMX	$1,16.10^9$	$1,17.10^9$	$1,18.10^9$	$1,19.10^9$	$1,21.10^9$	$1,23.10^9$	$1,29.10^9$

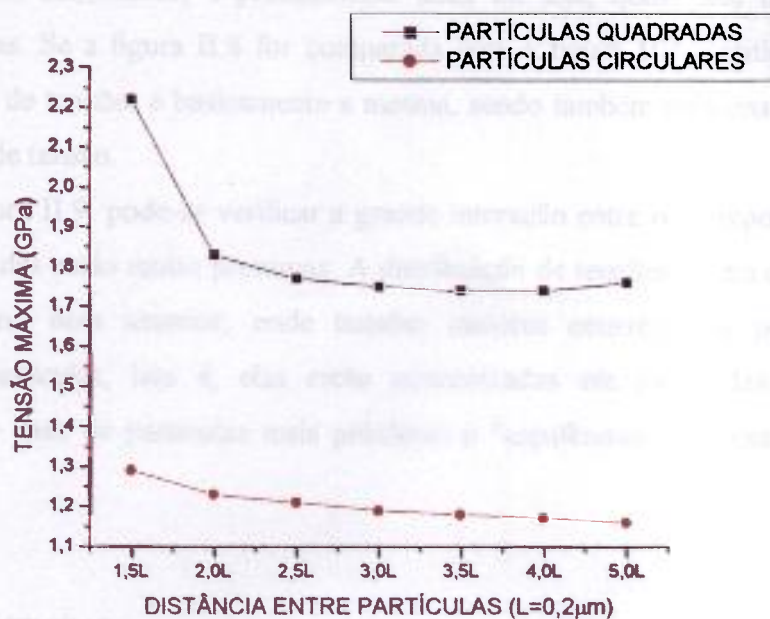


Fig.II.7 - Tensões máximas em função da distância entre partículas para o arranjo pentagonal de partículas quadradas e partículas circulares

O gráfico da figura II.7 mostra que as formas das partículas são determinantes para a diferença entre os níveis de tensões térmicas. As partículas quadradas induzem um valor muito maior de tensão máxima que as partículas circulares. Esta tensão chega a ser aproximadamente 70% maior para partículas quadradas do que para partículas circulares, quando a distância entre as partículas de mesma forma é de 1,5.L. Quando as tensões mínimas são analisadas, o quadro muda. As tensões mínimas são maiores para as partículas circulares do que para as partículas quadradas. No entanto, estas tensões estão bem abaixo do limite de escoamento do material no ponto em que elas ocorrem, em qualquer um dos casos.

Olhando para os gráficos conclui-se que a forma da partícula é mais importante que a distância entre elas, nas condições de distribuição uniforme, pois para as várias aproximações discriminadas na tabela II.1., as diferenças maiores entre as tensões máximas não chega a 28% para partículas quadradas e 12% para as partículas circulares. Estes dados estão de acordo com as previsões de vários autores[43,44,45]

As figuras II.8 e II.9 indicam os campos de tensão nos casos em que as dimensões do modelo são 5L e 1,5L, ou seja, nos casos em que as partículas foram bastante aproximadas. Verifica-se, desta maneira, que a distribuição de tensões modifica-se

muito. No primeiro caso, para 5L, a interferência entre os campos de tensão gerados por cada partícula individualmente, é praticamente nula, ou seja, quase não há interação entre as partículas. Se a figura II.8 for comparada com a figura II.5, verifica-se que a forma do campo de tensões é basicamente a mesma, sendo também pequena a diferença entre os valores de tensão.

Analisando a figura II.9, pode-se verificar a grande interação entre os campos de tensão quando as partículas estão muito próximas. A distribuição de tensões é bem diferente do caso analisado no item anterior, onde tensões maiores ocorrem em pontos mais próximos das partículas, isto é, elas estão concentradas em torno das partículas, enquanto que no caso de partículas mais próximas o "espalhamento" dessas tensões é maior.

PARTÍCULAS QUADRADAS

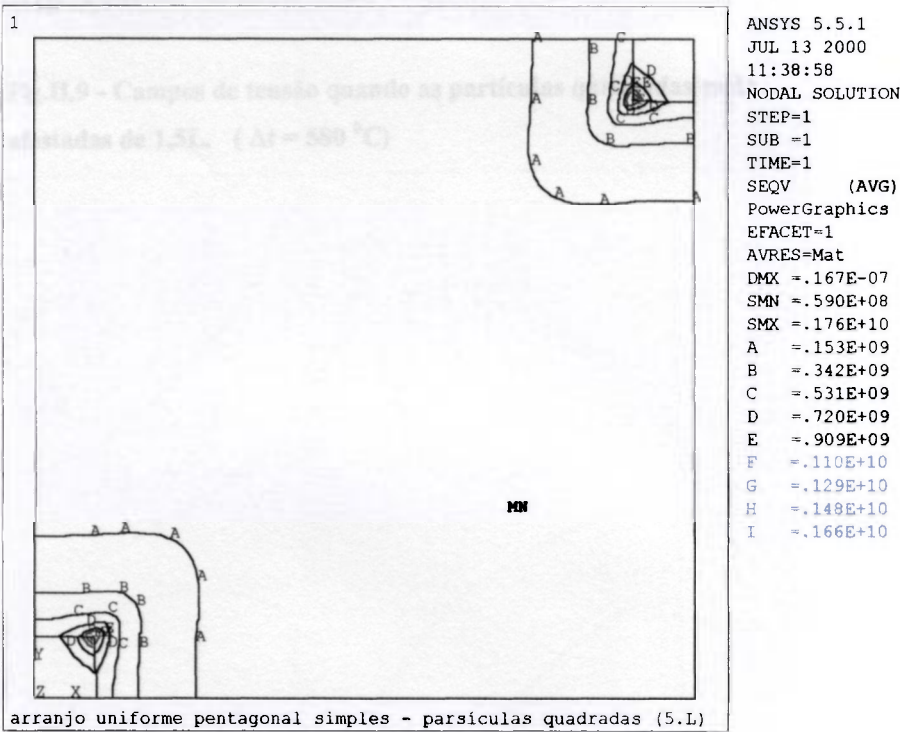


Fig.II.8 - Campos de tensão quando as partículas quadradas estão afastadas de 5L. ($\Delta t = 580\text{ }^{\circ}\text{C}$)

PARTÍCULAS CIRCULARES

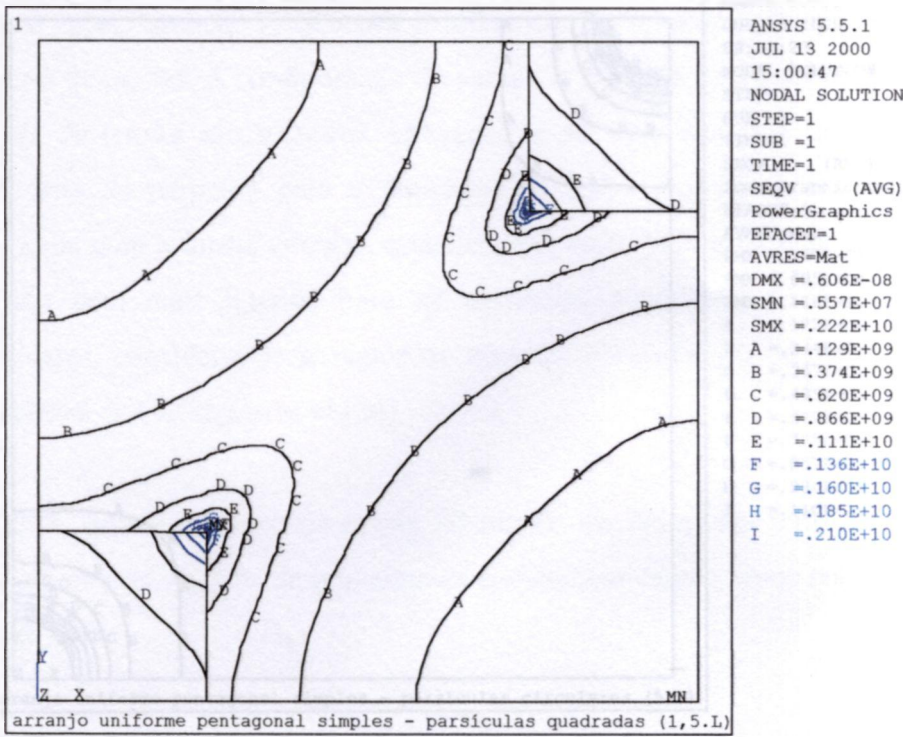


Fig.II.9 - Campos de tensão quando as partículas quadradas estão afastadas de 1,5L. ($\Delta t = 580\text{ }^{\circ}\text{C}$)

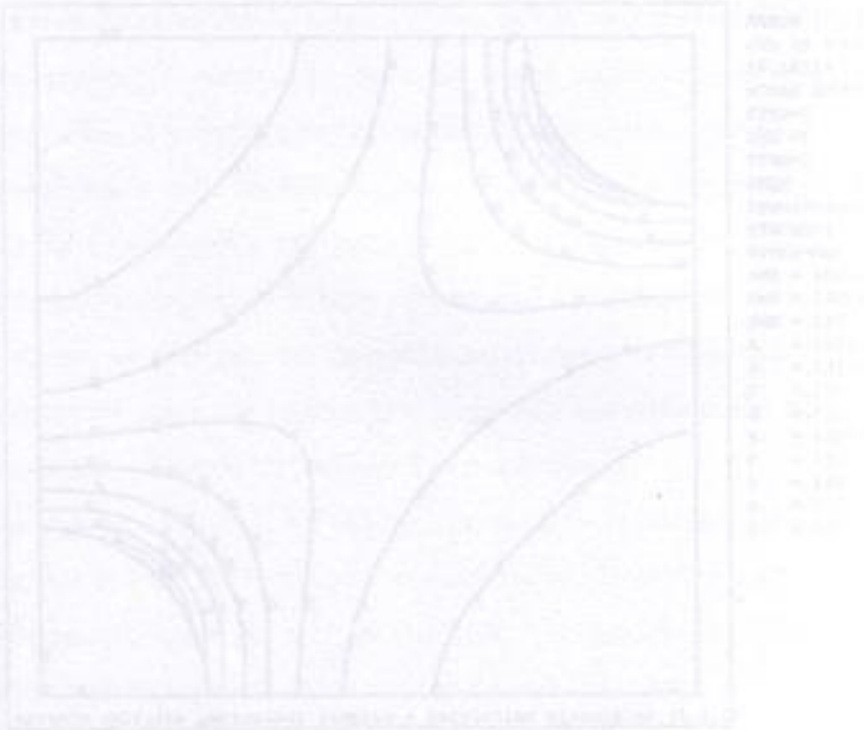


Fig.II.11 - Campos de tensão quando as partículas circulares estão afastadas de 1,5L. ($\Delta t = 580\text{ }^{\circ}\text{C}$)

PARTÍCULAS CIRCULARES

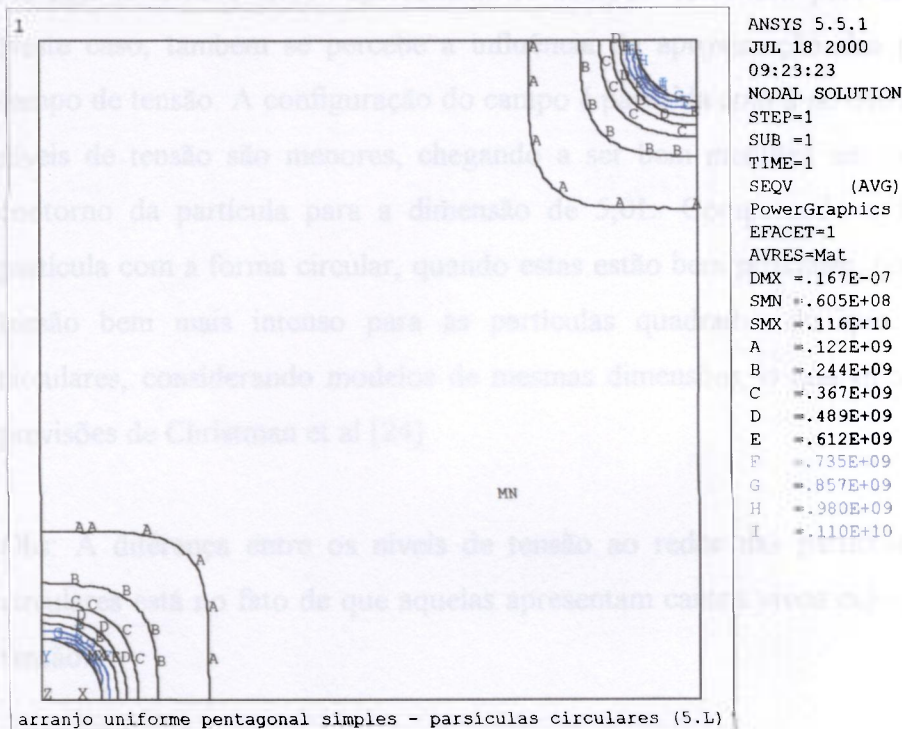


Fig.II.10 - Campos de tensão quando as partículas circulares estão afastadas de 5,0L. ($\Delta t = 580^\circ\text{C}$)

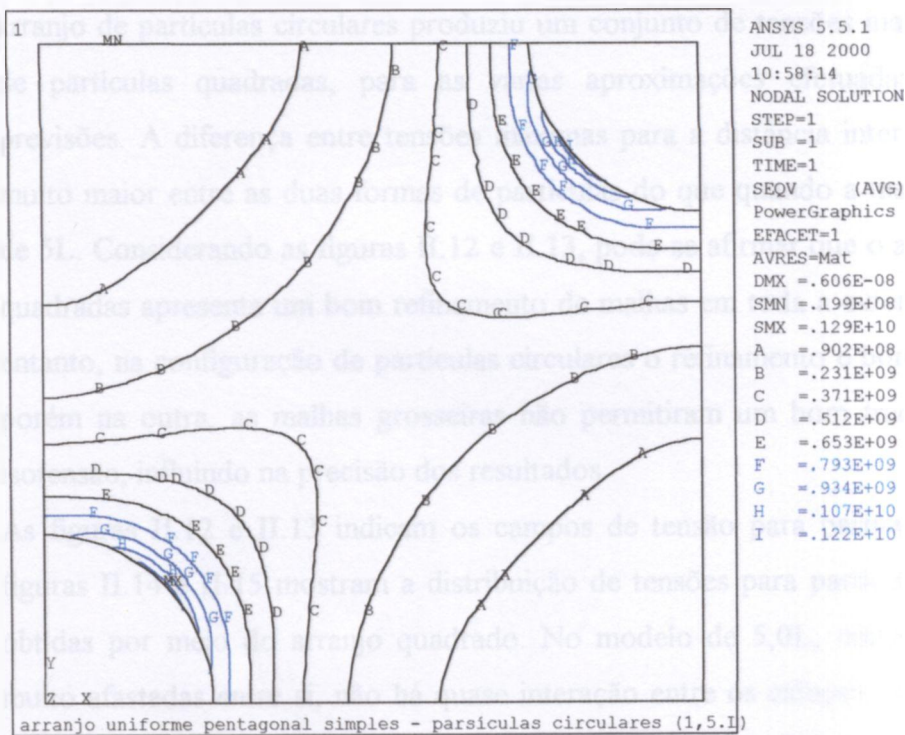


Fig.II.11 - Campos de tensão quando as partículas circulares estão afastadas de 1,5L. ($\Delta t = 580^\circ\text{C}$)

As figuras II.10 e II.11 representam os campos de tensão para partículas circulares. Neste caso, também se percebe a influência da aproximação das partículas sobre o campo de tensão. A configuração do campo é parecida com a do caso anterior, porém os níveis de tensão são menores, chegando a ser bem menores em pontos afastados do contorno da partícula para a dimensão de $5,0L$. Comparando a forma quadrada de partícula com a forma circular, quando estas estão bem próximas, nota-se um campo de tensão bem mais intenso para as partículas quadradas do que para as partículas circulares, considerando modelos de mesmas dimensões, o que está de acordo com as previsões de Christman et al [24]

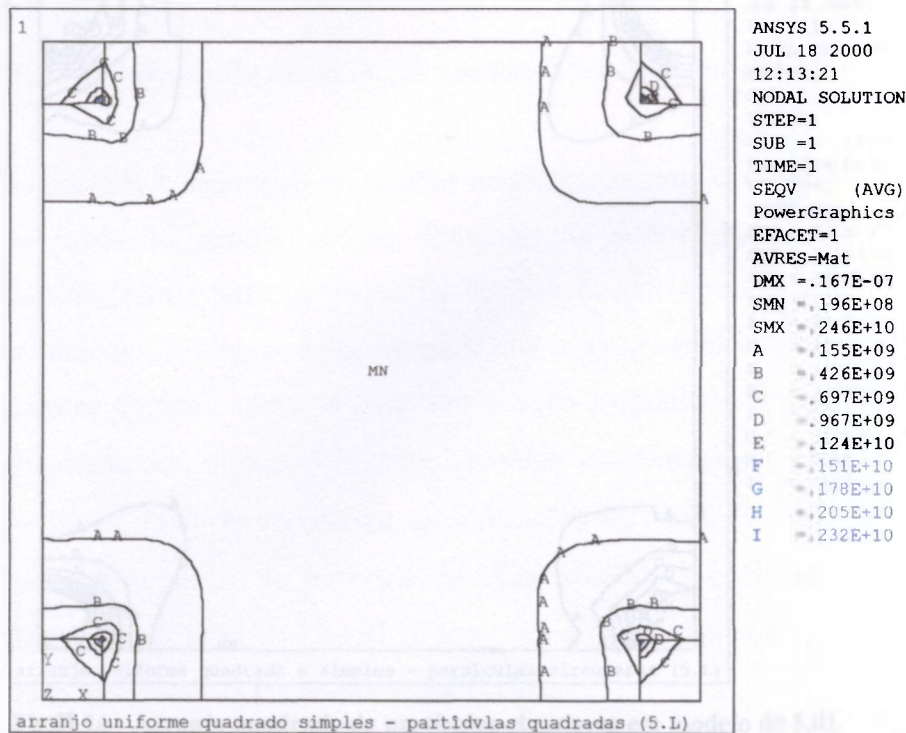
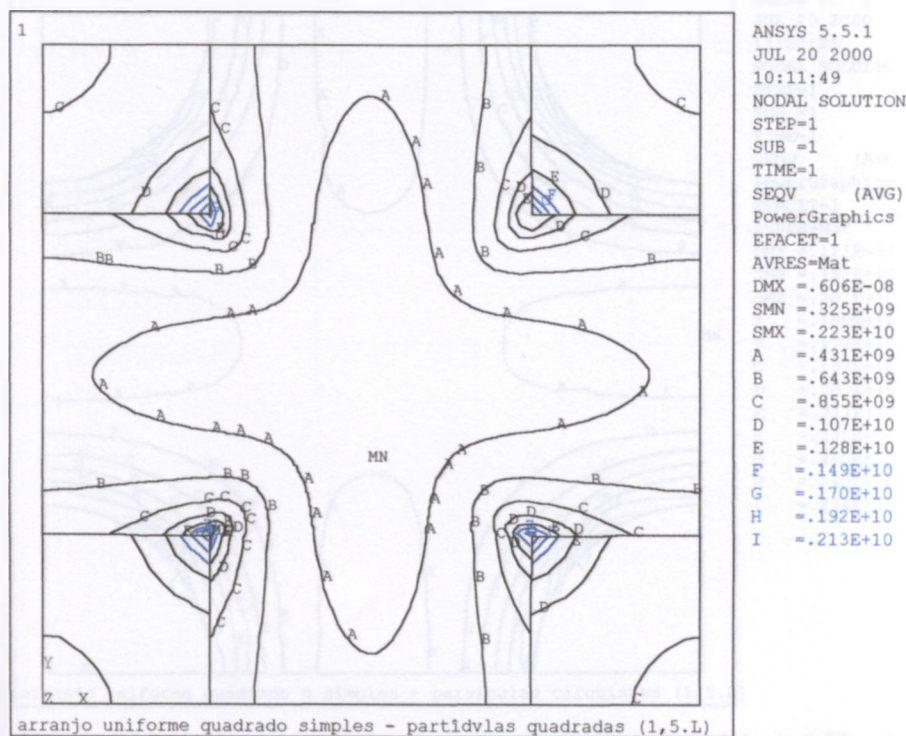
Obs: A diferença entre os níveis de tensão ao redor das partículas quadradas e das circulares está no fato de que aquelas apresentam cantos vivos cujo efeito é aumentar a tensão.

II.4.2.2 - Arranjo quadrado

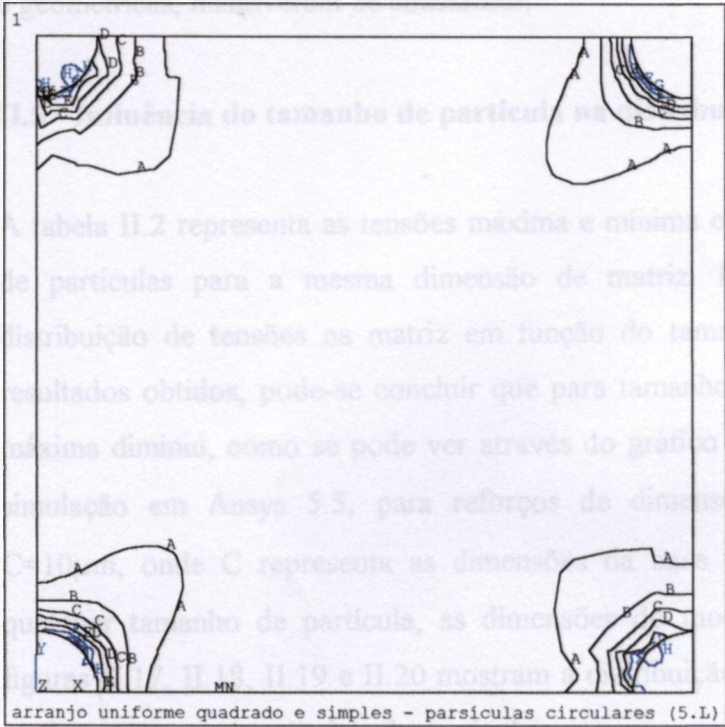
Na configuração seguinte (arranjo quadrado), verificou-se uma inversão de efeitos. O arranjo de partículas circulares produziu um conjunto de tensões maiores que o arranjo de partículas quadradas, para as várias aproximações efetuadas, contrariando as previsões. A diferença entre tensões máximas para a distância interpartícula de $1,5L$ é muito maior entre as duas formas de partículas do que quando a distância entre estas é de $5L$. Considerando as figuras II.12 e II.13, pode-se afirmar que o arranjo de partículas quadradas apresenta um bom refinamento de malhas em toda a extensão do modelo, no entanto, na configuração de partículas circulares o refinamento é bom em uma diagonal, porém na outra, as malhas grosseiras não permitiram um bom traçado das curvas de isotensão, influenciando na precisão dos resultados.

As figuras II.12 e II.13 indicam os campos de tensão para partículas quadradas e as figuras II.14 e II.15 mostram a distribuição de tensões para partículas circulares, todas obtidas por meio do arranjo quadrado. No modelo de $5,0L$, onde as partículas estão muito afastadas entre si, não há quase interação entre os campos de tensão produzidos pelas partículas individualmente, porém quando aproximam-se as partículas nas dimensões indicadas pelas figuras II.13 e II.15, verifica-se uma grande interação entre os campos de tensão.

PARTÍCULAS QUADRADAS

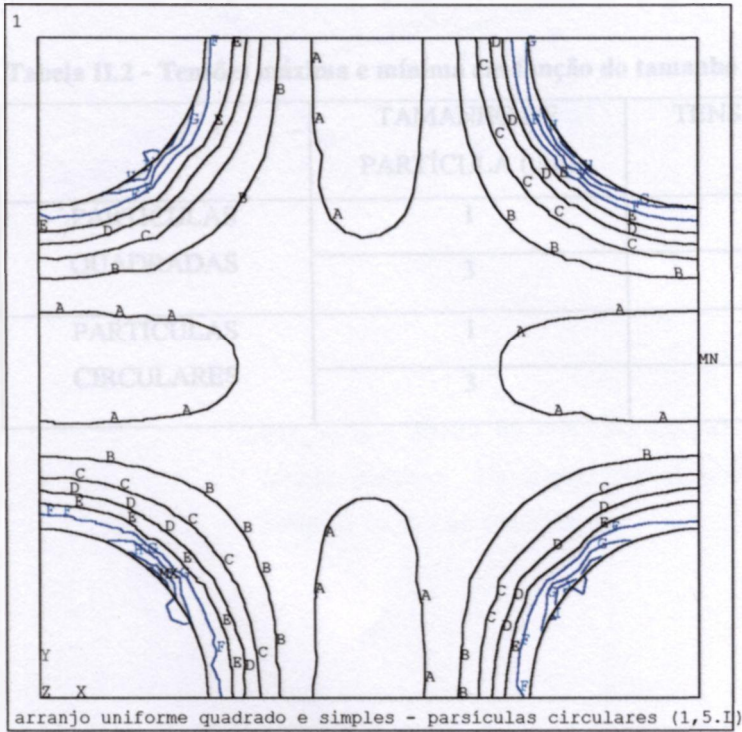
Fig.II.12 - Arranjo quadrado de partículas quadradas em modelo de 5,0L. ($\Delta t = 580^\circ\text{C}$)Fig.II.13 - Arranjo quadrado de partículas quadradas em modelo de 1,5L. ($\Delta t = 580^\circ\text{C}$)

PARTÍCULAS CIRCULARES



ANSYS 5.5.1
JUL 20 2000
10:28:28
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SEQV (AVG)
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =.333E-07
SMN =.111E+10
SMX =.260E+10
A =.120E+10
B =.136E+10
C =.153E+10
D =.169E+10
E =.186E+10
F =.202E+10
G =.219E+10
H =.235E+10
I =.252E+10

Fig.II.14 - Arranjo quadrado de partículas circulares em modelo de 5,0L . (Δt = 580 °C)



ANSYS 5.5.1
JUL 20 2000
11:22:28
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SEQV (AVG)
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =.121E-07
SMN =.152E+10
SMX =.281E+10
A =.160E+10
B =.174E+10
C =.188E+10
D =.202E+10
E =.217E+10
F =.231E+10
G =.245E+10
H =.260E+10
I =.274E+10

Fig. II.15 - Arranjo quadrado de partículas circulares em modelo de 1,5L. (Δt = 580 °C)

Observando as figuras II.13 e II.15, pode-se notar a diferença entre os traçados das curvas de isotensão, a qual ocorre por causa da forma, já que as outras grandezas, físicas e geométricas, mantiveram-se constantes.

II.5 - Influência do tamanho de partícula na distribuição de tensões

A tabela II.2 representa as tensões máxima e mínima considerando tamanhos diferentes de partículas para a mesma dimensão de matriz. Parece importante considerar a distribuição de tensões na matriz em função do tamanho dos reforços. A partir dos resultados obtidos, pode-se concluir que para tamanhos maiores de partículas a tensão máxima diminui, como se pode ver através do gráfico abaixo (Fig.II.16), onde se fez a simulação em Ansys 5.5, para reforços de dimensões, onde $L=1\mu\text{m}$ e $L=3\mu\text{m}$ e $C=10\mu\text{m}$, onde C representa as dimensões da base de alumínio. Observe que, para qualquer tamanho de partícula, as dimensões do modelo mantêm-se constantes. As figuras II.17, II.18, II.19 e II.20 mostram a distribuição de tensões para estes casos nos quais variam-se os tamanhos de partículas.

Tabela II.2 - Tensões máxima e mínima em função do tamanho de partícula

	TAMANHO DE PARTÍCULA (μm)	TENSÃO MÍNIMA (MPa)	TENSÃO MÁXIMA (GPa)
PARTÍCULAS QUADRADAS	1	54,7	3,07
	3	31,8	2,23
PARTÍCULAS CIRCULARES	1	1060	3,16
	3	1160	2,50

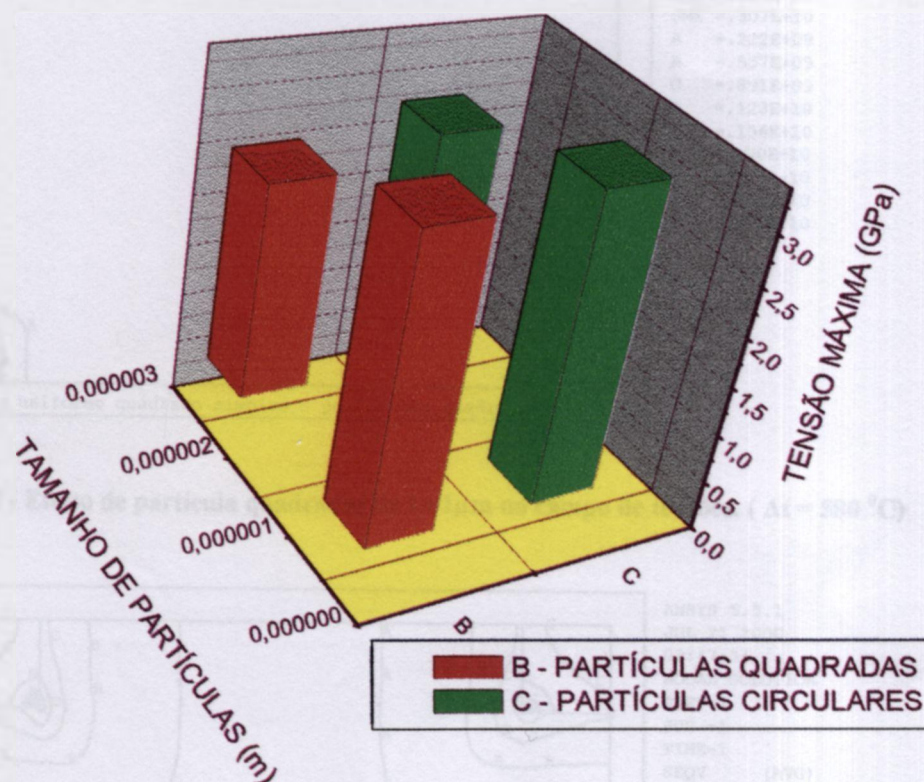
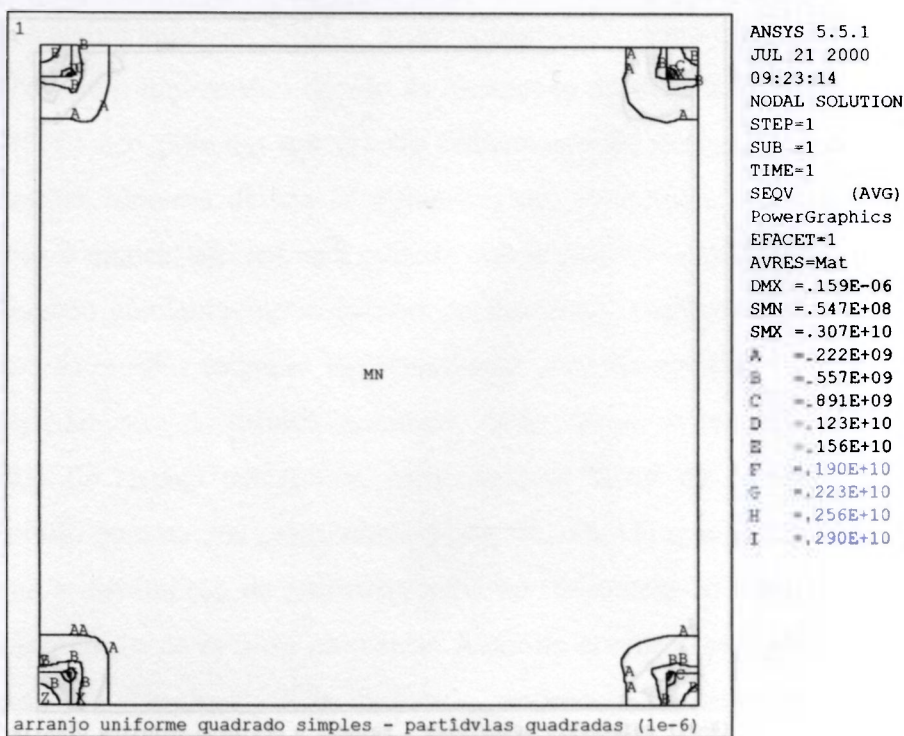
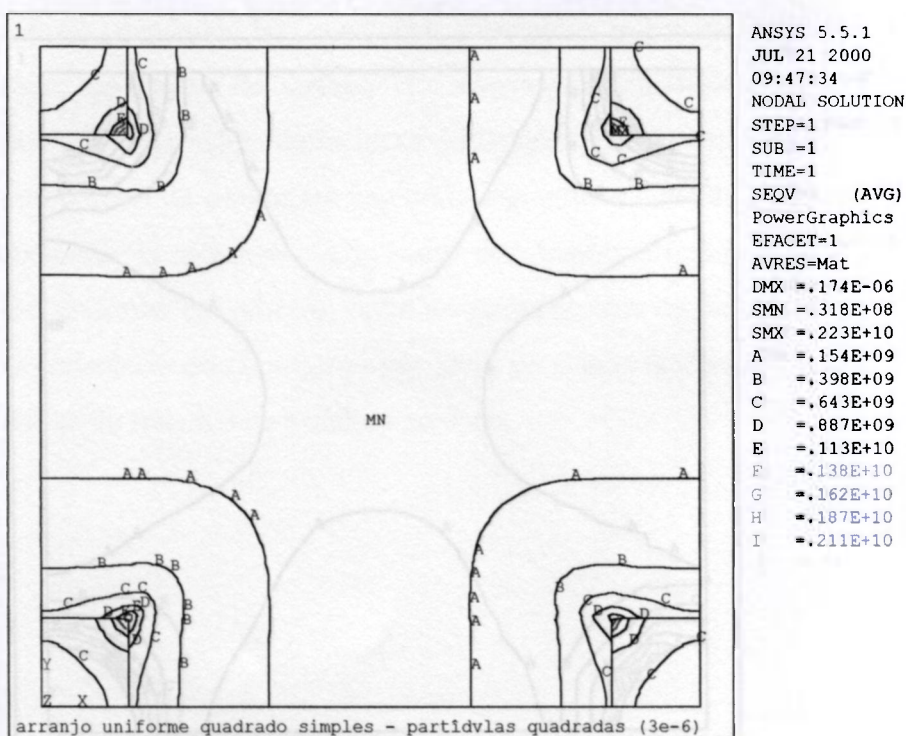
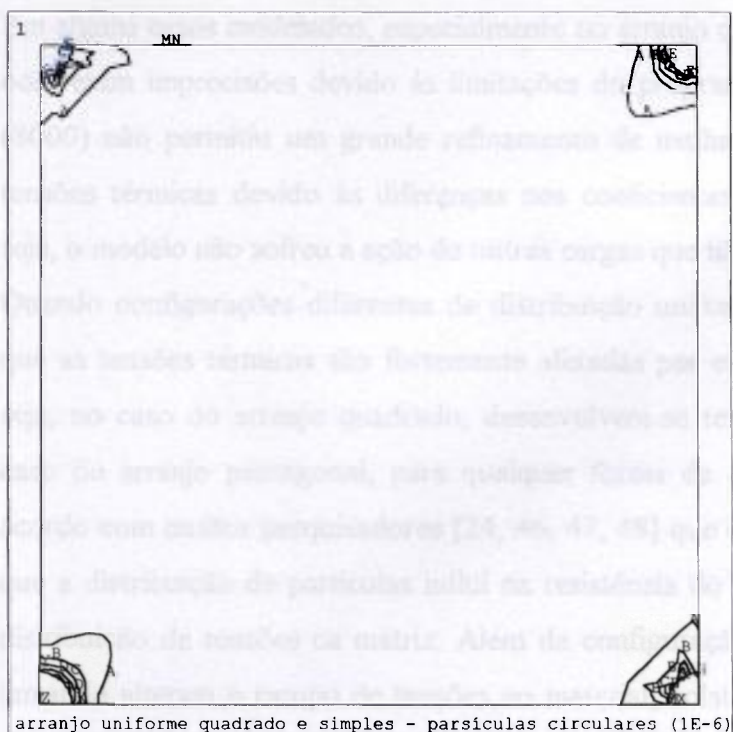


Fig. IL16 - Efeito do tamanho de partícula na tensão máxima. Os dados foram obtidos em modelos de mesmo tamanho

PARTÍCULAS QUADRADAS

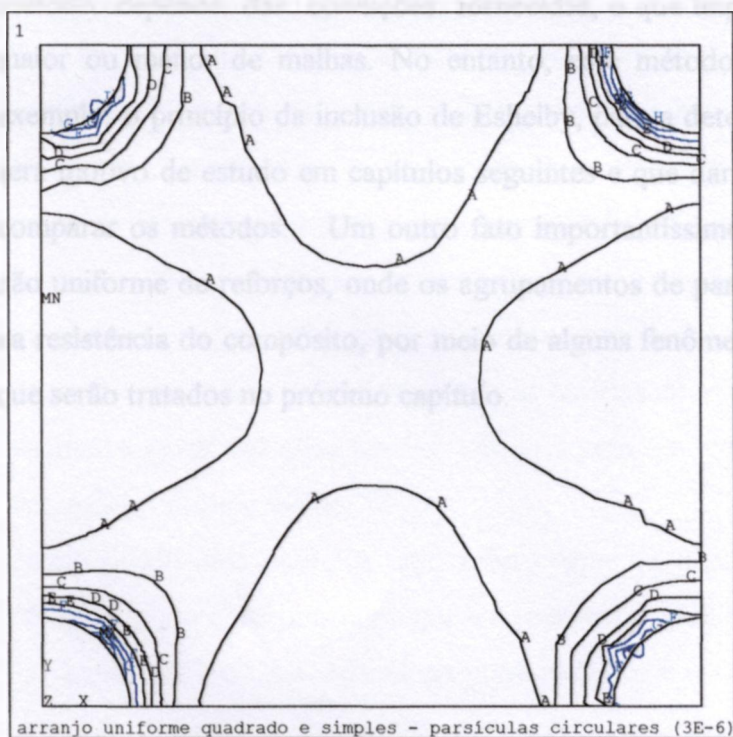
Fig.II.17 - Efeito de partícula quadradas de $L=1\mu\text{m}$ no campo de tensões. ($\Delta t = 580^\circ\text{C}$)Fig. II.18 - Efeito de partículas quadradas de $L = 3\mu\text{m}$ no campo de tensões. ($\Delta t = 580^\circ\text{C}$)

PARTÍCULAS CIRCULARES



ANSYS 5.5.1
JUL 21 2000
10:04:42
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SEQV (AVG)
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =.318E-06
SMN =.106E+10
SMX =.316E+10
A =.118E+10
B =.141E+10
C =.164E+10
D =.188E+10
E =.211E+10
F =.234E+10
G =.258E+10
H =.281E+10
I =.304E+10

Fig.II.19 - Efeito de partículas circulares de $L=1\mu\text{m}$ no campo de tensões . ($\Delta t = 580^\circ\text{C}$)



ANSYS 5.5.1
JUL 21 2000
10:18:01
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
SEQV (AVG)
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =.348E-06
SMN =.116E+10
SMX =.250E+10
A =.123E+10
B =.138E+10
C =.153E+10
D =.168E+10
E =.183E+10
F =.198E+10
G =.213E+10
H =.228E+10
I =.243E+10

Fig. II.20 - Efeito de partículas circulares de $L=3\mu\text{m}$ no campo de tensões. ($\Delta t = 580^\circ\text{C}$)

II.6 – Comentários

Em alguns casos modelados, especialmente no arranjo quadrado de partículas circulares, ocorreram imprecisões devido às limitações do programa cujo número máximo de nós (8000) não permitiu um grande refinamento de malhas. A análise referiu-se apenas a tensões térmicas devido às diferenças nos coeficientes de dilatação dos materiais, ou seja, o modelo não sofreu a ação de outras cargas que não fossem as térmicas.

Quando configurações diferentes de distribuição uniforme são comparadas, percebe-se que as tensões térmicas são fortemente afetadas por esta diferença de distribuição, ou seja, no caso do arranjo quadrado, desenvolvem-se tensões muito maiores do que no caso do arranjo pentagonal, para qualquer forma de partícula. Esta previsão está de acordo com muitos pesquisadores [24, 46, 47, 48] que concordam com a proposição de que a distribuição de partículas influi na resistência do material compósito por afetar a distribuição de tensões na matriz. Além da configuração, a forma da partícula e o seu tamanho alteram o campo de tensões no material, colaborando para o desenvolvimento dos mecanismos de resistência deste. O método de elementos finitos usado neste capítulo, baseado na mecânica do contínuo, permite determinar a distribuição de tensões e, assim, estudar a sua influência na resistência do material, sendo que a precisão do método depende das condições fornecidas, o que implicará também num refinamento maior ou menor de malhas. No entanto, este método não é o único, existindo, por exemplo, o princípio da inclusão de Eshelby, para a determinação destas tensões, o qual será motivo de estudo em capítulos seguintes e que dará, mais tarde, condições para se comparar os métodos. Um outro fato importantíssimo é a ocorrência da distribuição não uniforme de reforços, onde os agrupamentos de partículas exercem muita influência na resistência do compósito, por meio de alguns fenômenos já descritos anteriormente e que serão tratados no próximo capítulo.

III - SIMULAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS USANDO O PROGRAMA ANSYS-VERSÃO 5.5 PARA DISTRIBUIÇÃO NÃO UNIFORME DE PARTÍCULAS, CONSIDERANDO REGIME ELÁSTICO.

III.1 – Introdução

Um fato importantíssimo é a ocorrência da distribuição não uniforme de reforços. Como na prática a distribuição nunca é uniforme, foi feita uma simulação com partículas circulares dispostas aleatoriamente na base de alumínio, contando com tamanhos variados. Isso foi possível usando-se o gerador de números aleatórios do programa Ansys 5.5. A mecânica desta obtenção foi a seguinte:

- 1^o) Gerou-se números aleatórios que se tornaram os centros das partículas;
- 2^o) Os números gerados acima tornaram-se origens de sistemas de coordenadas com o objetivo de, a partir dessas origens, gerar-se círculos, dentro dos limites de L, que se tornaram pontos dos contornos das partículas;
- 3^o) Depois de geradas as partículas, ocupando posições aleatórias e com tamanhos diferentes, porém com dimensão máxima igual a L, procedeu-se a produção das malhas e a elaboração das condições de contorno e simetria para a simulação, considerando o regime elástico

Este trabalho mostra a possibilidade de modelar a distribuição não uniforme das partículas, para que se possa ter uma resposta mecânica mais realista do material, estudando o mecanismo de resistência dos compósitos a partir dessa realidade. Para tanto, construíram-se modelos em elementos finitos com o programa Ansys5.5, onde as partículas são geradas em quantidade, em posições e dimensões aleatórias. Com algumas mudanças, estes modelos, assim como os anteriores, permitem determinar, ao redor das partículas, no regime linear, as tensões de von Mises, além de permitir análise plástica, a partir das altas tensões térmicas geradas, embora a análise plástica não tenha sido escopo deste trabalho.

Foram produzidos modelos cujo refinamento de malhas está no limite admitido pela versão disponível do programa que é o máximo de 8000 nós.

As figuras III.2 e III.3 indicam as configurações e o comportamento de tensão obtidos com duas rodadas do programa, que servem como exemplo, uma vez que foram feitas 24 rodadas, obtendo-se 24 configurações diferentes de distribuição. Nestas figuras indica-se o número máximo de partículas que se conseguiu em cada rodada. A lógica

desenvolvida para gerar a malha não permite que haja superposição de partículas, o que leva à eliminação de algumas delas, isto é, por exemplo, pede-se para o programa gerar 50 partículas no modelo. As que se superpõem, sofrerão um processo de eliminação, onde permanecerá apenas uma.

As figuras III.2 e III. 3 abaixo são exemplos de simulação em que se mostra alguns agrupamentos e os níveis de tensão que ocorrem ao redor dos reforços nesses agrupamentos. Nestes casos apresentados, fez-se a análise no regime elástico. Como a disposição dos reforços não se repete, se forem gerados outros modelos, em cada caso, tem-se uma distribuição de tensões diferente e, portanto, um comportamento mecânico diferente do material. Neste modelo de distribuição não uniforme, a única carga aplicada é a decorrente das diferenças nos coeficientes de expansão térmica entre o carboneto de silício e a matriz de alumínio. Além das propriedades físicas, já descritas, dos materiais para o modelo em elementos finitos de distribuição uniforme, lista-se abaixo os parâmetros de temperatura, os limites máximos de dimensões das partículas, as condições de simetria e de contorno utilizadas.

- 1) Análise dentro do regime linear, calculando as tensões equivalentes de von Mises.
- 2) Nenhuma força externa aplicada, somente cargas térmicas causadas pelo resfriamento.
- 3) Temperatura inicial de referência: 600°C
- 4) Temperatura final de referência: 20°C
- 5) Dimensão máxima que a partícula deve ter em uma direção: $L = 0,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
- 6) Dimensão do modelo: $C = 2,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
- 7) Condições de simetria e de contorno (III.1)

$$\begin{aligned} T_x = T_y = 0; u_x = 0; & \quad \text{para } x = 0 \\ u_y = 0; & \quad \text{para } y = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

- 8) Módulo de elasticidade da matriz de alumínio e das partículas de SiC, respectivamente, $E_M = 73 \text{ GPa}$ e $E_I = 450 \text{ GPa}$.
- 9) Coeficientes de expansão térmica do alumínio e das partículas de SiC, respectivamente, $\alpha_M = 23,6 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ e $\alpha_I = 4 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$.
- 10) Conseguiu-se bom refinamento de malhas com elementos triangulares para todos os casos. Como exemplo tem-se a figura III.I.

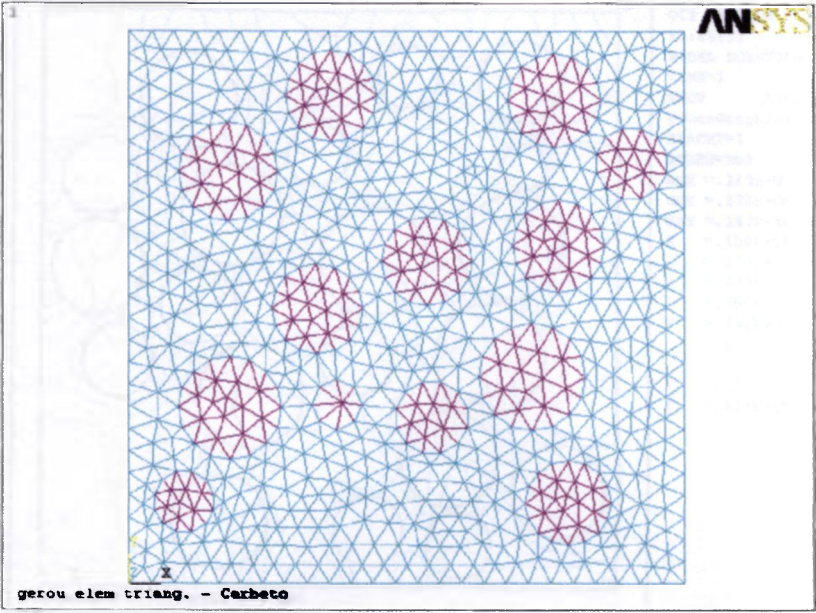


Fig. III.1 – Malha gerada em elementos finitos – elementos triangulares

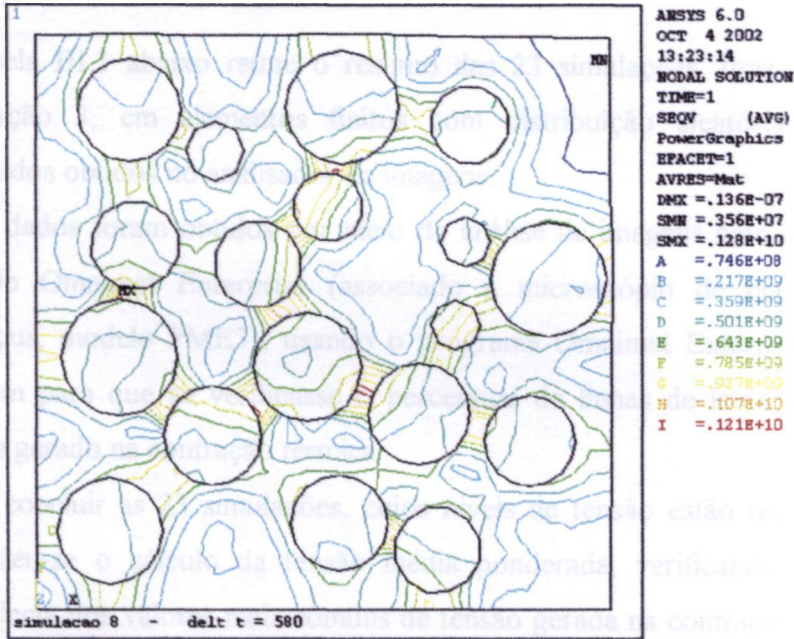


Fig. III.2 - Campos de tensão - Partículas circulares dispostas Aleatoriamente (Al/SiC) ($\Delta t = 580^{\circ}\text{C}$)

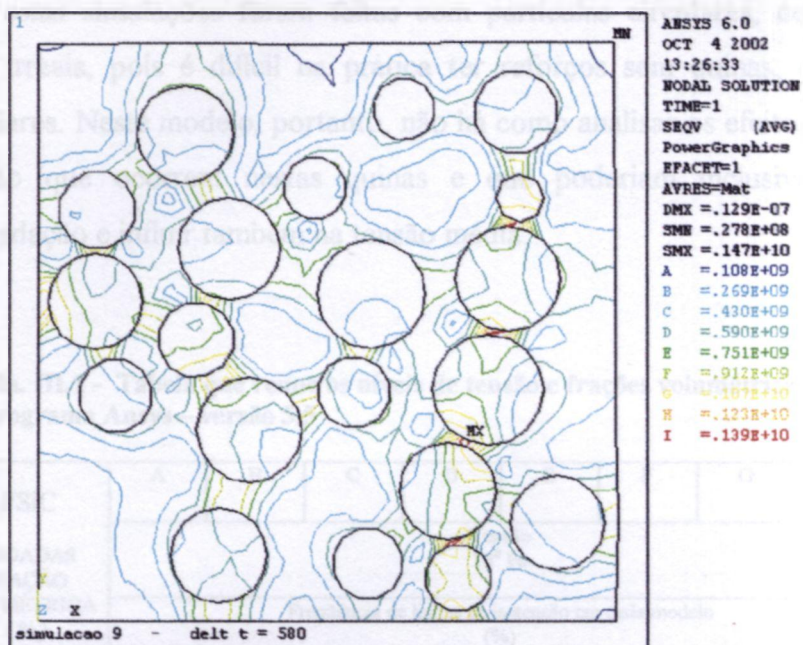


Fig. III.3 - Campos de tensão - Partículas dispostas aleatoriamente (Al/SiC) ($\Delta t = 580$ °C)

A lógica do programa, dividida em duas partes, usada para a obtenção dessas figuras é mostrada no Apêndice B

A tabela III.1 abaixo reúne o resumo das 23 simulações, uma vez que se perdeu a simulação 3, em elementos finitos com distribuição aleatória de partículas e os resultados obtidos no analisador de imagens.

Estes dados foram obtidos por meio de análise de imagens com equipamento Buehler: modelo Omnimet Enterprise (associado a microscópio de platina invertida, marca Olympus, modelo PME3), usando o programa Omnimet Enterprise 4.0, o qual serviu também para que se verificasse o percentual de linhas de isotensão de cada nível de tensão gerado na contração térmica.

Após concluir as 23 simulações, cujos níveis de tensão estão reunidos na tabela III.1, procedeu-se o cálculo da tensão média ponderada, verificando-se, desta maneira, a ocorrência dos valores mais comuns de tensão gerada na contração do material, durante o resfriamento, devido às diferenças nos coeficientes de expansão térmica dos constituintes do compósito.

Esta tensão deve ser interpretada como sendo a média dos valores que mais ocorrem nos compósitos, para as frações volumétricas que foram alcançadas nas simulações aqui

reunidas, e dependentes da distribuição de reforços, com a limitação de forma, uma vez que estas simulações foram feitas com partículas circulares, de tamanhos diferentes, mas irreais, pois é difícil na prática ter reforços sem quinas, ou seja, perfeitamente regulares. Neste modelo, portanto, não há como analisar os efeitos das concentrações de tensão que ocorrem nestas quinas e que poderiam inclusive levar o material à degradação e influir também na tensão média.

Tabela. III.1 - Tabela que reúne os níveis de tensão e frações volumétricas nas 23 simulações feitas em programa Ansys – versão 5.5

Al/SiC - RODADAS - FRAÇÃO VOLUMÉTRICA f (%)	A	B	C	D	E	F	G	H	TENSÃO MÉDIA
	Tensão 10 ⁸ Pa								
	Frequência de linhas de isotensão em cada modelo (%)								
RODADA 1 34,96	1,11	2,70	4,29	5,89	7,48	9,07	10,7	12,3	5,80
	0,0955	0,4877	1,6216	1,6549	0,879	0,4375	0,2132	0,04886	
RODADA 2 33,57	1,32	3,50	5,68	7,86	10,00	12,20	14,40	16,60	5,62
	0,0933	1,306	1,69	0,508	0,206	0,105	0,0275	0,00844	
RODADA 4 26,45	1,23	2,78	4,32	5,87	7,41	8,96	10,5	12,1	5,17
	0,215	0,794	1,253	1,270	0,586	0,251	0,0973	0,0227	
RODADA 6 30,06	1,19	2,86	4,53	6,20	7,87	9,54	11,2	12,9	5,15
	0,0799	1,119	1,643	1,174	0,500	0,167	0,075	0,0138	
RODADA 7 31,01	1,16	2,68	4,19	5,71	7,22	8,73	10,2	11,8	5,13
	0,0986	0,834	1,57	1,57	0,7426	0,208	0,0857	0,0377	
RODADA 8 35,19	0,746	2,17	3,59	5,01	6,43	7,85	9,27	10,7	5,30
	0,0608	0,338	1,202	1,902	1,083	0,535	0,197	0,102	
RODADA 9 34,71	1,08	2,69	4,30	5,90	7,51	9,12	10,7	12,3	5,65
	0,063	0,545	1,637	1,659	0,765	0,352	0,131	0,0577	
RODADA 10 31,02	1,08	2,57	4,06	5,55	7,03	8,52	10,00	11,5	5,13
	0,08217	0,7648	1,507	1,621	0,771	0,306	0,0986	0,0346	
RODADA 11 35,2	0,745	2,16	3,57	4,99	6,40	7,82	9,23	10,6	5,29
	0,0862	0,299	1,212	1,902	1,0895	0,5161	0,227	0,11237	
RODADA 12 32,2	1,10	2,78	4,45	6,13	7,80	9,48	11,2	12,8	5,64
	0,0293	0,7226	1,72	1,399	0,605	0,335	0,102	0,056	
RODADA 13 27,37	0,816	2,36	3,91	5,46	7,00	8,55	10,1	11,6	5,25
	0,1	0,6507	1,454	1,5	0,843	0,4246	0,142	0,0653	

RODADA 14 33,74	0,967	2,84	4,72	6,60	8,48	10,4	12,2	14,1	5,75
	0,0835	0,543	1,708	1,1646	0,373	0,209	0,0728	0,0262	
RODADA 15 24,44	0,857	2,38	3,91	5,43	6,96	8,49	10,00	15,00	4,46
	0,1825	1,024	1,536	1,461	0,494	0,167	0,0257	0,0155	
RODADA 16 26,5	0,766	2,23	3,69	5,15	6,61	8,07	9,53	11,00	4,45
	0,29	0,819	1,352	1,432	0,880	0,1727	0,0537	0,0213	
RODADA 17 29,5	1,16	3,11	5,06	7,02	8,97	10,9	12,9	14,8	4,87
	0,133	1,22	1,61	0,581	0,159	0,0493	0,0102	0,0075	
RODADA 18 27,83	0,78	2,15	3,53	4,90	6,27	7,65	9,02	10,4	4,70
	0,0666	0,647	1,336	1,745	1,129	0,2926	0,071	0,035	
RODADA 19 28,4	0,884	2,64	4,39	6,15	7,90	9,66	11,4	13,2	5,13
	0,095	0,71	1,430	1,166	0,462	0,0897	0,0466	0,0160	
RODADA 20 26,07	0,79	2,31	3,82	5,34	6,85	8,37	9,89	11,4	4,82
	0,116	0,799	1,386	1,352	0,763	0,299	0,0826	0,01732	
RODADA 21 32	0,981	2,24	3,51	4,77	6,03	7,30	8,56	9,82	4,97
	0,060	0,476	1,402	1,897	1,456	0,579	0,161	0,098	
RODADA 22 28,14	0,79	2,33	3,87	5,41	6,95	8,49	10,0	11,6	4,95
	0,127	0,667	1,313	1,407	0,762	0,276	0,079	0,0235	
RODADA 23 17,95	0,775	2,08	3,39	4,70	6,01	7,31	8,62	9,93	4,05
	0,159	1,061	1,301	1,224	0,838	0,223	0,053	0,015	
RODADA 24 23,1	0,89	2,64	4,39	6,14	7,89	9,64	11,4	13,1	4,67
	0,078	0,971	1,323	0,996	0,233	0,07	0,00577	0,00444	
RODADA 25 26,3	0,738	1,96	3,17	4,39	5,61	6,83	8,05	9,27	4,82
	0,0471	0,563	1,113	1,267	1,31	0,748	0,349	0,117	

Obs: As rodadas 3 e 5 foram perdidas no processo de simulação e análise

III.2 – Comentários

Como se pode perceber nas figuras III.2 e III.3, há concentrações de partículas em regiões da matriz. Estes agrupamentos produzem configurações diferentes nos campos de tensão em relação à distribuição uniforme de reforços, influenciando no comportamento mecânico do material. Este trabalho de doutorado tem como objeto estudar a influência destes agrupamentos na resistência do compósito. Muitos autores [18,19,20,21,24,25,27] tratam do problema da distribuição e são unânimes em afirmar que a resistência do compósito é função da concentração de partículas. Nestas regiões

de grande número de reforços, as densidades de discordâncias são maiores do que em regiões livres de partículas. Resta supor que haverá diferenças de resistência entre estes materiais e aqueles que possuem distribuição uniforme de partículas. Além disto, nos agrupamentos, onde a rigidez do material é maior do que em regiões de menor concentração de partículas, haverá maior possibilidade de aparecerem fraturas na matriz, desligamento entre reforço e matriz, precipitados (para o caso de matriz de liga de alumínio) e quebra do reforço. Estes fenômenos deverão ser comprovados, medindo, por meio do modelo, os níveis de tensão nos agrupamentos de partículas e buscando uma relação entre esses níveis de tensão e os fenômenos descritos acima.

Por meio de uma indexação desses agrupamentos de partículas é possível, considerando várias rodadas do programa, estabelecer uma correspondência entre os agrupamentos e as tensões desenvolvidas e, portanto, uma relação com os mecanismos de resistência, tal como a formação das altas densidades de discordâncias geometricamente necessárias. Esta indexação representará uma propriedade geométrica ou física do agrupamento, por exemplo, o percentual de área de partícula por unidade de superfície de matriz. Este valor percentual será uma medida do agrupamento de reforços, buscando uma função entre essa indexação e a resistência do compósito.

O modelo matemático deverá contemplar outros casos de compósitos metálicos. A fim de testar a validade deste modelo, foram feitas 23 simulações, considerando-se outra base metálica. Neste caso, optou-se por alterar as propriedades físicas da matriz ($E = 120 \text{ GPa}$; $\nu = 0,34$), aproximando-a do latão (70Cu – 30Zn), mas mantendo as condições de simetria e de contorno utilizadas para a matriz de alumínio. As figuras III.4 e III.5 indicam dois exemplos da nova simulação.

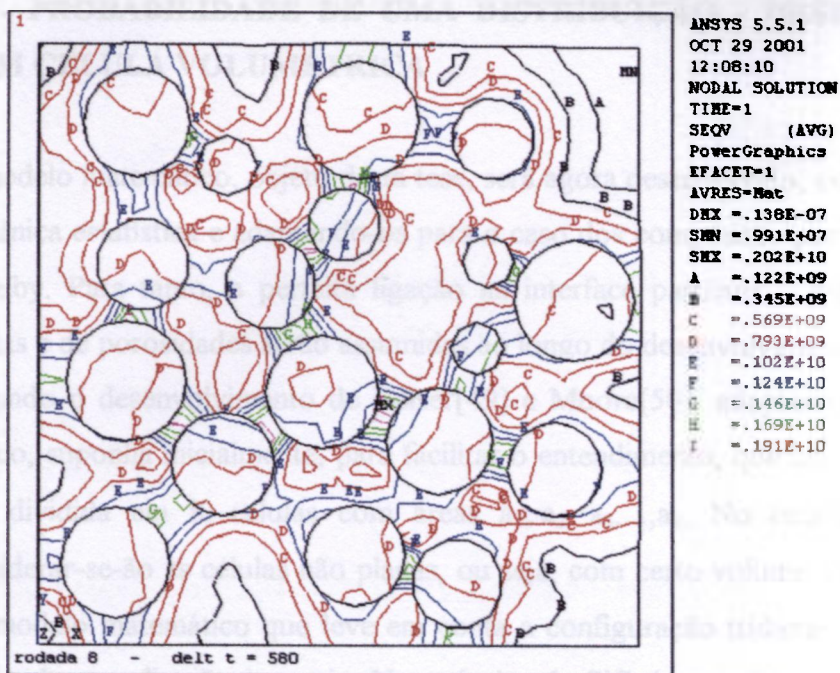


Fig. III.4 - Campos de tensão - Partículas circulares dispostas Aleatoriamente (70Cu – 30Zn/SiC) ($\Delta t = 580^{\circ}\text{C}$)

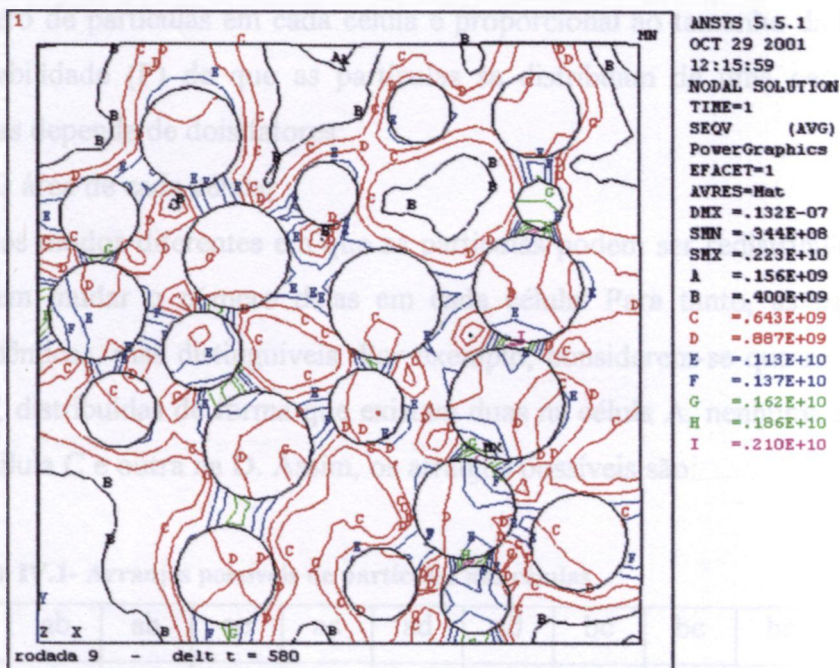


Fig. III.5 - Campos de tensão - Partículas dispostas aleatoriamente (70Cu – 30Zn/SiC) ($\Delta t = 580^{\circ}\text{C}$)

IV - PROBABILIDADE DE UMA DISTRIBUIÇÃO - DESENVOLVIMENTO COM CÉLULA VOLUMÉTRICA

O modelo matemático, objeto desta tese, será agora desenvolvido, usando os recursos da mecânica estatística e adaptando-os para o caso dos compósitos por meio do método de Eshelby. Para tanto, a perfeita ligação na interface partícula – matriz, a ausência de trincas e de porosidades serão assumidas ao longo do desenvolvimento.

Segundo o desenvolvimento de Beiser[49] e Moore[50], adaptando-o para o presente estudo, suponha inicialmente, para facilitar o entendimento, que uma matriz de alumínio seja dividida em K células com áreas $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$. No entanto, posteriormente, considerar-se-ão as células não planas, ou seja, com certo volume para que se possa ter um modelo matemático que leve em conta a configuração tridimensional de partículas. Lançando, em direção à matriz, N partículas de SiC de maneira completamente casual, de modo que nenhuma parte da matriz fique favorecida, marcam-se quantas partículas caem em cada célula, repetindo, em seguida, a experiência. Após um grande número de repetições, verifica-se que uma certa distribuição é mais freqüente. Esta é chamada de distribuição mais provável. Esta distribuição é função do tamanho da célula, pois o número de partículas em cada célula é proporcional ao tamanho da respectiva célula. A probabilidade (P) de que as partículas se distribuam de uma certa maneira entre as células depende de dois fatores:

- 1) da área de cada célula;
- 2) dos modos diferentes em que as partículas podem ser redistribuídas entre as células sem mudar o número delas em cada célula. Para tanto, as partículas devem ser idênticas, mas distinguíveis. Por exemplo, considerem-se quatro partículas *a, b, c* e *d*, distribuídas de forma que existam duas na célula A, nenhuma na célula B, uma na célula C e outra na D. Assim, os arranjos possíveis são:

Tabela IV.1- Arranjos possíveis de partículas nas células

A	ab	ab	ac	ac	ad	ad	bc	bc	bd	bd	cd	cd
B	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
C	c	d	b	d	c	b	a	d	a	c	a	b
D	d	c	d	b	b	c	d	a	c	a	b	a

A probabilidade que leva em conta o primeiro fator chama-se probabilidade *a priori*, a outra, probabilidade termodinâmica.

IV.1 - Probabilidade "*a priori*"

A probabilidade *a priori* g_i de que uma partícula caia na célula i é igual à razão entre a área da célula a_i e a área de toda a matriz A . Assim,

$$g_i = \frac{a_i}{A} \text{ onde } A = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k \quad \text{IV.1}$$

A soma das probabilidades *a priori* é 1. Assim, pode-se escrever:

$$\sum g_i = g_1 + g_2 + \dots + g_k = 1 \quad \text{IV.2}$$

A probabilidade de que duas partículas caiam na i -ésima célula é $(g_i)^2$. Assim, a probabilidade *a priori* para que n_i partículas caiam na i -ésima célula é $(g_i)^{n_i}$. Portanto, a probabilidade *a priori* de qualquer distribuição particular de N partículas entre K células é, portanto,

$$P_p = (g_1)^{n_1} (g_2)^{n_2} (g_3)^{n_3} \dots (g_k)^{n_k} \quad \text{IV.3}$$

Onde o número total de partículas é N

$$\sum n_i = n_1 + n_2 + \dots + n_k = N \quad \text{IV.4}$$

IV.2 - Probabilidade termodinâmica

Acontece que N partículas podem ser dispostas em $N!$ seqüências diferentes. Entretanto, quando se tem mais do que uma partícula em uma célula, permutá-las entre si não tem nenhuma significação. Assim, n_i partículas na i -ésima célula contribui com $n_i!$ permutações irrelevantes. Desta maneira, havendo n_1 partículas na célula 1, n_2 partículas na célula 2, n_k partículas na célula k e assim por diante, ocorrerão $n_1!n_2!n_3!\dots n_k!$ permutações irrelevantes. Pode-se dizer, então, que a probabilidade termodinâmica P_t da distribuição é:

$$P_t = \frac{N!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_k!} \quad \text{IV.5}$$

Assim, na seqüência da tabela IV.1 acima, existem doze arranjos, conforme se calcula abaixo, ou seja, a troca de duas partículas dentro de uma mesma célula não tem importância.

$$\text{Assim, pode-se ter : } P_t = \frac{4!}{2! 0! 1! 1!} = 12$$

IV.3 - Probabilidade total

A probabilidade total é o produto

$$P = P_p \cdot P_t \quad \text{IV.6}$$

$$P = \frac{N!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_k!} (g_1)^{n_1} (g_2)^{n_2} (g_3)^{n_3} \dots (g_k)^{n_k} \quad \text{IV.7}$$

IV.4 - Distribuição mais provável

A distribuição mais provável de partículas será agora determinada. Ela é a distribuição que fornece o maior valor de P. O logaritmo natural da eq. IV.7 acima é

$$\ln P = \ln N! - \sum_{i=1}^k \ln n_i! + \sum_{i=1}^k n_i \ln g_i \quad \text{IV.8}$$

Pela fórmula de Stirling, pode-se escrever que $\ln n! = n \ln n - n$ onde $n \gg 1$, a qual é aplicada para as duas primeiras parcelas do segundo membro da expressão anterior, permitindo escrever o seguinte:

$$\ln P = N \ln N - N - \sum_{i=1}^k n_i \ln n_i + \sum_{i=1}^k n_i + \sum_{i=1}^k n_i \ln g_i \quad \text{IV.9}$$

Lembrando que $\sum_{i=1}^k n_i = N$, tem-se :

$$\ln P = N \ln N - \sum_{i=1}^k n_i \ln n_i + \sum_{i=1}^k n_i \ln g_i \quad \text{IV.10}$$

A condição para que se tenha a distribuição mais provável é que uma pequena variação de δn_i , em qualquer dos valores de n_i , não afete P . Quer-se o máximo da função em P , no entanto, o fato de se ter uma função em $\ln P$, não traz inconveniente, uma vez que os máximos das funções são iguais. Assim, como $N \ln N$ é constante e derivando a expressão e igualando a zero, tem-se:

$$\delta \ln P_{\max} = - \sum_{i=1}^k n_i \delta \ln n_i - \sum_{i=1}^k \ln n_i \delta n_i + \sum_{i=1}^k \ln g_i \delta n_i = 0 \quad \text{IV.11}$$

Onde

$$\sum_{i=1}^k n_i \delta \ln g_i = 0, \text{ pois } \ln g_i \text{ é uma constante, sendo } n_i \text{ a variável.}$$

Acontece que se tem:

$$\delta \ln n_i = \frac{1}{n_i} \delta n_i, \text{ pois } \frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \quad \text{IV.12}$$

Então, pode-se escrever :

$$\sum_{i=1}^k n_i \delta \ln n_i = \sum_{i=1}^k \delta n_i \quad \text{IV.13}$$

No entanto, a soma do número de partículas é constante e igual a N , assim, não tem sentido falar-se em soma de todas as variações no número de partículas em cada célula. Desta maneira, o segundo membro da expressão acima é nulo e pode-se escrever:

$$\sum_{i=1}^k \delta n_i = 0 \quad \text{IV.14}$$

Assim, a equação da probabilidade máxima torna-se :

$$\delta \ln P_{\max} = - \sum_{i=1}^k \ln n_i \delta n_i + \sum_{i=1}^k \ln g_i \delta n_i = 0 \quad \text{IV.15}$$

IV.4.1 - Estabelecimento do vínculo (restrições)

A relação acima é necessária para se estabelecer a distribuição mais provável, mas não é suficiente para representar esta distribuição. Para tanto, deve-se provar que a quantidade de partículas em cada célula, do conjunto de K células, não é independente (há uma limitação), pois o número total de partículas é fixo e obedece a relação:

$$\sum_{i=1}^k \delta n_i = \delta n_1 + \delta n_2 + \delta n_3 + \dots + \delta n_k = 0 \quad \text{IV.16}$$

Para isso, usa-se o método dos multiplicadores indeterminados de Lagrange [51] (vide Apêndice C). Seja α um fator independente de qualquer n_i e multiplicando a equação acima por $-\alpha$, tem-se:

$$- \sum_{i=1}^k \alpha \delta n_i = 0 \quad \text{IV.17}$$

Soma-se esta eq. IV.17 com a equação do máximo valor de P (eq.IV.15)

$$- \sum_{i=1}^k \ln n_i \delta n_i + \sum_{i=1}^k \ln g_i \delta n_i - \sum_{i=1}^k \alpha \delta n_i = \sum_{i=1}^k (-\ln n_i + \ln g_i - \alpha) \delta n_i = 0 \quad \text{IV.18}$$

Ou então:

$$-\ln n_i + \ln g_i - \alpha = 0 \quad \text{IV.19}$$

$$n_i = g_i e^{-\alpha} \quad \text{IV.20}$$

Somando todos os n_i e lembrando que α é independente de i , tem-se :

$$\sum_{i=1}^k n_i = e^{-\alpha} \sum_{i=1}^k g_i \quad \text{IV.21}$$

Como

$$\sum_{i=1}^k g_i = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^k n_i = N \quad \text{IV.22}$$

Tem-se por fim, substituindo a eq.IV.22 na eq.IV.21

$$e^{-\alpha} = N \quad \text{IV.23}$$

E, portanto, pode-se escrever:

$$n_i = N \cdot g_i \quad \text{IV.24}$$

Como já é sabido:

$$g_i = \frac{a_i}{A} \quad \text{IV.25}$$

Finalmente, o número mais provável de partículas em uma célula qualquer é

$$n_i = \frac{N}{A} a_i \quad \text{IV.26}$$

IV.5 - Partição de energia

Por meio da mecânica estatística pode-se determinar como se distribui uma quantidade total fixa de energia entre as várias partículas idênticas. Isto implica dizer que se pode determinar a partição de energia entre as várias partículas, ou seja, achar quantas partículas possuem energia u_{p1} , quantas possuem energia u_{p2} e assim por diante.

IV.5.1 - Situação discreta

Inicialmente considerar-se-ão partículas idênticas e espalhadas de modo que se possa distingui-las, obtendo-se a lei de distribuição dessas partículas.

Considere N partículas com energias limitadas aos K valores $u_{p1}, u_{p2}, u_{p3}, \dots, u_{pk}$ em ordem crescente de energia. Essas energias podem representar estados discretos ou energias médias dentro de uma seqüência de intervalos de energia. A energia total é U . Neste caso, a distribuição mais provável de energia está sujeita a duas condições :

a) Conservação do número de partículas

$$\sum_{i=1}^k n_i = n_1 + n_2 + \dots + n_k = N \quad \text{IV.27}$$

No caso dos compósitos esta condição é verdadeira.

b) Conservação de energia

$$\sum_{i=1}^k n_i u_{pi} = n_1 u_{p1} + n_2 u_{p2} + \dots + n_k u_{pk} = U \quad \text{IV.28}$$

Considerando g_i a probabilidade de que uma partícula esteja associada a uma energia u_{pi} , então a probabilidade P para qualquer distribuição será dada pela eq. IV.7

O valor máximo dessa função deve obedecer à condição representada pela eq. IV.16 ($\sum \delta n_i = 0$), assim:

$$\sum_{i=1}^k u_{pi} \delta n_i = u_{p1} \delta n_1 + u_{p2} \delta n_2 + u_{p3} \delta n_3 + \dots + u_{pk} \delta n_k = 0 \quad \text{IV.29}$$

Aplicam-se os multiplicadores de Lagrange, adaptando o presente caso à condição representada pela eq. IV.15.

Assim, pode-se escrever:

$$\sum_{i=1}^k (-\ln n_i + \ln g_i - \alpha - \beta u_{pi}) \delta n_i = 0 \quad \text{IV.30}$$

$$-\ln n_i + \ln g_i - \alpha - \beta u_{pi} = 0 \quad \text{IV.31}$$

$$n_i = g_i e^{-\alpha} e^{-\beta u_i} \quad \text{IV.32}$$

São dois multiplicadores de Lagrange , pois são duas equações de restrição (eq. IV.16 e IV.29)

Para estabelecer os valores de α e β é melhor considerar-se um conjunto contínuo de energia, ao invés de um conjunto discreto u_{p1} , u_{p2} , u_{p3} , o que é mostrado na seção seguinte.

IV.5.2 - Situação contínua

$$n(u_p) du_p = g e^{-\alpha} e^{-\beta u_p} du_p \quad \text{IV.33}$$

Isto vale para um número muito grande de partículas, sem considerar a energia quantizada, sendo $n(u_p) du_p$ o número de partículas com energias entre u_p e $u_p + du_p$. Em termos de energia de deformação elástica, u_p é a energia por unidade de volume (trabalho específico de deformação), diferentemente do que se usa em mecânica estatística, onde u_p seria energia cinética. Esta consideração constitui uma das proposições básicas do referido modelo para o entendimento do fenômeno em estudo neste trabalho:

$$u_p = \bar{u}_i = \frac{\sigma^2}{2E} \quad \text{IV.34}$$

Assim, substituindo a eq. IV34 na eq. IV.33, tem-se:

$$n(\sigma) d\sigma = g e^{-\alpha} e^{-\beta \frac{\sigma^2}{2E}} d\sigma \quad \text{IV.35}$$

A probabilidade *a priori* g de que uma partícula esteja associada a uma energia (tensão) entre σ e $\sigma + d\sigma$ é igual ao número de células no “*espaço de fase*” dentro do qual está a partícula.

Entenda-se como “*espaço de fase*” [49] o seguinte:

O estado de um sistema de partículas que fica inteiramente definido, do ponto de vista clássico, se forem conhecidas, em um instante particular, a posição e a energia (tensão)

associada a cada uma de suas partículas constituintes. Neste caso, como as posições e o tensor de tensão são vetores, cada qual com três componentes, deve-se conhecer 6 quantidades para cada partícula, a saber: $x, y, z, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$.

A posição de uma partícula é um ponto dotado das coordenadas x, y, z , no espaço tridimensional ordinário. Generalizando este conceito, obtem-se um espaço com seis dimensões, no qual um ponto possua seis coordenadas $x, y, z, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, chamando-o de espaço de fase (combinação entre as coordenadas de posição e de tensão).

No presente caso, o espaço de fase tem 6 coordenadas : $x, y, z, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. Assim, pode-se escrever:

$$g d\sigma = \frac{\iiint dx dy dz d\sigma_x d\sigma_y d\sigma_z}{h^3} \quad \text{IV.36}$$

Onde

h^3 : volume infinitesimal

$$\iiint dx dy dz = V_p \quad \text{IV.37}$$

(onde a equação (IV. 37) representa o volume ocupado pelas partículas no espaço comum de posição)

$$\iiint d\sigma_x d\sigma_y d\sigma_z = \int_0^{\infty} 4\pi\sigma^2 d\sigma \quad \text{IV.38}$$

Logo, pode-se escrever:

$$g d\sigma = \frac{V_p 4\pi\sigma^2 d\sigma}{h^3} \quad \text{IV.39}$$

Então, substituindo a eq. IV.39 na eq. IV.35, tem-se:

$$n(\sigma) d\sigma = \frac{4\pi V_p \sigma^2 e^{-\alpha} e^{-\beta \frac{\sigma^2}{2E}}}{h^3} d\sigma \quad \text{IV.40}$$

Pode-se determinar agora $e^{-\alpha}$ da eq. IV.40

$$\int_0^{\infty} n(\sigma) d\sigma = N \quad \text{IV.41}$$

$$N = \frac{4\pi e^{-\alpha} V_p}{h^3} \int_0^{\infty} \sigma^2 e^{-\beta \frac{\sigma^2}{2E}} d\sigma \quad \text{IV.42}$$

Calcula-se a integral acima, segundo Spiegel [52]

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^{3/2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \quad \text{IV.43}$$

Onde a função gama tem a seguinte solução

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \quad \text{IV.44}$$

Lembrando que:

$$a = \frac{\beta}{2E} \quad \text{IV.45}$$

Então, pode-se escrever:

$$\int_0^{\infty} \sigma^2 e^{-\beta \frac{\sigma^2}{2E}} d\sigma = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{8E^3 \pi}{\beta^3}} \quad \text{IV.46}$$

Substituindo a eq.IV.46 na eq. IV42 e isolando $e^{-\alpha}$, tem-se:

$$e^{-\alpha} = \frac{N h^3}{V_p} \left(\frac{\beta}{2E\pi} \right)^{3/2} \quad \text{IV.47}$$

Substituindo a eq.IV.47 na eq. IV.40, tem-se:

$$n(\sigma) d\sigma = 4\pi N \left(\frac{\beta}{2E\pi} \right)^{3/2} \sigma^2 e^{-\beta \frac{\sigma^2}{2E}} d\sigma \quad \text{IV.48}$$

Para se determinar β , calcula-se a energia total (U) de deformação, partindo da expressão IV.34, isolando σ , o que implica:

$$\sigma = (2Eu_p)^{1/2} \quad \text{IV.49}$$

Agora, pode-se escrever a derivada:

$$\frac{d\sigma}{du_p} = \frac{E}{\sqrt{2Eu_p}} \quad \text{IV.50}$$

Assim:

$$d\sigma = \frac{E du_p}{\sqrt{2Eu_p}} \quad \text{IV.51}$$

Substituindo as expressões IV.49 e IV.51 em IV.48, tem-se, depois de simplificar:

$$n(u_p) du_p = \frac{2N\beta^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{u_p} e^{-\beta u_p} du_p \quad \text{IV.52}$$

A energia total, então vale:

$$U = \int_0^\infty u_p n(u_p) du_p \quad \text{IV.53}$$

$$U = \frac{2N\beta^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u_p^{3/2} e^{-\beta u_p} du_p \quad \text{IV.54}$$

A integral:

$$\int_0^\infty u_p^{3/2} e^{-\beta u_p} du_p \quad \text{IV.55}$$

Tem como equivalente

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-\beta x^2} 2x dx \quad \text{para} \quad u_p = x^2 \quad e \quad \frac{du_p}{dx} = 2x \quad \text{IV.56}$$

Cuja solução é dada, segundo Spiegel[52], por:

$$2 \int_0^{\infty} x^4 e^{-\beta x^2} dx = 2 \frac{1}{2\beta^{5/2}} \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \quad \text{IV.57}$$

Por fim a integral tem a seguinte solução

$$\int_0^{\infty} u^{3/2} e^{-\beta u} du = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\beta^5}} \quad \text{IV.58}$$

Assim, pode-se escrever que a energia total dada pela eq. IV54, vale:

$$U = \frac{2N\beta^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\beta^5}} = \frac{3}{2} \frac{N}{\beta} \quad \text{IV.59}$$

Por outro lado, o valor de U pode ser calculado por meio das tensões térmicas no material compósito. Para tanto usa-se o Método de Eshelby para o cálculo das tensões térmicas

IV.5.3- Comportamento térmico : método de Eshelby

Segundo Arsenault e Taya[1] a equação constitutiva termoelástica do compósito pode ser dada pela equação de Caratheodory para uma temperatura T, ou seja:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2G\epsilon_{ij} - (3\lambda + 2G) \delta_{ij} \alpha_m (T - T_0) \quad \text{IV.60}$$

Onde:

λ é a constante de Lamé;

σ_{ij} e ϵ_{ij} são tensores de tensão e deformação;

δ_{ij} é delta de Kronecker;

α_m é o coeficiente de expansão térmica;

T_0 é a temperatura de referência na qual o corpo permanece livre de tensão.

A eq. IV 60 pode ser escrita de maneira mais geral como:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^*) \quad \text{IV.61}$$

Onde:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + G (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}) \quad \text{IV.62}$$

C_{ijkl} é a matriz de constantes elásticas da base de alumínio

ε_{kl} é a deformação em função do deslocamento, sendo dada por:

$$\varepsilon_{kl} = (1/2) (u_{kl} + u_{lk}) \quad \text{IV.63}$$

ε_{kl}^* é a deformação não elástica (eigenstrain), a qual pode ser expressa por :

$$\varepsilon_{kl}^* = \alpha \delta_{kl} (T - T_0) \quad \text{IV.64}$$

ε_{kl} também pode ser dado pelo método de Eshelby [1,4,18,41,53,54,55], ou seja :

$$\varepsilon_{kl} = S_{klmn} \varepsilon_{mn}^* \quad \text{IV.65}$$

onde S_{klmn} é o tensor de Eshelby (função da geometria da inclusão ou partícula e do coeficiente de Poisson da matriz - matriz isotrópica - vide apêndice C livros: Arsenault et al[1] e Clyne et al[4]).

Uma maneira , então, de expressar a tensão na inclusão, segundo Clyne et al[4], é dada pela expressão :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (S - I) \varepsilon_{kl}^* \quad \text{IV.66}$$

Onde I é a matriz identidade

Na equação acima pode-se usar a notação de Voigt, em que $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$, pode ser escrita como $\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j$. A relação entre os componentes do tensor elástico C_{ijkl} e a constante elástica de Voigt é dada pela tabela IV.2 abaixo[1]:

Tabela IV.2 – Constantes elásticas de Voigt

ij	kl					
	11	22	33	23	31	12
11	C ₁₁	C ₁₂	C ₁₃	C ₁₄	C ₁₅	C ₁₆
22	C ₂₁	C ₂₂	C ₂₃	C ₂₄	C ₂₅	C ₂₆
33	C ₃₁	C ₃₂	C ₃₃	C ₃₄	C ₃₅	C ₃₆
23	C ₄₁	C ₄₂	C ₄₃	C ₄₄	C ₄₅	C ₄₆
31	C ₅₁	C ₅₂	C ₅₃	C ₅₄	C ₅₅	C ₅₆
12	C ₆₁	C ₆₂	C ₆₃	C ₆₄	C ₆₅	C ₆₆

IV.6 - Efeito da temperatura

IV.6.1 - Modelo para uma partícula incluída em matriz de dimensões consideradas infinitas

A tensão na inclusão em função da sua deformação[4] é :

$$\sigma_{ij} = C^*_{ijkl} (\epsilon_{kl} - \epsilon^{**}_{kl})$$

IV.67

O termo ϵ^{**}_{kl} poderá agora ser calculado, considerando a contração térmica da matriz de alumínio e das partículas de SiC. Neste caso, a deformação ocorre por meio das diferenças entre os coeficientes de expansão térmica dos materiais que constituem o compósito.

$$\epsilon^{**}_{kl} = (\alpha_I - \alpha_M)\Delta T$$

IV.68

α é o coeficiente de dilatação linear, sendo M e I os índices que representam a matriz e a inclusão, respectivamente.

Devido aos diferentes módulos de elasticidade da matriz e do reforço, a eq. $\epsilon_{kl} = S_{klmn} \epsilon^*_{kl}$ não é exatamente verdadeira. Como a inclusão é mais rígida que a matriz, pode-se escrever :

$$\varepsilon_{kl} > S_{klmn} \varepsilon_{kl}^* \quad \text{IV.69}$$

Para facilitar o entendimento, considera-se uma inclusão equivalente, feita do mesmo material da matriz, com forma e tamanho tal, que simule uma inclusão real. Na mudança entre as duas inclusões, a tensão na inclusão equivalente deve ser idêntica à da inclusão real. Assim, pode-se escrever:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^*) = C_{ijkl}^* (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{**}) \quad \text{IV.70}$$

Onde o primeiro termo refere-se à inclusão equivalente, enquanto o segundo pertence à inclusão real.

$$C_{ijkl}^* (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{**}) = C_{ijkl} (S - I) \varepsilon_{kl}^* \quad \text{IV.71}$$

Equação obtida igualando-se IV.66 com IV.70, onde ε_{kl}^* pode ser deduzido de ε_{kl}^{**} e da diferença entre as constantes elásticas ($C_{ijkl}^* - C_{ijkl}$). Assim, isolando ε_{kl}^* , pode-se escrever:

$$\varepsilon_{kl}^* = [(C_{ijkl}^* - C_{ijkl}) S_{klmn} + C_{ijkl}]^{-1} C_{ijkl}^* \varepsilon_{kl}^{**} \quad \text{IV.72}$$

Para

$$\varepsilon_{kl}^{**} = (\alpha_I - \alpha_M) \Delta T \quad \text{IV.73}$$

Onde $\Delta T < 0$

Desta maneira, pode-se escrever a deformação como sendo a diferença ($\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^*$).

Então a deformação será:

$$\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^* = (S_{klmn} - I) [(C_{ijkl}^* - C_{ijkl}) S_{klmn} + C_{ijkl}]^{-1} C_{ijkl}^* (\alpha_I - \alpha_M) \Delta T \quad \text{IV.74}$$

Para facilitar o entendimento, considere a seguinte notação:

$C_{ijkl}^* = C_I$ é a matriz de constantes elásticas da inclusão;

$C_{ijkl} = C_M$ é a matriz de constantes elásticas da base de alumínio;

$S_{klmn} = S$ é o tensor de Eshelby, sendo função do coeficiente de Poisson da matriz ($\nu = 0,33$), conforme consta nas equações (IV.75) abaixo[1,4]:

$$\begin{aligned}
S_{3333} &= \frac{7-5\nu}{15(1-\nu)}; \\
S_{1111} &= S_{2222} = \frac{7-5\nu}{15(1-\nu)}; \\
S_{1122} &= S_{2211} = \frac{-1+5\nu}{15(1-\nu)}; \\
S_{1133} &= S_{2233} = \frac{-1+5\nu}{15(1-\nu)}; \\
S_{3311} &= S_{3322} = \frac{-1+5\nu}{15(1-\nu)}; \\
S_{1212} &= S_{1221} = S_{2112} = S_{2121} = \frac{4-5\nu}{15(1-\nu)}; \\
S_{1313} &= S_{1331} = S_{3113} = S_{3131} = S_{3232} = S_{3223} = S_{2332} = S_{2323} = \frac{4-5\nu}{15(1-\nu)};
\end{aligned} \tag{IV.75}$$

Para todos os outros termos, o valor é ZERO

Assim, a eq. IV.74 acima pode ser também expressa por:

$$\varepsilon_{kl} - \varepsilon^*_{kl} = (S - I) [(C_I - C_M) S + C_M]^{-1} C_I (\alpha_I - \alpha_M) \Delta T \tag{IV.76}$$

Onde as constantes elásticas são dadas pelas matrizes abaixo, considerando o material isotrópico[1,15,35].

$$C_I = \begin{bmatrix} C_{I11} & \bar{C}_{I12} & C_{I12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{I12} & C_{I11} & C_{I12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{I12} & C_{I12} & C_{I11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{I11} - C_{I12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{I11} - C_{I12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{I11} - C_{I12}}{2} \end{bmatrix} \tag{IV.77}$$

$$C_M = \begin{bmatrix} C_{M11} & C_{M12} & C_{M12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{M12} & C_{M11} & C_{M12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{M12} & C_{M12} & C_{M11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{M11} - C_{M12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{M11} - C_{M12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{M11} - C_{M12}}{2} \end{bmatrix} \quad \text{IV.78}$$

Onde C_{11} e C_{12} estão relacionados com as constantes de Lamé[1,15,35], como se vê nas equações (IV.80)

$$\begin{aligned} C_{11} &= \lambda + 2G \\ C_{12} &= \lambda \end{aligned} \quad \text{IV.79}$$

Onde λ e G são funções do módulo de Young (E) e da razão de Poisson (ν), ou seja:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{e} \quad 2G = \frac{E}{1+\nu} \quad \text{IV.80}$$

Assim, as seguintes equações podem ser escritas:

$$\begin{aligned} C_{Mii} &= E_M (1 - \nu_M) / (1 - 2\nu_M) (1 + \nu_M); \\ C_{Mij} &= E_M \nu_M / (1 - 2\nu_M) (1 + \nu_M); \\ C_{M44} &= E_M / 2 (1 + \nu_M); \\ C_{Iii} &= E_I (1 - \nu_I) / (1 - 2\nu_I) (1 + \nu_I); \\ C_{Iij} &= E_I \nu_I / (1 - 2\nu_I) (1 + \nu_I); \\ C_{I44} &= E_I / 2 (1 + \nu_I) \end{aligned} \quad \text{IV.81}$$

Considerando ν_M e ν_I os coeficientes de Poisson da matriz e da inclusão, respectivamente, e

$$C_{44} = (C_{11} - C_{12}) / 2 \quad \text{IV.82}$$

O modelo acima representa o método de Eshelby, que considera o conceito de inclusão equivalente e o conceito de inclusão real. Este método vale para compósito de dimensões infinitas com uma inclusão, constituindo um sistema diluído. Analisar-se-á agora um modelo, onde surgirão valores maiores de fração volumétrica de partículas na base de alumínio.

IV.6.2. Modelo de sistemas para muitas partículas em matriz de alumínio

Este modelo tem como objetivo tratar de compósitos com frações volumétricas mais altas. Neste caso, usa-se o conceito de "back stress", introduzido pelo método de Eshelby modificado, que se baseia no balanço de tensões dado pela equação abaixo[4,41,53]:

$$(1-f) \langle \sigma \rangle_M + f \langle \sigma \rangle_I = 0 \quad \text{IV.83}$$

onde $\langle \sigma \rangle_M$ corresponde ao "back stress" e é a tensão média desenvolvida na matriz, $\langle \sigma \rangle_I$ é a tensão média na inclusão e f é a fração volumétrica de SiC na matriz de alumínio.

Esta tensão média na inclusão vale σ_I em um compósito infinito e $(\sigma_I + \langle \sigma \rangle_M)$ em um compósito finito.

O balanço de tensões acima é extremamente útil, pois relaciona o campo de tensões médio na matriz com o campo de tensões médio na inclusão. Este efeito pode ser estendido para outras inclusões ou para um modelo de distribuição espacial aleatória de partículas.

Para o caso de compósitos, onde há diferenças nos coeficientes de expansão térmica, o conceito de "back stress" está presente na forma $\sigma_I + \langle \sigma \rangle_M$ e a deformação de compressão na forma $\varepsilon_{KI} + \langle \varepsilon \rangle_M$. Assim, pode-se escrever:

- Para inclusão equivalente:

$$\sigma_I + \langle \sigma \rangle_M = C_M (\epsilon_{kl} + \langle \epsilon \rangle_M - \epsilon_{kl}^*) \quad \text{IV.84}$$

- Para inclusão real

$$\sigma_I + \langle \sigma \rangle_M = C_I (\epsilon_{kl} + \langle \epsilon \rangle_M - \epsilon_{kl}^{**}) \quad \text{IV.85}$$

Para

$$\langle \sigma \rangle_M = C_M \langle \epsilon \rangle_M \quad \text{IV.86}$$

O balanço de tensões pode ser usado para calcular o nível de "back stress" ou tensão média na matriz ($\langle \sigma \rangle_M$):

$$(1-f) \langle \sigma \rangle_M + f C_M (\epsilon_{kl} + \langle \epsilon \rangle_M - \epsilon_{kl}^*) = 0 \quad \text{IV.87}$$

Assim, desenvolvendo a expressão acima, tem-se:

$$\langle \sigma \rangle_M = -f C_M (\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^*) \quad \text{IV.88}$$

Igualando as duas eq. IV.84 e IV.85 acima e considerando a eq. IV.86, pode-se escrever:

$$C_M (\epsilon_{kl} + \langle \epsilon \rangle_M - \epsilon_{kl}^*) - C_M \langle \epsilon \rangle_M = C_I (\epsilon_{kl} + \langle \epsilon \rangle_M - \epsilon_{kl}^{**}) - C_M \langle \epsilon \rangle_M \quad \text{IV.89}$$

Simplificando:

$$C_M \epsilon_{kl} - C_M \epsilon_{kl}^* = C_I \epsilon_{kl} + C_I \langle \epsilon \rangle_M - C_I \epsilon_{kl}^{**} - C_M \langle \epsilon \rangle_M \quad \text{IV.90}$$

Como

$$\langle \epsilon \rangle_M = \frac{\langle \sigma \rangle_M}{C_M} \quad \text{IV.91}$$

Considerando também a eq. IV.88, pode-se escrever após simplificar:

$$C_M \varepsilon_{kl} - C_M \varepsilon_{kl}^* = C_I \varepsilon_{kl} - f C_I \varepsilon_{kl} + f C_I \varepsilon_{kl}^* - C_I \varepsilon_{kl}^{**} + f C_M \varepsilon_{kl} - f C_M \varepsilon_{kl}^* \quad \text{IV.92}$$

Como

$$\varepsilon_{kl} = S \varepsilon_{kl}^* \quad \text{IV.93}$$

Onde S é o tensor de Eshelby, que depende da forma da inclusão:

$$C_M S \varepsilon_{kl}^* - C_M \varepsilon_{kl}^* = C_I S \varepsilon_{kl}^* - f C_I S \varepsilon_{kl}^* + f C_I \varepsilon_{kl}^* - C_I \varepsilon_{kl}^{**} + f C_M S \varepsilon_{kl}^* - f C_M \varepsilon_{kl}^* \quad \text{IV.94}$$

Finalmente colocando em evidência ε_{kl}^* e outros termos comuns, pode-se escrever:

$$\{ (C_M - C_I) [S - f(S - I)] - C_M \} \varepsilon_{kl}^* = C_I \varepsilon_{kl}^{**} \quad \text{IV.95}$$

Ou

$$\varepsilon_{kl}^* = \{ (C_M - C_I) [S - f(S - I)] - C_M \}^{-1} C_I \varepsilon_{kl}^{**} \quad \text{IV.96}$$

Onde

$$\varepsilon_{kl}^{**} = (\alpha_I - \alpha_M) \Delta T \quad \text{IV.97}$$

Assim como já vimos:

$$\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^* = S \varepsilon_{kl}^* - \varepsilon_{kl}^* = (S - I) \varepsilon_{kl}^* \quad \text{IV.98}$$

Assim, usando expressão equivalente à eq. IV.34 ($u_p = \frac{E \varepsilon^2}{2}$) pode-se, agora, calcular

β , pois

$$u_p = \frac{\langle \sigma \rangle_M (S - I) \varepsilon_{kl}^*}{2} \quad \text{IV.99}$$

Mas, como a energia total pode ser dada por:

$$U = u_p \cdot N \quad \text{IV.100}$$

Portanto:

$$U = \frac{\langle \sigma \rangle_M (S - I) \varepsilon_{KI}^*}{2} N \quad \text{IV.101}$$

Ou então,

$$\frac{3}{2} \frac{N}{\beta} = \frac{f C_M [(S - I) \varepsilon_{KI}^*]^2}{2} N \quad \text{IV.102}$$

E ainda,

$$\beta = \frac{3}{f C_M [(S - I) \varepsilon_{KI}^*]^2} \quad \text{IV.103}$$

Desta maneira, finalmente, substituindo β na expressão IV.47, trocando a constante E (módulo de elasticidade) pela matriz de constantes elásticas, tem-se:

$$n(\sigma) = 4\pi N \left(\frac{3}{2C_M K \pi} \right)^{3/2} \sigma_{ij}^2 e^{-\frac{3\sigma_{ij}^2}{K 2C_M}} \quad \text{IV.104}$$

Onde

$$K = f C_M [(S - I) \varepsilon_{KI}^*]^2 \quad \text{IV.105}$$

Ou pela eq. IV.96

$$K = f C_M \{ (S - I) \{ (C_M - C_I) [S - f(S - I)] - C_M \}^{-1} C_I (\alpha_I - \alpha_M) \Delta T \}^2 \quad \text{IV.106}$$

$n(\sigma)$ indica o número de partículas com tensão entre σ e $\sigma + d\sigma$ por intervalo unitário de tensão. $n(\sigma)$ é chamada de função de distribuição de tensão

A eq. IV.104 é a função de distribuição de tensões no material compósito que leva em consideração a distribuição espacial e aleatória das partículas de SiC na matriz de alumínio.

Considere agora :

$$L = 4\pi N \left(\frac{3}{2C_M K\pi} \right)^{3/2} \quad \text{IV.107}$$

Substituindo L na expressão IV.104:

$$n(\sigma) = L \sigma_{ij}^2 e^{-\frac{3\sigma_{ij}^2}{2KC_M}} \quad \text{IV.108}$$

IV.7 - Determinação da tensão mais provável

Derivando a expressão IV.108, para se obter o seu máximo, que será a tensão mais provável:

$$n'(\sigma) = L \left[2\sigma_{ij} \cdot e^{-\frac{3\sigma_{ij}^2}{2KC_M}} + \sigma_{ij}^2 e^{-\frac{3\sigma_{ij}^2}{2KC_M}} \cdot \left(\frac{-6\sigma_{ij}}{2KC_M} \right) \right] \quad \text{IV.109}$$

Assim, pode-se escrever:

$$n'(\sigma) = L \cdot \sigma_{ij} e^{-\frac{3\sigma_{ij}^2}{2KC_M}} \left[2 - \frac{6\sigma_{ij}^2}{2KC_M} \right] \quad \text{IV.110}$$

Se

$$\frac{6\sigma_{ij}^2}{2KC_M} < 2 \Rightarrow n'(\sigma) > 0 \quad \text{IV.111}$$

Se

$$\frac{6\sigma_{ij}^2}{2KC_M} > 2 \Rightarrow n'(\sigma) < 0 \quad \text{IV.112}$$

Portanto:

$$\frac{6\sigma_{p_{ij}}^2}{2KC_M} = 2 \quad \text{IV.113}$$

Onde $\sigma_{p_{ij}}$ significa tensão mais provável

Finalmente, pode-se escrever a expressão geral que dá a tensão mais provável

$$\sigma_{p_{ij}}^2 = \frac{2fC_M^2 \{(S-I)\{(C_M - C_1)[S-f(S-I)] - C_M\}^{-1} C_1 (\alpha_I - \alpha_M) \Delta T\}^2}{3} \quad \text{IV.114}$$

IV.8 - Determinação da tensão média

$$\frac{3\sigma_{p_{ij}}^2}{KC_M} = 2 \Rightarrow KC_M = \frac{3\sigma_{p_{ij}}^2}{2} \quad \text{IV.115}$$

Substituindo esta última expressão em IV. 104:

$$n(\sigma) = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\sigma_{p_{ij}}^2} \right)^{3/2} \sigma_{ij}^2 e^{-\left(\frac{\sigma_{ij}^2}{\sigma_{p_{ij}}^2}\right)} \quad \text{IV.116}$$

$$n(\sigma) = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sigma_{p_{ij}}} \left(\frac{\sigma_{ij}^2}{\sigma_{p_{ij}}^2} \right) e^{-\left(\frac{\sigma_{ij}^2}{\sigma_{p_{ij}}^2}\right)} \quad \text{IV.117}$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\int_0^{\infty} \sigma n(\sigma) d\sigma}{N} \quad \text{IV.118}$$

Assim, substituindo IV.117 em IV.118, encontra-se:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{N} \frac{4N}{\sqrt{\pi} \sigma_{p_{ij}}} \int_0^{\infty} \sigma_{ij} \left(\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{p_{ij}}} \right)^2 e^{-\left(\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{p_{ij}}}\right)^2} d\sigma_{ij} \quad \text{IV.119}$$

E, finalmente:

$$\bar{\sigma} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sigma_{p_{ij}} \int_0^{\infty} \left(\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{p_{ij}}} \right)^3 e^{-\left(\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{p_{ij}}}\right)^2} d\left(\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{p_{ij}}}\right) \quad \text{IV.120}$$

Esta expressão IV.120 é do tipo

$$\bar{\sigma} = \sigma_{p_{ij}} \int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx \quad \text{IV.121}$$

Cuja solução é, segundo Spiegel[52],

$$\bar{\sigma} = \sigma_{p_{ij}} \left[\frac{1}{2 \cdot 1^{\frac{3+1}{2}}} \Gamma\left(\frac{3+1}{2}\right) \right] = \frac{1}{2} \quad \text{IV.122}$$

Então a expressão IV.120 fica

$$\bar{\sigma} = \frac{4\sigma_{p_{ij}}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \quad \text{IV.123}$$

Portanto a tensão média será:

$$\bar{\sigma} = 1,13\sigma_{p_{ij}} \quad \text{IV.124}$$

IV.9 - Determinação da tensão média quadrática

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\int_0^{\infty} \sigma_{ij}^2 n(\sigma) d\sigma}{N} \quad \text{IV.125}$$

Portanto, considerando a eq. IV.104:

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sigma_{p_{ij}}^2 \int_0^{\infty} \left(\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{p_{ij}}} \right)^4 e^{-\left(\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{p_{ij}}} \right)^2} d\left(\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{p_{ij}}} \right) \quad \text{IV.126}$$

A eq. IV.126 acima é do tipo:

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sigma_{p_{ij}}^2 \int_0^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx \quad \text{IV.127}$$

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sigma_{p_{ij}}^2 \left[\frac{1}{2 \cdot 1^{\frac{4+1}{2}}} \Gamma\left(\frac{4+1}{2}\right) \right] \quad \text{IV.128}$$

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sigma_{p_{ij}}^2 \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \right] \quad \text{IV.129}$$

$$\bar{\bar{\sigma}} = 1,225 \sigma_{p_{ij}} \quad \text{IV.130}$$

O gráfico da figura IV.1 abaixo representa a função IV.104, onde se indica o ponto de máximo (A) desta função. A tensão correspondente a este ponto chama-se “*tensão mais provável de ocorrer*”.

V - PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

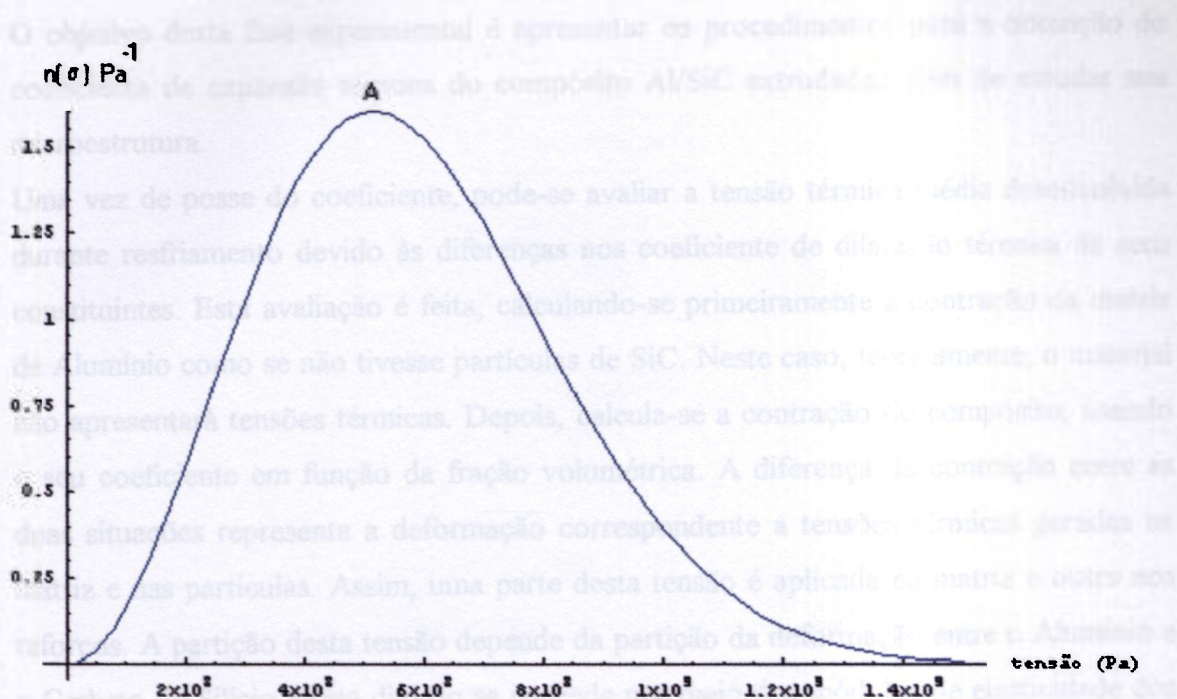


Figura IV.1 – Curva da função de distribuição de tensões em compósitos de Al/SiC45%, $n(\sigma)$ é chamada de função de distribuição

O número de partículas com tensões em qualquer intervalo $d\sigma$ é $n(\sigma)d\sigma$. O número de partículas com tensões entre dois limites σ_1 e σ_2 quaisquer é dado pela área sob a curva entre estes limites.

A tensão mais provável é representada pelo máximo da função acima, portanto, vale: $5,18 \cdot 10^8 \text{ Pa}$

V – PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

O objetivo desta fase experimental é apresentar os procedimentos para a obtenção do coeficiente de expansão térmica do compósito Al/SiC extrudado, além de estudar sua microestrutura.

Uma vez de posse do coeficiente, pode-se avaliar a tensão térmica média desenvolvida durante resfriamento devido às diferenças nos coeficiente de dilatação térmica de seus constituintes. Esta avaliação é feita, calculando-se primeiramente a contração da matriz de Alumínio como se não tivesse partículas de SiC. Neste caso, teoricamente, o material não apresentará tensões térmicas. Depois, calcula-se a contração do compósito, usando o seu coeficiente em função da fração volumétrica. A diferença de contração entre as duas situações representa a deformação correspondente a tensões térmicas geradas na matriz e nas partículas. Assim, uma parte desta tensão é aplicada na matriz e outra nos reforços. A partição desta tensão depende da partição da deformação entre o Alumínio e o Carbetto de Silício e esta divisão se procede por meio dos módulos de elasticidade dos materiais envolvidos. Depois de determinada a fração de deformação da matriz, calcula-se a tensão térmica média por meio da lei de Hooke, uma vez que este estudo refere-se a tensões elásticas.

As etapas desta fase experimental são apresentadas no fluxograma abaixo e, até a obtenção da barra extrudada, baseadas no trabalho de Coelho[56]. O detalhe de cada processo é descrito no decorrer do texto.

Este procedimento tem a função de obter três amostras de compósitos na proporção de 45% 30% e 20% de SiC na matriz de Alumínio, seguindo o fluxograma da figura V.1, sendo os processos de obtenção e análise descritos abaixo.

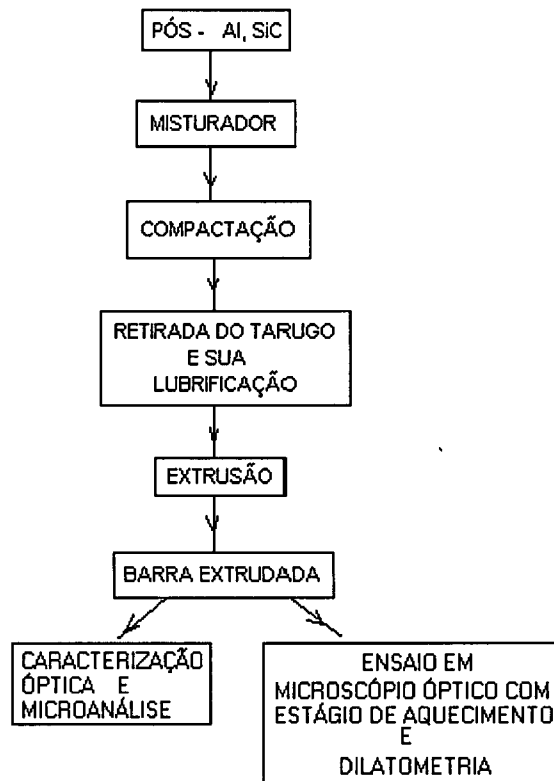


Figura V.1 Fluxograma apresentando o processo adotado neste trabalho

V.1 – Processamento no misturador - atritor de bolas

O pó de alumínio foi fornecido pela ALCOA com partículas de diâmetro médio de $25 \pm 3 \mu\text{m}$ com composição química dada na tabela abaixo:

Tabela V.1 – Composição química do pó de alumínio

Elemento	% em peso
Si	0,05
Fe	0,15
Outros	<0,03
Al	Bal.

O pó de carbeto de silício foi obtido pelo Centro de Ciência e Tecnologia de Materiais (CCTM) do IPEN e é constituído por partículas do tipo alfa (α) com diâmetro máximo de $0,6 \mu\text{m}$. O gráfico da figura V.2 mostra a distribuição de dimensões de partículas de carbeto de silício obtidas em 20h de moagem.

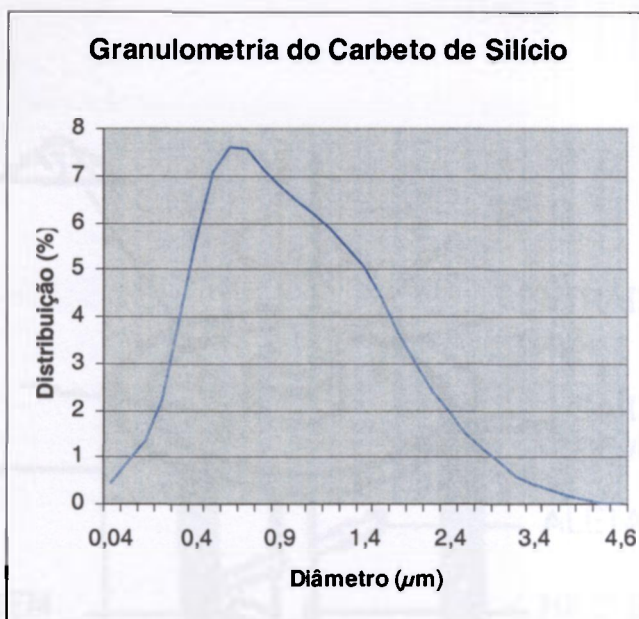


Fig. V.2 – Granulometria do Carbeto de Silício

Estes pós foram misturados e moídos, com ajuda de esferas de aço de 6,5 mm de diâmetro em um moinho durante duas horas a 1400 rpm. Para tanto, utilizou-se jarra de aço com diâmetro e altura internos de 82 mm e 110 mm. A figura V.3 mostra a jarra de aço usada com as esferas de aço.

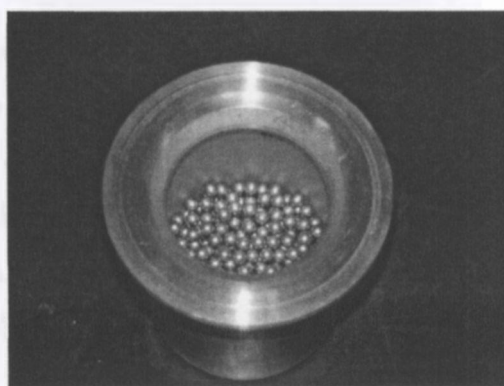


Fig. V.3 – Jarra e esferas de aço usadas no misturador

Para visualizar o processo de moagem, vide figura V.4, obtida de Coelho[56].

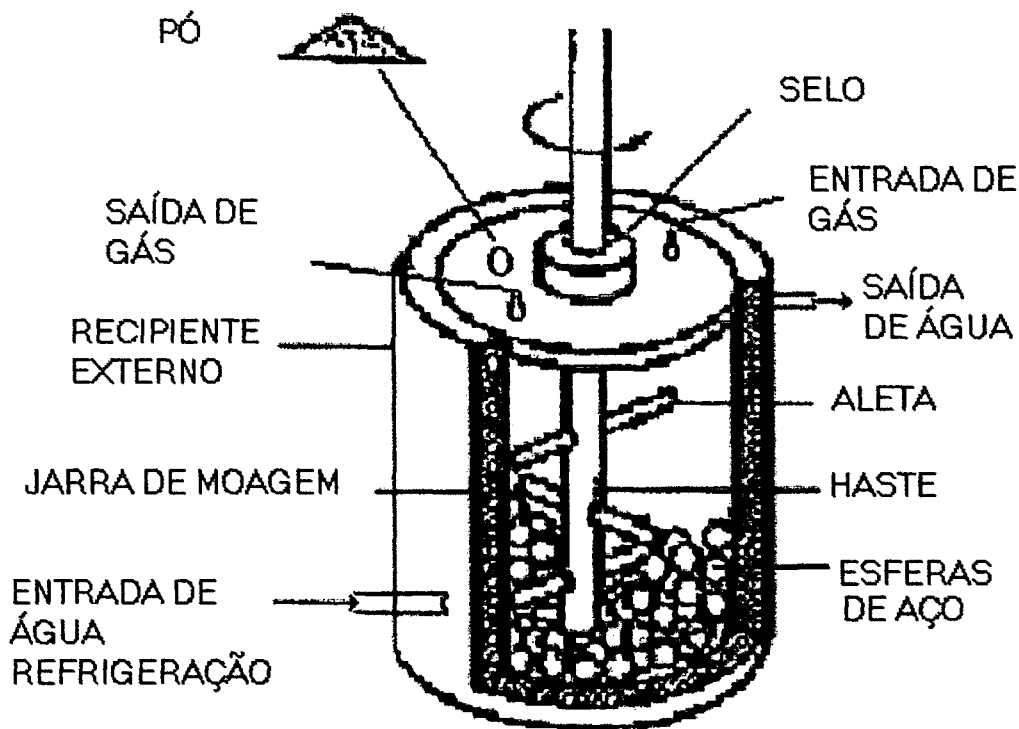


Fig. V.4 – Detalhes do moinho atritor[56]

O equipamento de mistura e moagem é do tipo vertical, fabricado por Netzsch do Brasil, com três opções de velocidade 800, 1400 e 2200 rpm.

Durante a moagem, com o choque entre os constituintes e devido à alta energia envolvida no processo, as partículas de Carbetto de Silício e as de Alumínio se associam, formando uma única partícula. Antes da moagem, os constituintes estavam separados, apenas misturados; depois de serem moídos, passam a ser uma única partícula [57, 58, 59] .

A tabela V.2 reúne os parâmetros seguidos na mistura e moagem

Tabela V.2 – Parâmetros para a mistura e moagem

Volume da jarra (cm ³)	580		
Massa de pó (g)	Al/SiC 20% 60,774	Al/SiC 30% 61,713	Al/SiC 45% 50
Massa de esfera de aço/ Massa de pó	9:1		
Diâmetro da esfera de aço (mm)	6,5		
Velocidade da haste (rpm)	1400		
Refrigeração	água		
Tempo de processo (h)	2		

A figura V.5 mostra uma foto do misturador, chamado moinho atritor, usado no processo.

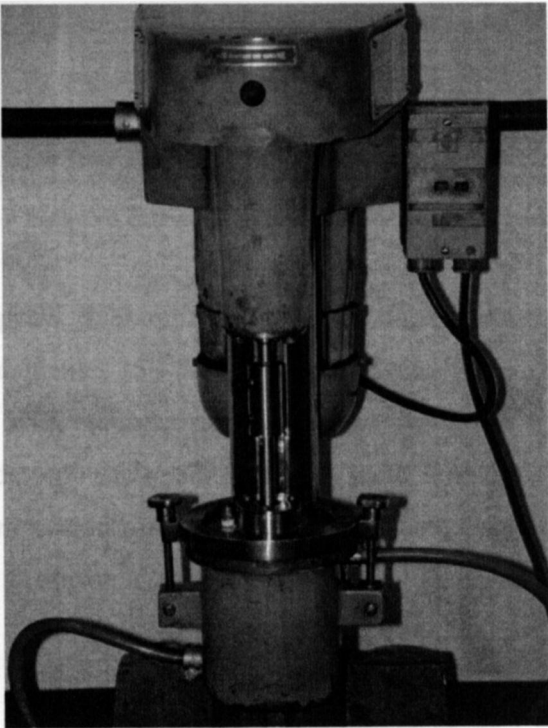


Fig. V.5 – Moinho atritor utilizado no processamento dos pós

V.2 – Compactação e extrusão

Para este processo, utilizou-se equipamento de compactação e extrusão à quente, especialmente projetado para a finalidade de laboratório por Coelho[56], conforme mostra a figura V.6. Esta figura mostra a prensa usada na compactação e extrusão, além da bomba difusora de vácuo associada ao equipamento e o recipiente com o punção montados para a extrusão no interior do forno.

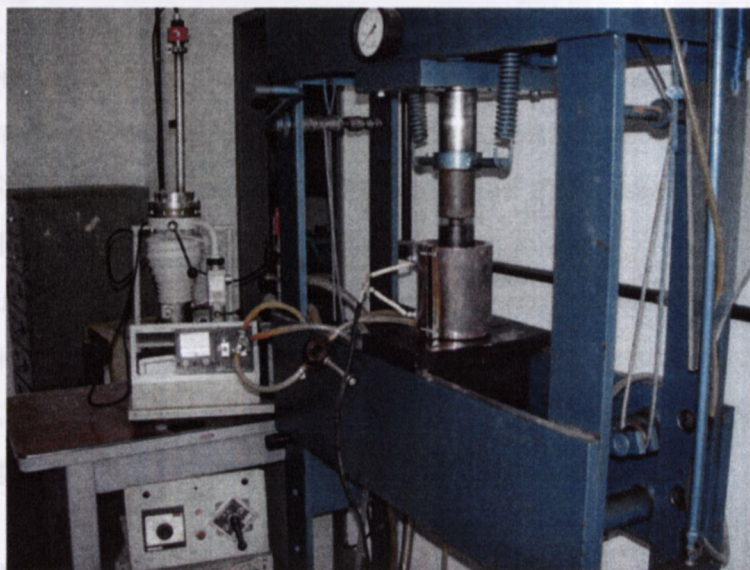


Fig. V.6 – Máquina extrusora pronta para extrusão de barras de Al/SiC

Este equipamento compacta e extruda barras com dimensões finais de 13mm de diâmetro por, aproximadamente, 150 mm de comprimento. As peças que compõem a matriz são feitas em aço H13, esquematizadas conforme as figuras V.7 e V.8 [56].

Os pós foram compactados sob vácuo em forma de tarugo com dimensões aproximadas de 30,5 mm de diâmetro por 48 mm de comprimento, com carga de compactação de 400 KN e foram obtidas as amostras abaixo relacionadas (Tabela V.3):

Tabela V.3 - Temperaturas de compactação e vácuo alcançado neste processo

AMOSTRA	MOÍDA	TEMPERATURA DE COMPACTAÇÃO (°C)	VÁCUO (10 ⁻¹ torr)
Al/SiC 45%	Sim	370	0,8
Al/SiC 30%	Sim	350	1,0
Al/SiC 20%	Sim	350	1,0
Al/SiC 30%	Não	380	1,0

Para que se pudesse aproveitar melhor o material moído, as barras compactadas correspondentes foram cortadas, reduzindo seu comprimento para aproximadamente 24 mm. Com isto, foram obtidos seis tarugos prontos para a extrusão. O material não moído não foi cortado.

Os tarugos foram lubrificados com graxa molykote, resistente a altas temperaturas, e extrudados, conforme tabela V.4, na razão de extrusão de 5:1. A matriz, projetada com semi-ângulo de 45°, produz barras de 13 mm de diâmetro, sendo utilizado processo por extrusão indireta. A prensa para esta extrusão é de comando manual.

Tabela V.4 – Temperaturas e pressões de extrusão

AMOSTRA	MOÍDA	TEMPERATURA DE EXTRUSÃO (°C)	PRESSÃO DE EXTRUSÃO (t)
Al/SiC 45%	Sim	440	26,0
		450	20,0
Al/SiC 30%	Sim	400	28,0
		360	27,0
Al/SiC 20%	Sim	380	26,0
		390	27,0
Al/SiC 30%	Não	380	27,0

No aquecimento, a pressão foi mantida em 30 t, uma vez que não se sabia a temperatura em que o material começaria a escoar. No momento em que a pressão começou a ser

aliviada, procedeu-se a extrusão do material, mantendo uma velocidade que conservasse a pressão de extrusão. Na extrusão indireta, o corpo compactado se mantém em repouso relativamente às paredes do container. Por causa disto, o atrito diminui e a força necessária para a extrusão pode ser menor do que se o processo de extrusão fosse direto. No processo de extrusão, o material com fração volumétrica de 45% sofreu fragilização de tal ordem, que não pode ser aproveitado. Em todas as barras obtidas na extrusão, verificaram-se fraturas no início da extrusão, isto é, na extremidade da barra por onde a extrusão começou. Isto deve ter ocorrido por causa do processo manual que não permite um bom controle da velocidade de extrusão, além da precariedade no controle de temperatura, embora esta afirmação mereça ser verificada em trabalho futuro.

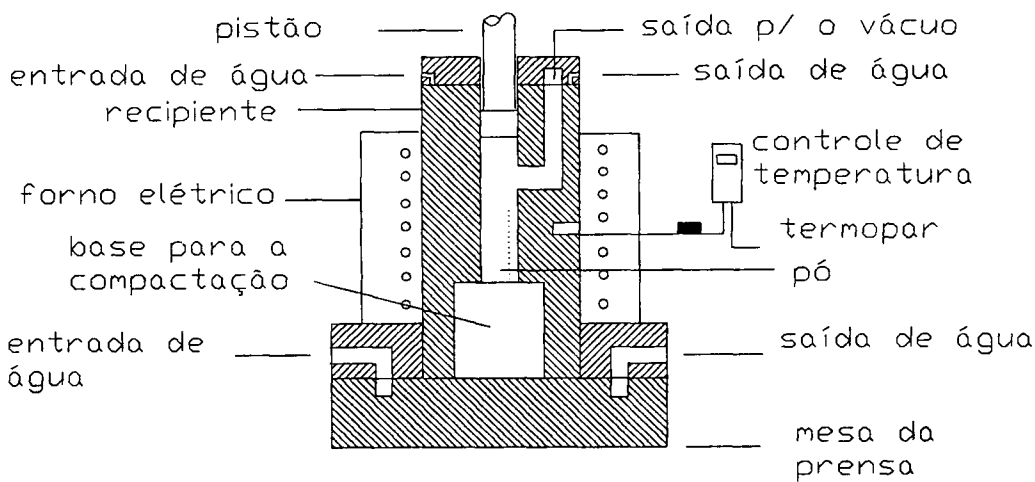


Fig.V.7 Representação esquemática do equipamento de compactação do pó

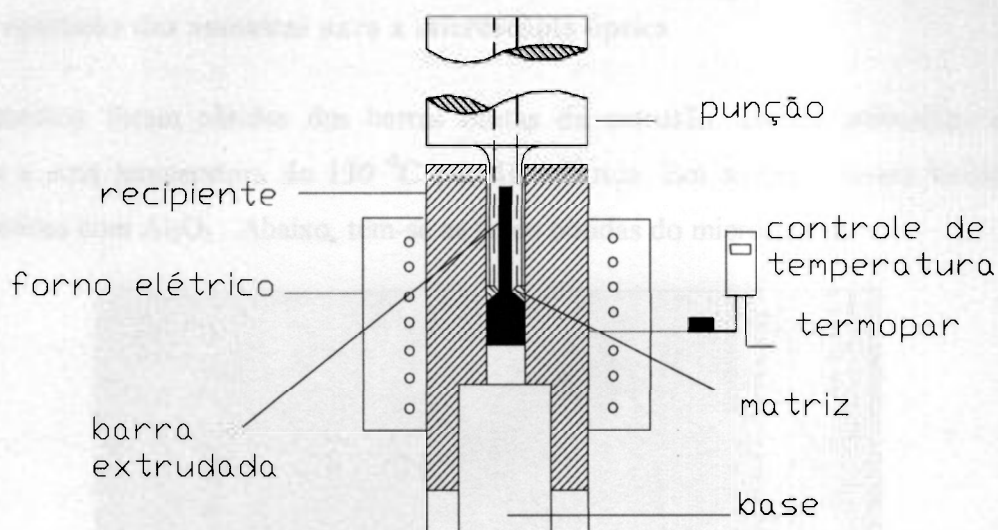


Fig.V.8 -Representação esquemática do equipamento para extrusão a quente

Vê-se na figura V.9 a barra já extrudada, porém ainda com a matriz acoplada. Esta barra foi obtida a partir do pó compactado de alumínio com 30% de partículas de SiC, sem que ambos tenham passado pelo processo de moagem.

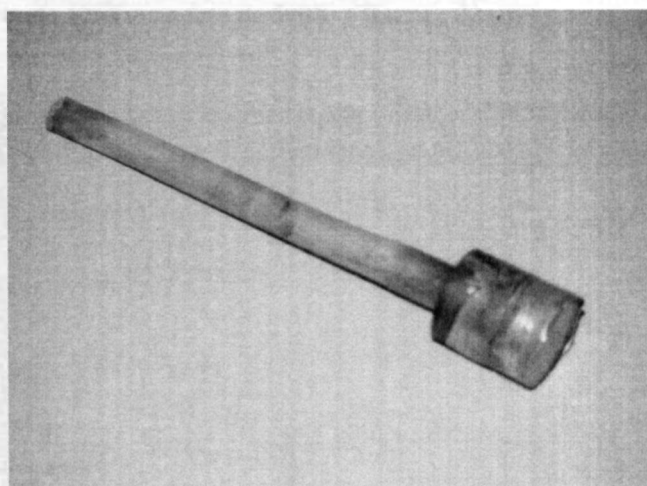


Fig. V.9 - Barra extrudada de Al/SiC30% não moído

V.3 – Preparação das amostras para a microscopia óptica

Estas amostras foram obtidas das barras brutas de extrusão. Foram embutidas em baquelite a uma temperatura de 130 °C por 10 minutos. Em seguida, foram lixadas, depois polidas com Al_2O_3 . Abaixo, têm-se as fotos obtidas do microscópio.

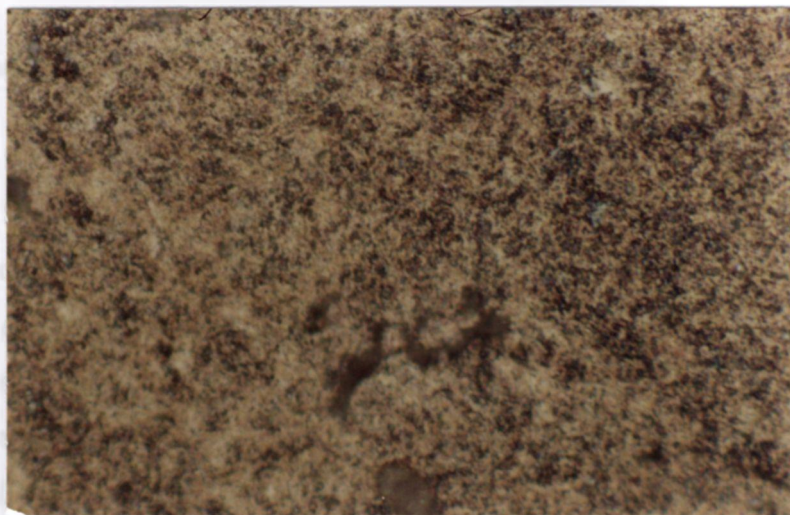


Fig.V.10 – Amostra de composto de Al/SiC com 20% de fração volumétrica obtida a 380 °C e pressão de 26t. Ampliação no negativo de 125X e na foto de 500X (Barra : 32 μm)



Fig.V.11 – Amostra de composto de Al/SiC com 30% de fração volumétrica obtida a 400 °C e pressão de 28t. Ampliação no negativo de 250X e na foto de 1000X (Barra : 16 μm)

É importante notar que as amostras não sofreram tratamento térmico necessário para a homogeneização do material. A recomendação de Coelho[56] é que as amostras sejam tratadas termicamente a 500°C por 1h e, em seguida, resfriadas ao forno até a temperatura ambiente. Resta saber em que medida a homogeneização, para uma determinada distribuição de partículas, influi na resistência do material compósito, o que pode ser feito em trabalho futuro.

V.4 – Preparação das amostras para a dilatometria

Estes ensaios foram feitos no Laboratório de Transformação de Fase da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo (USP-SC).

O equipamento usado é um dilatômetro de têmpera rápida ADAMEL-LHOMARGY, possibilitando ciclos térmicos na faixa de -160 até +1200 °C, usando nitrogênio como gás refrigerante.

As amostras para a dilatometria foram obtidas das barras extrudadas de Al/SiC 20% a 380 °C e Al/SiC30% a 400 °C. Estas amostras são cilíndricas e foram cortadas em eletro-erosão a fio nas seguintes dimensões: 14 mm de extensão por 2 mm de diâmetro.

As amostras foram aquecidas, no vácuo, obedecendo ao seguinte ciclo térmico:

- 1) velocidade de aquecimento: 1 °C/s;
- 2) máxima temperatura alcançada no aquecimento : 350 °C;
- 3) tempo de permanência na temperatura máxima : 20 min;
- 4) velocidade de resfriamento: 1 °C/s;

Abaixo tem-se o gráfico da figura V.12 que mostra o aquecimento e resfriamento das amostras.

O patamar de 350 °C, onde a amostra permaneceu por 20 min, foi estabelecido porque a 400 °C, em um ensaio anterior, houve o desprendimento de uma camada de óxido de cor verde, indicando que não se deve ultrapassar este patamar, pois pode haver diferenças na composição química do compósito.

Durante o aquecimento da amostra, vai-se medindo ponto a ponto o coeficiente de expansão térmica do material, resultando em uma tabela com os dados de dilatação por unidade de comprimento e variação de temperatura em °C, o coeficiente de dilatação linear verdadeiro (True alpha) e o coeficiente de dilatação linear médio (Average alpha). As amostras resultaram em duas tabelas, uma para Al/SiC 20% e outra para Al/SiC30%, juntamente com os gráficos correspondentes.

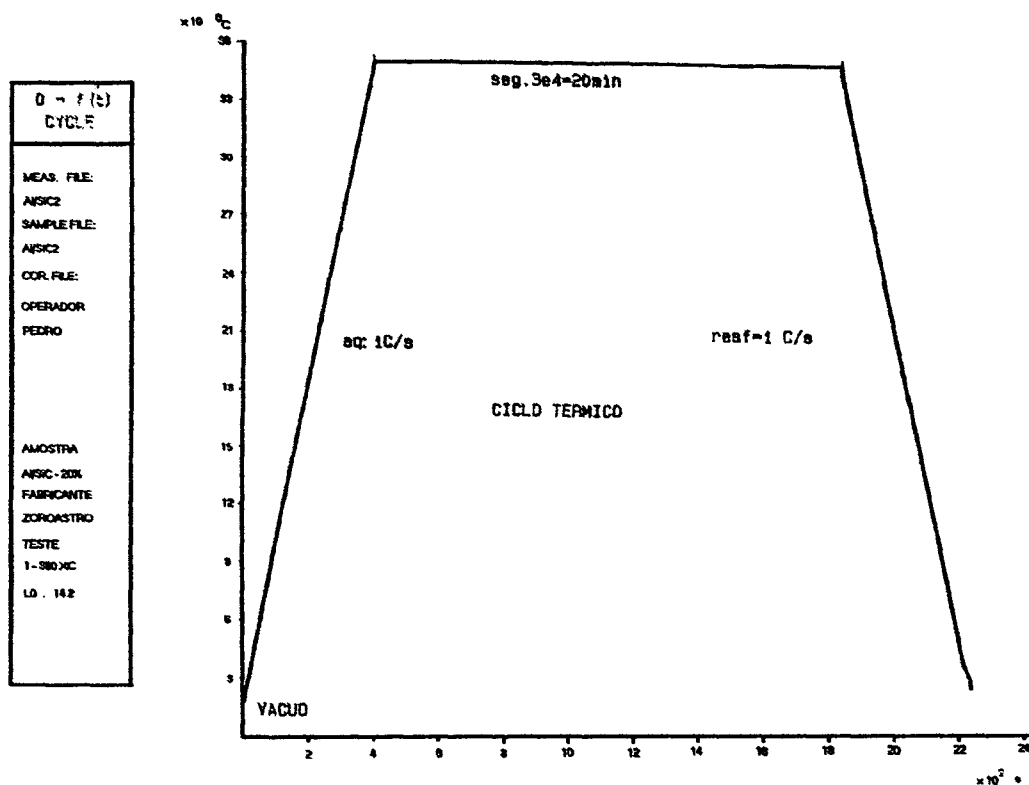


Fig.V.12 – Curva de aquecimento e resfriamento das amostras na dilatometria

Os coeficientes de dilatação linear podem ser usados para avaliar a tensão térmica média, conforme os cálculos feitos no capítulo VI.

V.5 – Preparação de amostras para microscopia eletrônica de varredura

Estas amostras foram obtidas das barras brutas de extrusão. Foram embutidas em baquelite a uma temperatura de 130 °C por 10 minutos. Em seguida, foram lixadas, depois polidas com Al_2O_3 e atacadas durante um minuto com uma solução contendo 5% de Ácido Fosfórico (H_3PO_4).

O equipamento usado foi um microscópio eletrônico de varredura Philips XL 30 com EDS (Espectroscopia por Dispersão de Energia).

A figura V.13 representa a micrografia da amostra retirada da extremidade da barra extrudada, formada por compósito de Al/SiC20%, que forneceu também a amostra usada no dilatômetro descrito acima. Pode-se perceber as partículas de SiC, detectadas por EDS.

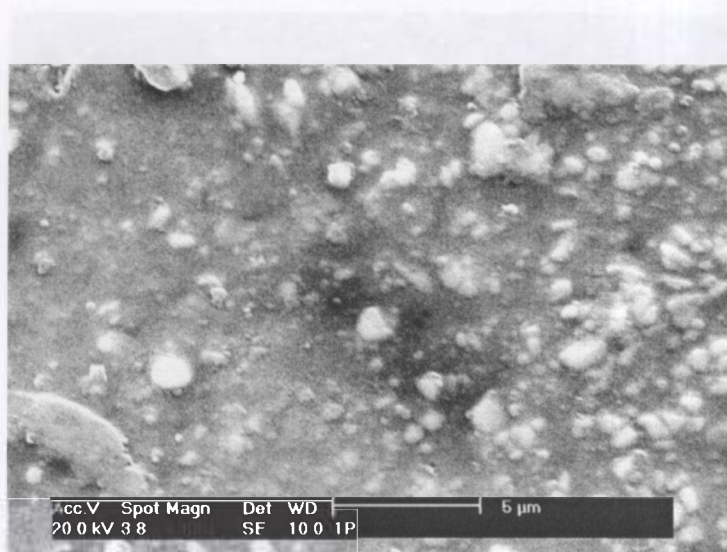


Fig. V.13 - Micrografia da amostra de Al/SiC20% (Barra:5μm)

A figura V.14 indica os componentes químicos da amostra da figura V.13.

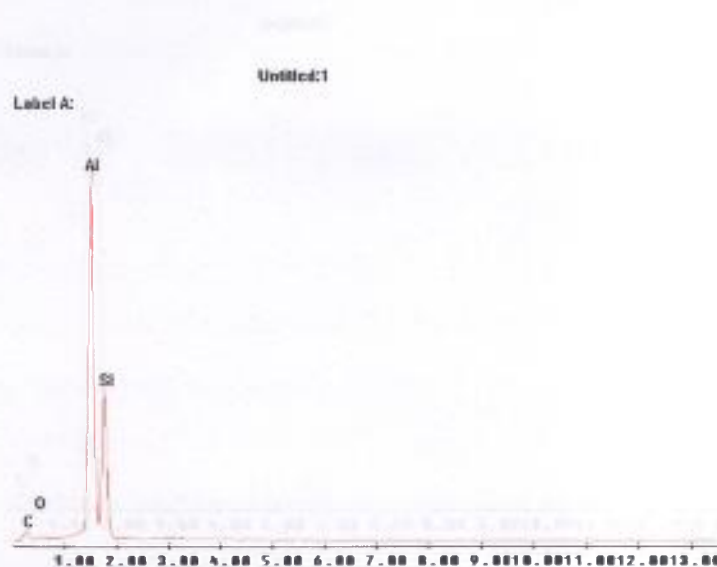


Fig.V.14 – Gráfico obtido por EDS da amostra de compósito Al/SiC20%

Com o objetivo de se verificar a qualidade das amostras destinadas ao dilatômetro, foi feita uma outra micrografia com a parte média da barra de Al/SiC30%, mostrada na figura V.15. A figura V.16 indica os componentes químicos correspondentes ao Al/SiC30%.

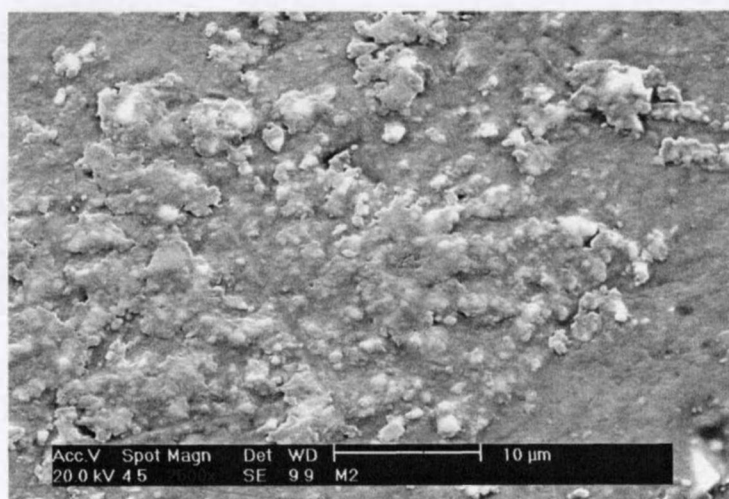


Fig.V.15 – Micrografia da amostra de Al/SiC30% (Barra:10μm)

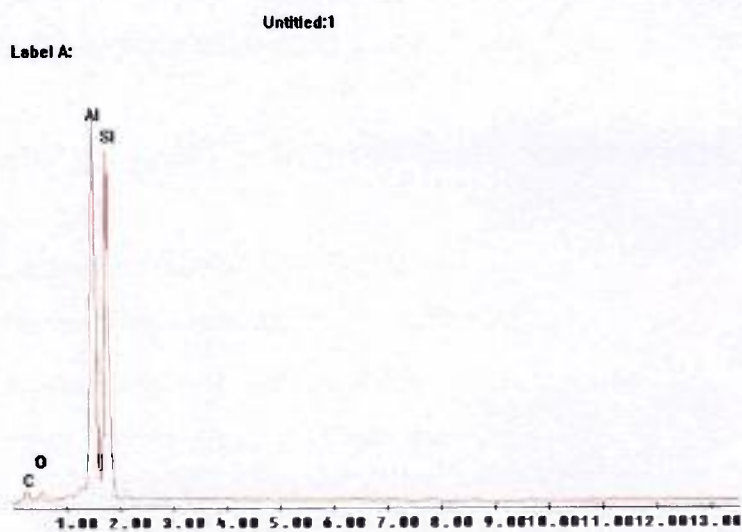


Fig. V.16 – Gráfico obtido por EDS da amostra de compósito Al/SiC30%

VI – DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

O objetivo deste capítulo é mostrar os cálculos da tensão mais provável, tensão média e tensão média quadrática obtidos por meio do modelo matemático desenvolvido nesta tese e comparar estes resultados com as tensões equivalentes de von Mises produzidas por elementos finitos e pela fase experimental através do coeficiente de dilatação térmica.

VI.1 - Cálculo da tensão mais provável, tensão média e tensão média quadrática para compósitos de Al/SiC

O modelo matemático proposto será agora aplicado para o caso de compósitos de matriz de Alumínio com partículas de SiC, embora este modelo possa ser generalizado para outros tipos de materiais e situações como será comprovado na próxima simulação.

Para a determinação da tensão mais provável, os seguintes dados podem ser considerados:

- 1) Módulo de elasticidade da matriz : $E = 73 \text{ GPa}$
- 2) Módulo de elasticidade das partículas de SiC: 450 GPa
- 3) Coeficiente de expansão térmica da partícula de SiC: $\alpha_I = 4 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$
- 4) Coeficiente de expansão térmica do alumínio: $\alpha_M = 23,6 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$
- 5) Variação de temperatura : $\Delta T = - 580 \text{ } ^\circ\text{C}$
- 6) Matriz das deformações térmicas: $\varepsilon_{kl}^{**} = (\alpha_I - \alpha_M) \cdot \Delta T$

$$\varepsilon_{kl}^{**} = \begin{bmatrix} 0,011368 \\ 0,011368 \\ 0,011368 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

7) Matriz de constantes elásticas da base de alumínio em Pa:

$$C_M = \begin{bmatrix} 10,8160 & 5,3273 & 5,3273 & 0 & 0 & 0 \\ 5,3273 & 10,8160 & 5,3273 & 0 & 0 & 0 \\ 5,3273 & 5,3273 & 10,8160 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,7443 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,7443 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,7443 \end{bmatrix} \cdot 10^{10}$$

8) Matriz de constantes elásticas da partícula de SiC em Pa:

$$C_I = \begin{bmatrix} 48,3700 & 9,9100 & 9,9100 & 0 & 0 & 0 \\ 9,9100 & 48,3700 & 9,9100 & 0 & 0 & 0 \\ 9,9100 & 9,9100 & 48,3700 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19,2300 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 19,2300 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19,2300 \end{bmatrix} \cdot 10^{10}$$

9) Matriz de tensores de Eshelby para partículas esféricas:

$$S = \begin{bmatrix} 0,53234 & 0,06468 & 0,06468 & 0 & 0 & 0 \\ 0,06468 & 0,53234 & 0,06468 & 0 & 0 & 0 \\ 0,06468 & 0,06468 & 0,53234 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,23383 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,23383 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,23383 \end{bmatrix}$$

10)Primeiramente, como exemplos, apresentam-se os cálculos da tensão mais provável ($\sigma_{p_{ij}}$), a tensão média ($\bar{\sigma}$) e a tensão média quadrática($\bar{\bar{\sigma}}$) para partículas esféricas de SiC em matriz de alumínio, considerando 10% e 60%. A tabela VI.1 reúne os resultados que servem para comparação entre tensões calculadas por meio do modelo matemático. Deve-se notar a diferença entre essas tensões em função da fração volumétrica.

Tabela VI.1 – Cálculos de tensão mais provável, média e média quadrática, usando o modelo matemático

FRAÇÃO VOLUMÉTRICA f (%)	TENSÃO MAIS PROVÁVEL $\sigma_{p_{ij}}$ (Pa)	TENSÃO MÉDIA $\bar{\sigma} = 1,13\sigma_{p_{ij}}$ (Pa)	TENSÃO MÉDIA QUADRÁTICA $\bar{\bar{\sigma}} = 1,225\sigma_{p_{ij}}$ (Pa)
10	$2,69.10^8$	$3,04.10^8$	$3,30.10^8$
60	$5,76.10^8$	$6,50.10^8$	$7,05.10^8$

Em seguida, serão apresentadas as curvas de distribuição de tensões principais para cada caso acima, podendo-se comparar os seus comportamentos.

VI.1.1 - Distribuição de tensões principais

Considere agora a distribuição de tensões dada pela equação IV.35

$$n(\sigma)=4\pi N\left(\frac{3}{2C_MK\pi}\right)^{3/2}\sigma_{ij}^2e^{-\frac{3\sigma_{ij}^2}{K2C_M}}$$

Onde

$$K=fC_M\{(S-I)\{(C_M-C_I)[S-f(S-I)]-C_M\}^{-1}C_I(\alpha_I-\alpha_M)\Delta T\}^2$$

O gráfico da figura VI.1 mostra a distribuição de tensões para cada fração volumétrica da tabela VI.1.

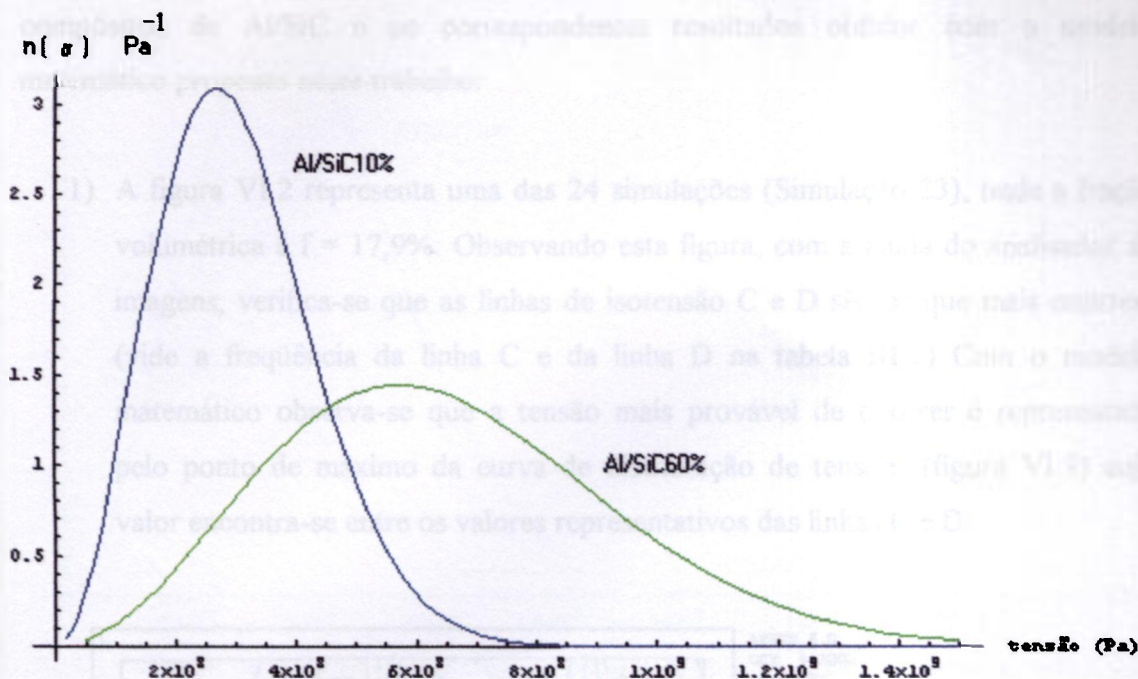


Figura VI.1 – Curvas da função de distribuição de tensões para frações volumétricas de 10% e 60% de SiC em matriz de Alumínio ($\Delta t = 580^{\circ}\text{C}$)

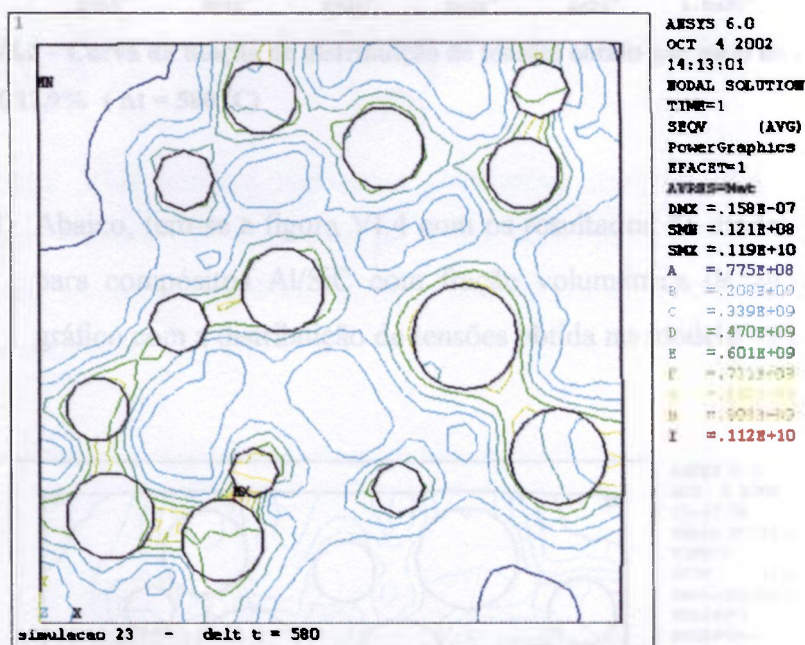
Comparando as curvas do gráfico, observa-se que as tensões mais prováveis e, conseqüentemente, as tensões médias são maiores para frações volumétricas maiores. O intervalo em que ocorrem as tensões é também maior para frações volumétricas maiores, ou seja, neste caso, as tensões tornam-se mais “*espalhadas*” e a curva desloca-se para a direita.

VI.1.2 – Resultados do Modelo Matemático

Os resultados do modelo matemático foram comparados com os obtidos em elementos finitos, onde cada simulação foi feita com o programa Ansys 6.0, calculando-se as tensões equivalentes de von Mises. Pode-se perceber, pelos gráficos obtidos em elementos finitos, observando-os por meio do analisador de imagens já descrito, que o intervalo de tensões coincide com o intervalo obtido por meio do modelo matemático. Esta observação é facilmente comprovada analisando a distribuição de tensões nos dois casos.

Abaixo, apresentam-se quatro exemplos de simulações em elementos finitos de compósitos de Al/SiC e os correspondentes resultados obtidos com o modelo matemático proposto neste trabalho:

- 1) A figura VI.2 representa uma das 24 simulações (Simulação 23), onde a fração volumétrica é $f = 17,9\%$. Observando esta figura, com a ajuda do analisador de imagens, verifica-se que as linhas de isotensão C e D são as que mais ocorrem (vide a frequência da linha C e da linha D na tabela III.1) Com o modelo matemático observa-se que a tensão mais provável de ocorrer é representada pelo ponto de máximo da curva de distribuição de tensões (figura VI.3) cujo valor encontra-se entre os valores representativos das linhas C e D.



**Fig. VI.2 – Simulação em elementos finitos de Al/SiC 17,9%
- tensões em Pa ($\Delta t = 580^\circ\text{C}$)**

O gráfico da figura VI.3 foi obtido por meio do modelo matemático e mostra o intervalo de tensões que pode surgir em um compósito de Al/SiC com 17,9% de fração volumétrica.

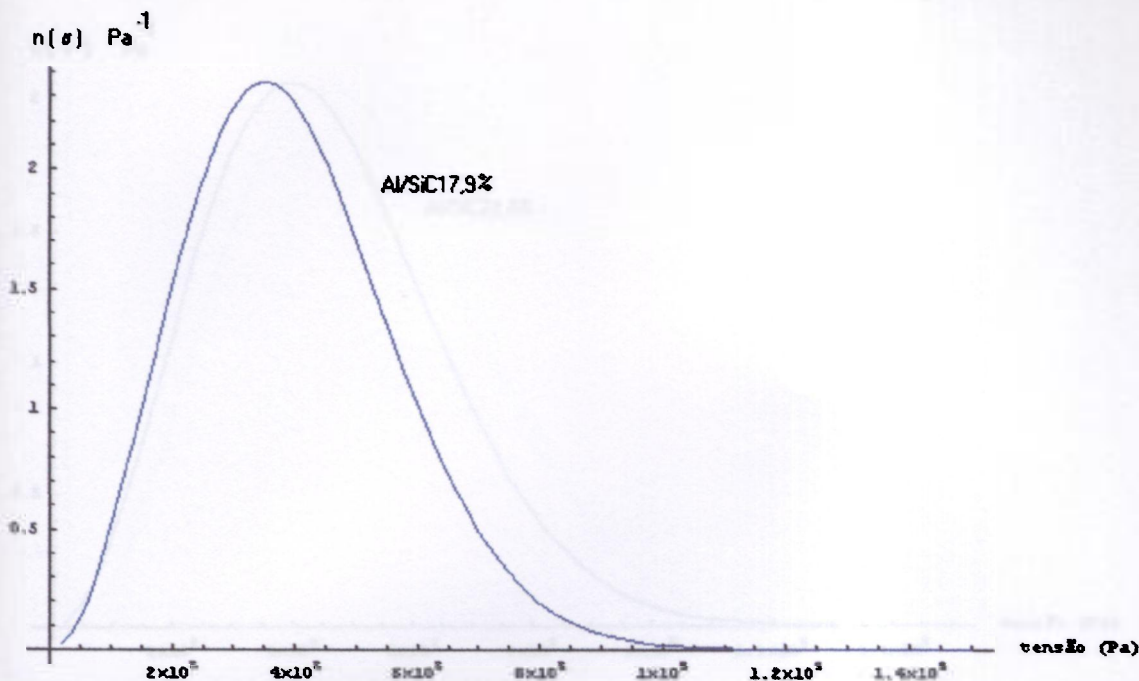


Fig. VL3 – Curva da função de distribuição de tensões obtido por meio do modelo matemático para Al/SiC17,9% ($\Delta t = 580^\circ\text{C}$)

2) Abaixo, tem-se a figura VI.4 com os resultados do modelo em elementos finitos para compósitos Al/SiC com fração volumétrica de 24,4% e, em seguida, o gráfico com a distribuição de tensões obtida no modelo matemático.

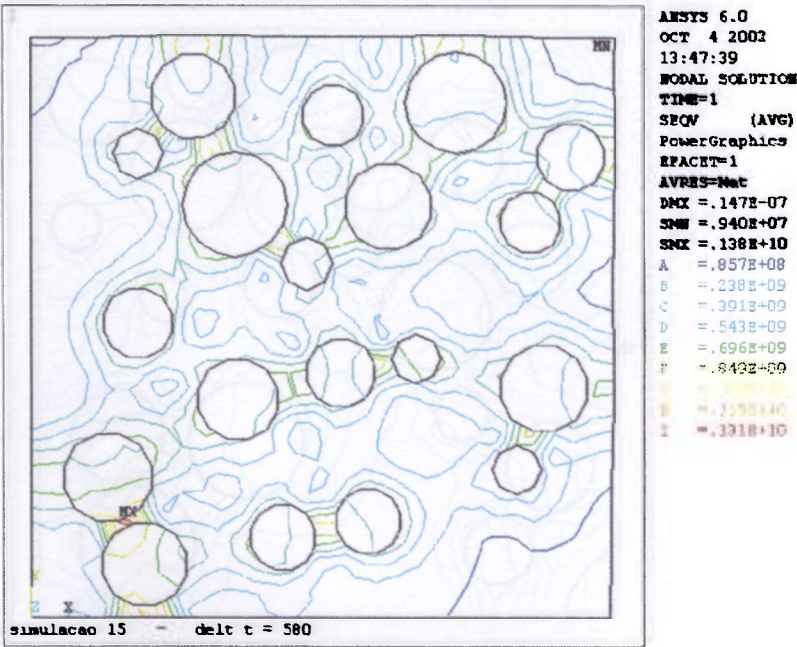


Fig. VI.4 –Simulação em elementos finitos de Al/SiC24,4%
- tensões em Pa ($\Delta t = 580^\circ\text{C}$)

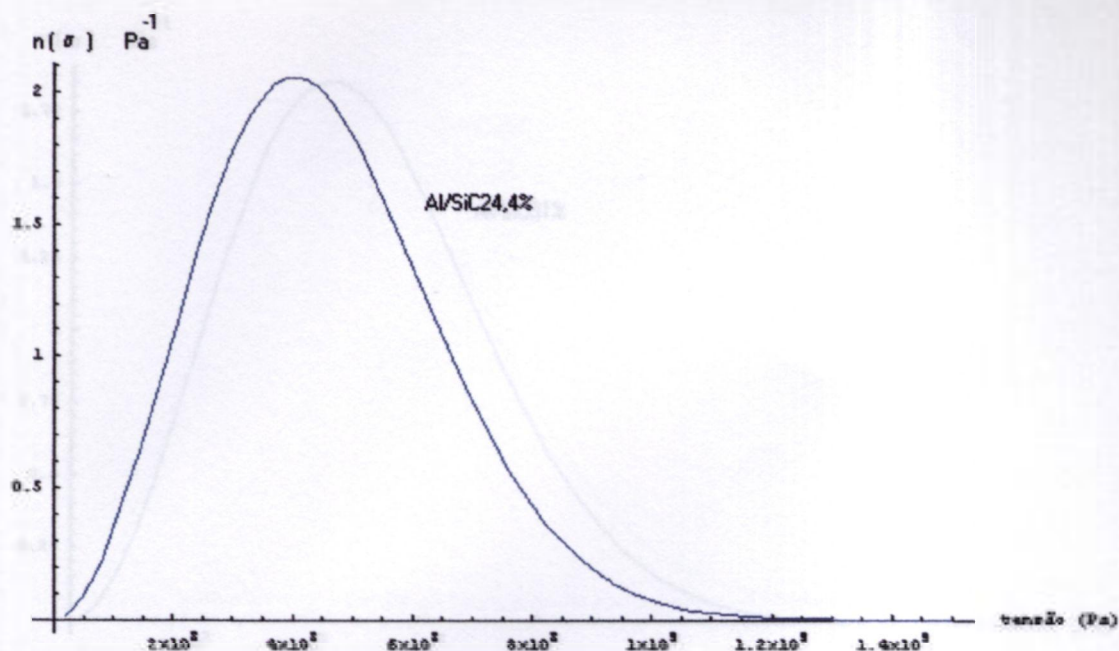


Fig. VL5 – Curva da função de distribuição de tensões obtido por meio do modelo matemático para Al/SiC24,4% ($\Delta t = 580^\circ\text{C}$)

A figura VI.6 também representa as tensões térmicas calculadas pelo método de elementos finitos em compostos de Al/SiC com fração volumétrica de 31% de SiC. Em seguida, apresenta-se a distribuição de tensões por meio do modelo matemático descrito neste trabalho (fig. VI.7).

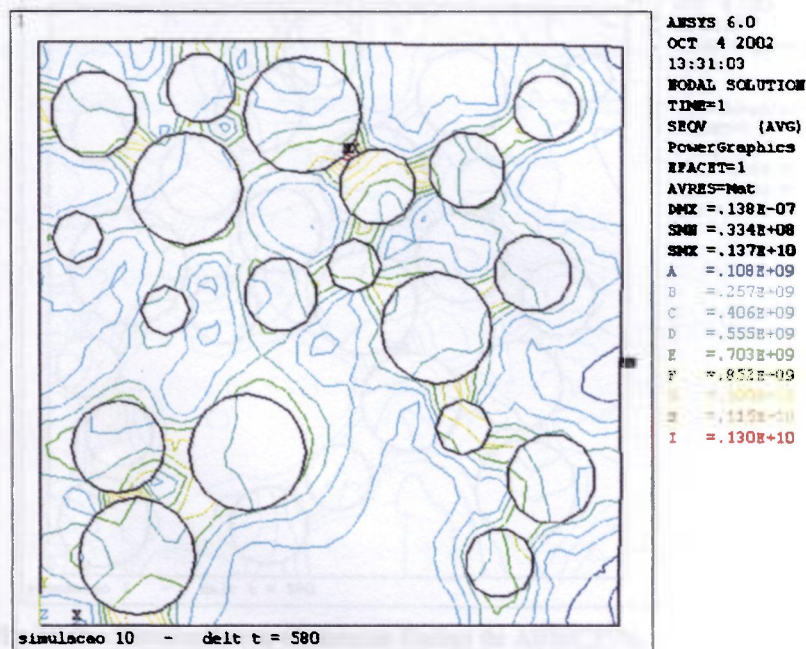


Fig. VI.6 – Simulação em elementos finitos de Al/SiC31% - tensões em Pa ($\Delta t = 580^\circ\text{C}$)

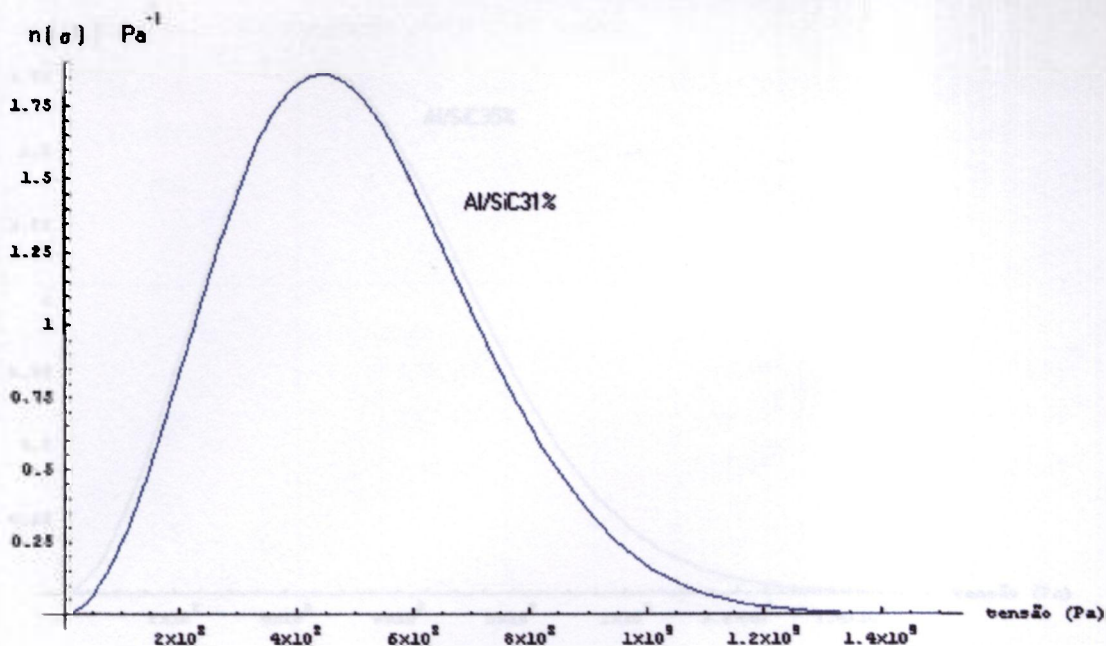


Fig. VI.7 – Curva da função de distribuição de tensões obtido por meio do modelo matemático para Al/SiC31% ($\Delta t = 580^\circ\text{C}$)

A figura VI.8 representa o compósito de Al/SiC com fração volumétrica de 35% e, em seguida, o gráfico da distribuição de tensões pelo método matemático (fig VI.9).

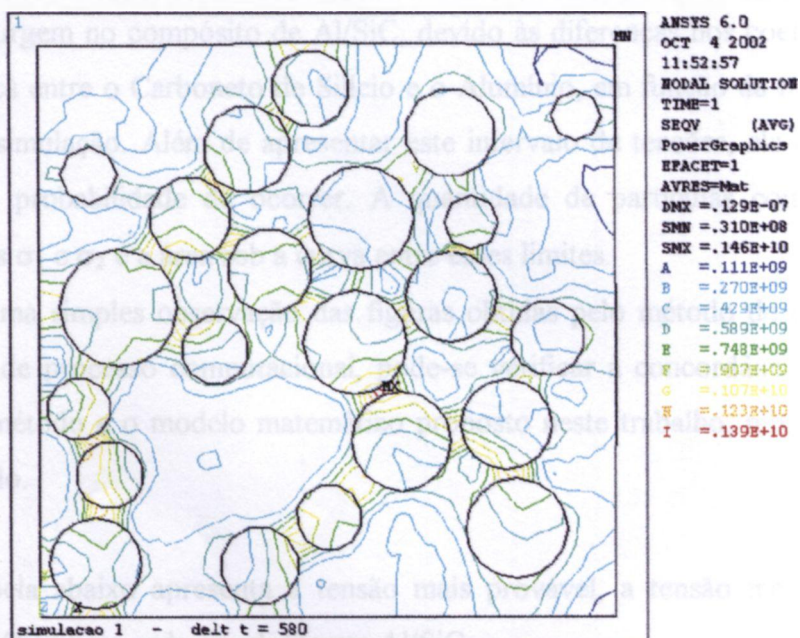


Fig. VI.8 – Simulação em elementos finitos de Al/SiC35% -tensões em Pa ($\Delta t = 580^\circ\text{C}$)

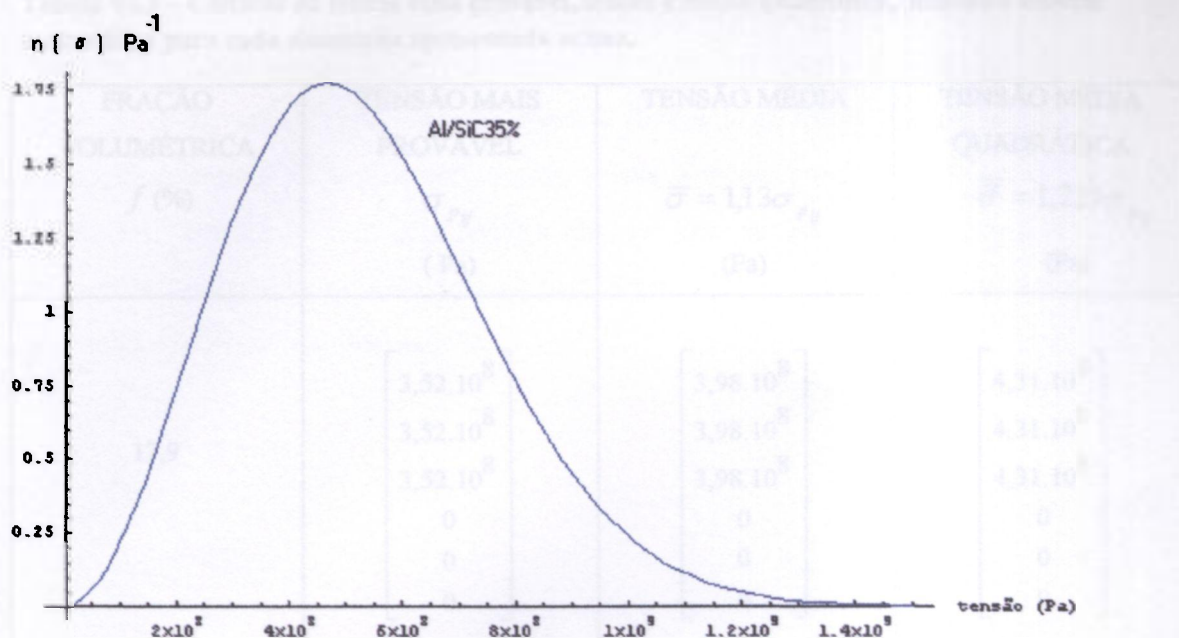


Fig. VI.9 –Curva da função de distribuição de tensões obtido por meio do modelo matemático para Al/SiC35% ($\Delta t = 580^\circ\text{C}$)

Observa-se em todos os casos acima (Fig. VI.4, VI.6 e VI.8) que o ponto máximo da curva de distribuição de tensões, correspondente à tensão mais provável, tem valor entre as curvas C e D cujas frequências com que ocorrem podem ser obtidas da tabela III.1.

A tensão mais provável de ocorrer é representada pelo ponto máximo no gráfico da distribuição de tensões. Este gráfico é capaz de indicar o intervalo de tensões térmicas que surgem no compósito de Al/SiC, devido às diferenças nos coeficientes de expansão térmica entre o Carboneto de Silício e o Alumínio, em função da fração volumétrica em cada simulação. Além de apresentar este intervalo de tensões, ele dá quais tensões têm maior probabilidade de ocorrer. A quantidade de partículas com tensões entre dois limites σ_1 e σ_2 é a área sob a curva entre esses limites.

Por uma simples observação das figuras obtidas pelo método de elementos finitos por meio de processo computacional, pode-se verificar a concordância de resultados entre este método e o modelo matemático proposto neste trabalho, mostrando a validade do modelo.

A tabela abaixo apresenta a tensão mais provável, a tensão média e a tensão média quadrática para cada simulação em Al/SiC.

Tabela VL2 – Cálculos de tensão mais provável, média e média quadrática, usando o modelo matemático para cada simulação apresentada acima.

FRAÇÃO VOLUMÉTRICA f (%)	TENSÃO MAIS PROVÁVEL $\sigma_{p_{ij}}$ (Pa)	TENSÃO MÉDIA $\bar{\sigma} = 1,13\sigma_{p_{ij}}$ (Pa)	TENSÃO MÉDIA QUADRÁTICA $\bar{\bar{\sigma}} = 1,225\sigma_{p_{ij}}$ (Pa)
17,9	$\begin{bmatrix} 3,52 \cdot 10^8 \\ 3,52 \cdot 10^8 \\ 3,52 \cdot 10^8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3,98 \cdot 10^8 \\ 3,98 \cdot 10^8 \\ 3,98 \cdot 10^8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4,31 \cdot 10^8 \\ 4,31 \cdot 10^8 \\ 4,31 \cdot 10^8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
24,4	$\begin{bmatrix} 4,04 \cdot 10^8 \\ 4,04 \cdot 10^8 \\ 4,04 \cdot 10^8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4,56 \cdot 10^8 \\ 4,56 \cdot 10^8 \\ 4,56 \cdot 10^8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4,95 \cdot 10^8 \\ 4,95 \cdot 10^8 \\ 4,95 \cdot 10^8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
31	$\begin{bmatrix} 4,47 \cdot 10^8 \\ 4,47 \cdot 10^8 \\ 4,47 \cdot 10^8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5,05 \cdot 10^8 \\ 5,05 \cdot 10^8 \\ 5,05 \cdot 10^8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5,47 \cdot 10^8 \\ 5,47 \cdot 10^8 \\ 5,47 \cdot 10^8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
35,2	$\begin{bmatrix} 4,71 \cdot 10^8 \\ 4,71 \cdot 10^8 \\ 4,71 \cdot 10^8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5,32 \cdot 10^8 \\ 5,32 \cdot 10^8 \\ 5,32 \cdot 10^8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5,77 \cdot 10^8 \\ 5,77 \cdot 10^8 \\ 5,77 \cdot 10^8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Foram feitas 25 simulações e as observações que indicam concordância de resultados se repetem em todas as simulações, conforme se verifica na tabela VI.3 abaixo. Esta tabela reúne a tensão média obtida por elementos finitos e as tensões advindas do modelo matemático: tensão mais provável, tensão média e média quadrática. Observando-se os resultados, conclui-se que a diferença de valores de tensão entre o método por elementos finitos e o modelo matemático desenvolvido nesta tese é muito pequena, provando a validade do modelo.

Tab. VL3 - Valores médios de tensão em Elementos Finitos e tensões representativas do modelo matemático para o compósito Al/SiC

Al/SiC - RODADAS - FRAÇÃO VOLUMÉTRICA f (%)	MX 10 ¹⁰ MN 10 ⁷	TENSÃO MÉDIA POR ELEMENTOS FINTOS 10 ⁸ Pa	MODELO MATEMÁTICO		
			TENSÃO MAIS PROVÁVEL 10 ⁸ Pa	TENSÃO MÉDIA 10 ⁸ Pa	TENSÃO MÉDIA QUADRÁTICA 10 ⁸ Pa
RODADA 1 34,96	0,146 3,100	5,80	4,70	5,31	5,75
RODADA 2 33,57	0,198 2,320	5,62	4,62	5,22	5,66
RODADA 3					
RODADA 4 26,45	0,144 4,600	5,17	4,18	4,72	5,12
RODADA 5					
RODADA 6 30,06	0,154 3,560	5,15	4,41	4,98	5,40
RODADA 7 31,01	0,140 4,070	5,13	4,47	5,05	5,47
RODADA 8 35,19	0,128 0,356	5,30	4,71	5,32	5,77
RODADA 9 34,71	0,147 2,780	5,65	4,68	5,29	5,73
RODADA 10 31,02	0,137 3,340	5,13	4,47	5,05	5,47
RODADA 11 35,2	0,128 0,378	5,29	4,71	5,32	5,77
RODADA 12 32,2	0,153 2,660	5,64	4,54	5,13	5,56
RODADA 13 27,37	0,140 0,421	5,25	4,24	4,79	5,20
RODADA 14 33,74	0,169 0,279	5,73	4,63	5,23	5,66
RODADA 15 24,44	0,138 0,940	4,46	4,04	4,56	4,95
RODADA 16 26,5	0,132 0,354	4,45	4,18	4,73	5,12
RODADA 17 29,5	0,178 1,850	4,87	4,38	4,95	5,36
RODADA 18 27,83	0,125 0,935	4,70	4,27	4,82	5,23
RODADA 19 28,4	0,158 0,067	5,13	4,31	4,87	5,28
RODADA 20 26,07	0,137 0,321	4,82	4,16	4,70	5,10
RODADA 21 32,00	0,117 3,490	4,97	4,53	5,12	5,55
RODADA 22 28,14	0,139 0,210	4,95	4,29	4,85	5,25
RODADA 23 17,95	0,119 1,210	4,05	3,52	3,98	4,31
RODADA 24 23,1	0,158 0,151	4,67	3,94	4,46	4,83
RODADA 25 26,3	0,111 1,290	4,82	4,17	4,71	5,11

VI.2 Tensão média em função do coeficiente de expansão térmica do compósito de Al/SiC56%

Shen et al [60] e Balch et al[61] pesquisaram os fatores que influenciam o coeficiente de expansão térmica do material compósito, estabelecendo um método para se determinar o valor desse coeficiente para materiais de duas fases.

O coeficiente de expansão térmica depende da fração volumétrica de partículas [60,61], além de ser influenciado por fatores físicos, tais como: microvazios dispersos na estrutura [62], velocidade de resfriamento [63], tratamento termomecânico [64], microestrutura, tamanho de partícula e processos de fabricação. Aumentando-se a fração volumétrica, reduz-se o coeficiente de expansão térmica.

Balch et al[61] e seus colaboradores determinaram o coeficiente de expansão térmica para compósitos de Al/SiC com 56% de SiC, comparando-o com outros modelos. Considerando a proposição deste autor, o valor deste coeficiente está entre $9 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$, enquanto as temperaturas são baixas, e $12,6 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$, para altas temperaturas, mas se a regra das misturas for usada, o valor deste coeficiente de expansão térmica é $13,8 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$. Embora no referido trabalho não se tenha indicação de qual temperatura é baixa, sabendo-se apenas que as amostras foram aquecidas ao ar de 20°C até 325°C e que o resfriamento ocorreu a $1^{\circ}\text{C}/\text{min}$, assumiu-se como referência, para o cálculo das tensões térmicas, uma temperatura inicial de 100°C e final de 20°C , considerando-se, portanto, uma variação em região de baixa temperatura, para que se pudesse usar o coeficiente de $9 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$.

Com estes dados pode-se calcular a tensão térmica média em um compósito Al/SiC56% como se segue, comparando-a com as tensões térmicas calculadas por meio do modelo proposto por este trabalho:

- 1) Deformação específica da matriz pura de alumínio para uma variação de temperatura, em módulo, de 80°C

$$\varepsilon_{Al} = \alpha_M \cdot \Delta T = 23,6 \cdot 10^{-6} \cdot 80 = 1,888 \cdot 10^{-3}$$

Onde α_M é o coeficiente de expansão térmica da matriz de alumínio

Esta deformação específica é calculada como se a matriz não possuísse partículas de SiC, ou seja, ela contrai-se livremente sem gerar teoricamente tensões térmicas.

- 2) Deformação específica do compósito Al/SiC56% ($\alpha = 9.10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$) para a mesma variação de temperatura em módulo.

$$\varepsilon_c = \alpha_c \cdot \Delta T = 9.10^{-6} \cdot 80 = 7,2.10^{-4}$$

Onde α_c é o coeficiente de expansão térmica do material compósito Al/SiC com 56% de fração volumétrica.

- 3) Calculando a diferença entre deformações específicas, tem-se: $11,68.10^{-4}$

Esta diferença corresponde à deformação (contração) que vai produzir a tensão térmica no compósito devido à diferença nos coeficientes de expansão térmica entre matriz e reforço. Esta deformação é dividida entre a matriz e a quantidade de partículas. Como o módulo de elasticidade do alumínio é 73 GPa e o módulo de elasticidade do SiC é 450GPa, portanto 6,16 vezes maior, o percentual de deformação deste reforço em relação ao total de deformação no compósito é 6,16 vezes menor. Portanto, pode-se escrever:

$$\varepsilon_{Al} = 6,16\varepsilon_{SiC}$$

$$\varepsilon_{Al} + \varepsilon_{SiC} = 11,68.10^{-4}$$

Resolvendo este sistema, tem-se

$$\varepsilon_{Al} = 10,05 \cdot 10^{-4}$$

Portanto a tensão média na matriz do compósito Al/SiC56% será:

$$\bar{\sigma} = 7,33.10^7 Pa$$

Esta tensão pode ser avaliada pelo método de Eshelby, segundo Clyne et al[4], como se vê abaixo:

$$\sigma_{méd} = -f C_M (S - I) \{ (C_M - C_I) [S - f(S - I)] - C_M \}^{-1} C_I (\alpha_I - \alpha_M) \Delta T$$

Pode-se agora reunir todos os dados de tensão média no quadro abaixo cujos valores foram calculados para $\Delta t = 80^\circ C$:

Tabela VI.4 – Valor de tensão obtido por meio do coeficiente de expansão térmica do compósito Al/SiC 56%, comparando os resultados com o método de Eshelby e com o modelo matemático

Tensão mais provável determinada pelo modelo matemático proposto (Pa)	Tensão média determinada pelo método de Eshelby (Pa)	Tensão média em função do coeficiente de expansão térmica do compósito (Pa)
$7,75 \cdot 10^7$	$7,10 \cdot 10^7$	$7,33 \cdot 10^7$

Os dados experimentais foram obtidos por dilatométrica. Constatou-se, comparando estes dados experimentais com os apresentados nos trabalhos acima, que os coeficientes de dilatação linear não estão de acordo. Isto deve ter ocorrido devido ao processo de obtenção do compósito por meio de extrusão e também porque a amostra, em relação à barra extrudada, é extremamente pequena.

A extrusão a partir do pó de Alumínio, que é um material mole, com o Carbetto de Silício, que é um material extremamente duro, deve ter concentrado o reforço em algumas regiões, como se fosse uma segregação. Assim, algumas regiões devem ter excesso de reforços e outras regiões falta de SiC, ou seja, deve ter ocorrido uma heterogeneidade muito grande no material compósito, uma vez que a máquina de extrusão é de controle manual de velocidade e o controle de temperatura é precário.

O corpo de prova para a dilatométrica, sendo muito pequeno, deve ter sido cortado de regiões com falta de SiC, influenciando a análise no dilatômetro, embora pelas

micrografias apresentadas no capítulo anterior (Fig. V.13 e V.15), a amostra tenha saído a contento. Além disto, outros fatores devem ter concorrido para que se obtivesse um alto coeficiente de dilatação linear. Por ser linear, a medição ocorrendo ao longo de um eixo, a possibilidade de se encontrar poucas partículas de SiC ao longo deste eixo aumenta ou, então, o material analisado pode ter tido, durante o processo de extrusão, a formação excessiva de porosidades, o que atrapalha a medição, conforme literatura já mencionada[61,62].

Esta observação não invalida o resultado do trabalho atual, que é o modelo matemático, mas merece ser verificada em um trabalho futuro sobre processo de extrusão.

Tomando-se o valor da tensão térmica desenvolvida no resfriamento e obtida pelo modelo matemático para o compósito de Al/SiC20%, pode-se, invertendo o cálculo acima, achar o coeficiente de expansão térmica para este compósito. Neste caso, com uma tensão térmica desenvolvida de $5,10 \cdot 10^7$ Pa, o coeficiente de expansão térmica médio seria de $\alpha = 13,45 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.

O compósito Al/SiC30%, para uma tensão térmica desenvolvida de $6,08 \cdot 10^7$ Pa, dada por meio do modelo matemático, teria um coeficiente de expansão térmica médio de $\alpha = 11,5 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.

VI.3 – Modelo matemático aplicado para compósitos de matriz de Latão (70Cu – 30Zn) com reforços de SiC.

Para que a validade do modelo matemático pudesse ser comprovada, trocou-se o material da matriz, refazendo-se as simulações em elementos finitos e comparando os resultados destas simulações com os resultados obtidos por meio do modelo matemático proposto neste trabalho. A matriz escolhida é constituída de Latão reforçada com partículas de SiC. A fim de determinar a tensão mais provável, tensão média e tensão média quadrática, pode-se considerar os seguintes dados para o latão e para as partículas:

- 1) Módulo de elasticidade da matriz: $E = 120 \text{ GPa}$
- 2) Módulo de elasticidade das partículas de SiC: $E = 450 \text{ GPa}$
- 3) Coeficiente de expansão térmica do SiC : $\alpha_{\text{I}} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$
- 4) Coeficiente de expansão térmica do latão : $21 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$
- 5) Variação de temperatura : $\Delta T = - 580 \text{ } ^\circ\text{C}$

6) Matriz de deformações térmicas: $\epsilon_{kl}^{**} = (\alpha_I - \alpha_M) \Delta T$

$$\epsilon_{kl}^{**} = \begin{bmatrix} 0,00986 \\ 0,00986 \\ 0,00986 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

7) Matriz de constantes elásticas da base de latão em Pa

$$C_M = \begin{bmatrix} 17,78 & 8,757 & 8,757 & 0 & 0 & 0 \\ 8,757 & 17,78 & 8,757 & 0 & 0 & 0 \\ 8,757 & 8,757 & 17,78 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19,23 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 19,23 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19,23 \end{bmatrix} \cdot 10^{10}$$

8) Matriz de constantes elásticas da inclusão em Pa

$$C_I = \begin{bmatrix} 48,3700 & 9,9100 & 9,9100 & 0 & 0 & 0 \\ 9,9100 & 48,3700 & 9,9100 & 0 & 0 & 0 \\ 9,9100 & 9,9100 & 48,3700 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19,2300 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 19,2300 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19,2300 \end{bmatrix} \cdot 10^{10}$$

9) Matriz de tensores de Eshelby para partículas esféricas

$$S = \begin{bmatrix} 0,53234 & 0,06468 & 0,06468 & 0 & 0 & 0 \\ 0,06468 & 0,53234 & 0,06468 & 0 & 0 & 0 \\ 0,06468 & 0,06468 & 0,53234 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,23383 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,23383 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,23383 \end{bmatrix}$$

As 25 simulações em Elementos Finitos, que levaram em conta estes materiais, foram feitas em programa Ansys 5.5. Abaixo, pode-se observar três figuras(fig. VI.10, VI.11, VI.12) que representam estes compósitos e seus respectivos campos de tensão obtidos por este método. Em seguida, apresentam-se os gráficos obtidos com o modelo matemático proposto, onde se observa o intervalo de tensões térmicas devido às diferenças nos coeficientes de expansão térmica dos materiais. O ponto máximo da curva indica a tensão mais provável de ocorrer. Comparando o intervalo de tensões obtido por Elementos Finitos com o intervalo de tensões obtido por meio do modelo matemático proposto neste trabalho, pode-se verificar a coerência deste modelo.

O método de elementos finitos baseou-se em 2-D nos seguintes parâmetros de temperatura, limites máximos de dimensões das partículas, condições de simetria e de contorno para o caso do compósito 70Cu-30Zn / SiC:

- 1) Análise dentro do regime linear.
- 2) Temperatura inicial de referência: 600°C
- 3) Temperatura final de referência: 20°C
- 4) Dimensão máxima que a partícula deve ter em uma direção: $L = 0,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
- 5) Dimensão do modelo: $C = 2,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}$

6) Condições de simetria e de contorno já comentadas no capítulo III:

$$\begin{aligned} T_x = T_y = 0; u_x = 0; & \quad \text{para } x = 0 \\ u_y = 0; & \quad \text{para } y = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

7) Conseguiu-se o mesmo refinamento de malhas com elementos triangulares que o mostrado na figura III.I.

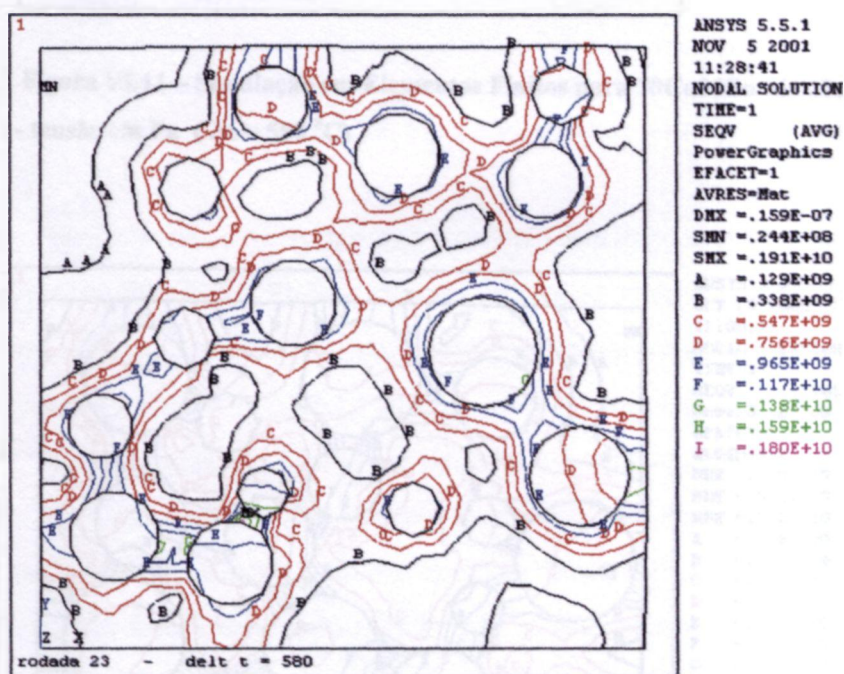


Figura VI.10 – Simulação em Elementos Finitos para 70Cu30Zn/SiC17,9%
 - tensão em Pa ($\Delta t = 580^\circ\text{C}$)

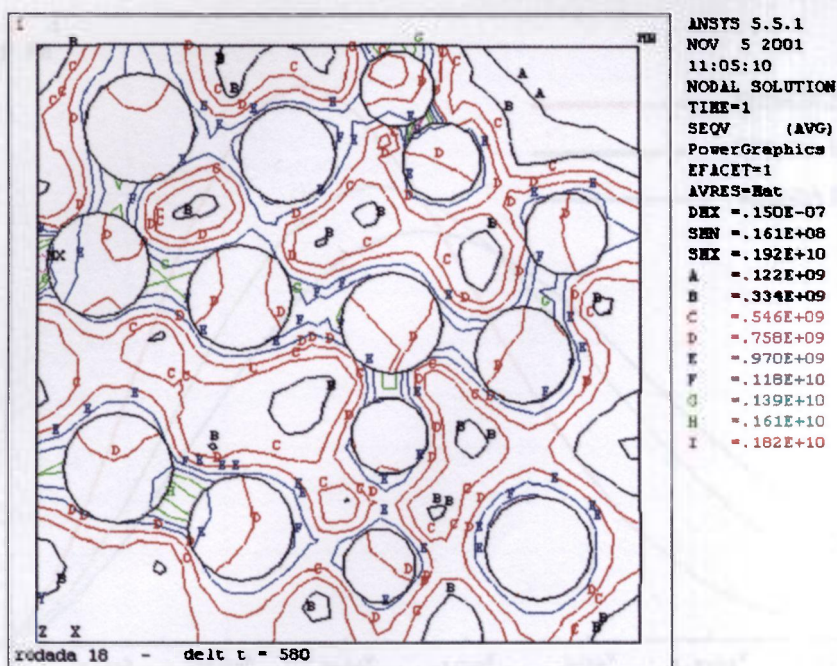


Figura VI.11 – Simulação em Elementos Finitos para 70Cu30Zn/SiC27,8%
 - tensão em Pa ($\Delta t = 580^{\circ}\text{C}$)

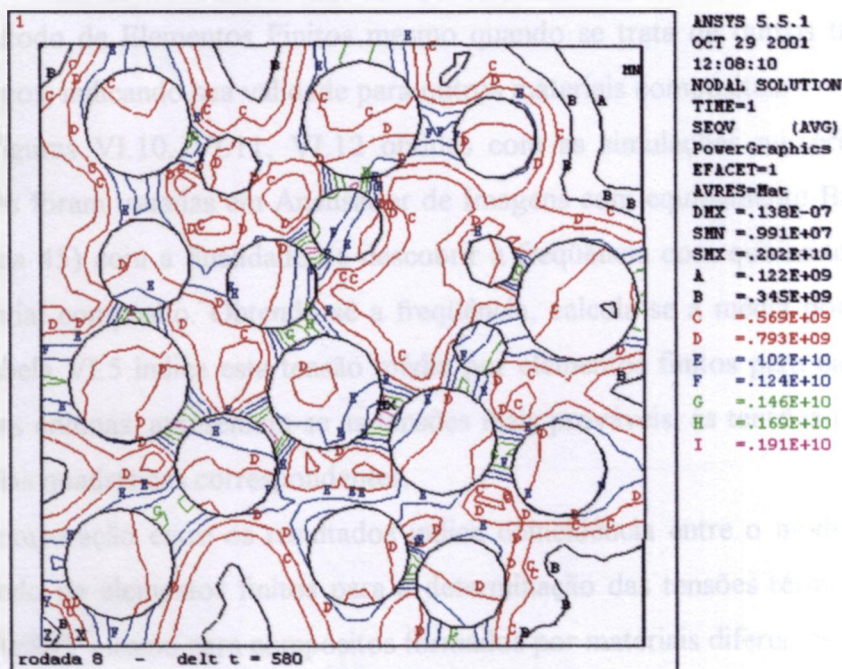


Figura VI.12 – Simulação em Elementos Finitos para 70Cu30Zn/SiC35,2%
 - tensão em Pa ($\Delta t = 580^{\circ}\text{C}$)

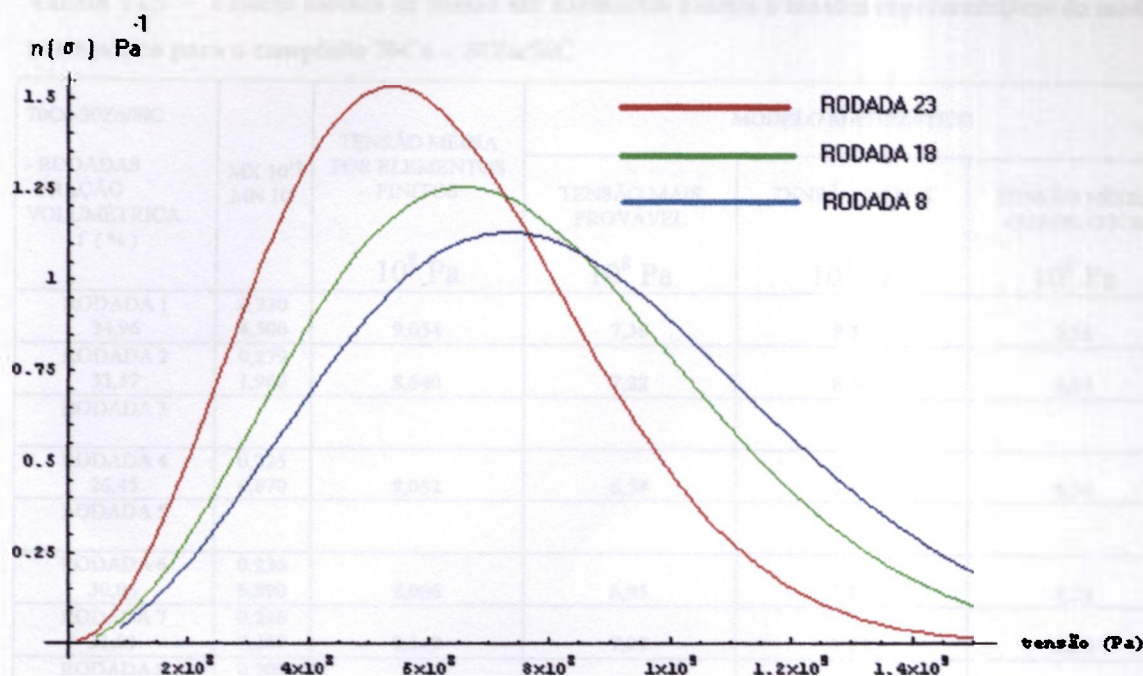


Figura VI.13 – Curvas obtidas por meio do modelo matemático e que correspondem às simulações em Elementos Finitos das figuras VI.10, VI.11 e VI.12 acima ($\Delta t = 580^\circ\text{C}$)

Pode-se observar neste parágrafo que o modelo matemático está também de acordo com o método de Elementos Finitos mesmo quando se trata de outros tipos de matrizes e reforços, indicando sua validade para outros materiais compósitos.

As figuras VI.10, VI.11, VI.12 obtidas com as simulações numéricas em elementos finitos foram tratadas em Analisador de Imagens com equipamento Büehler (descrito na pagina 45) com a finalidade de descobrir a frequência com que as tensões ocorrem no material compósito. Obtendo-se a frequência, calcula-se a média ponderada da tensão. A tabela VI.5 indica esta tensão média por elementos finitos para cada simulação. Nas outras colunas, apresentam-se as tensões mais prováveis, as tensões médias e as tensões médias quadráticas correspondentes.

A comparação entre os resultados indica coincidência entre o modelo matemático e o método de elementos finitos para a determinação das tensões térmicas em compósitos de Al/SiC mesmo para compósitos formados por materiais diferentes.

Tabela VL5 - Valores médios de tensão em Elementos Finitos e tensões representativas do modelo matemático para o compósito 70Cu – 30Zn/SiC

70Cu-30Zn/SiC - RODADAS - FRAÇÃO VOLUMÉTRICA f (%)	MX 10 ¹⁰ MN 10 ⁷	TENSÃO MÉDIA POR ELEMENTOS FINITOS 10 ⁸ Pa	MODELO MATEMÁTICO		
			TENSÃO MAIS PROVÁVEL 10 ⁸ Pa	TENSÃO MÉDIA 10 ⁸ Pa	TENSÃO MÉDIA QUADRÁTICA 10 ⁸ Pa
RODADA 1 34,96	0,230 4,500	9,054	7,36	8,31	9,00
RODADA 2 33,57	0,279 1,960	8,640	7,22	8,16	8,84
RODADA 3					
RODADA 4 26,45	0,225 6,870	8,052	6,54	7,39	8,01
RODADA 5					
RODADA 6 30,06	0,236 6,890	8,006	6,95	7,86	8,52
RODADA 7 31,01	0,226 7,260	8,149	7,00	7,92	8,58
RODADA 8 35,19	0,202 0,991	8,346	7,38	8,34	9,04
RODADA 9 34,71	0,223 3,440	8,726	7,33	8,29	8,98
RODADA 10 31,02	0,221 5,080	8,044	6,98	7,89	8,55
RODADA 11 35,2	0,204 1,000	8,396	7,38	8,34	9,04
RODADA 12 32,2	0,228 3,360	8,628	7,09	8,00	8,67
RODADA 13 27,37	0,215 0,745	8,167	6,62	7,48	8,10
RODADA 14 33,74	0,256 0,810	8,976	7,23	8,17	8,86
RODADA 15 24,44	0,219 2,590	7,102	6,29	7,11	7,71
RODADA 16 26,5	0,215 0,957	7,449	6,52	7,37	7,98
RODADA 17 29,5	0,256 2,740	7,820	6,82	7,71	8,36
RODADA 18 27,83	0,192 1,610	7,567	6,64	7,51	8,14
RODADA 19 28,4	0,236 0,442	8,135	6,71	7,58	8,22
RODADA 20 26,07	0,222 0,651	7,594	6,46	7,30	7,91
RODADA 21 32,00	0,194 5,660	7,962	7,09	8,01	8,68
RODADA 22 28,14	0,228 0,195	7,794	6,69	7,56	8,19
RODADA 23 17,95	0,191 2,440	6,509	5,48	6,20	6,72
RODADA 24 23,1	0,251 0,153	7,370	6,12	6,91	7,49
RODADA 25 26,3	0,179 1,820	7,858	6,48	7,33	7,94

VII – CONCLUSÕES

São inúmeros os mecanismos de resistência dos materiais compósitos. Para partículas grandes, ocorre transferência de carga da matriz para o reforço, o qual suporta a maior parte da carga aplicada. Para partículas pequenas, é o acréscimo de densidade de discordâncias ao redor das partículas, ocorrendo devido às diferenças nos coeficientes de expansão térmica, que estabelece o mecanismo de resistência, isto é, a matriz suporta uma porção da carga, enquanto os reforços têm a função de resistir ao movimento de discordâncias, como ocorre com precipitados incoerentes, restringindo a deformação plástica.

Esta resistência, embora dependa de vários fatores, o que torna a sua compreensão extremamente complexa, é função da distribuição de reforços, sendo possível o seu equacionamento.

A função de distribuição de tensões desenvolvida neste trabalho atende esta necessidade de equacionamento da resistência por meio da dependência entre tensões térmicas e distribuição de partículas em compósitos para o caso de modelagem de compósitos de partículas esféricas, sendo o regime elástico. Aliás, deve-se observar as altas tensões térmicas desenvolvidas no modelo, tanto matemático quanto pelo método de elementos finitos. Isto ocorreu, por causa da opção pela análise em regime elástico, sem haver transição, em nenhum momento para o regime plástico. No momento em que esta transição ocorre, não prevista nos cálculos deste trabalho, a matriz, por ser dúctil, permite grandes deformações plásticas, produzindo altas densidades de discordâncias ao redor das partículas. Alguns trabalhos (Mortensen[65] e de Llorca et al[66]) fornecem as propriedades mecânicas de alguns compósitos. Por exemplo, o limite de escoamento do compósito Al-3,5%Cu/SiC20% é de 257 MPa e o limite de escoamento do compósito 2124AlT6 / SiC20% , obtido por metalurgia do pó, é de 450 MPa, os quais servem de comparação com os valores obtidos neste trabalho.

É importante notar que não se prevê forças externas aplicadas ao modelo, a não ser, as cargas térmicas.

Este modelo matemático, além de fornecer o valor das tensões térmicas elásticas que mais ocorrem e a tensão média, permite descobrir, calculando a área no gráfico da função de distribuição entre dois limites de tensão, a quantidade de partículas envolvidas com as tensões entre esses limites.

Comparando as curvas dos gráficos referentes ao modelo matemático, percebe-se que as tensões mais prováveis e as tensões médias são maiores para frações volumétricas maiores. O intervalo em que ocorrem as tensões é também maior para frações volumétricas maiores.

Observando-se os resultados, conclui-se que a diferença de valores de tensão entre o método de elementos finitos e o modelo matemático desenvolvido nesta tese é muito pequena, provando a validade do modelo. A equação que representa o modelo matemático, embora com algumas limitações, uma vez que não considera quebra de partículas, formação de precipitados, percolação ou discordâncias geometricamente necessárias, mostrou-se válida para relacionar a distribuição de partículas com as tensões térmicas no material compósito, quando comparada com a mecânica do contínuo.

Observando-se os resultados vê-se que o modelo matemático vale tanto quanto o método de elementos finitos para a determinação das tensões térmicas em compósitos de Al/SiC quanto para outros tipos de compósitos formados por materiais diferentes.

Concluindo, pode-se dizer que o tratamento matemático que relaciona a resistência do material com a mecânica estatística é eficiente para estudar a influência da distribuição de SiC nas tensões térmicas desenvolvidas no compósito.

VIII – SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

- Adaptar o modelo matemático para o caso de determinação de tensões internas em compósitos carregados com forças externas.
- Desenvolver um modelo matemático para as tensões térmicas em função da distribuição de partículas no compósito em regime plástico.
- Medir o coeficiente de expansão térmica em barras extrudadas a partir do pó de Alumínio misturado com o pó de Carbetto de Silício para várias frações volumétricas.
- Verificar a influência do tamanho da partícula na determinação do coeficiente de expansão térmica do compósito e na recristalização.
- Verificar a influência dos agrupamentos de SiC na formação de precipitados.
- Verificar em que medida a fragilização ocorre, no processo de extrusão, em função da velocidade e da temperatura de extrusão.
- Verificar em que medida o tratamento térmico influi, para uma determinada distribuição, na resistência do material compósito.
- Verificar a influência do processo de fabricação, especialmente a extrusão, na heterogeneidade do compósito.

IX – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Taya, M. ; Arsenault R.J. - **Metal Matrix Composites - Thermomechanical Behavior** - Pergamon Press- First Edition, 1989.
- [2] Yoshimura, H. N. - **Produção e Caracterização de Compósito de Matriz de Alumínio Reforçada com Partículas de SiC obtidos por Extrusão de Pó** - Dissertação de Mestrado- Eng. Metalúrgica E.P. USP- São Paulo, 1994.
- [3] Mourisco, A.J. - **Preparação e Caracterização de Compósito de Matriz de Alumínio 1100 com Partículas de SiC por Metalurgia do Pó** - Dissertação de Mestrado- IPEN - São Paulo, 1995.
- [4] Clyne, T.W.; Withers, P.J. - **An Introduction to Metal Matrix Composites** - Cambridge University Press - First Ed. - 1993.
- [5] Salvo, Luc - **Comunicação Particular** - Labo GPM2-ENSPG - Universidade de Grenoble - França - luc.salvo@gpm2.inpg.fr.,1998
- [6] Mortensen,A - **Comunicação Particular** - Escola Politécnica de Lausanne - Suíça- mortensen@dmx.epfl.ch.,1998
- [7] Tsakiropoulos, Panos - **Comunicação particular** - Universidade de Surrey - Reino Unido - p.tsakiropoulos@surrey.ac.uk.,1998
- [8] Nardone, V.C.; Prewo, K.M. - On The Strength of Discontinuous SiC - Reinforced Aluminum Composites - United Technologies Research Center - U.S.A - **Scripta Metallurgica** V. 20 pp 43 - 48, 1985.
- [9] McDanel, D.L. - Analysis of Stress- Strain, Fracture and Ductility Behavior of Aluminum Matrix Composite Containing Discontinuous SiC- Reinforcement- Nasa- Cleveland - U.S.A. **Metallurgical Transactions-** V. 16A, pp. 1105- 1115 , 1985.
- [10] Callister, W.D. - **Materials Science and Engineering - An introduction** - 3º Ed. ,1994.
- [11] Barret, C.R. et al. - **The Principles of Engineering materials** - Revised Printing, 1973.
- [12] Hertzberg, R.W. - **Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Material-**3º Ed. - John Wiley & Sons, Inc. - New York, 1989.
- [13] Humphreys F . J.; Basu, A.; Djazeb, M.R. - The Microstructure and Strength of Particulate Metal - Matrix Composites- **Conference: Metal Matrix Composites - Processing, Microstructure and Properties** - Publ: Riso National Laboratory, Materials Department, P.O. Box 49, DK - 4000 - Roskilde denmark; pp 51 - 66; 1991.

- [14] Kelly, A.; McMillan, N.H. - **Strong Solids**. 3^o Ed. Oxford Science Publications, 1986
- [15] Meyers, M. A. e Chawla, K. K. - **Princípios de Metalurgia Mecânica**, 1^o Ed.- Editora Edgard Blücher Ltda. - São Paulo, 1982.
- [16] Ashby, M.F.; Johnson, L. - On the Generation of Dislocation at Misfitting Particles in a Ductile Matrix - **Phil. Mag.** vol. 20, pp 1009 - 1022, 1969.
- [17] Shibata, S.; Taya, M.; Mori, T.; Mura, T. - Dislocation Punching From a Spherical Inclusion With Isotropic Eigenstrains - **Conference: Metal - Matrix Composites, processing, Microstructure and Properties** - Publ: Riso National Laboratory, Materials Department P.O. Box 49, DK - 4000, pp661 - 666, 1991.
- [18] Taya, M.; Lulay, K.E.; Lloyd, D.J.- Strengthening of a Particulate Metal Matrix Composite by Quenching- University of Washington - Seattle-U.S.A.- **Acta Metall.** Vol.39.No.1, pp. 73-87 , 1990 .
- [19] Miller, W.S.; Humphreys, F.J. - Strengthening Mechanisms in Particulate Metal Matrix Composite- Imperial College- London- **Scripta Metallurgica** - V. 25, pp 33-38, 1990.
- [20] Dragone, T.L.; Nix, W.D. - Geometric Factors Affecting The internal stress Distribution and High Temperature creep Rate of Discontinuous Fiber Reinforced Metals- Stanford University-U.S.A.- **Acta Metall.** Vol. 38, No. 10 pp. 1941- 1953 ,1990.
- [21] Brockenbrough, J. R.; Suresh, S - Plastic Deformation of Continuous Fiber - Reinforced Metal - Matrix Composites: Effects of Fiber Shape and Distribution - Alcoa Research Laboratory and Brown University - **Scripta Metallurgica et Materialia** - Vol. 24, pp325 - 330, 1990.
- [22] Clegg, W.J. - A Stress Analysis of the Tensile Deformation of Metal - Matrix Composites - ICI Advanced Materials, Runcorn , England - **Acta Metall.** Vol. 36, No 8, pp 2141 - 2149, 1988.
- [23] Ananth, C.R.;Chandra, N; Murali, K; Garmestani, H - Effect of Inelastic Material Behavior on Residual Stresses in Metal - Matrix Composites - Florida A&M university - **Conference : Advanced Composites 93**; International Conference on Advanced Composite materials, Wollongong Australia - Publ.: The Minerals, Metal & Materials Society, USA, pp1317 - 1324, 1993.

- [24] Christman, T; Needleman A.; Suresh, S. - An Experimental and Numerical Study of Deformation in Metal - Ceramic Composites- Brown university - Providence- U.S.A.- **Acta Metall.** V. 37, No. 11, pp 3029- 3050, 1989.
- [25] Tvergaard, V. - Analysis of Tensile Properties For a Whisker-Reinforced Metal-Matrix Composite- Department of Solid Mechanics- The Technical University of Denmark, Lyngby, Denmark - **Acta Metall. Mater.** V38, No 2, pp 185 - 194, 1990.
- [26] Shen, Y. L.; Finot, M.; Needleman, A.; Suresh, S. - Effective Elastic Response of Two - Phase Composites. - **Acta Metall. Mater.** Vol. 42, No.1, pp 77 - 97, 1994.
- [27] Corbin S. F.; Wilkinson, D. S.- The onset of yielding in a sic reinforced al alloy - **conference metal - matrix composites - processing, microstructure and properties.**
- [28] Finot, M.; Shen, Y.-L.; Needleman, A.; Suresh, S. – Micromechanical Modeling of Reinforcement Fracture in Particle-Reinforced Metal – Matrix Composite - **Metallurgical and Materials Transactions A** . Vol. 25A, pp2403 – 2420, 1994.
- [29] Needleman, A.; Nutt, S.R.; Suresh, S.; Tvergaard, V. - Matrix, Reinforcement, and Interfacial Failure - **J.Eng. Mater. Technol.** 115, pp233 - 238, 1993
- [30] Bittencourt, M. L. - **Introdução ao Método de Elementos Finitos Aplicado à Análise Estrutural** - Edição Preliminar - Unicamp - Apostila do Curso de Extensão Universitária em Análise Estrutural.
- [31] Timoshenko,S.P.; Goodier, J.N. - **Teoria da Elasticidade** - 3^o edição - Guanabara Dois S.A., Rio de Janeiro,1980
- [32] Sorensen, N. J.; Suresh, S.; Tvergaard, V.; Needleman, A. - Effects of Reinforcement Orientation on the Tensile Response of Metal-Matrix Composites - **Mater. Sci. and Eng.** A197 pp. 1-10 - 1995
- [33] Kraus, H. - **Creep Analysis** - 1^o edição - John Wiley and Sons - N. Y. - 1980
- [34] Thomas T. Y. - **Plastic Flow and Fracture in Solids** - 1^o edição - Volume 2 - Academic Press Inc., N. Y., 1961
- [35] Meguid, S.A. - **Engineering Fracture Mechanics** - 1^o edição - Elsevier Applied Science Publishers - England, 1989
- [36] Povirk, G.L.; Stout, M.G.; Bourke, M.; Goldstone, J.A.; Lawson, A.C.; Lovato, M.; McEwen, S.R.; Nutt, S.R.; Needleman, A. - Mechanically Induced Residual Stresses in Al/ SiC Composites - **Scripta Metallurgica et Materialia** - Vol. 25 , pp 1883 - 1888 , 1991
- [37] Shen, Y.-L.; Finot,M.; Needleman, A.; Suresh, S. - Effective Plastic Response of two-Phase Composites - **Acta Metall. Mater.** - Vol. 43 , n^o 4 , pp 1701 - 1722, 1995

- [38] Wilkins, T. ; Shen, Y.-L – Stress Enhancement at Inclusion Particles in Aluminum Matrix Composites : Computational Modeling and Implications to Fatigue Damage – **Computational Materials Science** 22 , pp 291 – 299 , 2001.
- [39] Teixeira – Dias, F. ; Menezes, L.F. – Numerical Determination of the Influence of the Cooling Rate and Reinforcement Volume Fraction on the Levels of Residual Stress – **Computational Materials Science** 21, pp 26 – 36, 2001.
- [40] Geni, M. ; Kikuchi, M. – Damage Analysis of Aluminum Matrix Composite Considering Non – uniform Distribution of SiC Particles – **Acta Mater.** –Vol. 46 , No. 9, pp 3125 – 3133, 1998.
- [41] Kato, M.; Fujii, T; Onaka, S. – Effects of Shape and Volume Fraction of Second Phase on Stress States in Two – Phase Materials – **Materials Science and Engineering** A285 – pp144 – 150, 2000
- [42] Cheng, L. ; Shuyi, Q. ; Guoding, Z. ; Masaaki, N. – Micromechanical Properties of High Fracture Performance SiC_p–6061Al/6061Al Composite – **Materials Science and Engineering** A 332 - pp 203 – 209, 2002
- [43] Zhirui, W; Tzi - Kang, Z; Lloyd, D. J. - Stress Distribution in Particulate - Reinforced Metal - Matrix Composite Subjected to External Load - University of Toronto - **Metallurgical Transaction** A, Vol. 24 A, (1), pp197 - 207, 1993.
- [44] Virro,P; Pilling, J. - Superplasticity in Spray Deposited AA - 7475 with SiC Reinforcement - Michigan Technological University - **Conference: Superplasticity in Aerospace II**, Anaheim, California, USA - The Minerals, Metal & Materials Society, pp 47 - 63,1990.
- [45] Ferry, M; Munroe, P. R.; Crosky, A.; Chandra, T.; The Effect of Particulate Distribution on the Grain Size Distribution in an Aluminum 2014 / Al₂O₃ PMMC - University of New South Wales - **Conference: Advanced Composite 93**: International Conference on Advanced Composite Material, Wollongong, Australia - The Minerals Metals & Materials Society, USA, pp 1259 - 1264, 1993.
- [46] Komenda, J. ; Henderson, P. J. - Microstructure and Creep Properties of an Aluminum Alloy / Al₂O₃ Fiber Composite - Swedish Institute for Metals Research - **Conference: Metal Matrix Composites: Processing Microstructure and Properties** - Riso National Laboratory - Materials Department - Roskilde, Denmark, pp 449 - 454, 1991.
- [47] Sorensen, Niels - Effects of Clustering on the Creep Properties of Whisker Reinforced Aluminum - **Conference: Metal - Matrix Composites, Processing,**

Microstructure and Properties - Publ: Riso National Laboratory, Materials Department P.O. Box 49,DK - 4000, pp 667 - 673, 1991.

[48] Gehanno, H; Brechet, Y.J.M. - Effect of Particle Distribution on Internal Stresses in a Fibre - Reinforced Composite: An Analytical Approach. - Domaine Universitaire de Grenoble - France - **Conference: Metal - Matrix Composites, Processing, Microstructure and Properties** - Publ: Riso National laboratory, Materials Department P.O. box 49, DK- 4000, pp 355-360, 1991.

[49] Beiser, A . **Conceito de Física Moderna**. Trad. de Gita K. Ghinzberg. São Paulo, Polígono / Editora da Universidade de São Paulo, pp 264 – 290, 1969.

[50] Moore, W.J. **Físico – Química**. Trad. de Homero Lenz Cesar. São Paulo, Editora Técnica Dragão, v.2, pp 723 – 753, 1968.

[51] Reif, F. **Fundamentals of Statistical and Thermal Physics**. Singapore, McGraw – Hill International Editions, 1985. (Physics Series)

[52] Spiegel, M. R. **Theory and Problems of Advanced Calculus**. New York, McGraw – Hill Book Company, 1963. (Schaum's Outline Series)

[53] Withers, P. J.; Stobbs, W. M.; Pedersen, O. B. The Application of the Eshelby Method of Internal Stress Determination to Short Fibre Metal Matrix Composites. **Acta Metall. Mater.** v. 37, n. 11, pp. 3061 – 3084, 1989

[54] Arsenault, R. J.; Taya, M. Thermal Residual Stress In Metal Matrix Composite. **Acta Metall. Mater.** v.35, n.3, pp. 651 – 659,1987.

[55] *Withers, P.J.; Lorentzen, T.; Pedersen, O.B. – The Effect of Internal Stresses On Deformation At Room Temperature - ?*

[56] Coelho, R.E. - **Obtenção das ligas Al-Fe-X-Si (X=V ou Nb) por Moagem de Alta Energia e Extrusão a Quente** – Tese de Doutorado - IPEN - São Paulo, 2001.

[57] Gomes, U.U.; Costa, F. A . ; Silva, A. G. P. – Proc. Of the Seventh Annual Int. Conf. On Composites Eng. 1– 281, 2000

[58] Costa, F. A . ; Ambrozio Filho, F. ; Silva, A. G. P.; Gomes, U.U. – Anais do Congresso de Eng. Mecânica – João Pessoa, PB, em CD-ROM, 2002

[59] Gomes, U.U.; Costa, F. A . ; Ambrozio Filho, F.; Silva, A. G. P. – Proc.of the World Congress on Powder Metall. & Particulate Materials - Orlando, Florida, em CD_ROM, 2002

[60] Shen, Y. L. ; Needleman, A. ; Suresh, S. – Coefficients of Thermal Expansion of Metal – Matrix Composites for Electronic Packaging – **Metallurgical and Materials Transactions A** – Volume 25A – 839, 1994

- [61] Balch, D. K. ; Fitzgerald, T. J. ; Michaud, V.J. ; Mortensen, A. ; Shen, Y. L. ; Suresh, S. – Thermal Expansion of Metals Reinforced with Ceramic Particles and Microcellular Foams – **Metallurgical and Materials Transactions A** Volume 27A – 3700, 1996.
- [62] Hatta, H.; Takei, T.; Taya, M. – Effects of Dispersed Microvoids on Thermal Expansion Behavior of Composite Materials – **Materials Science and Engineering A285**, pp. 99 –110, 2000.
- [63] Fei, W.D.; Hu, M.; Yao, C. K. – Thermal Expansion and Thermal Mismatch Stress Relaxation Behaviorsof SiC whisker reinforced Aluminium Composite – **Materials Chemistry and Physics** 77, pp 882 – 888, 2002.
- [64] Kim, B. G.; Dong, S.L.; Park, S.D. – Effects of Thermal Processing on Thermal Expansion Coefficient of a 50 Vol. % SiC/Al Composite - **Materials Chemistry and Physics** 72, pp 42 – 47, 2001
- [65] Mortensen, A. – A Review of the Fracture Toughness of Particle Reinforced Aluminum Alloys – **ASM International – The Materials Information Society** – Reprinted from Fabrication of Particulates Reinforced Metal Composites – **Proceedings of an International Conference** –Montréal, Québec, Canada, pp17-19, 1990.
- [66] Llorca, J. ; Suresh, S.; Needleman, A. – An Experimental and Numerical Study of Cyclic Deformationin Metal-matrix Composites – **MetallurgicalTransactions A** – Vol.23A, pp. 919 – 934, 1992.

APÊNDICE A : Teoria de Eshelby – Inclusões reais e inclusões equivalentes

A TEORIA DE ESHELBY

A distribuição de tensões entre as duas fases em um compósito de matriz metálica pode ser obtida pelo método de Eshelby.

A distribuição não uniforme de tensões pode surgir, durante carregamento ou não, por causa das diferenças entre as constantes elásticas da matriz e reforço e também da diferença entre os coeficientes de expansão térmica no material compósito, durante resfriamento.

A equação da tensão pode ser expressa mais simplesmente, usando notação matricial, onde para a maioria dos materiais de interesse, (C) é uma matriz 6x6. Assim, podemos escrever a lei de Hooke :

$$\sigma = C \cdot e$$

O método de Eshelby consiste em extrair uma região da matriz, por exemplo, elipsoidal, de mesma constante elástica da matriz, isotrópica infinita, a qual será chamada de inclusão equivalente, conforme mostra a figura 1A. Em seguida, ela é imaginada como submetida a uma ampliação livre de tensões (e^T) , a qual será chamada de *deformação ou forma transformada*, sem mudança de constante elástica. Uma pressão superficial é usada para fazer essa região elipsoidal retornar ao tamanho original, de maneira que se possa recolocá-la no furo formado na matriz no momento em que ela foi extraída. Ao se remover esta pressão, o equilíbrio é alcançado entre a matriz e a elipse, produzindo uma *forma contraída* dessa elipse, a qual sofreu ampliação suficiente para, agora, poder simular a inclusão. Por isso, essa região elipsoidal será chamada de inclusão equivalente (e^C) , que tem a forma contraída. Neste caso, além da deformação na inclusão equivalente, aparecerá uma deformação na matriz.

A tensão na inclusão, pela lei de Hooke, pode ser expressa em termos de deformação elástica por:

$$\sigma = C_M (e^C - e^T)$$

Eshelby relacionou a forma contraída com a *forma transformada* por meio de um tensor chamado de tensor de Eshelby

$$e^C = S e^T$$

Quando se estuda o caso de inclusão real, o processo é o mesmo, porém como a inclusão real é mais rígida que a inclusão equivalente, para haver esta equivalência, é preciso que a *forma transformada* da inclusão real (e^{T*}) seja menor que a forma transformada da inclusão equivalente (Fig. 1B). Assim,

$$e^C > S.e^{T^*}$$

A inclusão real sofre pressão superficial para ocupar o lugar do furo. Ao se remover esta pressão, a inclusão real se expande, tomando a forma final e^C , produzindo o mesmo estado de tensão que a inclusão equivalente, sendo as inclusões, portanto, intercambiáveis.

A equação da tensão é, neste caso:

$$\sigma_I = C_I (e^C - e^{T^*})$$

Como as tensões se equivalem então :

$$C_I (S e^T - e^{T^*}) = C_M (S - I) e^T$$

Onde I é o tensor identidade.

Assim, podemos expressar:

$$\sigma_I = C_M [S - I] [(C_I - C_M)S + C_M]^{-1} C_I e^{T^*}$$

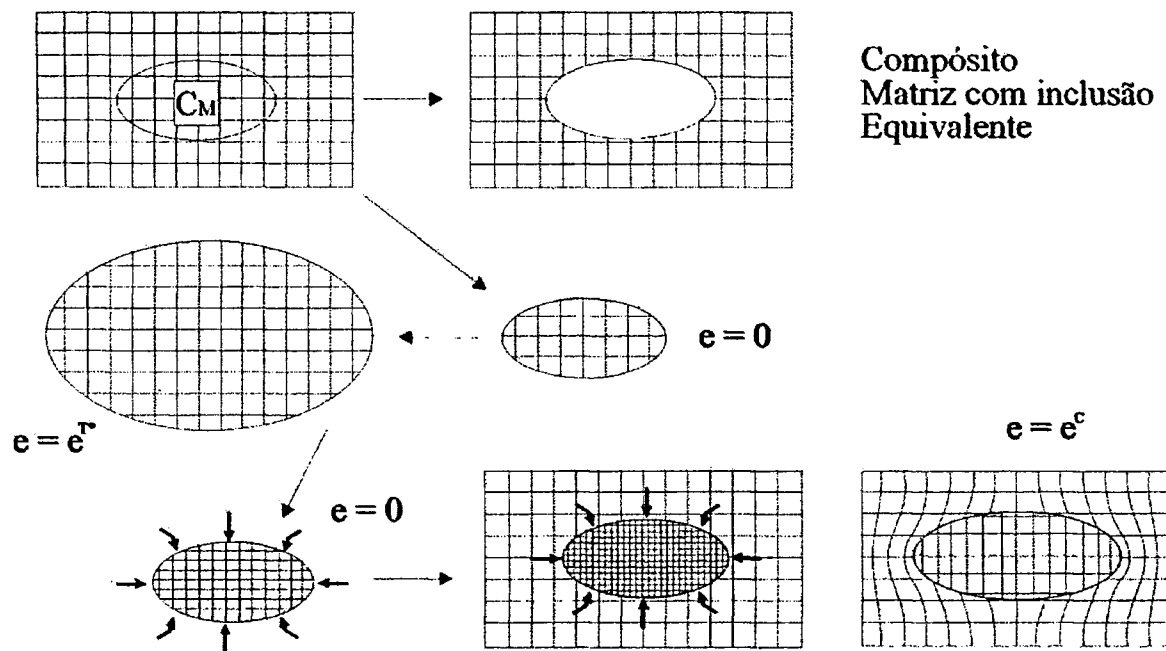


Fig 1.A – Compósito de matriz metálica com inclusão metálica simulando uma inclusão real

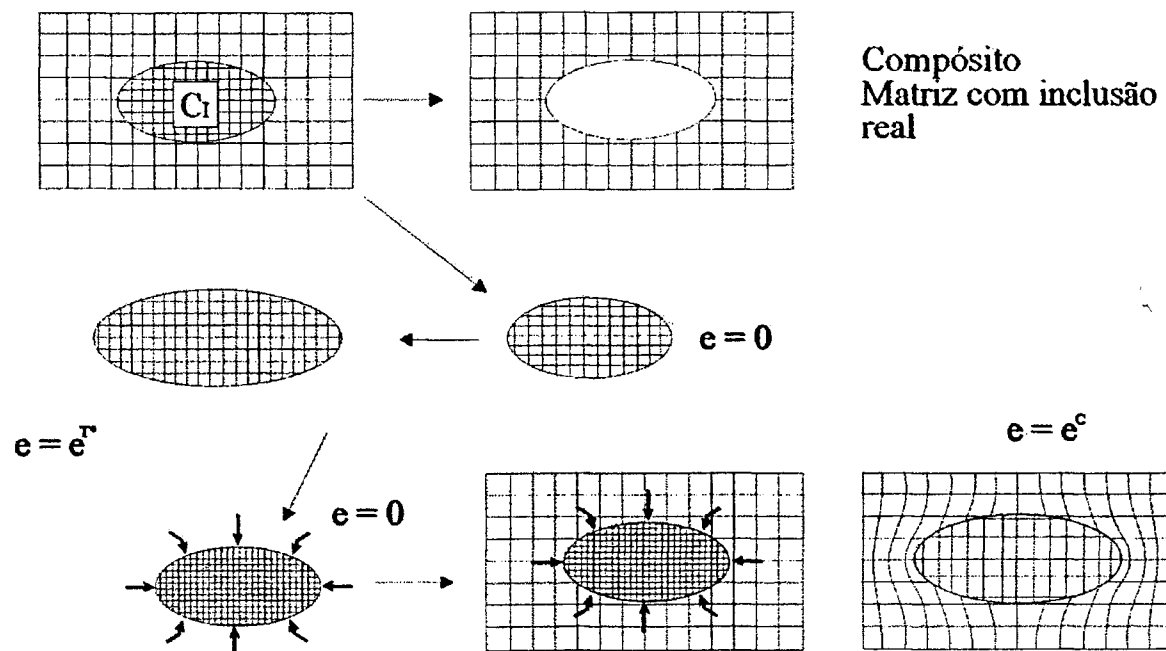


Fig. 2.A – Compósito de matriz metálica com inclusão real

APÊNDICE B : Lógica do programa em elementos finitos (Ansys – versão 5.5 e versão 6.0)

A lógica do programa, dividida em duas partes, usada para a obtenção dessas figuras é mostrada abaixo:

```

/PREP7 !* iniciar o pre-processor
/title,arranjo aleatório

/SHOW,WIN32
/DEVICE,VECTOR,1
/DEVICE,DITHER,1

/PNUM, KP,1    !* indicar numeros de Keypoints - sim
/PNUM,LINE,1   !* indicar numeros de linhaas - sim
/PNUM,AREA,1   !* indicar numeros de áreas - sim
/PNUM,VOLU,0
/PNUM,NODE,0
/PNUM,TABN,0
/PNUM,SVAL,0
/NUM,2
/PNUM,MAT,1

!* definicao do tipo #1 de elemento
ET,1,PLANE42
KEYOPT,1,1,0
KEYOPT,1,2,0
KEYOPT,1,3,0
KEYOPT,1,5,0
KEYOPT,1,6,0

!* definicao do tipo #2 de elemento (aluminio)
ET,2,PLANE42
KEYOPT,2,1,0
KEYOPT,2,2,0
KEYOPT,2,3,0
KEYOPT,2,5,0
KEYOPT,2,6,0

!* definicao dos materiais
alfax2=23.6e-6      !(oC)^-1

!* material #2 carboneto de silício :propriedades mecânicas
UIMP,2,EX, , ,450e9,
UIMP,2,DENS, , ,3200,
UIMP,2,ALPX, , ,4e-6,
UIMP,2,REFT, , ,600,
UIMP,2,NUXY, , ,0.17,
UIMP,2,PRXY, , , ,
UIMP,2,GXY, , ,190e9,

!* material #1 aluminio : propriedades mecânicas
UIMP,1,EX, , ,120e9,    !Pa

```

```

UIMP,1,DENS,,2800,!g/cm3
UIMP,1,ALPX,,alfax2,!(oC)^-1
UIMP,1,REFT,,600,!oC
UIMP,1,NUXY,,0.33,
UIMP,1,PRXY,,,,
UIMP,1,GXY,,50e9,!Pa

```

!* definição das dimensões (L) da partícula

!* definição das dimensões da parte da matriz que abriga essas partículas

```
L=0.20e-6 !m
```

```
c=5*L
```

```
n=50
```

```
m=n+6
```

!* keypoints que definem o contorno da parte da matriz

```
csys, 0
```

```
K,1,0,0
```

```
K,2,c,0
```

```
K,3,c,c
```

```
K,4,0,c
```

!* área que define a parte da matriz que abriga as partículas

```
A,1,2,3,4
```

aplot !4 linhas ja foram geradas

nag=1 !* numero de areas geradas

DO,i,5,n+4,1 ! loop para a geração dos números aleatórios

```
csys,0
```

```
wx=RAND(L/4,c-L/4)
```

```
wy=RAND(L/4,c-L/4)
```

```
K,i,wx,wy !Keypoint central
```

```
Kgen,2,i,,L/2,0,0,5*n+7
```

```
Kgen,2,i,,0,L/2,0,5*n+8
```

```
! cskp,12,1,1,5*n+7,5*n+8
```

```
clocal,12,1,wx,wy
```

```
ra=RAND(L/5,L/2)
```

```
K,m,ra,45
```

```
K,m+1,ra,135
```

```
K,m+2,ra,-135
```

```
K,m+3,ra,-45
```

```
l,m,m+1
```

```
l,m+1,m+2
```

```
l,m+2,m+3
```

```
l,m+3,m
```

```

l1 = (i-5)*4+5
Al,l1, l1+1, l1+2, l1+3
nag = nag+1
m=m+4
*ENDDO
aplot

*DIME,AD,array,nag+10
! inicializar
*DO,j,2,n+4
  ad(j)=0
*ENDDO

csys,0
cad=0  ! contador de areas deletadas
distlim = 0.65*L  !
*DO,j,5,n+3,1
  !coordenadas do keypoint j
  wxj=KX(j)
  wyj=KY(j)
  *DO,k,j+1,n+4,1
    !coordenadas do Keypoint K
    wxk=kx(k)
    wyk=ky(k)
    distjk=sqrt((wxj-wxk)**2 + (Wyj-wyk)**2)

    *if,ad(k-3),eq,0,then
      *IF,distjk,LT,distlim,then
        ! kdele,k
        ! Adele,k-3,,1
        ad(k-3)=-1  !marcar a area a ser deletada
      *ENDIF
    *endif

  *ENDDO
! aplot
*ENDDO

! deletar as areas marcadas
*DO,j,3,n+4
  *if,ad(j),eq,-1,then
    kdele,j
    Adele,j,,1
  *ENDIF
*ENDDO

cad=0
*DO,j,1,nag,1
  *IF,ad(j),EQ,-1,then

```

```

        cad=cad+1
    *endif
*enddo

!alterar manualmente as areas geradas (superpostas)
/PNUM, KP,0  !* indicar numeros de Keypoints - nao
/PNUM,LINE,0  !* indicar numeros de linhaas - nao
/PNUM,AREA,1  !* indicar numeros de áreas - sim
/NUM,2
/PNUM,MAT,1
aplot

/input,term

numcmp,area
*GET,nta,area,0,NUM,MAX
nta=nag-cad !numero total de areas que restaram no modelo (ate aqui)

!selecionar todas as demais areas
asel,s,area,,1,nta,1

ASBA,1,all,,delete,keep !deleta a area #1 e cria a area #nta+1
asel,all

save,roda30,db

/prep7
resume,roda30,db

/SHOW,WIN32
/DEVICE,VECTOR,1
/DEVICE,DITHER,1

numcmp,line
lesize,all,L/5,,,1.0

!* mesh de cada area
mat, 2  ! "seta" o material #2 (carbeto)
type,2
mshape,1,2D  ! gerar triangulos
amesh,1,nta,1

*GET,T,ELEM,0,NUM,MAX !Determina o número máximo de elementos
A=0
*DO,LL,1,T,1
    *GET,AN,ELEM,LL,AREA  !Calcula a área do elemento
    A=A+AN  !Soma as áreas

```

```

*ENDDO
FR= A/c**2
*status,fr

/input,term

mat, 1  ! "seta" o material #1 (alumínio)
type,1
mshape,1,2D  ! Gerar triângulos
amesh,nta+1

/input,term

cskp,11,0,1,2,4
pto=NODE(0,0,0)

csys,0
! definir condicoes para tirar a singularidade da matriz
d,pto,ux,0
d,pto,uy,0

!* transferir as condicoes de contorno
SBCTRAN

! para eventualmente salvar informacoes

/PBC,ALL,,1  !* para plotar as condicoes de contorno
/PNUM,1
eplot

fini  !* termina o preprocessor (PREP7)

/SOLU  !* entrar no SOLVER
!* parametros da analise a ser efetuada
ANTYPE,0 ! tipo de analise - estatica
NROPT, auto
!* ncnv,2 !* terminar a analise se nao convergir, mas nao a execucao
!* cnvtol,f,,0.001,,,-1

!* definir a temperatura inicial (de referencia)
tinicial=600
TREF,tinicial,

! primeiro load-step
! *****
!* definir Temperatura final (uniforme): Carregamento
tfinal=20
TUNIF,tfinal,

```

deltat= tfinal-tinicial

! definir as condições de contorno - x=c
! DL=L.alfa.delta T DILATAÇÃO DA MATRIZ

! definir as condições de contorno - x=0
DL= nx(pto)*alfax2*deltat ! Negativo
nsel,s,loc,x,0, L/40
d,all,ux, -DL
nsel,all

! definir as condições de contorno - y=0
DL= ny(pto)*alfay2*deltat ! Negativ
nsel,s,loc,y,0, L/40
d,all,uy, -DL
nsel,all

!* transferir as condicoes de contorno
SBCTRAN

/PBC,ALL, ,1 !* para plotar as condicoes de contorno
eplot

/cmap,kjmct01,cmap,C:\zoroastro

! outres, all,all
! nsubst,5
! time,100

/STAT,SOLU !* status da solucao/load step
/title, apos as condicoes de contorno
eplot
SOLVE !* inicia a solucao
FINISH !* termina o SOLVER

!* entrar no Post-Processor
/POST1
SET, , ,1, ,100, , !* primeiro load step
AVPRIN,0,0,
/CLABEL,1,10 !* Põe label na curva a cada dez elementos
/CVAL,1,
/title,rodada 30 - delt t = 580
PLNSOL,s,eqv,0,1 !* plota tensoes equival. de Von Mises

!para gerar um arquivo no formato .HPGL
/SHOW,HPGL, , 1 ! salvar figuras no file *.hpgl, wire frame

```
/GFILE,600,  
/REPLOT  
/SHOW,TERM      ! volta a plotar na tela  
/DEVICE,VECTOR,1 ! wire frame
```

APÊNDICE C : Método dos multiplicadores de Lagrange para máximos e mínimos

Método dos Multiplicadores de Lagrange para Máximos e Mínimos

É um método usado para se obter o valor de máximo ou mínimo de uma função $F(x,y,z)$ sujeita à condição de restrição $\phi(x,y,z) = 0$. Este método consiste em formular uma função auxiliar :

$G(x,y,z) = F(x,y,z) + \lambda \phi(x,y,z)$, sujeita às condições abaixo, necessárias para um máximo ou mínimo relativos.

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial G}{\partial z} = 0$$

O parâmetro λ , independente de x, y, z é chamado de multiplicador de Lagrange.

O método pode ser generalizado. Tomemos a função $F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ sujeita às restrições $\phi_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \phi_2(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, \phi_k(x_1, \dots, x_n) = 0$, podemos escrever a função auxiliar $G(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = F + \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 + \dots + \lambda_n \phi_n$ sujeitas às condições necessárias

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial x_2} = 0, \dots, \quad \frac{\partial G}{\partial x_n} = 0$$

Para $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ independentes de $x_1, x_2, \dots, x_n$ e chamados de multiplicadores de Lagrange.