



**AUTARQUIA ASSOCIADA À UNIVERSIDADE
DE SÃO PAULO**

**O MÉTODO P_N PARA CÁLCULOS DE BLINDAGEM
EM GEOMETRIA DE MULTIPLACAS**

ARTUR FLÁVIO DIAS

**Tese apresentada como parte dos
requisitos para obtenção do Grau de
Doutor em Ciências na Área de Reatores
Nucleares de Potência e Tecnologia do
Combustível Nuclear.**

**Orientador:
Dr. Roberto David Martinez Garcia**

**São Paulo
1999**

INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES

Autarquia associada à Universidade de São Paulo

**O MÉTODO P_N PARA CÁLCULOS
DE BLINDAGEM EM GEOMETRIA DE MULTIPLACAS**

ARTUR FLÁVIO DIAS

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do grau de Doutor em Ciências na Área de Reatores Nucleares de Potência e Tecnologia do Combustível Nuclear.

Orientador:

Dr. Roberto David Martinez Garcia

SÃO PAULO

1999



*Ao meu pai ANTONIO ARTUR,
exemplo de humildade e bondade,
e à minha mãe ELZIA,
exemplo de braveza,
que me deram a vida e uma infância inesquecível.*

*Para Iris, esposa e companheira,
meu filho Daniel, incluindo Cristiano e Fernanda,
na certeza de que muito aprendi com eles.*

AGRADECIMENTOS

- Ao amigo e orientador, Dr. Roberto David Martinez Garcia, pela orientação e incentivo durante o desenvolvimento deste trabalho.
- Ao amigo Renato Matheus, pela ajuda que ampliou meus conhecimentos de informática.
- Ao amigo Ezzat S. Chalhoub, pela consultoria em \LaTeX .
- Ao amigo Luiz Henrique Claro, pela incondicional boa vontade em ajudar sem medir esforços e sempre que necessário.
- À amiga Raquel dos Santos, pela dedicação profissional como secretária.
- Aos amigos Ângelo Passaro e A. C. C. Migliano, coordenadores dos Laboratórios de Engenharia Virtual e de Sistemas Eletromagnéticos (EFA-E/IEAv), respectivamente, que gentilmente cederam os computadores para geração final de resultados.
- Aos amigos Jamil e Jaime Anaf, pelos favores prestados e espírito de solidariedade.

- Ao amigo Jairo Panetta (CPD/IEAv), pela consultoria em computação científica.
- Às amigas Sueli e Lucinéa, que administraram com eficiência a entrega de meus relatórios.
- Ao Programa RHAE/CNPq, pela bolsa de estudos concedida.
- Ao Instituto de Estudos Avançados (IEAv), do Centro Técnico Aeroespacial (CTA), pelo apoio que culminou na realização desta tese.
- Ao Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares (IPEN-CNEN/SP), pelos cursos realizados.
- Ao Núcleo de Atendimento em Computação de Alto Desempenho da COPPE/UFRJ, pelo uso do computador CRAY J90.
- E, finalmente, aos amigos que, direta ou indiretamente, colaboraram para a execução do trabalho.

O MÉTODO P_N PARA CÁLCULOS DE BLINDAGEM EM GEOMETRIA DE MULTIPLACAS

Artur Flávio Dias

RESUMO

Neste trabalho é desenvolvido um método computacional para resolver a equação de transporte de partículas neutras em geometria de multiplacas fundamentado no método dos harmônicos esféricos ou método P_N . A equação é resolvida no modelo de multigrupos com “upscattering” e espalhamento anisotrópico sem a necessidade de adotar discretização espacial e técnicas iterativas em soluções grupo a grupo. O trabalho é dividido em três partes: a primeira trata do desenvolvimento de uma solução geral da equação para o intervalo de energia onde ocorre somente moderação, levando em conta, inclusive, casos de degenerescência nos autovalores; a segunda parte consiste em resolver a equação de transporte multigrupo na sua forma matricial, com um método baseado na obtenção de soluções particulares através da técnica de variação dos parâmetros, acoplado com a primeira parte, sendo o termo de fonte da formulação matricial o elo principal de acoplamento; e, a terceira parte é a extensão dos métodos acoplados para calcular o transporte da radiação através de uma região plana composta por camadas múltiplas de materiais distintos.

THE P_N METHOD FOR SHIELDING CALCULATIONS IN MULTISLAB GEOMETRY

Artur Flávio Dias

ABSTRACT

In this work, a computational method for solving the neutral-particle transport equation in multislabs geometry based on the spherical harmonics or P_N method is developed. The equation is solved in the multigroup formalism including upscattering and anisotropic scattering without the need of using spatial discretization techniques and iterative group-by-group solutions. The work is subdivided into three parts: the first deals with the development of a general solution for the equation in the slowing-down energy range, including the degenerate case; the second part consists in solving the multigroup transport equation in matrix form, with a method of finding particular solutions based on the technique of variation of parameters and coupled to the first part, the source term of the matrix formulation being the main link of coupling; and the third part is the extension of the coupled methods for calculating the transport of radiation through a plane region composed of an arbitrary number of material layers.

SUMÁRIO

	Página
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Objetivo do trabalho	2
1.2 Histórico e bibliografia básica	2
1.3 Organização e conteúdo do trabalho	4
2 FORMULAÇÃO ESCALAR DO PROBLEMA	5
3 O MÉTODO P_N ESCALAR	7
3.1 Solução P_N Homogênea	7
3.2 Solução P_N Particular	10
3.3 Determinação dos Coeficientes $\{A_{g,j}, B_{g,j}\}$ da Solução Homogênea . . .	13
3.4 Fluxo Total, Corrente Total e Correntes Parciais	13
3.5 Fluxo Angular Pós-Processado	14
3.6 Soluções P_N Degeneradas	15
3.7 Propagação da Degenerescência	18
3.8 Soluções P_N Pós-Processadas com Degenerescência	20
3.9 Problemas-Teste	24
3.9.1 Sem Degenerescência	24
3.9.2 Com Degenerescência	25
3.10 Comentários	26
4 FORMULAÇÃO MATRICIAL DO PROBLEMA	40
5 O MÉTODO P_N VETORIAL	42
5.1 Solução P_N Homogênea	42
5.2 Solução P_N Particular	44
5.3 Solução P_N Geral	45

6	MÉTODOS P_N ACOPLADOS	48
6.1	Formulação	48
6.2	Problemas-Teste	51
6.3	Uma Formulação Alternativa	61
6.3.1	Problema-Teste	62
7	EXTENSÃO PARA GEOMETRIA DE MULTIPLACAS	67
7.1	Formulação do Problema	67
7.2	Problemas-Teste	70
8	PROBLEMAS EM GEOMETRIA DE MULTIPLACAS	78
8.1	Moderação de Nêutrons num Sistema Típico de Monitoração	78
8.2	Blindagem para um Conceito de Reator Rápido Experimental	91
9	CONCLUSÕES	106
APÊNDICE 1 – Dados de Entrada para o Sistema NJOY Usado na Geração das Seções de Choque Microscópicas do Carbono para o Código ANISN		110
APÊNDICE 2 – Dados de Entrada para o Sistema NJOY Usado na Geração das Seções de Choque Microscópicas do Hidrogênio para o Código ANISN		111
APÊNDICE 3 – Dados de Entrada para o Sistema NJOY Usado na Geração das Seções de Choque Microscópicas do Alumínio para o Código ANISN		112
APÊNDICE 4 – Dados de Entrada para o Sistema NJOY Usado na Geração das Seções de Choque Microscópicas do Boro-10 para o Código ANISN		113
APÊNDICE 5 – Dados de Entrada para o Sistema NJOY Usado na Geração das Seções de Choque Microscópicas do Boro-11 para o Código ANISN		114

APÊNDICE 6 – Dados de Entrada para o Sistema NJOY Usado na Geração das Seções de Choque Microscópicas do Flúor-19 para o Código ANISN	115
APÊNDICE 7 – Dados de Entrada para o Código ANISN Usado no Cálculo das Seções de Choque Macroscópicas	116
APÊNDICE 8 – Dados de Entrada para o Código ANISN Usado no Cálculo dos Fluxos e Correntes de Grupo para o Problema de Moderação de Nêutrons Rápidos	118
APÊNDICE 9 – Estrutura de Grupos de Nêutrons e Gama	119
APÊNDICE 10 – Dados de Entrada para o Código ANISN Usado na Geração das Seções de Choque Macroscópicas para o Problema da Blindagem do Reator Rápido Experimental	122
APÊNDICE 11 – Dados de Entrada para o Código ANISN Usado no Cálculo dos Fluxos e Correntes de Grupo para o Problema da Blindagem do Reator Rápido Experimental	127
APÊNDICE 12 – Fluxograma Completo do Programa Baseado nos Métodos P_N Escalar e Vetorial Acoplados para Cálculos de Blindagem em Geometria de Multiplacas	129
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	132

1 INTRODUÇÃO

Dentre os métodos de aproximação numérica para resolver a equação de transporte cuja convergência é baseada em procedimentos iterativos, o método das ordenadas discretas é o mais comumente utilizado para os problemas que podem ser simulados em geometrias regulares. Os critérios e as técnicas de aceleração de convergência estão intrinsicamente relacionados com o nível de discretização das variáveis espacial e angular, influenciando significativamente na precisão dos resultados, não existindo nenhuma regra pré-definida que estabeleça o melhor conjunto de quadraturas ou a malha espacial ideal para cada problema específico.

Para geometrias complexas é usado o método Monte Carlo baseado em técnicas estatísticas⁴⁹ que depende do rumo certo que a solução está tomando, exigindo uma certa familiarização antecipada da forma da solução para que o resultado final, em pontos discretos, não seja tão difícil de ser obtido.

Nas aproximações analíticas multigrupo, com ênfase nas desenvolvidas mais recentemente,^{47,64} não são utilizados procedimentos iterativos grupo a grupo e as variáveis espacial e angular são tratadas continuamente permitindo que os resultados sejam obtidos de uma maneira direta. Por causa disso, os resultados analíticos podem ser considerados os mais próximos dos “benchmarks” a fim de comparar e nortear os resultados numéricos iterativos e outros baseados em técnicas estatísticas.

Ainda no que diz respeito às aproximações analíticas, em situações onde não existe fissão ou “upscattering”, casos em que as soluções numéricas e iterativas exigem cuidados na obtenção da convergência, os métodos P_N usados atualmente^{47,64} para resolver a equação de transporte na formulação matricial podem não ser a melhor maneira de implementação da aproximação P_N para esses problemas, por exigirem recursos computacionais consideráveis.

1.1 Objetivo do Trabalho

Para tirar melhor proveito destes recursos, propôs-se o desenvolvimento de um método P_N analítico com vantagens adicionais aos métodos P_N atuais que realize cálculos de blindagem resolvendo a equação de transporte no modelo de multigrupos com “upscattering” e espalhamento anisotrópico em geometria de multiplacas, sem considerar técnicas iterativas em soluções grupo a grupo.

1.2 Histórico e Bibliografia Básica

O método P_N , em princípio, é uma técnica de solução da equação de transporte que consiste em expandir a dependência do fluxo angular em harmônicos esféricos e, em se tratando de geometria plana, reduz-se a uma expansão em polinômios de Legendre.

O método dos harmônicos esféricos, ou método P_N , foi estudado para resolver problemas monoenergéticos em transferência radiativa e os autores de trabalhos importantes que contribuíram com certo destaque para aplicação do método, foram: JEANS (1917)³⁷ o primeiro a sugerir a aplicação do método em transferência radiativa, KOURGANOFF (1952),⁴⁴ LENOBLE (1961),⁴⁸ GUILLEMOT (1967),³⁶ DAVE (1975),¹⁴ KARP et al. (1980),³⁸ BENASSI et al. (1984),⁷ McCORMICK e SIEWERT (1991)⁵⁵ e BARICHELLO et al. (1998).⁴

No entanto foi em transporte de nêutrons que a aplicação do método deu-se mais extensivamente a partir de 1944 por MARK (1944, 1945),^{52,53} MARSHAK (1947),⁵⁴ MANDL (1953),⁵¹ DAVISON (1957),¹⁶ KOFINK (1959),⁴³ POMRANING (1964a, 1964b),^{59,60} FEDERIGHI (1964),²¹ GELBARD (1968),³² NESHAT et al. (1977),⁵⁷ YAMAGUCHI e MAIORINO (1981),⁷³ ARONSON (1984a, 1984b),^{2,3} LEE e DIAS (1984),⁴⁶ LARSEN e POMRANING (1991),⁴⁵ RULKO et al. (1991),⁶³ GANAPOL et al. (1993)²⁴ e GARCIA e SIEWERT (1996)²⁹ em cujos trabalhos está registrada a evolução da aplicação do método em transporte de nêutrons monoenergéticos.

ARONSON (1984a)² foi um dos pioneiros a aplicar o método P_N na resolução de problemas em geometria esférica onde constatou dificuldades devido ao mau condicionamento do sistema de equações algébricas lineares resultante.

A aplicação do método P_N em problemas de transporte de nêutrons com dependência energética, segundo o modelo de multigrupos, com discretização da variável espacial e procedimentos iterativos é relatada por BELL e GLASSTONE (1970),⁶ FLETCHER (1983, 1986)^{22,23} e KOBAYASHI (1986a, 1986b).^{41,42}

Na linha analítica, foi DAVISON (1957)¹⁶ que, seguindo o trabalho de MANDL (1953),⁵¹ primeiro desenvolveu o formalismo analítico multigrupo matricial para a resolução do problema de uma placa homogênea considerando espalhamento isotrópico.

Posteriormente, LEE et al. (1985)⁴⁷ estenderam o método para multirregiões e espalhamento anisotrópico incluindo a geometria cilíndrica unidimensional e resolveram problemas de criticalidade, com baixos valores de N e poucos grupos de energia.

Em 1993, SIEWERT⁶⁴ utilizou o método P_N para desenvolver soluções da equação de transporte permitindo espalhamento anisotrópico e “upscattering” incluindo o desenvolvimento de soluções P_N particulares, para o caso de um termo de fonte genérico dependente do espaço e do ângulo, com base na técnica de variação dos parâmetros.

CALDEIRA (1999)⁹ e CALDEIRA e GARCIA (1999)¹² implementaram o método P_N matricial para calcular o fator de multiplicação efetivo, fluxos e correntes em células tipo placa. Resolveram com sucesso dois problemas-teste de três e quatro regiões com constantes de grupo definidas numa estrutura de 64 grupos.

1.3 Organização e Conteúdo do Trabalho

No Capítulo 2 é apresentada a formulação escalar do problema. No Capítulo 3 é desenvolvida uma nova solução P_N particular grupo a grupo da equação de transporte para meios moderadores baseado numa generalização dos polinômios de Chandrasekhar. Ainda neste capítulo, desenvolve-se também uma nova forma de soluções P_N para casos específicos de degenerescência nos autovalores, finalizando com a resolução de problemas-teste com e sem degenerescência. Nos Capítulos 4 e 5 são apresentadas a formulação matricial do problema de transporte e as respectivas soluções P_N homogênea e particular. O acoplamento dos métodos P_N escalar e vetorial com ênfase no termo de fonte da equação de transporte é feito no Capítulo 6 incluindo resolução de problemas-teste. A maneira alternativa de se resolver a equação de transporte decompondo o fluxo angular em componentes espalhado e não-espalhado com a resolução de um problema-teste de 42 grupos também é apresentada no Capítulo 6. No Capítulo 7, os métodos são estendidos para resolução de problemas em multiregiões e testados com a resolução de problemas-teste e um específico da Referência 28. No Capítulo 8 são resolvidos problemas típicos de blindagem para a comprovação final da eficiência da metodologia desenvolvida e, finalmente, no Capítulo 9 são apresentadas as conclusões do trabalho.

2 FORMULAÇÃO ESCALAR DO PROBLEMA

A equação de transporte multigrupo em geometria plana na região de moderação para partículas neutras pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial x} \Psi_g(x, \mu) + \sigma_g \Psi_g(x, \mu) &= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sigma_{gg}^l P_l(\mu) \int_{-1}^{+1} \Psi_g(x, \mu') P_l(\mu') d\mu' \\ &+ \sum_{g'=1}^{g-1} Q_{gg'}(x, \mu), \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde $\Psi_g(x, \mu)$ é o fluxo angular no grupo g , dependente da posição $x \in (x_L, x_R)$ medida em unidade de comprimento (cm) e na direção especificada por $\mu \in [-1, 1]$, ou seja, o co-seno do ângulo entre o eixo x e o vetor velocidade da partícula, σ_g é a seção de choque macroscópica total para o grupo g , σ_{gg}^l é o l -ésimo momento de Legendre da seção de choque de transferência dentro do grupo g e $Q_{gg'}(x, \mu)$ é a contribuição de partículas para o grupo g provenientes do grupo g' por moderação, dada por

$$Q_{gg'}(x, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sigma_{gg'}^l P_l(\mu) \int_{-1}^{+1} \Psi_{g'}(x, \mu') P_l(\mu') d\mu'. \quad (2.2)$$

Este termo é o que caracteriza a não-homogeneidade da Eq. (2.1), para $g = 2, 3, \dots, NDS$, sendo NDS igual ao número total de grupos de energia onde ocorre somente moderação. A integral na Eq. (2.2) é o l -ésimo momento de Legendre, $\phi_{g',l}(x)$, do fluxo angular no grupo g' , e $\sigma_{gg'}^l$ é o l -ésimo momento de Legendre da seção de choque de transferência do grupo g' para o grupo g ; desta forma

$$Q_{gg'}(x, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sigma_{gg'}^l P_l(\mu) \phi_{g',l}(x) \quad (2.3)$$

e, para completar a formulação escalar do problema, as condições de contorno a que se sujeita a Eq. (2.1) são estabelecidas para $\mu \in (0, 1]$, como

$$\Psi_g(x_L, \mu) = L_g(\mu) \quad (2.4a)$$

c

$$\Psi_g(x_R, \mu) = L_g(\mu), \quad (2.4b)$$

onde $L_g(\mu)$ e $R_g(\mu)$ são distribuições conhecidas de partículas no grupo g incidentes nas margens esquerda em $x = x_L$ e direita em $x = x_R$, respectivamente, da região considerada, representada na Figura 1.1 por uma placa simples.

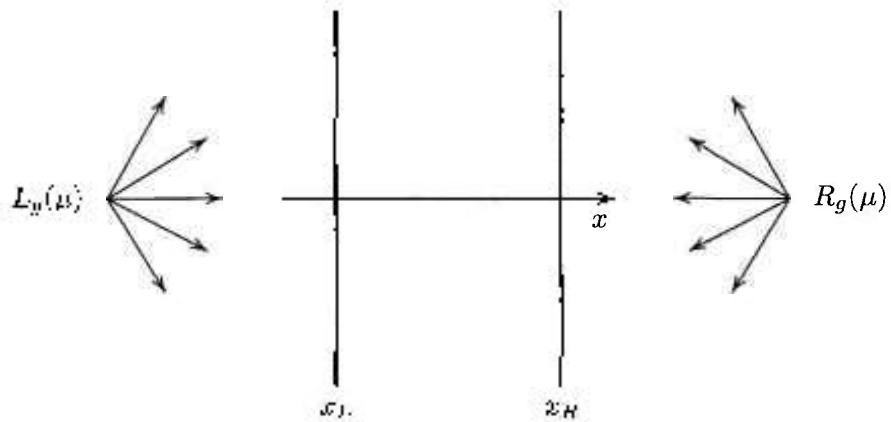


Figura 1.1 - Placa simples.

3 O MÉTODO P_N ESCALAR

3.1 Solução P_N Homogênea

A solução P_N ,^{6,16,30} com N ímpar, da versão homogênea da Eq. (2.1) deve satisfazer os primeiros $N + 1$ momentos dessa equação e é escrita como

$$\Psi_g^H(x, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N (2n+1) \phi_{g,n}^H(x) P_n(\mu), \quad (3.1)$$

onde o superscrito H indica que a solução expressa pela equação acima é a parte homogênea da solução P_N geral da Eq. (2.1). Portanto, substituindo a Eq. (3.1) na versão homogênea da Eq. (2.1) e usando as propriedades de ortogonalidade dos polinômios de Legendre, obtém-se, para $n = 0, 1, \dots, N$,

$$(n+1) \frac{d}{dx} \phi_{g,n+1}^H(x) + n \frac{d}{dx} \phi_{g,n-1}^H(x) + [(2n+1)\sigma_g - \sigma_{gg}^n] \phi_{g,n}^H(x) = 0, \quad (3.2)$$

um sistema de $N + 1$ equações diferenciais lineares de primeira ordem acopladas, com $N + 2$ incógnitas. A condição adicional mais frequentemente utilizada⁶ para tornar o número de equações igual ao número de incógnitas é a condição de truncamento

$$\frac{d}{dx} \phi_{g,N+1}^H(x) = 0, \quad (3.3)$$

cujo sistema resultante representa a aproximação P_N para o problema de transporte multigrupo de partículas neutras. As incógnitas são os momentos de Legendre, $\phi_{g,n}^H(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$, os quais, para uma região homogênea que se estende de x_L a x_R , são dados explicitamente por^{7,26,30}

$$\phi_{g,n}^H(x) = \sum_{j=1}^J [A_{g,j} e^{-(x-x_L)\sigma_g/\xi_{g,j}} + (-1)^n B_{g,j} e^{-(x_R-x)\sigma_g/\xi_{g,j}}] g_{g,n}(\xi_{g,j}), \quad (3.4)$$

onde $J = (N + 1)/2$, $g_{g,n}(\xi_{g,j})$ é o polinômio de Chandrasekhar¹³ de ordem n para o grupo g , e os parâmetros $\{\xi_{g,j}\}$ são determinados a partir da relação de três termos que pode ser obtida pela substituição da Eq. (3.4) na Eq. (3.2), resultando em

$$\xi_{g,j} h_{g,n} g_{g,n}(\xi_{g,j}) = (n+1) g_{g,n+1}(\xi_{g,j}) + n g_{g,n-1}(\xi_{g,j}), \quad (3.5a)$$

para $n = 0, 1, \dots, N$, com

$$h_{g,n} = \begin{cases} 2n + 1 - \sigma_{gg}^n / \sigma_g & \text{se } n \leq \mathcal{L}, \\ 2n + 1 & \text{se } n > \mathcal{L}, \end{cases} \quad (3.5b)$$

e da condição truncamento,

$$g_{g,N+1}(\xi_{g,j}) = 0. \quad (3.5c)$$

A técnica escolhida para obter esses parâmetros consistiu em eliminar os termos de ordem par da Eq. (3.5a) para obter uma relação apenas para os termos de ordem ímpar, ou seja, para $n = 1, 3, 5, \dots, N$,

$$X_{g,n}g_{g,n-2}(\xi_{g,j}) + Y_{g,n}g_{g,n}(\xi_{g,j}) + Z_{g,n}g_{g,n+2}(\xi_{g,j}) = \xi_{g,j}^2 g_{g,n}(\xi_{g,j}), \quad (3.6)$$

onde

$$X_{g,n} = n(n-1)h_{g,n}^{-1}h_{g,n-1}^{-1}, \quad (3.7a)$$

$$Y_{g,n} = n^2 h_{g,n}^{-1}h_{g,n-1}^{-1} + (n+1)^2 h_{g,n}^{-1}h_{g,n+1}^{-1} \quad (3.7b)$$

e

$$Z_{g,n} = (n+1)(n+2)h_{g,n}^{-1}h_{g,n+1}^{-1}. \quad (3.7c)$$

A Eq. (3.6) juntamente com a condição dada pela Eq. (3.5c) permitem formular um problema de autovalor para cada grupo g , portanto

$$\mathcal{B}_g \mathcal{V}_{g,j} = \xi_{g,j}^2 \mathcal{V}_{g,j} \quad (3.8)$$

onde

$$\mathcal{B}_g = \begin{pmatrix} Y_{g,1} & Z_{g,1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ X_{g,3} & Y_{g,3} & Z_{g,3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_{g,5} & Y_{g,5} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & Y_{g,N-4} & Z_{g,N-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & X_{g,N-2} & Y_{g,N-2} & Z_{g,N-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & X_{g,N} & Y'_{g,N} \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

com

$$Y_{g,N}^t = N^2 h_{g,N}^{-1} h_{g,N-1}^{-1} \quad (3.10)$$

e

$$\mathcal{V}_{g,j} = \left(g_{g,1}(\xi_{g,j}) \quad g_{g,3}(\xi_{g,j}) \quad g_{g,5}(\xi_{g,j}) \quad \dots \quad g_{g,N}(\xi_{g,j}) \right)^T. \quad (3.11)$$

A matriz \mathcal{B}_g é uma matriz quadrada de ordem $J = (N+1)/2$ cujos autovalores, $\{\xi_{g,j}^2\}$, são os quadrados das raízes positivas e negativas de $g_{g,N+1}(\xi_{g,j})$. Estas raízes também são conhecidas como autovalores do método P_N . Os autovalores e correspondentes autovetores da matriz \mathcal{B}_g podem ser computados utilizando os pacotes EISPACK⁶⁸ ou LAPACK.¹ Os autovetores $\{\mathcal{V}_{g,j}\}$ são normalizados utilizando

$$g_{g,1}(\xi_{g,j}) = \xi_{g,j} h_{g,0}, \quad (3.12)$$

em consistência com a usual normalização $g_{g,0}(\xi_{g,j}) = 1$. Os polinômios de Chandrasekhar de ordem par, $g_{g,0}(\xi_{g,j}), g_{g,2}(\xi_{g,j}), \dots, g_{g,N-1}(\xi_{g,j})$, são determinados utilizando a Eq. (3.5a), completando os polinômios de Chandrasekhar necessários para a solução P_N da versão homogênea da Eq. (2.1), que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \Psi_g^H(x, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N (2n+1) P_n(\mu) \sum_{j=1}^J [A_{g,j} e^{-(x-x_L)\sigma_g/\xi_{g,j}} \\ + (-1)^n B_{g,j} e^{-(x_R-x)\sigma_g/\xi_{g,j}}] \mathcal{V}_{g,n}(\xi_{g,j}), \end{aligned} \quad (3.13)$$

restando apenas o conjunto de coeficientes $\{A_{g,j}, B_{g,j}\}$ para ser determinado a partir das condições de contorno.

Cabe mencionar que a técnica usada aqui é similar à sugerida por SIEWERT,⁶⁴ no entanto, difere na formulação dos problemas de autovalor que aqui foi feita primeiramente para obter os polinômios de Chandrasekhar ímpares e depois obter os pares através da relação de recorrência, ao contrário de Siewert que resolve inicialmente um autosistema formulado em função dos polinômios de Chandrasekhar pares. Esta inversão de ordem evita resultados menos precisos quando se usa microcomputadores limitados quanto à extensão de palavra, não sendo relevante em se tratando de supercomputadores. A outra maneira de se evitar o problema de perda de precisão no cálculo dos polinômios de Chandrasekhar nos atuais microcomputadores é utilizar

a técnica de BENASSI et al.⁷ que foi explorada por CALDEIRA⁹ no desenvolvimento de sua tese de doutorado. Dentre os testes para comprovação do que foi dito, estão os resultados publicados por CALDEIRA et al.^{10,11} conseguidos através das duas técnicas.

3.2 Solução P_N Particular

A solução particular deve ser determinada em razão do último termo da equação de transporte, Eq. (2.1). Tal qual a solução homogênea, esta solução também é expandida em uma série finita de polinômios de Legendre para o tratamento da dependência em μ do fluxo angular. Então propõe-se

$$\Psi_g^P(x, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N (2n+1) \phi_{g,n}^P(x) P_n(\mu), \quad (3.14)$$

onde o superscrito P indica que a solução expressa pela equação acima é a parte particular da solução P_N geral da Eq. (2.1) que, associada à solução homogênea, também deve satisfazer os primeiros $N+1$ momentos dessa equação. Ou seja, substituindo

$$\Psi_g(x, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N (2n+1) P_n(\mu) [\phi_{g,n}^H(x) + \phi_{g,n}^P(x)] \quad (3.15)$$

na Eq. (2.1), obtém-se

$$\begin{aligned} (n+1) \frac{d}{dx} \phi_{g,n+1}^P(x) + n \frac{d}{dx} \phi_{g,n-1}^P(x) + h_{g,n} \sigma_g \phi_{g,n}^P(x) \\ = \sum_{g'=1}^{g-1} \sigma_{gg'}^n \phi_{g',n}^H(x) + \sum_{g'=1}^{g-1} \sigma_{gg'}^n \phi_{g',n}^P(x). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Para finalmente definir uma solução particular, respeitando o comportamento exponencial espacial da solução homogênea e tentando usar as constantes e parâmetros das soluções homogêneas dos $g-1$ grupos de energia que constituem parte da fonte de partículas moderadas para o grupo g , propõe-se a seguinte expressão:

$$\phi_{g,n}^P(x) = \sum_{h=1}^{g-1} \sum_{j=1}^J [A_{h,j} e^{-(x-x_L)\sigma_h/\xi_{h,j}} + (-1)^n B_{h,j} e^{-(x_R-x)\sigma_h/\xi_{h,j}}] S_{g,n}(\xi_{h,j}), \quad (3.17)$$

onde até este ponto $S_{g,n}(\xi_{h,j})$ é um polinômio qualquer com dependência dos já conhecidos autovalores $\xi_{h,j}$. As soluções homogêneas do lado direito da Eq. (3.16) são

válidas para as versões homogêneas da Eq. (2.1) aplicadas aos grupos de energia compreendidos entre $g' = 1$ e $g' = g - 1$, portanto, usando a Eq. (3.4), e nada impedindo que se troque o índice g' por h , pode-se fazer

$$\sum_{g'=1}^{g-1} \sigma_{gg'}^n \phi_{g',n}^H(x) = \sum_{h=1}^{g-1} \sigma_{gh}^n \sum_{j=1}^J [A_{h,j} e^{-(x-x_L)\sigma_h/\xi_{h,j}} + (-1)^n B_{h,j} e^{-(x_R-x)\sigma_h/\xi_{h,j}}] g_{h,n}(\xi_{h,j}). \quad (3.18)$$

Usando a Eq. (3.17), a contribuição para a fonte de partículas devido às correspondentes soluções particulares pode ser reescrita como

$$\sum_{g'=1}^{g-1} \sigma_{gg'}^n \phi_{g',n}^P(x) = \sum_{g'=1}^{g-1} \sigma_{gg'}^n \sum_{h=1}^{g'-1} \sum_{j=1}^J [A_{h,j} e^{-(x-x_L)\sigma_h/\xi_{h,j}} + (-1)^n B_{h,j} e^{-(x_R-x)\sigma_h/\xi_{h,j}}] S_{g',n}(\xi_{h,j}), \quad (3.19)$$

ou ainda, rearranjando os índices dos dois primeiros somatórios do lado direito da Eq. (3.19) e usando a Eq. (3.18), o lado direito da Eq. (3.16) pode ser reescrito como

$$\sum_{g'=1}^{g-1} \sigma_{gg'}^n \phi_{g',n}^H(x) + \sum_{g'=1}^{g-1} \sigma_{gg'}^n \phi_{g',n}^P(x) = \sum_{j=1}^J \sum_{h=1}^{g-1} \left\{ \left[\sigma_{gh}^n g_{h,n}(\xi_{h,j}) + \sum_{g'=h+1}^{g-1} \sigma_{gg'}^n S_{g',n}(\xi_{h,j}) \right] \times \left[A_{h,j} e^{-(x-x_L)\sigma_h/\xi_{h,j}} + (-1)^n B_{h,j} e^{-(x_R-x)\sigma_h/\xi_{h,j}} \right] \right\}. \quad (3.20)$$

Substituindo as Eqs. (3.17) e (3.20) na Eq. (3.16) obtém-se a seguinte relação de recorrência para os polinômios $S_{g,n}(\xi_{h,j})$

$$(n+1) S_{g,n+1}(\xi_{h,j}) + n S_{g,n-1}(\xi_{h,j}) + \frac{\xi_{h,j}}{\sigma_h} \left[\sigma_{gh}^n g_{h,n}(\xi_{h,j}) + \sum_{g'=h+1}^{g-1} \sigma_{gg'}^n S_{g',n}(\xi_{h,j}) \right] - \left(\frac{\sigma_g \xi_{h,j}}{\sigma_h} \right) h_{g,n} S_{g,n}(\xi_{h,j}) \quad (3.21a)$$

para $n = 0, 1, 2, \dots, N$, que com a imposição da condição de truncamento

$$S_{g,N+1}(\xi_{h,j}) = 0, \quad (3.21b)$$

determina todos os polinômios $S_{g,n}(\xi_{h,j})$, observando-se que dependem apenas das características do meio material. A solução geral dada pela Eq. (3.15) pode ser finalmente

estabelecida explicitamente como

$$\begin{aligned} \Psi_g(x, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N (2n+1) P_n(\mu) \left\{ \sum_{j=1}^J [A_{g,j} e^{-(x-x_L)\sigma_g/\xi_{g,j}} \right. \\ \left. + (-1)^n B_{g,j} e^{-(x_R-x)\sigma_g/\xi_{g,j}}] g_{g,n}(\xi_{g,j}) + \sum_{h=1}^{g-1} \sum_{j=1}^J [A_{h,j} e^{-(x-x_L)\sigma_h/\xi_{h,j}} \right. \\ \left. + (-1)^n B_{h,j} e^{-(x_R-x)\sigma_h/\xi_{h,j}}] S_{g,n}(\xi_{h,j}) \right\}, \quad (3.22) \end{aligned}$$

Nota-se que se g assumir um valor igual a h , a Eq. (3.21a) se reduz à Eq. (3.5a), ou seja os polinômios $S_{g,n}(\xi_{h,j})$ se reduzem aos polinômios de Chandrasekhar $g_{h,n}(\xi_{h,j})$. Resolveu-se, por bem dizer, que os polinômios definidos pelo sistema tridiagonal representado pelas Eqs. (3.21) são os polinômios generalizados de Chandrasekhar. Daí pode-se reescrever a Eq. (3.21a) numa forma mais compacta

$$\begin{aligned} (n+1) G_{g,n+1}(\xi_{h,j}) + n G_{g,n-1}(\xi_{h,j}) + \frac{\xi_{h,j}}{\sigma_h} \sum_{g'=h}^{g-1} \sigma_{gg'}^n G_{g',n}(\xi_{h,j}) \\ + \left(\frac{\sigma_g \xi_{h,j}}{\sigma_h} \right) h_{g,n} G_{g,n}(\xi_{h,j}), \quad (3.23a) \end{aligned}$$

com

$$G_{g,N+1}(\xi_{h,j}) = 0, \quad (3.23b)$$

e também a solução P_N geral para cada grupo g como

$$\begin{aligned} \Psi_g(x, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N (2n+1) P_n(\mu) \sum_{h=1}^g \sum_{j=1}^J [A_{h,j} e^{-(x-x_L)\sigma_h/\xi_{h,j}} \\ + (-1)^n B_{h,j} e^{-(x_R-x)\sigma_h/\xi_{h,j}}] G_{g,n}(\xi_{h,j}), \quad (3.24) \end{aligned}$$

onde

$$G_{g,n}(\xi_{h,j}) = \begin{cases} g_{g,n}(\xi_{g,j}) & \text{se } h = g \text{ (polinômios comuns de Chandrasekhar),} \\ S_{g,n}(\xi_{h,j}) & \text{se } h \neq g \text{ (polinômios generalizados de Chandrasekhar).} \end{cases} \quad (3.25)$$

Deve ser salientado aqui que, através da alternativa de Fredholm,⁵⁸ pode ser mostrado que o sistema definido pelas Eqs. (3.23) admite soluções somente quando $\sigma_g \xi_{h,j} \neq \sigma_h \xi_{g,j'}$. No entanto, esta restrição, se necessário, pode ser relaxada conforme demonstrado na Seção 3.6.

3.3 Determinação dos Coeficientes $\{A_{g,j}, B_{g,j}\}$ da Solução Homogênea

Uma vez estabelecida a solução geral P_N para a equação de transporte, o problema definido pelas Eqs. (2.1) e (2.4) pode ser resolvido e, para tal, é necessário encontrar as constantes $\{A_{g,j}\}$ e $\{B_{g,j}\}$. Substituindo a solução geral, Eq. (3.24), nas Eqs. (2.4), tem-se

$$\sum_{j=1}^J [A_{g,j} \alpha_g(\xi_{g,j}, \mu) + B_{g,j} \beta_g(\xi_{g,j}, \mu) e^{-(x_R - x_L) \sigma_g / \xi_{g,j}}] = L_g(\mu) - \sum_{h=1}^{g-1} \sum_{j=1}^J [A_{h,j} \alpha_g(\xi_{h,j}, \mu) + B_{h,j} \beta_g(\xi_{h,j}, \mu) e^{-(x_R - x_L) \sigma_h / \xi_{h,j}}] \quad (3.26a)$$

e

$$\sum_{j=1}^J [A_{g,j} \beta_g(\xi_{g,j}, \mu) e^{-(x_R - x_L) \sigma_g / \xi_{g,j}} + B_{g,j} \alpha_g(\xi_{g,j}, \mu)] = R_g(\mu) - \sum_{h=1}^{g-1} \sum_{j=1}^J [A_{h,j} \beta_g(\xi_{h,j}, \mu) e^{-(x_R - x_L) \sigma_h / \xi_{h,j}} + B_{h,j} \alpha_g(\xi_{h,j}, \mu)] , \quad (3.26b)$$

onde, em geral,

$$\alpha_g(\xi_{h,j}, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N (2n+1) P_n(\mu) G_{g,n}(\xi_{h,j}) \quad (3.27a)$$

e

$$\beta_g(\xi_{h,j}, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N (2n+1) (-1)^n P_n(\mu) G_{g,n}(\xi_{h,j}), \quad (3.27b)$$

para $\mu \in (0, 1]$. Versões aproximadas das Eqs. (3.26) devem ser usadas para obter um conjunto finito de condições de contorno, ou seja, aproximações adequadas tais como as de Mark e Marshak ¹⁶ ou a de Garcia e Siewert ²⁹ devem ser aplicadas às condições de contorno para obter um sistema de equações algébricas lineares.

3.4 Fluxo Total, Corrente Total e Correntes Parciais

Com as constantes $\{A_{g,j}\}$ e $\{B_{g,j}\}$ determinadas após a escolha de uma das aproximações citadas acima, pode-se encontrar o fluxo escalar para cada grupo

integrando a Eq. (3.24) em μ no intervalo de -1 a 1 , isto é,

$$\phi_g(x) = \int_{-1}^{+1} \Psi_g(x, \mu') d\mu', \quad (3.28a)$$

obtendo-se

$$\phi_g(x) = \sum_{h=1}^g \sum_{j=1}^J [A_{h,j} e^{-(x-x_L)\sigma_h/\xi_{h,j}} + B_{h,j} e^{-(x_R-x)\sigma_h/\xi_{h,j}}] G_{g,0}(\xi_{h,j}), \quad (3.28b)$$

que é igual ao primeiro momento de Legendre. A corrente total pode ser encontrada da seguinte forma

$$J_g(x) = \int_{-1}^{+1} \Psi_g(x, \mu') \mu' d\mu', \quad (3.29a)$$

que equivale ao segundo momento de Legendre

$$J_g(x) = \sum_{h=1}^g \sum_{j=1}^J [A_{h,j} e^{-(x-x_L)\sigma_h/\xi_{h,j}} - B_{h,j} e^{-(x_R-x)\sigma_h/\xi_{h,j}}] G_{g,1}(\xi_{h,j}), \quad (3.29b)$$

e, finalmente, as correntes parciais

$$J_g^\pm(x) = \int_0^{+1} \Psi_g(x, \pm\mu') \mu' d\mu' \quad (3.30a)$$

também podem ser dadas em função dos momentos de Legendre por ²⁹

$$J_g^\pm(x) = \frac{1}{4} \phi_g(x) \pm \frac{1}{2} J_g(x) - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{J-1} (-1)^m (4m+1) \frac{(2m-3)!!}{(2m+2)!!} \phi_{g,2m}(x), \quad (3.30b)$$

onde a definição $(-1)!! = 1$ é para ser usada.

3.5 Fluxo Angular Pós-Processado

Os resultados fornecidos pela Eq. (3.24) em geral não são muito bons devido à característica oscilatória dos polinômios de Legendre.^{15,39,65} Portanto, usando a técnica de integração da função fonte,⁴⁴ ou seja, substituindo a Eq. (3.24) no lado direito da Eq. (2.1) e integrando a equação resultante obtém-se expressões melhoradas para os fluxos angulares de grupo,

$$\begin{aligned} \Psi_g(x, \mu) = & L_g(\mu) e^{-(x-x_L)\sigma_g/\mu} + \sum_{h=1}^g \sum_{j=1}^J \frac{\xi_{h,j}}{\sigma_h} [A_{h,j} C(x - x_L : \mu\sigma_g^{-1}, \xi_{h,j}\sigma_h^{-1}) \Omega_g(\xi_{h,j}, \mu) \\ & + B_{h,j} e^{-(x_R-x)\sigma_h/\xi_{h,j}} S(x - x_L : \mu\sigma_g^{-1}, \xi_{h,j}\sigma_h^{-1}) \Theta_g(\xi_{h,j}, \mu)] \end{aligned} \quad (3.31a)$$

$$\begin{aligned} \Psi_g(x, -\mu) = & R_g(\mu) e^{-(x_R - x)\sigma_g/\mu} + \sum_{h=1}^g \sum_{j=1}^J \frac{\xi_{h,j}}{\sigma_h} [A_{h,j} e^{-(x-x_L)\sigma_h/\xi_{h,j}} \\ & \times S(x_R - x : \mu\sigma_g^{-1}, \xi_{h,j}\sigma_h^{-1}) \Theta_g(\xi_{h,j}, \mu) \\ & + B_{h,j} C(x_R - x : \mu\sigma_g^{-1}, \xi_{h,j}\sigma_h^{-1}) \Omega_g(\xi_{h,j}, \mu)], \end{aligned} \quad (3.31b)$$

para $\mu \in [0, 1]$, onde

$$\Omega_g(\xi_{h,j}, \mu) = \frac{1}{2\sigma_g} \sum_{l=0}^{\min\{\mathcal{L}, N\}} \sum_{g'=h}^g \sigma_{gg'}^l P_l(\mu) G_{g',l}(\xi_{h,j}) \quad (3.32a)$$

$$\Theta_g(\xi_{h,j}, \mu) = \frac{1}{2\sigma_g} \sum_{l=0}^{\min\{\mathcal{L}, N\}} \sum_{g'=h}^g (-1)^l \sigma_{gg'}^l P_l(\mu) G_{g',l}(\xi_{h,j}), \quad (3.32b)$$

e, por definição,

$$C(a : x, y) = \frac{e^{-a/x} - e^{-a/y}}{x - y} \quad (3.32c)$$

$$S(a : x, y) = \frac{1 - e^{-a/x} e^{-a/y}}{x + y}. \quad (3.32d)$$

3.6 Soluções P_N Degeneradas

Para completar as análises anteriores é necessário tratar o caso especial onde, entre os grupos que contribuem para a solução P_N do grupo g , existe um grupo β , $1 \leq \beta \leq g-1$, que tem um subconjunto D de autovalores que não obedece às restrições impostas por $\sigma_g \xi_{\beta,j} \neq \sigma_\beta \xi_{g,j'}$. Mais especificamente, considera-se que para cada autovalor $\xi_{\beta,j} \in D$ corresponde um autovalor $\xi_{g,j'}$ no grupo g tal que $\sigma_g \xi_{\beta,j} = \sigma_\beta \xi_{g,j'}$. Para ser genérico, o número de elementos em D pode ser qualquer. Assim, D pode consistir de um autovalor, alguns autovalores ou de todos os autovalores do grupo β . Embora, na prática as chances de encontrar qualquer degenerescência sejam remotas, é mostrado nesta seção, que o caso de degenerescência considerado é, teoricamente falando, um problema de difícil solução que requer novas formas de soluções P_N . Então,

considerando uma degenerescência de primeira ordem (isto é, uma degenerescência que conecta apenas dois grupos de energia), pode-se formulá-la como o problema de encontrar uma solução P_N para a equação de transporte

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial x} \Psi_g(x, \mu) + \sigma_g \Psi_g(x, \mu) &= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sigma_{gg}^l P_l(\mu) \int_{-1}^{+1} \Psi_g(x, \mu') P_l(\mu') d\mu' \\ &+ \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq \beta}}^{g-1} Q_{gg'}^r(x, \mu) + Q_{g\beta}^d(x, \mu), \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde o segundo termo do lado direito da Eq. (3.33) corresponde ao segundo termo da Eq. (2.1) excluído o grupo $g' = \beta$, ou seja, é a contribuição regular da fonte de moderação dada por

$$\sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq \beta}}^{g-1} Q_{gg'}^r(x, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq \beta}}^{g-1} \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sigma_{gg'}^l P_l(\mu) \phi_{g',l}^r(x) \quad (3.34)$$

e o último termo do lado direito corresponde à contribuição degenerada devido aos autovalores degenerados, $\xi_{\beta,j} \in D$, do grupo β , dado por

$$Q_{g\beta}^d(x, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sigma_{g\beta}^l P_l(\mu) \phi_{\beta,l}^d(x). \quad (3.35)$$

Desta forma, a solução P_N geral da Eq. (3.33) pode ser escrita como

$$\Psi_g(x, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N (2n+1) P_n(\mu) [\phi_{g,n}^r(x) + \phi_{g,n}^d(x)]. \quad (3.36)$$

Nesta equação, a solução regular $\phi_{g,n}^r(x)$ pode ser escrita normalmente como

$$\begin{aligned} \phi_{g,n}^r(x) &= \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq \beta}}^g \sum_{j=1}^J [A_{h,j} e^{-(x-x_L)\sigma_h/\xi_{h,j}} + (-1)^n B_{h,j} e^{-(x_R-x)\sigma_h/\xi_{h,j}}] G_{g,n}(\xi_{h,j}) \\ &+ \sum_{j \notin D} [A_{\beta,j} e^{-(x-x_L)\sigma_\beta/\xi_{\beta,j}} + (-1)^n B_{\beta,j} e^{-(x_R-x)\sigma_\beta/\xi_{\beta,j}}] G_{g,n}(\xi_{\beta,j}), \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde $j \notin D$ quer dizer que o somatório reúne apenas as parcelas correspondentes aos autovalores $\xi_{\beta,j}$ que não pertencem ao subconjunto D . Para resumir a escrita das expressões longas, daqui para frente adota-se

$$T_{\beta,j}^n(x : \xi_{\beta,j}/\sigma_\beta) = A_{\beta,j} e^{-(x-x_L)\sigma_\beta/\xi_{\beta,j}} + (-1)^n B_{\beta,j} e^{-(x_R-x)\sigma_\beta/\xi_{\beta,j}}. \quad (3.38)$$

Para facilitar a dedução de uma expressão para a contribuição degenerada $\phi_{g,n}^d(x)$ na Eq. (3.36), nota-se que, caso os autovalores em D não fossem degenerados, essa contribuição poderia ser expressa como

$$\phi_{g,n}^d(x) = \sum_{j \in D} T_{\beta,j}^n(x : \xi_{\beta,j}/\sigma_\beta) \left[\hat{G}_{g,n}(\xi_{\beta,j}) + \gamma_j g_{g,n}(\sigma_g \xi_{\beta,j}/\sigma_\beta) \right]. \quad (3.39)$$

$\hat{G}_{g,n}(\xi_{\beta,j})$ representa o termo genérico de qualquer solução particular da equação de diferenças expressa pela Eq. (3.23a) com $h = \beta$, ou seja

$$(n+1)\hat{G}_{g,n+1}(\xi_{\beta,j}) + n\hat{G}_{g,n-1}(\xi_{\beta,j}) + \left(\frac{\xi_{\beta,j}}{\sigma_\beta} \right) \sum_{g'=j}^{g-1} \sigma_{gg'}^n G_{g',n}(\xi_{\beta,j}) - \left(\frac{\sigma_g \xi_{\beta,j}}{\sigma_\beta} \right) h_{g,n} \hat{G}_{g,n}(\xi_{\beta,j}), \quad (3.40)$$

para $n = 0, 1, \dots, N$ e, a partir da condição de truncamento expressa pela Eq. (3.23b), conclui-se que

$$\gamma_j = - \left[\frac{\hat{G}_{g,N+1}(\xi_{\beta,j})}{g_{g,N+1}(\sigma_g \xi_{\beta,j}/\sigma_\beta)} \right]. \quad (3.41)$$

Desta forma, sem degenerescência, todos os momentos de Legendre $\phi_{g,n}(x)$ poderiam ser representados na forma alternativa da Eq. (3.39). Entretanto, para o caso degenerado que se deseja considerar aqui, as constantes γ_j tornam-se singulares uma vez que $\hat{G}_{g,N+1}(\xi_{\beta,j}) \neq 0$ e $g_{g,N+1}(\sigma_g \xi_{\beta,j}/\sigma_\beta) = 0$ para $j \in D$ e, portanto, a Eq. (3.39) precisa ser modificada. Considerando que soluções P_N homogêneas sempre podem ser adicionadas a uma solução P_N particular,⁷ estas singularidades podem ser efetivamente removidas adicionando-se múltiplos convenientes de soluções P_N homogêneas à Eq. (3.39). Por simplicidade, considera-se que os autovalores $\{\xi_{g,j'}\}$ são ordenados de tal modo que, para um dado autovalor degenerado $\xi_{\beta,j}$, o correspondente autovalor do grupo g (ou seja, $\xi_{g,j'} = \sigma_g \xi_{\beta,j}/\sigma_\beta$) tenha o índice $j' = j$. Então, tem-se

$$\begin{aligned} \phi_{g,n}^d(x) &= \sum_{j \in D} T_{\beta,j}^n(x : \xi_{\beta,j}/\sigma_\beta) \hat{G}_{g,n}(\xi_{\beta,j}) \\ &+ \sum_{j \in D} \gamma_j \left[T_{\beta,j}^n(x : \xi_{\beta,j}/\sigma_\beta) g_{g,n}(\sigma_g \xi_{\beta,j}/\sigma_\beta) - T_{\beta,j}^n(x : \xi_{g,j}/\sigma_g) G_{g,n}(\xi_{g,j}) \right]. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Tomando-se o limite de $\xi_{\beta,j} \rightarrow \sigma_\beta \xi_{g,j}/\sigma_g$ no segundo somatório da Eq. (3.42) e aplicando-se a regra de L'Hospital, encontra-se o resultado desejado para a contribuição degene-

rada do grupo β para o grupo g :

$$\begin{aligned} \psi_{g,n}^g(x) = \sum_{j=1}^N T_{\beta,j}^n(x : \xi_{\beta,j}/\sigma_\beta) \left[\dot{G}_{g,n}(\xi_{\beta,j}) + \tilde{h}_j \dot{G}_{g,n}(\xi_{\beta,j}) \right] \\ + \left(\frac{\sigma_\beta}{\xi_{\beta,j}} \right) \sum_{i=1}^N \delta_j T_{\beta,j}^n(x : \xi_{\beta,j}/\sigma_\beta) G_{g,n}(\xi_{\beta,j}), \end{aligned} \quad (3.43a)$$

onde

$$\dot{G}_{g,n}(\xi_{g,j}) \equiv \frac{dG_{g,n}(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_{g,j}}, \quad (3.43b)$$

$$\tilde{h}_j = \left[\frac{\hat{G}_{g,N+1}(\xi_{\beta,j})}{\dot{G}_{g,N+1}(\xi_{\beta,j})} \right] \quad (3.43c)$$

o

$$\begin{aligned} T_{\beta,j}^n(x : \xi_{\beta,j}/\sigma_\beta) = \frac{U_{\beta,j}^n(x : \xi/\sigma_\beta)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_{\beta,j}} \\ = \left(\frac{\sigma_\beta}{\xi_{\beta,j}} \right) \cdot A_{\beta,j}(x - x_L) e^{-(x-x_L)\sigma_\beta/\xi_{\beta,j}} \\ + (-1)^n B_{\beta,j}(x_R - x) e^{-(x_R-x)\sigma_\beta/\xi_{\beta,j}}. \end{aligned} \quad (3.43d)$$

A derivada $\dot{G}_{g,n}(\xi_{g,j})$ definida pela Eq. (3.43b) pode ser calculada usando-se a relação de recorrência

$$(n+1)\dot{G}_{g,n+1}(\xi_{g,j}) + n\dot{G}_{g,n-1}(\xi_{g,j}) - h_{g,n}G_{g,n}(\xi_{g,j}) = h_{g,n}\xi_{g,j}\dot{G}_{g,n}(\xi_{g,j}), \quad (3.44a)$$

para $n = 0, 1, \dots, N$, com o valor inicial

$$\dot{G}_{g,0}(\xi_{g,j}) = 0. \quad (3.44b)$$

3.7 Propagação da Degenerescência

Uma vez determinada a expressão da solução P_N degenerada para o grupo g e, não sendo este o último grupo de moderação, ocorre uma propagação da degenerescência para os grupos $\alpha = g+1, g+2, \dots, NDS$. Sendo assim, a equação de

transporte para qualquer grupo subsequente a g pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial x} \Psi_\alpha(x, \mu) + \sigma_\alpha \Psi_\alpha(x, \mu) &= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sigma_{\alpha\alpha}^l P_l(\mu) \phi_{\alpha,l}(x) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sigma_{\alpha g}^l P_l(\mu) \phi_{g,l}(x) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^{\alpha-1} \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sigma_{\alpha g'}^l P_l(\mu) \phi_{g',l}(x) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Nota-se que o primeiro e o terceiro termos do lado direito são totalmente convencionais, enquanto que o segundo termo contém contribuições regular e degenerada; então, reescrevendo a contribuição de fonte do grupo g para o grupo α tem-se

$$Q_{\alpha g}(x) = Q_{\alpha g}^r(x) + Q_{\alpha g}^d(x) = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sigma_{\alpha g}^l P_l(\mu) [\phi_{g,l}^r(x) + \phi_{g,l}^d(x)]. \quad (3.46)$$

Observa-se que para todos os termos convencionais do lado direito da Eq. (3.45) a contribuição regular, $\phi_{\alpha,n}^r(x)$, pode ser obtida de uma maneira análoga ao processo anterior e é dada por

$$\phi_{\alpha,n}^r(x) = \sum_{h=1}^{\alpha} \sum_{\substack{j=1 \\ h \neq \beta}}^J T_{h,j}^n(x : \xi_{h,j}/\sigma_h) G_{\alpha,n}(\xi_{h,j}) + \sum_{j \notin D} T_{\beta,j}^n(x : \xi_{\beta,j}/\sigma_\beta) G_{\alpha,n}(\xi_{\beta,j}). \quad (3.47)$$

Substituindo a Eq. (3.43a) no termo de fonte, $Q_{\alpha,g}^d(x)$, que contém a contribuição degenerada, tem-se

$$\begin{aligned} Q_{\alpha g}^d(x) &= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sigma_{\alpha g}^l P_l(\mu) \sum_{j \in D} \left\{ T_{\beta,j}^n(x : \xi_{\beta,j}/\sigma_\beta) \left[\hat{G}_{g,n}(\xi_{\beta,j}) + \delta_j \hat{G}_{g,n}(\xi_{g,j}) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\sigma_\beta}{\sigma_g} \right) \delta_j \hat{T}_{\beta,j}^n(x : \xi_{\beta,j}/\sigma_\beta) G_{g,n}(\xi_{g,j}) \right\}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde dá para perceber a contribuição do grupo β para o grupo g e daí para o grupo α . A Eq. (3.48) constitui o único termo não-homogêneo da Eq. (3.45) para o qual é necessário uma solução P_N que também tenha a dependência espacial expressa por produtos de fatores linear e exponencial. Para deduzir tal solução, considera-se a Eq. (3.45) com o lado direito contendo somente o primeiro termo e o segundo com apenas a contribuição degenerada e propõe-se a seguinte solução:

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha,n}^d(x) &= \sum_{j \in D} a_j T_{\beta,j}^n(x : \xi_{\beta,j}/\sigma_\beta) q_{\alpha,n}(\xi_{g,j}) \\ &+ \left(\frac{\sigma_\beta}{\sigma_g} \right) \sum_{j \in D} b_j \hat{T}_{\beta,j}^n(x : \xi_{\beta,j}/\sigma_\beta) f_{\alpha,n}(\xi_{g,j}), \end{aligned} \quad (3.49)$$

donde conclui-se que $a_j = 1$, $b_j = 1$,

$$u_{\alpha,n}(\xi_{g,j}) = \left[\hat{G}_{\alpha,n}(\xi_{g,j}) + \delta_j \dot{G}_{\alpha,n}(\xi_{g,j}) \right] \quad (3.50)$$

e

$$f_{\alpha,n}(\xi_{g,j}) = \delta_j \dot{G}_{\alpha,n}(\xi_{g,j}). \quad (3.51)$$

Portanto, a contribuição degenerada que se propaga para os grupos $\alpha = g+1, g+2, \dots$, NDS é dada por

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha,n}^d(x) = \sum_{j \in D} T_{\beta,j}^n(x : \xi_{g,j}/\sigma_\beta) \left[\hat{G}_{\alpha,n}(\xi_{g,j}) - \delta_j \dot{G}_{\alpha,n}(\xi_{g,j}) \right] \\ + \left(\frac{\sigma_\beta}{\sigma_g} \right) \sum_{j \in D} \delta_j T_{\beta,j}^n(x : \xi_{g,j}/\sigma_\beta) G_{\alpha,n}(\xi_{g,j}), \end{aligned} \quad (3.52a)$$

onde

$$\dot{G}_{\alpha,n}(\xi_{g,j}) \equiv \left. \frac{dG_{\alpha,n}(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_{g,j}}, \quad (3.52b)$$

e os polinômios $\{\hat{G}_{\alpha,n}(\xi_{\beta,j})\}$ são soluções dos sistemas tridiagonais construídos através de

$$\begin{aligned} (n+1)\hat{G}_{\alpha,n+1}(\xi_{\beta,j}) + n\hat{G}_{\alpha,n-1}(\xi_{\beta,j}) + \left(\frac{\xi_{\beta,j}}{\sigma_\beta} \right) \left[\sum_{m=\beta}^{g-1} \sigma_{\alpha m}^n G_{m,n}(\xi_{\beta,j}) + \sum_{m=g}^{\alpha-1} \sigma_{\alpha m}^n \hat{G}_{m,n}(\xi_{\beta,j}) \right] \\ = \left(\frac{\sigma_\alpha \xi_{\beta,j}}{\sigma_\beta} \right) h_{\alpha,n} \dot{G}_{\alpha,n}(\xi_{\beta,j}), \end{aligned} \quad (3.53a)$$

para $n = 0, 1, \dots, N$, e as condições de truncamento

$$\hat{G}_{\alpha,N+1}(\xi_{\beta,j}) = -\delta_j \dot{G}_{\alpha,N+1}(\xi_{g,j}), \quad (3.53b)$$

para $j \in D$. É interessante notar que se $\alpha = g$ na Eq. (3.52a), restabelece-se a Eq. (3.43a).

3.8 Soluções P_N Pós-Processadas com Degenerescência

Para calcular o fluxo angular de grupo pós-processado para o caso degenerado, utiliza-se da mesma técnica usada na Seção 3.5, ou seja, integra-se a Eq. (3.45)

sobre x , considerando o lado direito dessa equação conhecido, encontrando-se, para $\mu \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha(x, \mu) = & L_\alpha(\mu) e^{-(x-x_L)\sigma_\alpha/\mu} \\ & + \frac{1}{2\mu} \sum_{l=0}^{\min\{\mathcal{L}, N\}} \sum_{g'=1}^{\alpha} \sigma_{\alpha g'}^l P_l(\mu) \int_{x_L}^x \phi_{g',l}(x') e^{-(x-x')\sigma_\alpha/\mu} dx' \end{aligned} \quad (3.54a)$$

c

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha(x, -\mu) = & R_\alpha(\mu) e^{-(x_R-x)\sigma_\alpha/\mu} \\ & + \frac{1}{2\mu} \sum_{l=0}^{\min\{\mathcal{L}, N\}} \sum_{g'=1}^{\alpha} \sigma_{\alpha g'}^l P_l(\mu) \int_x^{x_R} \phi_{g',l}(x') e^{-(x'-x)\sigma_\alpha/\mu} dx'. \end{aligned} \quad (3.54b)$$

Continuando a expressar o fluxo angular em contribuições regular e degenerada, pode-se escrever

$$\Psi_\alpha(x, \mu) = L_\alpha(\mu) e^{-(x-x_L)\sigma_\alpha/\mu} + \Psi_\alpha^r(x, \mu) + \Psi_\alpha^d(x, \mu) \quad (3.55a)$$

c

$$\Psi_\alpha(x, -\mu) = R_\alpha(\mu) e^{-(x_R-x)\sigma_\alpha/\mu} + \Psi_\alpha^r(x, -\mu) + \Psi_\alpha^d(x, -\mu). \quad (3.55b)$$

A contribuição regular pode ser escrita comó

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha^r(x, \mu) = & \sum_{h=1}^{\alpha} \sum_{j=1}^J \left(\frac{\xi_{h,j}}{\sigma_h} \right) \left[A_{h,j} C(x - x_L : \mu \sigma_\alpha^{-1}, \xi_{h,j} \sigma_h^{-1}) \Omega_{m(h)}(\xi_{h,j}, \mu) \right. \\ & + B_{h,j} e^{-(x_R-x)\sigma_h/\xi_{h,j}} S(x - x_L : \mu \sigma_\alpha^{-1}, \xi_{h,j} \sigma_h^{-1}) \Theta_{m(h)}(\xi_{h,j}, \mu) \Big] \\ & + \sum_{j \notin D} \left(\frac{\xi_{\beta,j}}{\sigma_\beta} \right) \left[A_{\beta,j} C(x - x_L : \mu \sigma_\alpha^{-1}, \xi_{\beta,j} \sigma_\beta^{-1}) \Omega_\alpha^g(\xi_{\beta,j}, \mu) \right. \\ & + B_{\beta,j} e^{-(x_R-x)\sigma_\beta/\xi_{\beta,j}} S(x - x_L : \mu \sigma_\alpha^{-1}, \xi_{\beta,j} \sigma_\beta^{-1}) \Theta_\alpha^g(\xi_{\beta,j}, \mu) \Big], \end{aligned} \quad (3.56a)$$

e

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha^r(x, -\mu) = & \sum_{h=1}^{\alpha} \sum_{j=1}^J \left(\frac{\xi_{h,j}}{\sigma_h} \right) \left[A_{h,j} e^{-(x-x_L)\sigma_h/\xi_{h,j}} S(x_R - x : \mu \sigma_\alpha^{-1}, \xi_{h,j} \sigma_h^{-1}) \right. \\ & \times \Theta_{m(h)}(\xi_{h,j}, \mu) + B_{h,j} C(x_R - x : \mu \sigma_\alpha^{-1}, \xi_{h,j} \sigma_h^{-1}) \Omega_{m(h)}(\xi_{h,j}, \mu) \Big] \\ & + \sum_{j \notin D} \left(\frac{\xi_{\beta,j}}{\sigma_\beta} \right) \left[A_{\beta,j} e^{-(x-x_L)\sigma_\beta/\xi_{\beta,j}} S(x_R - x : \mu \sigma_\alpha^{-1}, \xi_{\beta,j} \sigma_\beta^{-1}) \right. \\ & \times \Theta_\alpha^g(\xi_{\beta,j}, \mu) + B_{\beta,j} C(x_R - x : \mu \sigma_\alpha^{-1}, \xi_{\beta,j} \sigma_\beta^{-1}) \Omega_\alpha^g(\xi_{\beta,j}, \mu) \Big], \end{aligned} \quad (3.56b)$$

onde

$$\Omega_{m(h)}(\xi_{h,j}, \mu) = \frac{1}{2\sigma_\alpha} \sum_{l=0}^{\min\{\mathcal{L}, N\}} \sum_{g'=h}^{m(h)} \sigma_{\alpha g'}^l P_l(\mu) G_{g',l}(\xi_{h,j}) \quad (3.57a)$$

e

$$\Theta_{m(h)}(\xi_{h,j}, \mu) = \frac{1}{2\sigma_\alpha} \sum_{l=0}^{\min\{\mathcal{L}, N\}} \sum_{g'=h}^{m(h)} (-1)^l \sigma_{\alpha g'}^l P_l(\mu) G_{g',l}(\xi_{h,j}), \quad (3.57b)$$

com

$$m(h) = \begin{cases} \alpha & \text{se } h \neq \beta, \\ g-1 & \text{se } h = \beta, \end{cases} \quad (3.57c)$$

$$\Omega_\alpha^g(\xi_{\beta,j}, \mu) = \left(\frac{1}{2\sigma_\alpha} \right) \sum_{l=0}^{\min\{\mathcal{L}, N\}} \sum_{g'=g}^{\alpha} \sigma_{\alpha g'}^l P_l(\mu) G_{g',l}(\xi_{\beta,j}) \quad (3.57d)$$

e

$$\Theta_\alpha^g(\xi_{\beta,j}, \mu) = \left(\frac{1}{2\sigma_\alpha} \right) \sum_{l=0}^{\min\{\mathcal{L}, N\}} \sum_{g'=g}^{\alpha} (-1)^l \sigma_{\alpha g'}^l P_l(\mu) G_{g',l}(\xi_{\beta,j}). \quad (3.57e)$$

Analogamente, usando as definições introduzidas por BENASSI et al.,⁷ dadas por

$$\mathcal{C}(a : x, y) = \left(\frac{1}{x-y} \right) \{ xy \mathcal{C}(a : x, y) - a e^{-a/y} \} \quad (3.58a)$$

o

$$\mathcal{S}(a : x, y) = \left(\frac{1}{x+y} \right) \{ [xy + \Delta(x+y)] \mathcal{S}(a : x, y) - a \}, \quad (3.58b)$$

com $\Delta = x_R - x_L$, encontra-se a contribuição degenerada nas Eqs. (3.55) como

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha^d(x, \mu) = & \sum_{j \in D} \left(\frac{\xi_{\beta,j}}{\sigma_\beta} \right) \left[A_{\beta,j} \mathcal{C}(x - x_L : \mu \sigma_\alpha^{-1}, \xi_{\beta,j} \sigma_\beta^{-1}) \hat{\Omega}_\alpha^g(\xi_{\beta,j}, \mu) \right. \\ & + B_{\beta,j} e^{-(x_R-x)\sigma_\beta/\xi_{\beta,j}} \mathcal{S}(x - x_L : \mu \sigma_\alpha^{-1}, \xi_{\beta,j} \sigma_\beta^{-1}) \hat{\Theta}_\alpha^g(\xi_{\beta,j}, \mu) \Big] \\ & + \frac{\sigma_\beta}{\sigma_g} \sum_{j \in D} \frac{\delta_j}{\xi_{\beta,j}} \left[A_{\beta,j} \mathcal{C}(x - x_L : \mu \sigma_\alpha^{-1}, \xi_{\beta,j} \sigma_\beta^{-1}) \Omega_\alpha^g(\xi_{g,j}, \mu) \right. \\ & \left. - B_{\beta,j} e^{-(x_R-x)\sigma_\alpha/\mu} \mathcal{S}(x - x_L : \mu \sigma_\alpha^{-1}, \xi_{\beta,j} \sigma_\beta^{-1}) \Theta_\alpha^g(\xi_{g,j}, \mu) \right] \quad (3.59a) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha^d(x, -\mu) = & \sum_{j \in D} \left(\frac{\xi_{\beta,j}}{\sigma_\beta} \right) \left[A_{\beta,j} e^{-(x-x_L)\sigma_\beta/\xi_{\beta,j}} \mathcal{S}(x_R - x : \mu \sigma_\alpha^{-1}, \xi_{\beta,j} \sigma_\beta^{-1}) \right. \\ & \times \hat{\Theta}_\alpha^g(\xi_{\beta,j}, \mu) + B_{\beta,j} \mathcal{C}(x_R - x : \mu \sigma_\alpha^{-1}, \xi_{\beta,j} \sigma_\beta^{-1}) \hat{\Omega}_\alpha^g(\xi_{\beta,j}, \mu) \Big] \\ & + \frac{\sigma_\beta}{\sigma_g} \sum_{j \in D} \frac{\delta_j}{\xi_{\beta,j}} \left[A_{\beta,j} e^{-(x-x_L)\sigma_\beta/\xi_{\beta,j}} \mathcal{S}(x_R - x : \mu \sigma_\alpha^{-1}, \xi_{\beta,j} \sigma_\beta^{-1}) \right. \\ & \left. \times \Theta_\alpha^g(\xi_{g,j}, \mu) + B_{\beta,j} \mathcal{C}(x_R - x : \mu \sigma_\alpha^{-1}, \xi_{\beta,j} \sigma_\beta^{-1}) \Omega_\alpha^g(\xi_{g,j}, \mu) \right] \quad (3.59b) \end{aligned}$$

onde

$$\dot{G}_{\beta,j}^{\mu}(\xi_{\beta,j}, \mu) = \left(\frac{1}{2\sigma_{\beta}} \right) \sum_{l=0}^{\min\{\mathcal{L}, N\}} \sum_{g'=g}^{\alpha} \sigma_{\alpha g'}^l P_l(\mu) \left[\hat{G}_{g',l}(\xi_{\beta,j}) + \delta_j \dot{G}_{g',l}(\xi_{g,j}) \right] \quad (3.60a)$$

e

$$\dot{G}_{\alpha}^{\mu}(\xi_{\beta,j}, \mu) = \left(\frac{1}{2\sigma_{\alpha}} \right) \sum_{l=0}^{\min\{\mathcal{L}, N\}} \sum_{g'=g}^{\alpha} (-1)^l \sigma_{\alpha g'}^l P_l(\mu) \left[\hat{G}_{g',l}(\xi_{\beta,j}) + \delta_j \dot{G}_{g',l}(\xi_{g,j}) \right]. \quad (3.60b)$$

Finalmente, no que diz respeito ao cálculo dos polinômios $\{\hat{G}_{\alpha,n}(\xi_{\beta,j})\}$ e das derivadas dos polinômios generalizados de Chandrasekhar $\{\dot{G}_{\alpha,n}(\xi_{g,j})\}$ que constam no primeiro somatório da Eq. (3.52a) para $\alpha = g+1, g+2, \dots, NDS$ é preferível calcular os polinômios

$$\Pi_{\alpha,n}(\xi_{g,j}) = \hat{G}_{\alpha,n}(\xi_{g,j}) + \delta_j \dot{G}_{\alpha,n}(\xi_{g,j}) \quad (3.61)$$

e usá-los diretamente na Eq. (3.52a). Esses polinômios podem ser calculados através dos sistemas tridiagonais montados a partir de

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_{\alpha} \xi_{g,j}}{\sigma_{\beta}} \right) \Pi_{\alpha,n}(\xi_{\beta,j}) - (n+1) \Pi_{\alpha,n+1}(\xi_{\beta,j}) + n \Pi_{\alpha,n-1}(\xi_{\beta,j}) \\ + \left(\frac{\delta_j}{\xi_{g,j}} \right) [(n+1) G_{\alpha,n+1}(\xi_{g,j}) + n G_{\alpha,n-1}(\xi_{g,j})] \\ + \left(\frac{\xi_{\beta,j}}{\sigma_{\beta}} \right) \left[\sum_{m=\beta}^{g-1} \sigma_{\alpha m}^n G_{m,n}(\xi_{\beta,j}) + \sum_{m=g}^{\alpha-1} \sigma_{\alpha m}^n \Pi_{m,n}(\xi_{\beta,j}) \right] \end{aligned} \quad (3.62a)$$

para $n = 0, 1, \dots, N$ e das condições de truncamento

$$\Pi_{\alpha,N+1}(\xi_{\beta,j}) = 0, \quad (3.62b)$$

para $j \in D$ e $\alpha = g+1, g+2, \dots, NDS$. É claro que, neste ponto, os polinômios generalizados de Chandrasekhar $\{G_{\alpha,n}(\xi_{g,j})\}$ e os polinômios $\{\Pi_{m,n}(\xi_{\beta,j})\}$ para $m = g, g+1, \dots, \alpha-1$ já foram computados, de modo que o termo não-homogêneo da Eq. (3.62a) é conhecido. Os sistemas tridiagonais definidos pelas Eqs. (3.62) também podem ser resolvidos usando a subrotina DGTSL do pacote LINPACK.¹⁹

3.9 Problemas-Teste

3.9.1 Sem Degenerescência

Para ilustrar a aplicação do método, dois problemas-teste foram resolvidos, aplicando-se, em ambos os casos, a aproximação de Mark às condições de contorno. O primeiro trata-se de um problema de 20 grupos com espalhamento anisotrópico de décima ordem introduzido há alguns anos atrás por GARCIA e SIEWERT²⁷ para testar o desempenho do método F_N ; o problema é definido por uma placa de 20 cm de espessura descrita por um conjunto de seções de choque sintetizado, para $g = 1, 2, \dots, 20$,

$$\sigma_g = [2g - 3(\delta_{g,5} + \delta_{g,10})]/20 \quad (3.63a)$$

e

$$\sigma_{gg'}^l = (2l + 1)(q_{gg'})^l g' / [100(g - g' + 1)] \quad (3.63b)$$

para $g' = 1, 2, \dots, g$ e $l = 0, 1, \dots, 10$, com

$$q_{gg'} = (140 - g - g')/200, \quad (3.63c)$$

com uma distribuição isotrópica incidente no lado esquerdo, em $x = x_L$, somente no grupo 1, ou seja,

$$L_g(\mu) = \delta_{g,1} \quad (3.64a)$$

e

$$R_g(\mu) = 0. \quad (3.64b)$$

Os resultados para os fluxos escalares de grupo, $\phi_g(x)$, $g = 1, 2, \dots, 20$, juntamente com os de referência obtidos por GARCIA e SIEWERT²⁷ com o método F_N , na margem esquerda, no centro e na margem direita da placa são relatados nas Tabelas 3.1, 3.2 e 3.3, respectivamente. Observa-se que a convergência é mais lenta nos contornos conforme é típico do método P_N .^{7,64} Nas Tabelas 3.4 e 3.5 são apresentados os albedos e fatores de transmissão definidos, respectivamente, como $A_g^* = J_g^-(x_L)/J_g^+(x_L)$ e $B_g^* = J_g^+(x_R)/J_g^+(x_L)$ para todos os grupos de energia. Em todas as tabelas são mostrados os resultados de referência²⁷ para permitir comparações. Em relação aos fluxos angulares pós-processados, foi verificado que a ordem de grandeza da máxima

diferença entre os resultados obtidos para $N = 299$ e os publicados situa-se em torno de 0,01%.

O segundo problema é mais simples do que o primeiro porque é limitado ao espalhamento isotrópico.²⁵ Trata-se de uma placa de ferro de 10 cm de espessura com uma fonte unitária de raios gama incidente na margem esquerda da placa com energia igual ao do grupo de mais alta energia de uma estrutura de 19 grupos dividindo um espectro compreendido entre 50 keV e 1 MeV. As seções de choque para este problema são dadas na Tabela IV da Referência 25. Nas Tabelas 3.6 e 3.7 são comparados os albedos e fatores de transmissão de grupo obtidos com o método P_N com os da Referência 25. No que diz respeito aos fluxos angulares, foi verificado que as diferenças entre os resultados pós-processados obtidos para $N = 299$ e os tabulados na Referência 25 são menores do que 0,02%.

3.9.2 Com Degenerescência

Para testar as soluções P_N degeneradas deduzidas nas seções precedentes foi resolvido um problema de 16 grupos introduzido por GARCIA e SIEWERT²⁵ em 1981. Este problema foi concebido com o propósito de testar as modificações implementadas no método F_N para tratar degenerescências de primeira ordem para o caso de espalhamento isotrópico. Uma placa com espessura de 1 cm é irradiada isotropicamente na superfície esquerda, em $x = x_L$, por uma distribuição unitária de nêutrons com energia no primeiro grupo. As propriedades materiais da placa são descritas por um conjunto sintético de seções de choque macroscópicas totais (cm^{-1}), dado por

$$\sigma_1 = 11, \quad (3.65a)$$

$$\sigma_g = 10 + g/14, \quad g = 2, 3, \dots, 14, \quad (3.65b)$$

$$\sigma_{15} = 10^4 \quad (3.65c)$$

4:

$$\sigma_{16} = 20, \quad (3.65d)$$

e componentes isotrópicos das seções de choque de transferência macroscópicas (cm^{-1}), para $g = 1, 2, \dots, 14$, dados por

$$\sigma_{g+k,g} = 3/(k+1), \quad k = 0, 1, \dots, 16-g, \quad (3.66a)$$

$$\sigma_{15,15} = 0, \quad (3.66b)$$

$$\sigma_{16,15} = 10^{-4} \quad (3.66c)$$

c

$$\sigma_{16,16} = 5. \quad (3.66d)$$

Observa-se que os grupos 1 e 14 possuem as mesmas seções de choque totais e de transferência intragrupo, dando origem a uma degenerescência de primeira ordem envolvendo todos os autovalores P_N destes grupos.

Nas Tabelas 3.8 e 3.9 são apresentados, juntamente com os resultados F_N da Referência 25, resultados P_N selecionados para os albedos de grupo, A_g^* , e para os fatores de transmissão, B_g^* , obtidos usando as condições de contorno de Mark. Os resultados para os fluxos angulares de grupo apresentados nas Tabelas 3.10, 3.11 e 3.12, foram obtidos com $N = 299$ e concordam com os resultados da Referência 25 dentro de ± 2 no último dígito, exceto no grupo 15 onde foi observada uma diferença de até 5 no último algarismo.

3.10 Comentários

Observa-se que a solução P_N geral para o problema de moderação multigrupo expressa pela Eq. (3.24) para um grupo g qualquer, traduz uma generalização da solução P_N da versão homogênea da equação de transporte conforme pode ser visto comparando-se a Eq. (3.24) com a Eq. (3.13).

Exceto para o caso degenerado, os cálculos dos polinômios generalizados de Chandrasekhar definidos pelas Eqs. (3.23) constituem a única exigência computacional adicional exigida pela solução P_N proposta. Os polinômios podem ser determinados

com precisão utilizando-se as técnicas convencionais de álgebra linear dos pacotes LINPACK¹⁹ ou LAPACK.¹

As soluções P_N degeneradas e os métodos computacionais relatados a partir da Seção 3.6 podem ser usados com confiança em se tratando de degenerescências de primeira ordem. Deve ser notado que, em princípio, degenerescências de ordem superior (conectando três ou mais grupos de energia) ou múltiplas degenerescências de primeira ordem são possíveis, entretanto, a probabilidade de se encontrar tais degenerescências na prática é ainda muito menor do que a de encontrar uma simples degenerescência de primeira ordem. No raro evento de se desejar solucionar problemas com degenerescências mais complexas, as soluções devem ser desenvolvidas seguindo o mesmo procedimento, podendo ser antecipado que, para o caso de uma degenerescência de segunda ordem, a dependência espacial de tais soluções deverá conter fatores quadráticos multiplicados por exponenciais além de derivadas de segunda ordem tanto dos polinômios comuns como dos generalizados de Chandrasekhar.

Tabela 3.1: Fluxos Escalares de Grupo $\phi_g(x)$ para $x = x_L$

g	$N = 19$	$N = 29$	$N = 39$	$N = 59$	$N = 299$	Ref. 27
1	1,0116	1,0117	1,0117	1,0117	1,0117	1,0117
2	3,9912(-3) ^a	3,9836(-3)	3,9784(-3)	3,9731(-3)	3,9663(-3)	3,9657(-3)
3	2,1111(-3)	2,1031(-3)	2,0986(-3)	2,0941(-3)	2,0887(-3)	2,0883(-3)
4	1,3399(-3)	1,3338(-3)	1,3304(-3)	1,3271(-3)	1,3231(-3)	1,3228(-3)
5	1,3164(-3)	1,3105(-3)	1,3074(-3)	1,3044(-3)	1,3009(-3)	1,3007(-3)
6	7,1820(-4)	7,1461(-4)	7,1263(-4)	7,1069(-4)	7,0827(-4)	7,0807(-4)
7	5,6021(-4)	5,5736(-4)	5,5578(-4)	5,5422(-4)	5,5226(-4)	5,5208(-4)
8	4,5246(-4)	4,5013(-4)	4,4885(-4)	4,4756(-4)	4,4594(-4)	4,4579(-4)
9	3,7504(-4)	3,7311(-4)	3,7204(-4)	3,7096(-4)	3,6959(-4)	3,6946(-4)
10	3,7520(-4)	3,7319(-4)	3,7211(-4)	3,7105(-4)	3,6973(-4)	3,6961(-4)
11	2,7514(-4)	2,7374(-4)	2,7295(-4)	2,7217(-4)	2,7114(-4)	2,7104(-4)
12	2,3924(-4)	2,3804(-4)	2,3736(-4)	2,3667(-4)	2,3577(-4)	2,3568(-4)
13	2,1061(-4)	2,0956(-4)	2,0896(-4)	2,0836(-4)	2,0756(-4)	2,0748(-4)
14	1,8727(-4)	1,8634(-4)	1,8582(-4)	1,8528(-4)	1,8456(-4)	1,8450(-4)
15	1,6793(-4)	1,6711(-4)	1,6664(-4)	1,6616(-4)	1,6551(-4)	1,6545(-4)
16	1,5169(-4)	1,5096(-4)	1,5054(-4)	1,5010(-4)	1,4952(-4)	1,4946(-4)
17	1,3790(-4)	1,3724(-4)	1,3686(-4)	1,3647(-4)	1,3594(-4)	1,3588(-4)
18	1,2606(-4)	1,2547(-4)	1,2513(-4)	1,2477(-4)	1,2428(-4)	1,2423(-4)
19	1,1582(-4)	1,1528(-4)	1,1497(-4)	1,1465(-4)	1,1420(-4)	1,1415(-4)
20	1,0689(-4)	1,0640(-4)	1,0611(-4)	1,0582(-4)	1,0540(-4)	1,0536(-4)

^aLeia-se $3,9912 \times 10^{-3}$.

Tabela 3.2: Fluxos Escalares de Grupo $\phi_g(x)$ para $x = x_L + (x_R - x_L)/2$

g	$N = 19$	$N = 29$	$N = 39$	$N = 59$	$N = 299$	Ref. 27
1	1,7053(-1)	1,7050(-1)	1,7050(-1)	1,7050(-1)	1,7050(-1)	1,7050(-1)
2	6,2932(-3)	6,2921(-3)	6,2919(-3)	6,2917(-3)	6,2916(-3)	6,2916(-3)
3	2,9227(-3)	2,9223(-3)	2,9222(-3)	2,9222(-3)	2,9221(-3)	2,9221(-3)
4	1,6914(-3)	1,6911(-3)	1,6911(-3)	1,6911(-3)	1,6910(-3)	1,6910(-3)
5	1,7582(-3)	1,7579(-3)	1,7579(-3)	1,7579(-3)	1,7578(-3)	1,7578(-3)
6	8,2115(-4)	8,2103(-4)	8,2102(-4)	8,2101(-4)	8,2100(-4)	8,2100(-4)
7	6,1347(-4)	6,1338(-4)	6,1338(-4)	6,1337(-4)	6,1336(-4)	6,1336(-4)
8	4,7882(-4)	4,7875(-4)	4,7874(-4)	4,7874(-4)	4,7874(-4)	4,7874(-4)
9	3,8583(-4)	3,8577(-4)	3,8577(-4)	3,8577(-4)	3,8576(-4)	3,8576(-4)
10	3,8717(-4)	3,8711(-4)	3,8711(-4)	3,8711(-4)	3,8710(-4)	3,8710(-4)
11	2,7189(-4)	2,7185(-4)	2,7184(-4)	2,7184(-4)	2,7184(-4)	2,7184(-4)
12	2,3192(-4)	2,3188(-4)	2,3188(-4)	2,3188(-4)	2,3188(-4)	2,3188(-4)
13	2,0075(-4)	2,0072(-4)	2,0072(-4)	2,0072(-4)	2,0072(-4)	2,0072(-4)
14	1,7583(-4)	1,7580(-4)	1,7580(-4)	1,7580(-4)	1,7580(-4)	1,7580(-4)
15	1,5553(-4)	1,5550(-4)	1,5550(-4)	1,5550(-4)	1,5550(-4)	1,5550(-4)
16	1,3874(-4)	1,3871(-4)	1,3871(-4)	1,3871(-4)	1,3871(-4)	1,3871(-4)
17	1,2467(-4)	1,2465(-4)	1,2465(-4)	1,2465(-4)	1,2465(-4)	1,2465(-4)
18	1,1275(-4)	1,1273(-4)	1,1273(-4)	1,1273(-4)	1,1273(-4)	1,1273(-4)
19	1,0256(-4)	1,0254(-4)	1,0254(-4)	1,0254(-4)	1,0254(-4)	1,0254(-4)
20	9,3765(-5)	9,3750(-5)	9,3750(-5)	9,3749(-5)	9,3748(-5)	9,3748(-5)

Tabela 3.3: Fluxos Escalares de Grupo $\phi_g(x)$ para $x = x_R$

g	$N = 19$	$N = 29$	$N = 39$	$N = 59$	$N = 299$	Ref. 27
1	4,6721(-2)	4,6719(-2)	4,6718(-2)	4,6717(-2)	4,6716(-2)	4,6716(-2)
2	1,9100(-3)	1,9095(-3)	1,9093(-3)	1,9092(-3)	1,9091(-3)	1,9091(-3)
3	7,8139(-4)	7,8119(-4)	7,8111(-4)	7,8106(-4)	7,8103(-4)	7,8103(-4)
4	4,2744(-4)	4,2732(-4)	4,2728(-4)	4,2726(-4)	4,2724(-4)	4,2724(-4)
5	4,5064(-4)	4,5051(-4)	4,5047(-4)	4,5044(-4)	4,5042(-4)	4,5042(-4)
6	1,9742(-4)	1,9737(-4)	1,9736(-4)	1,9735(-4)	1,9734(-4)	1,9734(-4)
7	1,4502(-4)	1,4498(-4)	1,4497(-4)	1,4496(-4)	1,4496(-4)	1,4496(-4)
8	1,1158(-4)	1,1156(-4)	1,1155(-4)	1,1154(-4)	1,1154(-4)	1,1154(-4)
9	8,8777(-5)	8,8755(-5)	8,8749(-5)	8,8745(-5)	8,8744(-5)	8,8744(-5)
10	8,8256(-5)	8,8234(-5)	8,8227(-5)	8,8223(-5)	8,8221(-5)	8,8221(-5)
11	6,1031(-5)	6,1017(-5)	6,1013(-5)	6,1011(-5)	6,1010(-5)	6,1011(-5)
12	5,1536(-5)	5,1524(-5)	5,1521(-5)	5,1520(-5)	5,1520(-5)	5,1520(-5)
13	4,4172(-5)	4,4163(-5)	4,4160(-5)	4,4159(-5)	4,4159(-5)	4,4159(-5)
14	3,8319(-5)	3,8311(-5)	3,8309(-5)	3,8308(-5)	3,8308(-5)	3,8308(-5)
15	3,3578(-5)	3,3571(-5)	3,3570(-5)	3,3569(-5)	3,3569(-5)	3,3569(-5)
16	2,9680(-5)	2,9674(-5)	2,9673(-5)	2,9672(-5)	2,9673(-5)	2,9673(-5)
17	2,6433(-5)	2,6428(-5)	2,6427(-5)	2,6426(-5)	2,6427(-5)	2,6427(-5)
18	2,3697(-5)	2,3693(-5)	2,3692(-5)	2,3691(-5)	2,3692(-5)	2,3692(-5)
19	2,1369(-5)	2,1365(-5)	2,1365(-5)	2,1364(-5)	2,1365(-5)	2,1365(-5)
20	1,9371(-5)	1,9368(-5)	1,9367(-5)	1,9367(-5)	1,9367(-5)	1,9367(-5)

Tabela. 3.4: Albedos A_g^* para o Problema de 20 Grupos

g	$N = 19$	$N = 29$	$N = 39$	$N = 59$	$N = 299$	Ref. 27
1	5,5864(-3)	6,0574(-3)	6,2236(-3)	6,3431(-3)	6,4355(-3)	6,4394(-3)
2	2,4944(-3)	2,4699(-3)	2,4604(-3)	2,4531(-3)	2,4470(-3)	2,4468(-3)
3	1,3985(-3)	1,3851(-3)	1,3797(-3)	1,3755(-3)	1,3719(-3)	1,3718(-3)
4	9,2425(-4)	9,1557(-4)	9,1201(-4)	9,0917(-4)	9,0667(-4)	9,0655(-4)
5	9,2591(-4)	9,1793(-4)	9,1474(-4)	9,1225(-4)	9,1012(-4)	9,1002(-4)
6	5,2686(-4)	5,2218(-4)	5,2018(-4)	5,1854(-4)	5,1704(-4)	5,1696(-4)
7	4,1914(-4)	4,1546(-4)	4,1386(-4)	4,1254(-4)	4,1129(-4)	4,1123(-4)
8	3,4447(-4)	3,4149(-4)	3,4017(-4)	3,3906(-4)	3,3801(-4)	3,3795(-4)
9	2,8998(-4)	2,8750(-4)	2,8639(-4)	2,8545(-4)	2,8454(-4)	2,8449(-4)
10	2,9373(-4)	2,9126(-4)	2,9018(-4)	2,8927(-4)	2,8841(-4)	2,8836(-4)
11	2,1894(-4)	2,1713(-4)	2,1630(-4)	2,1559(-4)	2,1487(-4)	2,1483(-4)
12	1,9246(-4)	1,9089(-4)	1,9017(-4)	1,8953(-4)	1,8889(-4)	1,8886(-4)
13	1,7117(-4)	1,6979(-4)	1,6915(-4)	1,6858(-4)	1,6801(-4)	1,6797(-4)
14	1,5366(-4)	1,5244(-4)	1,5187(-4)	1,5136(-4)	1,5083(-4)	1,5080(-4)
15	1,3903(-4)	1,3794(-4)	1,3743(-4)	1,3696(-4)	1,3648(-4)	1,3645(-4)
16	1,2664(-4)	1,2566(-4)	1,2520(-4)	1,2477(-4)	1,2433(-4)	1,2430(-4)
17	1,1603(-4)	1,1515(-4)	1,1472(-4)	1,1434(-4)	1,1392(-4)	1,1390(-4)
18	1,0686(-4)	1,0606(-4)	1,0567(-4)	1,0532(-4)	1,0493(-4)	1,0491(-4)
19	9,8865(-5)	9,8140(-5)	9,7783(-5)	9,7453(-5)	9,7093(-5)	9,7071(-5)
20	9,1845(-5)	9,1182(-5)	9,0852(-5)	9,0547(-5)	9,0209(-5)	9,0188(-5)

Tabela 3.5: Fatores de Transmissão B_g^* para o Problema de 20 Grupos

g	$N = 19$	$N = 29$	$N = 39$	$N = 59$	$N = 299$	Ref. 27
1	7,3103(-2)	7,3102(-2)	7,3101(-2)	7,3101(-2)	7,3100(-2)	7,3100(-2)
2	2,6671(-3)	2,6669(-3)	2,6668(-3)	2,6667(-3)	2,6667(-3)	2,6667(-3)
3	1,0694(-3)	1,0693(-3)	1,0693(-3)	1,0693(-3)	1,0693(-3)	1,0693(-3)
4	5,7568(-4)	5,7564(-4)	5,7562(-4)	5,7561(-4)	5,7560(-4)	5,7560(-4)
5	6,0474(-4)	6,0469(-4)	6,0467(-4)	6,0466(-4)	6,0465(-4)	6,0465(-4)
6	2,5979(-4)	2,5977(-4)	2,5977(-4)	2,5976(-4)	2,5976(-4)	2,5976(-4)
7	1,8944(-4)	1,8943(-4)	1,8942(-4)	1,8942(-4)	1,8942(-4)	1,8942(-4)
8	1,4483(-4)	1,4482(-4)	1,4482(-4)	1,4482(-4)	1,4482(-4)	1,4482(-4)
9	1,1457(-4)	1,1456(-4)	1,1456(-4)	1,1456(-4)	1,1456(-4)	1,1456(-4)
10	1,1341(-4)	1,1340(-4)	1,1340(-4)	1,1340(-4)	1,1340(-4)	1,1340(-4)
11	7,7918(-5)	7,7913(-5)	7,7912(-5)	7,7912(-5)	7,7912(-5)	7,7912(-5)
12	6,5510(-5)	6,5507(-5)	6,5506(-5)	6,5506(-5)	6,5506(-5)	6,5506(-5)
13	5,5917(-5)	5,5914(-5)	5,5914(-5)	5,5913(-5)	5,5914(-5)	5,5914(-5)
14	4,8315(-5)	4,8313(-5)	4,8312(-5)	4,8312(-5)	4,8312(-5)	4,8312(-5)
15	4,2177(-5)	4,2175(-5)	4,2175(-5)	4,2175(-5)	4,2175(-5)	4,2175(-5)
16	3,7145(-5)	3,7143(-5)	3,7143(-5)	3,7143(-5)	3,7144(-5)	3,7144(-5)
17	3,2965(-5)	3,2964(-5)	3,2963(-5)	3,2964(-5)	3,2964(-5)	3,2964(-5)
18	2,9453(-5)	2,9452(-5)	2,9452(-5)	2,9452(-5)	2,9452(-5)	2,9452(-5)
19	2,6472(-5)	2,6471(-5)	2,6471(-5)	2,6471(-5)	2,6472(-5)	2,6472(-5)
20	2,3920(-5)	2,3920(-5)	2,3920(-5)	2,3920(-5)	2,3920(-5)	2,3920(-5)

Tabela 3.6: Albedos A_g^* para o Problema de 19 Grupos

g	$N = 9$	$N = 19$	$N = 39$	$N = 59$	$N = 299$	Ref. 25
1	9,6069(-3)	1,2164(-2)	1,2831(-2)	1,2957(-2)	1,3055(-2)	1,3060(-2)
2	2,7080(-2)	2,6643(-2)	2,6520(-2)	2,6496(-2)	2,6477(-2)	2,6476(-2)
3	2,0439(-2)	2,0130(-2)	2,0044(-2)	2,0027(-2)	2,0014(-2)	2,0013(-2)
4	2,0825(-2)	2,0531(-2)	2,0449(-2)	2,0433(-2)	2,0421(-2)	2,0420(-2)
5	2,1605(-2)	2,1321(-2)	2,1244(-2)	2,1229(-2)	2,1217(-2)	2,1216(-2)
6	2,3030(-2)	2,2752(-2)	2,2677(-2)	2,2662(-2)	2,2651(-2)	2,2650(-2)
7	1,6653(-2)	1,6466(-2)	1,6416(-2)	1,6407(-2)	1,6399(-2)	1,6399(-2)
8	1,8321(-2)	1,8129(-2)	1,8077(-2)	1,8067(-2)	1,8059(-2)	1,8059(-2)
9	2,0894(-2)	2,0687(-2)	2,0632(-2)	2,0621(-2)	2,0613(-2)	2,0613(-2)
10	2,5036(-2)	2,4802(-2)	2,4739(-2)	2,4727(-2)	2,4718(-2)	2,4717(-2)
11	3,2133(-2)	3,1848(-2)	3,1771(-2)	3,1757(-2)	3,1746(-2)	3,1745(-2)
12	4,4646(-2)	4,4275(-2)	4,4176(-2)	4,4157(-2)	4,4142(-2)	4,4141(-2)
13	1,8756(-2)	1,8728(-2)	1,8727(-2)	1,8728(-2)	1,8729(-2)	1,8729(-2)
14	1,7040(-2)	1,7022(-2)	1,7022(-2)	1,7023(-2)	1,7023(-2)	1,7023(-2)
15	1,2198(-2)	1,2196(-2)	1,2199(-2)	1,2200(-2)	1,2201(-2)	1,2201(-2)
16	3,5295(-3)	3,5347(-3)	3,5369(-3)	3,5374(-3)	3,5378(-3)	3,5378(-3)
17	8,9647(-4)	8,9929(-4)	9,0024(-4)	9,0043(-4)	9,0059(-4)	9,0059(-4)
18	6,1612(-5)	6,1922(-5)	6,2014(-5)	6,2032(-5)	6,2045(-5)	6,2046(-5)
19	9,0180(-6)	9,0800(-6)	9,0985(-6)	9,1020(-6)	9,1047(-6)	9,1048(-6)

Tabela 3.7: Fatores de Transmissão B_g^* para o Problema de 19 Grupos

g	$N = 9$	$N = 19$	$N = 39$	$N = 59$	$N = 299$	Ref. 25
1	2,4196(-3)	2,4189(-3)	2,4188(-3)	2,4188(-3)	2,4188(-3)	2,4188(-3)
2	3,9241(-4)	3,9184(-4)	3,9168(-4)	3,9165(-4)	3,9163(-4)	3,9163(-4)
3	2,9501(-4)	2,9460(-4)	2,9449(-4)	2,9447(-4)	2,9446(-4)	2,9446(-4)
4	3,0110(-4)	3,0071(-4)	3,0061(-4)	3,0059(-4)	3,0057(-4)	3,0057(-4)
5	3,1390(-4)	3,1352(-4)	3,1342(-4)	3,1340(-4)	3,1339(-4)	3,1339(-4)
6	3,3646(-4)	3,3609(-4)	3,3599(-4)	3,3597(-4)	3,3596(-4)	3,3596(-4)
7	2,4320(-4)	2,4295(-4)	2,4289(-4)	2,4288(-4)	2,4287(-4)	2,4287(-4)
8	2,6634(-4)	2,6609(-4)	2,6603(-4)	2,6602(-4)	2,6601(-4)	2,6601(-4)
9	2,9963(-4)	2,9938(-4)	2,9932(-4)	2,9931(-4)	2,9930(-4)	2,9930(-4)
10	3,4906(-4)	3,4881(-4)	3,4875(-4)	3,4874(-4)	3,4873(-4)	3,4873(-4)
11	4,2600(-4)	4,2576(-4)	4,2571(-4)	4,2570(-4)	4,2569(-4)	4,2569(-4)
12	5,5054(-4)	5,5036(-4)	5,5032(-4)	5,5031(-4)	5,5031(-4)	5,5031(-4)
13	3,1928(-4)	3,1935(-4)	3,1937(-4)	3,1938(-4)	3,1938(-4)	3,1938(-4)
14	2,8577(-4)	2,8596(-4)	2,8601(-4)	2,8603(-4)	2,8604(-4)	2,8604(-4)
15	1,9885(-4)	1,9913(-4)	1,9921(-4)	1,9923(-4)	1,9924(-4)	1,9924(-4)
16	5,9731(-5)	5,9881(-5)	5,9923(-5)	5,9931(-5)	5,9937(-5)	5,9937(-5)
17	1,4821(-5)	1,4882(-5)	1,4899(-5)	1,4902(-5)	1,4905(-5)	1,4905(-5)
18	1,0218(-6)	1,0279(-6)	1,0295(-6)	1,0298(-6)	1,0301(-6)	1,0301(-6)
19	1,4863(-7)	1,4978(-7)	1,5010(-7)	1,5016(-7)	1,5020(-7)	1,5020(-7)

Tabela 3.8: Albedos A_g^* para o Problema de 16 Grupos

g	$N = 9$	$N = 19$	$N = 39$	$N = 59$	$N = 299$	Ref. 25
1	6,3966(-2)	6,5746(-2)	6,6199(-2)	6,6283(-2)	6,6349(-2)	6,6351(-2)
2	4,2716(-2)	4,2193(-2)	4,2051(-2)	4,2024(-2)	4,2003(-2)	4,2002(-2)
3	3,2955(-2)	3,2607(-2)	3,2515(-2)	3,2498(-2)	3,2484(-2)	3,2483(-2)
4	2,7851(-2)	2,7592(-2)	2,7524(-2)	2,7512(-2)	2,7502(-2)	2,7501(-2)
5	2,4658(-2)	2,4453(-2)	2,4400(-2)	2,4390(-2)	2,4382(-2)	2,4382(-2)
6	2,2447(-2)	2,2279(-2)	2,2236(-2)	2,2228(-2)	2,2222(-2)	2,2221(-2)
7	2,0815(-2)	2,0672(-2)	2,0636(-2)	2,0629(-2)	2,0624(-2)	2,0624(-2)
8	1,9552(-2)	1,9429(-2)	1,9398(-2)	1,9393(-2)	1,9388(-2)	1,9388(-2)
9	1,8542(-2)	1,8434(-2)	1,8408(-2)	1,8403(-2)	1,8399(-2)	1,8399(-2)
10	1,7712(-2)	1,7617(-2)	1,7594(-2)	1,7589(-2)	1,7586(-2)	1,7586(-2)
11	1,7016(-2)	1,6931(-2)	1,6910(-2)	1,6907(-2)	1,6904(-2)	1,6904(-2)
12	1,6422(-2)	1,6345(-2)	1,6327(-2)	1,6324(-2)	1,6321(-2)	1,6321(-2)
13	1,5907(-2)	1,5838(-2)	1,5821(-2)	1,5818(-2)	1,5816(-2)	1,5816(-2)
14	1,5455(-2)	1,5393(-2)	1,5378(-2)	1,5375(-2)	1,5373(-2)	1,5373(-2)
15	1,7953(-5)	1,7907(-5)	1,7896(-5)	1,7894(-5)	1,7893(-5)	1,7895(-5)
16	8,2008(-3)	8,1689(-3)	8,1610(-3)	8,1596(-3)	8,1586(-3)	8,1585(-3)

Tabela 3.9: Fatores de Transmissão B_q^* para o Problema de 16 Grupos

g	$N = 9$	$N = 19$	$N = 39$	$N = 59$	$N = 299$	Ref. 25
1	5,1095(-6)	5,1068(-6)	5,1060(-6)	5,1059(-6)	5,1058(-6)	5,1058(-6)
2	4,4855(-6)	4,4800(-6)	4,4786(-6)	4,4783(-6)	4,4781(-6)	4,4781(-6)
3	4,9390(-6)	4,9329(-6)	4,9313(-6)	4,9310(-6)	4,9308(-6)	4,9308(-6)
4	5,4740(-6)	5,4672(-6)	5,4655(-6)	5,4652(-6)	5,4649(-6)	5,4649(-6)
5	6,0383(-6)	6,0308(-6)	6,0290(-6)	6,0286(-6)	6,0283(-6)	6,0283(-6)
6	6,6158(-6)	6,6077(-6)	6,6057(-6)	6,6053(-6)	6,6050(-6)	6,6050(-6)
7	7,1995(-6)	7,1908(-6)	7,1886(-6)	7,1882(-6)	7,1879(-6)	7,1879(-6)
8	7,7854(-6)	7,7761(-6)	7,7738(-6)	7,7734(-6)	7,7730(-6)	7,7730(-6)
9	8,3709(-6)	8,3610(-6)	8,3585(-6)	8,3581(-6)	8,3577(-6)	8,3577(-6)
10	8,9538(-6)	8,9433(-6)	8,9407(-6)	8,9403(-6)	8,9399(-6)	8,9399(-6)
11	9,5325(-6)	9,5214(-6)	9,5187(-6)	9,5182(-6)	9,5178(-6)	9,5178(-6)
12	1,0105(-5)	1,0094(-5)	1,0091(-5)	1,0090(-5)	1,0090(-5)	1,0090(-5)
13	1,0671(-5)	1,0659(-5)	1,0656(-5)	1,0655(-5)	1,0655(-5)	1,0655(-5)
14	1,1228(-5)	1,1216(-5)	1,1213(-5)	1,1212(-5)	1,1212(-5)	1,1212(-5)
15	2,3571(-9)	2,3466(-9)	2,3441(-9)	2,3438(-9)	2,3442(-9)	2,3446(-9)
16	2,2984(-6)	2,2970(-6)	2,2968(-6)	2,2968(-6)	2,2968(-6)	2,2968(-6)

Tabela 3.10: Fluxos Angulares Emergentes à Esquerda, $\Psi_g(x_L, -\mu)$, para o Problema de 16 Grupos

g	$\mu = 0, 0$	$\mu = 0, 1$	$\mu = 0, 2$	$\mu = 0, 3$	$\mu = 0, 4$	$\mu = 0, 5$	$\mu = 0, 6$	$\mu = 0, 7$	$\mu = 0, 8$	$\mu = 0, 9$	$\mu = 1, 0$
1	1,4720(-1)	1,1661(-1)	1,0041(-1)	8,8868(-2)	7,9987(-2)	7,2859(-2)	6,6974(-2)	6,2014(-2)	5,7768(-2)	5,4085(-2)	5,0857(-2)
2	8,7159(-2)	7,1156(-2)	6,2124(-2)	5,5490(-2)	5,0281(-2)	4,6038(-2)	4,2494(-2)	3,9481(-2)	3,6881(-2)	3,4613(-2)	3,2615(-2)
3	6,2028(-2)	5,2400(-2)	4,6539(-2)	4,2071(-2)	3,8471(-2)	3,5481(-2)	3,2946(-2)	3,0763(-2)	2,8861(-2)	2,7186(-2)	2,5700(-2)
4	4,9118(-2)	4,2625(-2)	3,8382(-2)	3,5035(-2)	3,2277(-2)	2,9946(-2)	2,7943(-2)	2,6199(-2)	2,4666(-2)	2,3306(-2)	2,2090(-2)
5	4,1172(-2)	3,6527(-2)	3,3272(-2)	3,0621(-2)	2,8389(-2)	2,6473(-2)	2,4806(-2)	2,3341(-2)	2,2042(-2)	2,0881(-2)	1,9838(-2)
6	3,5750(-2)	3,2315(-2)	2,9729(-2)	2,7556(-2)	2,5689(-2)	2,4062(-2)	2,2631(-2)	2,1361(-2)	2,0226(-2)	1,9206(-2)	1,8284(-2)
7	3,1794(-2)	2,9207(-2)	2,7106(-2)	2,5284(-2)	2,3687(-2)	2,2276(-2)	2,1021(-2)	1,9897(-2)	1,8886(-2)	1,7971(-2)	1,7140(-2)
8	2,8768(-2)	2,6806(-2)	2,5072(-2)	2,3521(-2)	2,2134(-2)	2,0891(-2)	1,9773(-2)	1,8764(-2)	1,7850(-2)	1,7019(-2)	1,6260(-2)
9	2,6371(-2)	2,4886(-2)	2,3442(-2)	2,2106(-2)	2,0887(-2)	1,9780(-2)	1,8773(-2)	1,7858(-2)	1,7023(-2)	1,6259(-2)	1,5558(-2)
10	2,4421(-2)	2,3310(-2)	2,2099(-2)	2,0939(-2)	1,9859(-2)	1,8864(-2)	1,7951(-2)	1,7113(-2)	1,6344(-2)	1,5637(-2)	1,4985(-2)
11	2,2799(-2)	2,1988(-2)	2,0970(-2)	1,9957(-2)	1,8994(-2)	1,8094(-2)	1,7260(-2)	1,6488(-2)	1,5775(-2)	1,5116(-2)	1,4506(-2)
12	2,1426(-2)	2,0861(-2)	2,0004(-2)	1,9116(-2)	1,8253(-2)	1,7435(-2)	1,6669(-2)	1,5954(-2)	1,5290(-2)	1,4673(-2)	1,4100(-2)
13	2,0248(-2)	1,9885(-2)	1,9166(-2)	1,8385(-2)	1,7609(-2)	1,6862(-2)	1,6156(-2)	1,5492(-2)	1,4871(-2)	1,4291(-2)	1,3749(-2)
14	1,9223(-2)	1,9031(-2)	1,8430(-2)	1,7743(-2)	1,7042(-2)	1,6359(-2)	1,5705(-2)	1,5086(-2)	1,4503(-2)	1,3956(-2)	1,3442(-2)
15	1,7895(-5)	1,7894(-5)	1,7894(-5)	1,7894(-5)	1,7893(-5)	1,7893(-5)	1,7893(-5)	1,7892(-5)	1,7892(-5)	1,7892(-5)	1,7891(-5)
16	9,0583(-3)	9,1020(-3)	8,9940(-3)	8,8397(-3)	8,6638(-3)	8,4777(-3)	8,2880(-3)	8,0983(-3)	7,9110(-3)	7,7276(-3)	7,5489(-3)

Tabela 3.11: Fluxos Angulares Emergentes à Direita, $\Psi_g(x_R, \mu)$ para o Problema de 16 Grupos

g	$\mu = 0, 0$	$\mu = 0, 1$	$\mu = 0, 2$	$\mu = 0, 3$	$\mu = 0, 4$	$\mu = 0, 5$	$\mu = 0, 6$	$\mu = 0, 7$	$\mu = 0, 8$	$\mu = 0, 9$	$\mu = 1, 0$
1	4,2373(-7)	4,8998(-7)	5,6471(-7)	6,5894(-7)	7,8516(-7)	9,6666(-7)	1,2644(-6)	1,9188(-6)	3,8488(-6)	9,6935(-6)	2,5162(-5)
2	6,7675(-7)	7,9749(-7)	9,2983(-7)	1,0958(-6)	1,3185(-6)	1,6409(-6)	2,1567(-6)	3,0745(-6)	4,7969(-6)	7,9539(-6)	1,3354(-5)
3	8,7737(-7)	1,0392(-6)	1,2115(-6)	1,4230(-6)	1,7003(-6)	2,0893(-6)	2,6827(-6)	3,6719(-6)	5,4072(-6)	8,4198(-6)	1,3377(-5)
4	1,0753(-6)	1,2788(-6)	1,4910(-6)	1,7477(-6)	2,0786(-6)	2,5330(-6)	3,2046(-6)	4,2769(-6)	6,0732(-6)	9,0719(-6)	1,3866(-5)
5	1,2741(-6)	1,5200(-6)	1,7726(-6)	2,0744(-6)	2,4585(-6)	2,9771(-6)	3,7257(-6)	4,8834(-6)	6,7563(-6)	9,7887(-6)	1,4525(-5)
6	1,4748(-6)	1,7640(-6)	2,0575(-6)	2,4046(-6)	2,8416(-6)	3,4235(-6)	4,2475(-6)	5,4902(-6)	7,4451(-6)	1,0532(-5)	1,5262(-5)
7	1,6779(-6)	2,0112(-6)	2,3460(-6)	2,7385(-6)	3,2281(-6)	3,8724(-6)	4,7704(-6)	6,0965(-6)	8,1350(-6)	1,1287(-5)	1,6037(-5)
8	1,8829(-6)	2,2612(-6)	2,6377(-6)	3,0759(-6)	3,6177(-6)	4,3236(-6)	5,2938(-6)	6,7014(-6)	8,8230(-6)	1,2045(-5)	1,6828(-5)
9	2,0898(-6)	2,5136(-6)	2,9322(-6)	3,4159(-6)	4,0098(-6)	4,7762(-6)	5,8170(-6)	7,3040(-6)	9,5070(-6)	1,2799(-5)	1,7625(-5)
10	2,2979(-6)	2,7679(-6)	3,2287(-6)	3,7580(-6)	4,4034(-6)	5,2293(-6)	6,3390(-6)	7,9030(-6)	1,0185(-5)	1,3548(-5)	1,8421(-5)
11	2,5069(-6)	3,0233(-6)	3,5265(-6)	4,1013(-6)	4,7976(-6)	5,6820(-6)	6,8589(-6)	8,4974(-6)	1,0857(-5)	1,4288(-5)	1,9209(-5)
12	2,7162(-6)	3,2794(-6)	3,8249(-6)	4,4449(-6)	5,1916(-6)	6,1333(-6)	7,3754(-6)	9,0860(-6)	1,1519(-5)	1,5018(-5)	1,9986(-5)
13	2,9254(-6)	3,5354(-6)	4,1232(-6)	4,7880(-6)	5,5843(-6)	6,5821(-6)	7,8876(-6)	9,6676(-6)	1,2172(-5)	1,5734(-5)	2,0749(-5)
14	3,1338(-6)	3,7907(-6)	4,4206(-6)	5,1297(-6)	5,9748(-6)	7,0275(-6)	8,3944(-6)	1,0241(-5)	1,2813(-5)	1,6437(-5)	2,1495(-5)
15	2,3388(-9)	2,3396(-9)	2,3404(-9)	2,3412(-9)	2,3421(-9)	2,3429(-9)	2,3437(-9)	2,3444(-9)	2,3452(-9)	2,3460(-9)	2,3468(-9)
16	1,1721(-6)	1,3422(-6)	1,4864(-6)	1,6302(-6)	1,7799(-6)	1,9399(-6)	2,1142(-6)	2,3070(-6)	2,5235(-6)	2,7700(-6)	3,0545(-6)

Tabela 3.12: Fluxos Angulares no Meio da Placa, $\Psi_g(x_L + (x_R - x_L)/2, \mu)$ para o Problema de 16 Grupos

g	$\mu = -1, 0$	$\mu = -0, 8$	$\mu = -0, 6$	$\mu = -0, 4$	$\mu = -0, 2$	$\mu = 0, 0$	$\mu = 0, 2$	$\mu = 0, 4$	$\mu = 0, 6$	$\mu = 0, 8$	$\mu = 1, 0$
1	7,6112(-5)	8,4895(-5)	9,5976(-5)	1,1040(-4)	1,2995(-4)	1,5802(-4)	2,0186(-4)	2,8226(-4)	5,6064(-4)	1,8415(-3)	5,4285(-3)
2	8,8224(-5)	9,8480(-5)	1,1144(-4)	1,2834(-4)	1,5130(-4)	1,8437(-4)	2,3623(-4)	3,3029(-4)	5,2799(-4)	8,8332(-4)	1,3673(-3)
3	1,0080(-4)	1,1223(-4)	1,2659(-4)	1,4517(-4)	1,7017(-4)	2,0561(-4)	2,5988(-4)	3,5389(-4)	5,3689(-4)	8,4733(-4)	1,2575(-3)
4	1,1383(-4)	1,2650(-4)	1,4234(-4)	1,6271(-4)	1,8990(-4)	2,2801(-4)	2,8533(-4)	3,8139(-4)	5,5863(-4)	8,4698(-4)	1,2195(-3)
5	1,2694(-4)	1,4084(-4)	1,5815(-4)	1,8031(-4)	2,0969(-4)	2,5048(-4)	3,1096(-4)	4,0969(-4)	5,8453(-4)	8,5989(-4)	1,2095(-3)
6	1,4005(-4)	1,5517(-4)	1,7393(-4)	1,9785(-4)	2,2936(-4)	2,7279(-4)	3,3636(-4)	4,3795(-4)	6,1198(-4)	8,7892(-4)	1,2130(-3)
7	1,5313(-4)	1,6945(-4)	1,8964(-4)	2,1527(-4)	2,4888(-4)	2,9485(-4)	3,6143(-4)	4,6587(-4)	6,3992(-4)	9,0104(-4)	1,2239(-3)
8	1,6618(-4)	1,8367(-4)	2,0525(-4)	2,3256(-4)	2,6820(-4)	3,1663(-4)	3,8610(-4)	4,9334(-4)	6,6786(-4)	9,2477(-4)	1,2391(-3)
9	1,7917(-4)	1,9782(-4)	2,2077(-4)	2,4971(-4)	2,8732(-4)	3,3813(-4)	4,1037(-4)	5,2029(-4)	6,9554(-4)	9,4928(-4)	1,2570(-3)
10	1,9210(-4)	2,1188(-4)	2,3617(-4)	2,6670(-4)	3,0622(-4)	3,5931(-4)	4,3420(-4)	5,4669(-4)	7,2279(-4)	9,7409(-4)	1,2765(-3)
11	2,0496(-4)	2,2584(-4)	2,5143(-4)	2,8351(-4)	3,2488(-4)	3,8017(-4)	4,5758(-4)	5,7252(-4)	7,4953(-4)	9,9887(-4)	1,2968(-3)
12	2,1772(-4)	2,3969(-4)	2,6655(-4)	3,0014(-4)	3,4329(-4)	4,0070(-4)	4,8051(-4)	5,9775(-4)	7,7568(-4)	1,0234(-3)	1,3176(-3)
13	2,3038(-4)	2,5341(-4)	2,8151(-4)	3,1655(-4)	3,6143(-4)	4,2086(-4)	5,0296(-4)	6,2237(-4)	8,0121(-4)	1,0476(-3)	1,3385(-3)
14	2,4292(-4)	2,6698(-4)	2,9629(-4)	3,3275(-4)	3,7929(-4)	4,4066(-4)	5,2493(-4)	6,4638(-4)	8,2607(-4)	1,0712(-3)	1,3593(-3)
15	3,3650(-7)	3,3656(-7)	3,3662(-7)	3,3668(-7)	3,3674(-7)	3,3680(-7)	3,3686(-7)	3,3692(-7)	3,3698(-7)	3,3704(-7)	3,3710(-7)
16	1,2673(-4)	1,3519(-4)	1,4484(-4)	1,5596(-4)	1,6890(-4)	1,8415(-4)	2,0235(-4)	2,2441(-4)	2,5163(-4)	2,8575(-4)	3,2861(-4)

4 FORMULAÇÃO MATRICIAL DO PROBLEMA

A formulação matricial do problema de transporte pode, obviamente, ser feita para abranger todo o espectro de energia, mas, neste trabalho o objetivo é complementar a formulação escalar definida na Seção 2. A equação de transporte na forma matricial⁶⁴ pode ser escrita como

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, \mu) + \Sigma \Psi(x, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} P_l(\mu) \mathbf{C}_l \int_{-1}^{+1} P_l(\mu') \Psi(x, \mu') d\mu' + \mathbf{Q}(x, \mu). \quad (4.1)$$

A Eq. (4.1) será considerada principalmente na faixa de energia do espectro onde as partículas ganham energia nas colisões, fenômeno conhecido como “up-scattering”, que numa estrutura de G grupos corresponde a $G - NDS = NUS$ grupos de energia. Σ é a matriz diagonal composta pelas seções de choque totais macroscópicas de grupo $\{\sigma_m\}$, com $m = NDS + 1, NDS + 2, \dots, NDS + NUS = G$ e $x \in (x_L, x_R)$ é a variável posição medida em cm; \mathbf{C}_l são as matrizes transferência dadas por

$$\mathbf{C}_l = \begin{pmatrix} \sigma_{NDS+1, NDS+1}^l & \sigma_{NDS+1, NDS+2}^l & \cdots & \sigma_{NDS+1, G}^l \\ \sigma_{NDS+2, NDS+1}^l & \sigma_{NDS+2, NDS+2}^l & \cdots & \sigma_{NDS+2, G}^l \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{G-1, NDS+1}^l & \sigma_{G-1, NDS+2}^l & \cdots & \sigma_{G-1, G}^l \\ \sigma_{G, NDS+1}^l & \sigma_{G, NDS+2}^l & \cdots & \sigma_{G, G}^l \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

$\Psi(x, \mu)$ é o vetor coluna

$$\Psi(x, \mu) = \begin{pmatrix} \Psi_{NDS+1}(x, \mu) \\ \Psi_{NDS+2}(x, \mu) \\ \vdots \\ \Psi_G(x, \mu) \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

composto por NUS elementos que são os fluxos angulares de grupo e $\mathbf{Q}(x, \mu)$ é o termo

não-homogêneo da Eq. (4.1),

$$\mathbf{Q}(x, \mu) = \begin{pmatrix} Q_{NDS+1}(x, \mu) \\ Q_{NDS+2}(x, \mu) \\ \vdots \\ Q_G(x, \mu) \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

que, aqui, vai representar a fonte de partículas proveniente de grupos de mais alta energia através do processo de moderação.

Associadas à Eq. (4.1), considera-se condições de contorno da forma

$$\Psi(x_L, \mu) = \mathbf{L}(\mu) \quad (4.5a)$$

e

$$\Psi(x_R, -\mu) = \mathbf{R}(\mu), \quad (4.5b)$$

para $\mu \in (0, 1]$, onde $\mathbf{L}(\mu)$ e $\mathbf{R}(\mu)$ são distribuições incidentes respectivamente, à esquerda e à direita da placa, consideradas conhecidas.

5 O MÉTODO P_N VETORIAL

5.1 Solução P_N Homogênea

A solução P_N para a versão homogênea da Eq. (4.1) pode ser escrita como

$$\Psi^H(x, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^N (2l+1) P_l(\mu) \sum_{k=1}^K [A_k e^{-(x-x_L)/\xi_k} + (-1)^l B_k e^{(x-x_L)/\xi_k}] \mathbf{T}_l(\xi_k), \quad (5.1)$$

onde $K = NUS(N+1)/2$ e ξ_k , $k = 1, 2, \dots, K$, são conhecidos como autovalores P_N positivos. As constantes $\{A_k\}$ e $\{B_k\}$ precisam ser determinadas e os vetores $\{\mathbf{T}_l(\xi_k)\}$ e os autovalores $\{\xi_k\}$ podem ser obtidos conforme procedimento abaixo. Em resumo, substituindo a Eq. (5.1) na versão homogênea da Eq. (4.1), encontra-se a seguinte relação de recorrência de três termos

$$(l+1)\mathbf{T}_{l+1}(\xi_k) + l\mathbf{T}_{l-1}(\xi_k) = \xi_k \mathbf{h}_l \mathbf{T}_l(\xi_k) \quad (5.2a)$$

para $l = 0, 1, 2, \dots, N$, onde

$$\mathbf{h}_l = \begin{cases} (2l+1)\mathbf{\Sigma} - \mathbf{C}_l, & \text{se } l \leq \mathcal{L}, \\ (2l+1)\mathbf{\Sigma}, & \text{se } l > \mathcal{L}. \end{cases} \quad (5.2b)$$

Eliminando os vetores ímpares da Eq. (5.2a), obtém-se para $l = 0, 2, \dots, N-1$,

$$\mathbf{X}_l \mathbf{T}_{l-2}(\xi_k) + \mathbf{Y}_l \mathbf{T}_l(\xi_k) + \mathbf{Z}_l \mathbf{T}_{l+2}(\xi_k) = \xi_k^2 \mathbf{T}_l(\xi_k) \quad (5.3)$$

onde

$$\mathbf{X}_l = l(l-1)\mathbf{h}_l^{-1}\mathbf{h}_{l-1}^{-1}, \quad (5.4a)$$

$$\mathbf{Y}_l = l^2\mathbf{h}_l^{-1}\mathbf{h}_{l-1}^{-1} + (l+1)^2\mathbf{h}_l^{-1}\mathbf{h}_{l+1}^{-1} \quad (5.4b)$$

4:

$$\mathbf{Z}_l = (l+1)(l+2)\mathbf{h}_l^{-1}\mathbf{h}_{l+1}^{-1}. \quad (5.4c)$$

A Eq. (5.3) e a condição de truncamento $\mathbf{T}_{N+1}(\xi_k) = \mathbf{0}$ podem ser expressas como um problema de autovalor

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \xi_k^2\mathbf{X} \quad (5.5)$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_0 & \mathbf{Z}_0 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{X}_2 & \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Z}_2 & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_4 & \mathbf{Y}_4 & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{Y}_{N-5} & \mathbf{Z}_{N-5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{X}_{N-3} & \mathbf{Y}_{N-3} & \mathbf{Z}_{N-3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{X}_{N-1} & \mathbf{Y}_{N-1} \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Os autovalores P_N positivos, ξ_k , $k = 1, 2, \dots, K$, são as raízes quadradas positivas dos autovalores da matriz \mathbf{A} de ordem $K = NUS(N+1)/2$ e os correspondentes autovetores $\mathbf{X}(\xi_k)$ são constituídos pelos vetores pares $\mathbf{T}_0(\xi_k), \mathbf{T}_2(\xi_k), \dots, \mathbf{T}_{N-1}(\xi_k)$; uma vez tendo os pares, os vetores ímpares podem ser determinados usando a Eq. (5.2a) e a solução P_N homogênea dada pela Eq. (5.1) fica pronta para se determinar as constantes $\{A_k\}$ e $\{B_k\}$ a partir das condições de contorno. Alternativamente, o problema de autovalor pode ser formulado eliminando-se os vetores pares da Eq. (5.2a), obtendo-se

$$\mathbf{B}\mathbf{Y} = \xi_k^2\mathbf{Y}, \quad (5.7)$$

onde

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Z}_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{X}_3 & \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Z}_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{X}_5 & \mathbf{Y}_5 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{Y}_{N-4} & \mathbf{Z}_{N-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{X}_{N-2} & \mathbf{Y}_{N-2} & \mathbf{Z}_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{X}_N & \mathbf{Y}'_N \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

com $\mathbf{Y}'_N = N^2 \mathbf{h}_N^{-1} \mathbf{h}_{N-1}^{-1}$, e \mathbf{Y} é o vetor coluna formado pelos vetores ímpares $\mathbf{T}_1(\xi_k)$, $\mathbf{T}_3(\xi_k), \dots, \mathbf{T}_N(\xi_k)$. Utilizando-se uma ou outra alternativa, os autovalores e autovetores podem ser determinados por meio de rotinas específicas dos pacotes de programas EISPACK⁶⁸ ou LAPACK.¹

5.2 Solução P_N Particular

A solução P_N particular estendida para o formalismo de multigrupo, para o caso de um termo de fonte genérico dependente do espaço e do ângulo, foi desenvolvida por SIEWERT⁶⁴ com base na técnica de variação dos parâmetros.^{55,62,67} Então

$$\Psi^P(x, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^N (2l+1) P_l(\mu) \sum_{k=1}^K \frac{C_k}{\xi_k} [U_k(x) + (-1)^l V_k(x)] \mathbf{T}_l(\xi_k) \quad (5.9)$$

é a solução particular desejada, onde

$$C_k = \left(\sum_{i=1}^J \tilde{\mathbf{T}}_{2i-2}^\dagger(\xi_k) \mathbf{h}_{2i-2} \mathbf{T}_{2i-2}(\xi_k) \right)^{-1}, \quad (5.10a)$$

$$U_k(x) = \int_{x_L}^x u_k(x') e^{-(x-x')/\xi_k} dx', \quad (5.10b)$$

$$V_k(x) = \int_x^{x_R} v_k(x') e^{-(x'-x)/\xi_k} dx', \quad (5.10c)$$

para $k = 1, 2, \dots, K$, e com

$$u_k(x') = \sum_{\alpha=0}^N \tilde{\mathbf{T}}_\alpha^\dagger(\xi_k) \mathbf{Q}_\alpha(x'), \quad (5.10d)$$

$$v_k(x) = \sum_{\alpha=0}^N (-1)^\alpha \tilde{\mathbf{T}}_\alpha^\dagger(\xi_k) Q_\alpha(x') \quad (5.10e)$$

e

$$Q_\alpha(x') = \frac{2\alpha+1}{2} \int_{-1}^{+1} Q(x', \mu) P_\alpha(\mu) d\mu. \quad (5.10f)$$

O vetor linha resultante do produto $\tilde{\mathbf{T}}_{2i-2}^\dagger(\xi_k) \mathbf{h}_{2i-2}$ é o componente vetorial de ordem $2i-2$ do autovetor correspondente a ξ_k à esquerda da matriz par \mathbf{A} , onde $\tilde{\mathbf{T}}_{2i-2}^\dagger(\xi_k)$ denota o vetor transposto ao vetor $\mathbf{T}_{2i-2}^\dagger(\xi_k)$. Os autovetores à esquerda de \mathbf{A} e \mathbf{B} devem ser ortogonais aos respectivos autovetores à direita de \mathbf{A} e \mathbf{B} . Sendo assim, aproveitando-se das propriedades de ortogonalidade dos autovetores e analisando as Eqs. (5.2a), (5.6) e (5.8), foi possível inferir que os vetores $\tilde{\mathbf{T}}_l^\dagger(\xi_k)$ devem obedecer a relação

$$(l+1)\tilde{\mathbf{T}}_{l+1}^\dagger(\xi_k) + l\tilde{\mathbf{T}}_{l-1}^\dagger(\xi_k) = \xi_k \tilde{\mathbf{h}}_l \tilde{\mathbf{T}}_l^\dagger(\xi_k), \quad (5.11)$$

para $l = 0, 1, 2, \dots, N$, e as condições de truncamento $\tilde{\mathbf{T}}_{N+1}^\dagger(\xi_k) = \mathbf{0}$. Desta forma as constantes $\{C_k\}$ podem ser perfeitamente determinadas.

5.3 Solução P_N Geral

Neste ponto, pode-se escrever a solução P_N geral vetorial,

$$\Psi(x, \mu) = \Psi^H(x, \mu) + \Psi^P(x, \mu), \quad (5.12)$$

como

$$\begin{aligned} \Psi(x, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^N (2l+1) P_l(\mu) \sum_{k=1}^K \left\{ A_k e^{-(x-x_L)/\xi_k} + (-1)^l B_k e^{-(x_R-x)/\xi_k} \right. \\ \left. + \frac{C_k}{\xi_k} [U_k(x) + (-1)^l V_k(x)] \right\} \mathbf{T}_l(\xi_k). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Da mesma forma que foi feito para o método escalar, o problema definido pelas Eqs. (4.1) e (4.5) pode ser resolvido, com as constantes $\{A_k\}$ e $\{B_k\}$ sendo determinadas a partir das condições de contorno. Então, substituindo a Eq. (5.13) nas Eqs. (4.5), tem-se

$$\frac{1}{2} \sum_{l=0}^N (2l+1) P_l(\mu) \sum_{k=1}^K \left[A_k + (-1)^l B_k e^{-(x_R - x_L)/\xi_k} \right] T_l(\xi_k) = L(\mu) - \Psi^P(x_L, \mu), \quad (5.14a)$$

e

$$\frac{1}{2} \sum_{l=0}^N (2l+1) P_l(\mu) \sum_{k=1}^K \left[(-1)^l A_k e^{-(x_R - x_L)/\xi_k} + B_k \right] T_l(\xi_k) = R(\mu) - \Psi^P(x_R, -\mu) \quad (5.14b)$$

para $\mu \in [0, 1]$. Após a escolha da aproximação aplicável às condições de contorno e a subsequente determinação das constantes, pode-se encontrar o vetor de fluxos totais de grupo

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^K \left\{ A_k e^{-(x - x_L)/\xi_k} + B_k e^{-(x_R - x)/\xi_k} + \frac{C_k}{\xi_k} [U_k(x) + V_k(x)] \right\} T_0(\xi_k), \quad (5.15)$$

o vetor de correntes totais de grupo

$$J(x) = \sum_{k=1}^K \left\{ A_k e^{-(x - x_L)/\xi_k} - B_k e^{-(x_R - x)/\xi_k} + \frac{C_k}{\xi_k} [U_k(x) - V_k(x)] \right\} T_1(\xi_k) \quad (5.16)$$

e os vetores de correntes parciais de grupo

$$J^\pm(x) = \int_0^{+1} \Psi(x, \pm\mu) \mu d\mu. \quad (5.17)$$

Devido às já mencionadas características oscilatórias dos polinômios de Legendre, preterimos a Eq. (5.13) em favor das pós-processadas

$$\begin{aligned} \Psi(x, \mu) = & e^{-(x - x_L) \Sigma / \mu} L(\mu) - \frac{1}{\mu} \int_{x_L}^x e^{-(x - x') \Sigma / \mu} Q(x', \mu) dx' + E(x, \mu) \\ & + \sum_{k=1}^K \xi_k \left[A_k C(x - x_L : \mu \Sigma^{-1}, \xi_k) M(\xi_k, \mu) \right. \\ & \left. + B_k e^{-(x_R - x)/\xi_k} S(x - x_L : \mu \Sigma^{-1}, \xi_k) N(\xi_k, \mu) \right] \end{aligned} \quad (5.18a)$$

¶

$$\begin{aligned} \Psi(x, -\mu) = & e^{-(x_R-x)\Sigma/\mu} \mathbf{R}(\mu) + \frac{1}{\mu} \int_x^{x_R} e^{-(x'-x)\Sigma/\mu} \mathbf{Q}(x', -\mu) dx' + \mathbf{E}(x, -\mu) \\ & + \sum_{k=1}^K \xi_k \left[A_k e^{-(x-x_L)/\xi_k} \mathbf{S}(x_R - x : \mu \Sigma^{-1}, \xi_k) \mathbf{N}(\xi_k, \mu) \right. \\ & \left. + B_k \mathbf{C}(x_R - x : \mu \Sigma^{-1}, \xi_k) \mathbf{M}(\xi_k, \mu) \right] \quad (5.18b) \end{aligned}$$

para $\mu \in [0, 1]$, onde as matrizes diagonais \mathbf{C} e \mathbf{S} são constituídas pelos elementos $C(a, \mu \sigma_m^{-1}, \xi_k)$ e $S(a, \mu \sigma_m^{-1}, \xi_k)$, para $m = NDS + 1, NDS + 2, \dots, G$, lembrando que C e S foram definidos pelas Eqs. (3.32c) e (3.32d), respectivamente. Além do mais,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, \mu) = & \sum_{k=1}^K C_k \left\{ \left[\int_{x_L}^x u_k(x') \mathbf{C}(x - x' : \mu \Sigma^{-1}, \xi_k) dx' \right] \mathbf{M}(\xi_k, \mu) \right. \\ & + \left[V_k(x) \mathbf{S}(x - x_L : \mu \Sigma^{-1}, \xi_k) \right. \\ & \left. \left. + \int_{x_L}^x v_k(x') e^{-(x-x')\Sigma/\mu} \mathbf{S}(x' - x_L : \mu \Sigma^{-1}, \xi_k) dx' \right] \right\} \mathbf{N}(\xi_k, \mu) \quad (5.19a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, -\mu) = & \sum_{k=1}^K C_k \left\{ \left[\int_x^{x_R} v_k(x') \mathbf{C}(x' - x : \mu \Sigma^{-1}, \xi_k) dx' \right] \mathbf{M}(\xi_k, \mu) \right. \\ & + \left[U_k(x) \mathbf{S}(x_R - x : \mu \Sigma^{-1}, \xi_k) \right. \\ & \left. \left. + \int_x^{x_R} u_k(x') e^{-(x'-x)\Sigma/\mu} \mathbf{S}(x_R - x' : \mu \Sigma^{-1}, \xi_k) dx' \right] \right\} \mathbf{N}(\xi_k, \mu), \quad (5.19b) \end{aligned}$$

considerando

$$\mathbf{M}(\xi_k, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\min\{\mathcal{L}, N\}} P_l(\mu) \Sigma^{-1} \mathbf{C}_l \mathbf{T}_l(\xi_k) \quad (5.20a)$$

¶

$$\mathbf{N}(\xi_k, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\min\{\mathcal{L}, N\}} (-1)^l P_l(\mu) \Sigma^{-1} \mathbf{C}_l \mathbf{T}_l(\xi_k). \quad (5.20b)$$

6 MÉTODOS P_N ACOPLADOS

6.1 Formulação

Para determinar a completa distribuição de partículas no meio material, a equação de transporte precisa ser resolvida em todo o espectro de energia. De acordo com a proposição inicial, o método P_N escalar deve ser aplicado na faixa de energia onde as partículas somente perdem energia nas colisões e o método P_N vetorial na faixa de energia complementar onde as partículas também podem ganhar energia nas colisões. Evidentemente que ocorre uma natural transferência de partículas da faixa de moderação para a faixa complementar, constituindo uma fonte de moderação dependente do espaço e do ângulo que deve ser considerada no termo de fonte não-homogêneo da equação de transporte na sua forma matricial. Sendo assim, o termo de fonte da Eq. (4.1) pode ser escrito como

$$\mathbf{Q}(x, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\min\{\mathcal{L}, N\}} P_l(\mu) \mathbf{C}_D^l \int_{-1}^{+1} P_l(\mu') \Psi_D(x, \mu') d\mu', \quad (6.1)$$

onde o vetor coluna, $\Psi_D(x, \mu')$, representa os fluxos angulares de grupo da parte de moderação, $\{\Psi_{g'}(x, \mu)\}$, para $g' = 1, 2, \dots, NDS$, determinados pela solução P_N geral escalar, dada pela Eq. (3.24), reescrita como

$$\Psi_{g'}(x, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N (2l+1) P_l(\mu) \sum_{h=1}^{g'} \sum_{j=1}^J \left[A_{h,j} e^{-(x-x_L)\sigma_h/\xi_{h,j}} + (-1)^l B_{h,j} e^{-(x_R-x)\sigma_h/\xi_{h,j}} \right] G_{g',l}(\xi_{h,j}), \quad (6.2)$$

e \mathbf{C}_D^l é a matriz de transferência $NUS \times NDS$ dada por

$$\mathbf{C}_D^l = \begin{pmatrix} \sigma_{NDS+1,1}^l & \sigma_{NDS+1,2}^l & \cdots & \sigma_{NDS+1,NDS-1}^l & \sigma_{NDS+1,NDS}^l \\ \sigma_{NDS+2,1}^l & \sigma_{NDS+2,2}^l & \cdots & \sigma_{NDS+2,NDS-1}^l & \sigma_{NDS+2,NDS}^l \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{G-1,1}^l & \sigma_{G-1,2}^l & \cdots & \sigma_{G-1,NDS-1}^l & \sigma_{G-1,NDS}^l \\ \sigma_{G,1}^l & \sigma_{G,2}^l & \cdots & \sigma_{G,NDS-1}^l & \sigma_{G,NDS}^l \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Substituindo a Eq. (6.2) na Eq. (6.1), obtém-se um elemento genérico, $Q_m(x, \mu)$, do vetor coluna $\mathbf{Q}(x, \mu)$, dado por

$$Q_m(x, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\min\{\mathcal{L}, N\}} P_l(\mu) \sum_{g'=1}^{NDS} \sigma_{mg'}^l \sum_{h=1}^{g'} \sum_{j=1}^J \left[A_{h,j} e^{-(x-x_L)\sigma_h/\xi_{h,j}} + (-1)^l B_{h,j} e^{-(x_R-x)\sigma_h/\xi_{h,j}} \right] G_{g',l}(\xi_{h,j}), \quad (6.4)$$

para $m = NDS + 1, NDS + 2, \dots, NDS + NUS = G$; substituindo a Eq. (6.1) na Eq. (5.10f) obtém-se um elemento, $Q_{m,\alpha}(x)$, do vetor coluna $\mathbf{Q}_\alpha(x)$,

$$Q_{m,\alpha}(x) = \frac{1}{2} \sum_{g'=1}^{NDS} \sigma_{mg'}^\alpha \sum_{h=1}^{g'} \sum_{j=1}^J \left[A_{h,j} e^{-(x-x_L)\sigma_h/\xi_{h,j}} + (-1)^\alpha B_{h,j} e^{-(x_R-x)\sigma_h/\xi_{h,j}} \right] G_{g',\alpha}(\xi_{h,j}), \quad (6.5)$$

para $\alpha = 0, 1, 2, \dots, \min\{\mathcal{L}, N\}$.

As quantidades $U_k(x)$ e $V_k(x)$ definidas pelas Eqs. (5.10b) e (5.10c), respectivamente, podem ser determinadas uma vez que o vetor $\mathbf{Q}_\alpha(x)$ já pode ser usado nas Eqs. (5.10d) e (5.10e) para obter $U_k(x)$ e $V_k(x)$ mais explícitos. Portanto,

$$U_k(x) = \sum_{h=1}^{NDS} \sum_{g'=h}^{NDS} \sum_{m=NDS+1}^G \sum_{\alpha=0}^{\min\{\mathcal{L}, N\}} \bar{T}_{m,\alpha}^\dagger(\xi_k) \sigma_{mg'}^\alpha \sum_{j=1}^J \frac{\xi_{h,j}}{2\sigma_h} \xi_k \left[A_{h,j} C(x - x_L : \xi_{h,j} \sigma_h^{-1}, \xi_k) + (-1)^\alpha B_{h,j} e^{-(x_R-x)\sigma_h/\xi_{h,j}} S(x - x_L : \xi_{h,j} \sigma_h^{-1}, \xi_k) \right] G_{g',\alpha}(\xi_{h,j}) \quad (6.6a)$$

$$V_k(x) = \sum_{h=1}^{NDS} \sum_{g'=h}^{NDS} \sum_{m=NDS+1}^G \sum_{\alpha=0}^{\min\{\mathcal{L}, N\}} \bar{T}_{m,\alpha}^\dagger(\xi_k) \sigma_{mg'}^\alpha \sum_{j=1}^J \frac{\xi_{h,j}}{2\sigma_h} \xi_k \left[(-1)^\alpha A_{h,j} e^{-(x-x_L)\sigma_h/\xi_{h,j}} \times S(x_R - x : \xi_{h,j} \sigma_h^{-1}, \xi_k) + B_{h,j} C(x_R - x : \xi_{h,j} \sigma_h^{-1}, \xi_k) \right] G_{g',\alpha}(\xi_{h,j}). \quad (6.6b)$$

Os termos $\mathbf{E}(x, \mu)$ e $\mathbf{E}(x, -\mu)$ também contêm os valores $U_k(x)$ e $V_k(x)$, então os respectivos elementos representativos são, para $\mu \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}
E_m(x, \mu) = & \sum_{l=0}^{\min\{\mathcal{L}, N\}} P_l(\mu) \sum_{k=1}^K C_k \left\{ \sum_{h=1}^{NDS} \sum_{g'=h}^{NDS} \sum_{m'=NDS+1}^G \sum_{\alpha=0}^{\min\{\mathcal{L}, N\}} \tilde{T}_{m', \alpha}^\dagger(\xi_k) \sigma_{m'g'}^\alpha \right. \\
& \times \sum_{j=1}^J G_{g', \alpha}(\xi_{h,j}) \frac{\xi_{h,j}}{2\sigma_h} \left\{ \frac{\mu}{\sigma_m} \left[\frac{1}{\mu/\sigma_m - \xi_k} - \frac{(-1)^{\alpha+l}}{\mu/\sigma_m + \xi_k} \right] A_{h,j} C(x - x_L : \mu\sigma_m^{-1}, \xi_{h,j}\sigma_h^{-1}) \right. \\
& \quad \left. - (-1)^\alpha B_{h,j} e^{-(x-x_L)\sigma_h/\xi_{h,j}} S(x - x_L : \mu\sigma_m^{-1}, \xi_{h,j}\sigma_h^{-1}) \right\} - \xi_k \left\{ \frac{1}{\mu/\sigma_m - \xi_k} \right. \\
& \quad \left. \times \left[A_{h,j} C(x - x_L : \xi_k, \xi_{h,j}\sigma_h^{-1}) + (-1)^\alpha B_{h,j} e^{-(x-x_L)\sigma_h/\xi_{h,j}} S(x - x_L : \xi_k, \xi_{h,j}\sigma_h^{-1}) \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{(-1)^{\alpha+l}}{\mu/\sigma_m + \xi_k} e^{-(x-x_L)\sigma_m/\mu} \left[A_{h,j} S(x - x_L : \xi_k, \xi_{h,j}\sigma_h^{-1}) + (-1)^\alpha B_{h,j} e^{-(x-x_L)\sigma_h/\xi_{h,j}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \times C(x - x_L : \xi_k, \xi_{h,j}\sigma_h^{-1}) \right] \right\} \left. \right\} + (-1)^l V_k(x) S(x - x_L : \mu\sigma_m^{-1}, \xi_k) \left. \right\} \\
& \times \frac{1}{2\sigma_m} \sum_{m'=NDS+1}^G \sigma_{mm'}^l T_{m',l}(\xi_k) \quad (6.7a)
\end{aligned}$$

C

$$\begin{aligned}
E_m(x, -\mu) = & \sum_{l=0}^{\min\{\mathcal{L}, N\}} P_l(\mu) \sum_{k=1}^K C_k \left\{ \sum_{h=1}^{NDS} \sum_{g'=h}^{NDS} \sum_{m'=NDS+1}^G \sum_{\alpha=0}^{\min\{\mathcal{L}, N\}} \tilde{T}_{m', \alpha}^\dagger(\xi_k) \sigma_{m'g'}^\alpha \right. \\
& \times \sum_{j=1}^J G_{g', \alpha}(\xi_{h,j}) \frac{\xi_{h,j}}{2\sigma_h} \left\{ \frac{\mu}{\sigma_m} \left[\frac{1}{\mu/\sigma_m - \xi_k} + \frac{(-1)^{\alpha+l}}{\mu/\sigma_m + \xi_k} \right] (-1)^\alpha A_{h,j} e^{-(x-x_L)\sigma_h/\xi_{h,j}} \right. \\
& \quad \times S(x_R - x : \mu\sigma_m^{-1}, \xi_{h,j}\sigma_h^{-1}) + B_{h,j} C(x_R - x : \mu\sigma_m^{-1}, \xi_{h,j}\sigma_h^{-1}) \left. \right\} - \xi_k \left\{ \frac{1}{\mu/\sigma_m - \xi_k} \right. \\
& \quad \times \left[(-1)^\alpha A_{h,j} e^{-(x-x_L)\sigma_h/\xi_{h,j}} S(x_R - x : \xi_k, \xi_{h,j}\sigma_h^{-1}) + B_{h,j} C(x_R - x : \xi_k, \xi_{h,j}\sigma_h^{-1}) \right] \\
& \quad \left. + \frac{(-1)^l}{\mu/\sigma_m + \xi_k} e^{-(x-x_L)\sigma_m/\mu} \left[A_{h,j} e^{-(x-x_L)\sigma_h/\xi_{h,j}} C(x_R - x : \xi_k, \xi_{h,j}\sigma_h^{-1}) + (-1)^\alpha B_{h,j} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \times S(x_R - x : \xi_k, \xi_{h,j}\sigma_h^{-1}) \right] \right\} \left. \right\} + (-1)^l U_k(x) S(x_R - x : \mu\sigma_m^{-1}, \xi_k) \left. \right\} \\
& \times \frac{1}{2\sigma_m} \sum_{m'=NDS+1}^G \sigma_{mm'}^l T_{m',l}(\xi_k). \quad (6.7b)
\end{aligned}$$

Finalmente, um elemento m do segundo termo da Eq. (5.18a) pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu} \int_{x_L}^x e^{-(x-x')\sigma_m/\mu} Q_m(x', \mu) dx' &= \frac{1}{2\sigma_m} \sum_{l=0}^{\min\{\mathcal{L}, N\}} P_l(\mu) \sum_{h=1}^{NDS} \sum_{g'=h}^{NDS} \sigma_{mg'}^l \\
&\times \sum_{j=1}^J \frac{\xi_{h,j}}{\sigma_h} G_{g',l}(\xi_{h,j}) \left[A_{h,j} C(x - x_L : \mu\sigma_m^{-1}, \xi_{h,j}\sigma_h^{-1}) + (-1)^l \right. \\
&\times \left. B_{h,j} e^{-(x_R-x)\sigma_h/\xi_{h,j}} S(x - x_L : \mu\sigma_m^{-1}, \xi_{h,j}\sigma_h^{-1}) \right] \quad (6.8a)
\end{aligned}$$

e, para o segundo termo da Eq. (5.18b), como

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu} \int_x^{x_R} e^{-(x'-x)\sigma_m/\mu} Q_m(x', -\mu) dx' &= \frac{1}{2\sigma_m} \sum_{l=0}^{\min\{\mathcal{L}, N\}} P_l(\mu) \sum_{h=1}^{NDS} \sum_{g'=h}^{NDS} \sigma_{mg'}^l \\
&\times \sum_{j=1}^J \frac{\xi_{h,j}}{\sigma_h} G_{g',l}(\xi_{h,j}) \left[(-1)^l A_{h,j} e^{-(x-x_L)\sigma_h/\xi_{h,j}} S(x_R - x : \mu\sigma_m^{-1}, \xi_{h,j}\sigma_h^{-1}) + \right. \\
&\times \left. B_{h,j} C(x_R - x : \mu\sigma_m^{-1}, \xi_{h,j}\sigma_h^{-1}) \right] \quad (6.8b)
\end{aligned}$$

6.2 Problemas-Teste

Para testar os métodos P_N escalar e vetorial acoplados dois problemas-teste foram resolvidos para várias ordens de aproximação selecionadas arbitrariamente. O primeiro é o mesmo problema de 20 grupos da Seção 3 resolvido novamente considerando intervalos específicos de energia para aplicação do método P_N escalar e do método P_N vetorial. O caso 1, com $NDS = 0$, tem como objetivo principal testar a implementação computacional do método P_N vetorial; os casos 2 até o 20 são resolvidos para testar a implementação dos métodos P_N acoplados e, o caso 21 finaliza com o método P_N escalar sozinho, $NDS = 20$, conforme Tabela 6.1. Em resumo, o objetivo específico deste problema-teste, resolvido de 21 maneiras diferentes, é demonstrar a correção da implementação computacional dos métodos P_N acoplados. Todos os resultados obtidos foram os mesmos das Tabelas 3.1 a 3.5 com todos os algoritmos significativos.

O objetivo do segundo problema é testar a precisão e implementação computacional dos métodos acoplados para problemas de espalhamento de nêutrons

com forte presença de “upscattering”. Este problema anisotrópico de ordem três foi utilizado primeiramente por SIEWERT⁶⁴ e, mais tarde, resolvido mais precisamente por GARCIA e SIEWERT³¹ para testar o método F_N aprimorado para cálculos de transporte com “upscattering” cujos resultados são considerados como referência. Trata-se de uma placa de água de 30 cm de espessura com nêutrons incidindo isotropicamente na margem esquerda, em $x_L = 0$, com energia igual à do primeiro grupo de uma estrutura de seis grupos de energia, ou seja, as condições de contorno são tais que:

$$\mathbf{L}(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \quad (6.9a)$$

e

$$\mathbf{R}(\mu) = \mathbf{0} \quad (6.9b)$$

para $\mu \in (0, 1]$. Exceto o primeiro grupo todos os demais apresentam fonte de nêutrons de transferência devido a perdas e ganhos de energia nas colisões; na resolução pelos métodos acoplados o escalar é utilizado no primeiro grupo ($NDS = 1$) e o vetorial nos demais ($NUS = 5$) grupos restantes. As seções de choque macroscópicas totais e de transferência são listadas na Referência 64 e não são transcritas neste trabalho; os resultados dos fluxos e correntes de grupo obtidos, mostrados na Tabela 6.2, apresentam concordância com os de referência no mínimo em quatro algarismos significativos, para $N = 199$, exceto o fluxo e a corrente do grupo 6 na margem esquerda e os fluxos dos grupos 5 e 6 na margem direita da placa, que só concordam em três algarismos significativos; mesmo assim, a máxima diferença observada fica abaixo de 0,018%. Com respeito aos fluxos angulares pós-processados emergentes e interiores, apresentados nas Tabelas 6.3 a 6.8, a máxima diferença percentual verificada em relação aos resultados tabulados na Referência 31 situa-se abaixo de 0,02%.

Tabela 6.1: Divisão do Espectro para Aplicação dos Métodos

Casos	NDS	NUS	G
1	0	20	20
2	1	19	20
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
11	10	10	20
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
20	19	1	20
21	20	0	20

Tabela 6.2: Fluxos Escalares e Correntes de Grupo para o Problema da Placa de Água

$x = 0, 0 \text{ cm}$			$x = 7, 5 \text{ cm}$			$x = 15, 0 \text{ cm}$			$x = 22, 5 \text{ cm}$			$x = 30, 0 \text{ cm}$		
g	Fluxo	Ref. 31	Fluxo	Ref. 31	Fluxo	Ref. 31	Fluxo	Ref. 31	Fluxo	Ref. 31	Fluxo	Ref. 31	Fluxo	Ref. 31
1	1,09412	1,09412	1,62049-4	1,62048-4	4,85238-8	4,85237-8	1,45667-11	1,45667-11	4,03116-15	4,03114-15	1,78978-6	1,78976-6	4,36491-6	4,36490-6
2	2,29722-1	2,29719-1	3,74473-2	3,74472-2	1,96392-3	1,96392-3	5,12781-4	5,12779-4	7,91230-9	7,91259-9	7,94160-11	7,94257-11	2,00559-8	2,00558-8
3	2,91728-1	2,91728-1	1,85473-1	1,85472-1	9,79889-3	9,79886-3	1,68817-6	1,68816-6	2,46565-5	2,46565-5	2,46565-5	2,46565-5	1,66505-6	1,66505-6
4	3,05975-2	3,05978-2	2,62814-2	2,62814-2	3,83256-7	3,83255-7	3,12929-8	3,12929-8	3,11438-4	3,11437-4	3,16934-5	3,16933-5	3,59245-7	3,59244-7
5	5,99866-4	5,99893-4	6,10779-4	6,10777-4	8,77726-3	8,77724-3	5,92292-4	5,92290-4	6,71837-6	6,71835-6	2,88263-8	2,88262-8	4,31663-9	4,31668-9
6	7,30392-6	7,30516-6	7,25933-6	7,25931-6	1,04414-4	1,04414-4	5,98178-3	5,98176-3	8,77726-3	8,77724-3	5,92292-4	5,92290-4	6,71837-6	6,71835-6
g	Corrente	Ref. 31	Corrente	Ref. 31	Corrente	Ref. 31	Corrente	Ref. 31	Corrente	Ref. 31	Corrente	Ref. 31	Corrente	Ref. 31
1	4,71926-1	4,71921-1	1,04414-4	1,04414-4	3,12930-8	3,12929-8	9,39418-12	9,39417-12	2,92353-15	2,92352-15	1,09848-6	1,09847-6	2,51982-6	2,51982-6
2	-9,92948-2	-9,92907-2	5,98178-3	5,98176-3	3,11438-4	3,11437-4	1,63588-5	1,63588-5	2,46565-5	2,46565-5	2,46565-5	2,46565-5	1,66505-6	1,66505-6
3	-1,62966-1	-1,62966-1	8,77726-3	8,77724-3	4,69327-4	4,69326-4	3,16934-5	3,16933-5	3,59245-7	3,59244-7	1,88733-8	1,88733-8	4,31663-9	4,31668-9
4	-1,70261-2	-1,70261-2	5,92292-4	5,92290-4	6,71837-6	6,71835-6	2,88263-8	2,88262-8	4,31663-9	4,31668-9	4,10386-11	4,10414-11	2,46538-7	2,46538-7
5	-3,27823-4	-3,27829-4	6,71837-6	6,71835-6	2,88263-8	2,88262-8	4,31663-9	4,31668-9	4,10386-11	4,10414-11	2,46538-7	2,46538-7	1,09848-6	1,09847-6
6	-3,86205-6	-3,86253-6	2,88263-8	2,88262-8	4,31663-9	4,31668-9	4,10386-11	4,10414-11	2,46538-7	2,46538-7	1,09848-6	1,09847-6	2,51982-6	2,51982-6

Tabela 6.3: Fluxos Angulares Emergentes e Interiores para o Grupo 1

μ	$x = 0$ cm	$x = 7,50$ cm	$x = 15$ cm	$x = 22,50$ cm	$x = 30$ cm
-1,0	2,6054E-02 ^a	4,0455E-06	1,2072E-09	3,6236E-13	
-0,9	2,7698E-02	5,1802E-06	1,5505E-09	4,6545E-13	
-0,8	3,2093E-02	6,2324E-06	1,8679E-09	5,6075E-13	
-0,7	3,9699E-02	7,2863E-06	2,1846E-09	6,5582E-13	
-0,6	5,1104E-02	8,4424E-06	2,5307E-09	7,5973E-13	
-0,5	6,7085E-02	9,8228E-06	2,9429E-09	8,8346E-13	
-0,4	8,8710E-02	1,1577E-05	3,4659E-09	1,0405E-12	
-0,3	1,1755E-01	1,3889E-05	4,1551E-09	1,2473E-12	
-0,2	1,5614E-01	1,6991E-05	5,0798E-09	1,5249E-12	
-0,1	2,0962E-01	2,1175E-05	6,3278E-09	1,8995E-12	
-0,0	3,0161E-01	2,6818E-05	8,0122E-09	2,4051E-12	
0,0		2,6818E-05	8,0122E-09	2,4051E-12	6,0808E-16
0,1		3,4416E-05	1,0281E-08	3,0862E-12	8,5503E-16
0,2		4,4628E-05	1,3332E-08	4,0022E-12	1,1499E-15
0,3		5,8357E-05	1,7436E-08	5,2341E-12	1,5334E-15
0,4		7,6871E-05	2,2972E-08	6,8959E-12	2,0424E-15
0,5		1,0201E-04	3,0489E-08	9,1525E-12	2,7273E-15
0,6		1,3655E-04	4,0815E-08	1,2252E-11	3,6634E-15
0,7		1,8494E-04	5,5255E-08	1,6587E-11	4,9687E-15
0,8		2,5456E-04	7,5996E-08	2,2813E-11	6,8405E-15
0,9		3,5769E-04	1,0701E-07	3,2121E-11	9,6365E-15
1,0		5,1351E-04	1,5620E-07	4,6917E-11	1,4079E-14

^aLeia-se $2,6054 \times 10^{-2}$.

Tabela 6.4: Fluxos Angulares Emergentes e Interiores para o Grupo 2

μ	$x = 0$ cm	$x = 7,50$ cm	$x = 15$ cm	$x = 22,50$ cm	$x = 30$ cm
-1,0	1,3106E-01	1,1532E-02	6,0646E-04	3,1638E-05	
-0,9	1,5168E-01	1,1986E-02	6,3038E-04	3,2901E-05	
-0,8	1,7235E-01	1,2469E-02	6,5578E-04	3,4241E-05	
-0,7	1,9295E-01	1,2983E-02	6,8279E-04	3,5665E-05	
-0,6	2,1336E-01	1,3531E-02	7,1153E-04	3,7178E-05	
-0,5	2,3339E-01	1,4116E-02	7,4214E-04	3,8790E-05	
-0,4	2,5275E-01	1,4740E-02	7,7477E-04	4,0507E-05	
-0,3	2,7103E-01	1,5406E-02	8,0960E-04	4,2339E-05	
-0,2	2,8754E-01	1,6119E-02	8,4680E-04	4,4294E-05	
-0,1	3,0102E-01	1,6881E-02	8,8658E-04	4,6384E-05	
-0,0	3,0752E-01	1,7698E-02	9,2914E-04	4,8621E-05	
0,0		1,7698E-02	9,2914E-04	4,8621E-05	6,0594E-07
0,1		1,8574E-02	9,7475E-04	5,1016E-05	8,4818E-07
0,2		1,9514E-02	1,0237E-03	5,3584E-05	1,0673E-06
0,3		2,0524E-02	1,0762E-03	5,6341E-05	1,2889E-06
0,4		2,1610E-02	1,1326E-03	5,9304E-05	1,5165E-06
0,5		2,2780E-02	1,1934E-03	6,2493E-05	1,7520E-06
0,6		2,4042E-02	1,2589E-03	6,5928E-05	1,9969E-06
0,7		2,5404E-02	1,3295E-03	6,9635E-05	2,2525E-06
0,8		2,6877E-02	1,4059E-03	7,3640E-05	2,5205E-06
0,9		2,8470E-02	1,4885E-03	7,7974E-05	2,8023E-06
1,0		3,0193E-02	1,5781E-03	8,2673E-05	3,1000E-06

Tabela 6.5: Fluxos Angulares Emergentes e Interiores para o Grupo 3

μ	$x = 0$ cm	$x = 7,50$ cm	$x = 15$ cm	$x = 22,50$ cm	$x = 30$ cm
-1,0	3,7927E-01	8,0487E-02	4,2459E-03	2,2205E-04	
-0,9	3,6616E-01	8,1552E-02	4,3026E-03	2,2503E-04	
-0,8	3,5179E-01	8,2641E-02	4,3605E-03	2,2807E-04	
-0,7	3,3607E-01	8,3753E-02	4,4196E-03	2,3118E-04	
-0,6	3,1888E-01	8,4891E-02	4,4801E-03	2,3436E-04	
-0,5	3,0006E-01	8,6053E-02	4,5420E-03	2,3761E-04	
-0,4	2,7942E-01	8,7240E-02	4,6053E-03	2,4094E-04	
-0,3	2,5667E-01	8,8454E-02	4,6699E-03	2,4434E-04	
-0,2	2,3130E-01	8,9695E-02	4,7361E-03	2,4781E-04	
-0,1	2,0221E-01	9,0963E-02	4,8037E-03	2,5137E-04	
-0,0	1,6305E-01	9,2258E-02	4,8729E-03	2,5500E-04	
0,0		9,2258E-02	4,8729E-03	2,5500E-04	2,1726E-06
0,1		9,3583E-02	4,9437E-03	2,5872E-04	2,7218E-06
0,2		9,4936E-02	5,0161E-03	2,6252E-04	3,1684E-06
0,3		9,6320E-02	5,0901E-03	2,6641E-04	3,5886E-06
0,4		9,7735E-02	5,1659E-03	2,7039E-04	3,9954E-06
0,5		9,9180E-02	5,2435E-03	2,7447E-04	4,3942E-06
0,6		1,0066E-01	5,3229E-03	2,7863E-04	4,7880E-06
0,7		1,0217E-01	5,4041E-03	2,8290E-04	5,1789E-06
0,8		1,0371E-01	5,4873E-03	2,8727E-04	5,5683E-06
0,9		1,0529E-01	5,5725E-03	2,9174E-04	5,9571E-06
1,0		1,0691E-01	5,6597E-03	2,9632E-04	6,3464E-06

Tabela 6.6: Fluxos Angulares Emergentes e Interiores para o Grupo 4

μ	$x = 0$ cm	$x = 7,50$ cm	$x = 15$ cm	$x = 22,50$ cm	$x = 30$ cm
-1,0	3,9999E-02	1,2279E-02	6,4814E-04	3,3907E-05	
-0,9	3,8379E-02	1,2360E-02	6,5247E-04	3,4135E-05	
-0,8	3,6692E-02	1,2442E-02	6,5685E-04	3,4365E-05	
-0,7	3,4931E-02	1,2525E-02	6,6127E-04	3,4598E-05	
-0,6	3,3088E-02	1,2609E-02	6,6573E-04	3,4832E-05	
-0,5	3,1150E-02	1,2693E-02	6,7024E-04	3,5069E-05	
-0,4	2,9099E-02	1,2779E-02	6,7479E-04	3,5308E-05	
-0,3	2,6905E-02	1,2865E-02	6,7938E-04	3,5549E-05	
-0,2	2,4518E-02	1,2951E-02	6,8402E-04	3,5793E-05	
-0,1	2,1821E-02	1,3039E-02	6,8870E-04	3,6039E-05	
-0,0	1,8190E-02	1,3127E-02	6,9343E-04	3,6288E-05	
0,0		1,3127E-02	6,9343E-04	3,6288E-05	2,5447E-07
0,1		1,3217E-02	6,9821E-04	3,6538E-05	3,0578E-07
0,2		1,3307E-02	7,0303E-04	3,6792E-05	3,4487E-07
0,3		1,3397E-02	7,0789E-04	3,7047E-05	3,8021E-07
0,4		1,3489E-02	7,1280E-04	3,7305E-05	4,1337E-07
0,5		1,3582E-02	7,1776E-04	3,7566E-05	4,4505E-07
0,6		1,3675E-02	7,2276E-04	3,7828E-05	4,7563E-07
0,7		1,3769E-02	7,2781E-04	3,8094E-05	5,0538E-07
0,8		1,3864E-02	7,3291E-04	3,8362E-05	5,3446E-07
0,9		1,3959E-02	7,3806E-04	3,8632E-05	5,6300E-07
1,0		1,4056E-02	7,4326E-04	3,8905E-05	5,9111E-07

Tabela 6.7: Fluxos Angulares Emergentes e Interiores para o Grupo 5

μ	$x = 0$ cm	$x = 7,50$ cm	$x = 15$ cm	$x = 22,50$ cm	$x = 30$ cm
-1,0	7,5698E-04	2,9514E-04	1,5583E-05	8,1534E-07	
-0,9	7,2799E-04	2,9619E-04	1,5639E-05	8,1829E-07	
-0,8	6,9853E-04	2,9724E-04	1,5695E-05	8,2122E-07	
-0,7	6,6849E-04	2,9829E-04	1,5750E-05	8,2415E-07	
-0,6	6,3775E-04	2,9933E-04	1,5806E-05	8,2706E-07	
-0,5	6,0609E-04	3,0037E-04	1,5861E-05	8,2997E-07	
-0,4	5,7324E-04	3,0140E-04	1,5916E-05	8,3286E-07	
-0,3	5,3873E-04	3,0243E-04	1,5971E-05	8,3575E-07	
-0,2	5,0178E-04	3,0345E-04	1,6026E-05	8,3862E-07	
-0,1	4,6060E-04	3,0447E-04	1,6080E-05	8,4147E-07	
-0,0	4,0623E-04	3,0549E-04	1,6134E-05	8,4432E-07	
0,0		3,0549E-04	1,6134E-05	8,4432E-07	5,3324E-09
0,1		3,0649E-04	1,6188E-05	8,4715E-07	6,0789E-09
0,2		3,0749E-04	1,6242E-05	8,4996E-07	6,6422E-09
0,3		3,0849E-04	1,6295E-05	8,5276E-07	7,1416E-09
0,4		3,0948E-04	1,6348E-05	8,5555E-07	7,6005E-09
0,5		3,1046E-04	1,6401E-05	8,5831E-07	8,0291E-09
0,6		3,1143E-04	1,6453E-05	8,6107E-07	8,4336E-09
0,7		3,1240E-04	1,6505E-05	8,6380E-07	8,8177E-09
0,8		3,1336E-04	1,6557E-05	8,6651E-07	9,1841E-09
0,9		3,1431E-04	1,6608E-05	8,6921E-07	9,5349E-09
1,0		3,1526E-04	1,6659E-05	8,7188E-07	9,8717E-09

Tabela 6.8: Fluxos Angulares Emergentes e Interiores para o Grupo 6

μ	$x = 0$ cm	$x = 7,50$ cm	$x = 15$ cm	$x = 22,50$ cm	$x = 30$ cm
-1,0	8,6683E-06	3,5729E-06	1,8864E-07	9,8709E-09	
-0,9	8,3517E-06	3,5810E-06	1,8906E-07	9,8930E-09	
-0,8	8,0539E-06	3,5887E-06	1,8946E-07	9,9142E-09	
-0,7	7,7740E-06	3,5960E-06	1,8985E-07	9,9343E-09	
0,6	7,5104E-06	3,6030E-06	1,9021E-07	9,9535E-09	
-0,5	7,2614E-06	3,6096E-06	1,9056E-07	9,9716E-09	
-0,4	7,0245E-06	3,6158E-06	1,9088E-07	9,9888E-09	
-0,3	6,7960E-06	3,6216E-06	1,9119E-07	1,0005E-08	
-0,2	6,5702E-06	3,6270E-06	1,9148E-07	1,0020E-08	
-0,1	6,3357E-06	3,6321E-06	1,9174E-07	1,0034E-08	
-0,0	6,0445E-06	3,6367E-06	1,9199E-07	1,0047E-08	
0,0		3,6367E-06	1,9199E-07	1,0047E-08	6,8264E-11
0,1		3,6408E-06	1,9221E-07	1,0058E-08	7,2040E-11
0,2		3,6446E-06	1,9241E-07	1,0069E-08	7,4753E-11
0,3		3,6479E-06	1,9259E-07	1,0078E-08	7,6993E-11
0,4		3,6508E-06	1,9274E-07	1,0087E-08	7,8893E-11
0,5		3,6532E-06	1,9288E-07	1,0094E-08	8,0513E-11
0,6		3,6552E-06	1,9299E-07	1,0099E-08	8,1891E-11
0,7		3,6567E-06	1,9307E-07	1,0104E-08	8,3052E-11
0,8		3,6578E-06	1,9314E-07	1,0107E-08	8,4014E-11
0,9		3,6584E-06	1,9318E-07	1,0109E-08	8,4794E-11
1,0		3,6584E-06	1,9319E-07	1,0110E-08	8,5402E-11

6.3 Uma Formulação Alternativa

Uma maneira alternativa de se resolver o problema formulado no Capítulo 4 e definido pelas Eqs. (4.1) e (4.5) é reformular o problema segundo CHANDRA-SEKHAR¹³ decompondo a solução em componentes espalhado, $\Phi(x, \mu)$, e não-espalhado, $\Psi_n(x, \mu)$, tal que a solução geral da Eq. (4.1) possa ser escrita como

$$\Psi(x, \mu) = \Phi(x, \mu) + \Psi_n(x, \mu). \quad (6.10)$$

O fluxo angular não-espalhado $\Psi_n(x, \mu)$ deve satisfazer

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \Psi_n(x, \mu) + \Sigma \Psi_n(x, \mu) = Q(x, \mu) \quad (6.11)$$

para $\mu \in [0, 1]$ e, se sujeitar às condições de contorno

$$\Psi_n(x_L, \mu) = L(\mu) \quad (6.12a)$$

◻

$$\Psi_n(x_R, -\mu) = R(\mu) \quad (6.12b)$$

para $\mu \in (0, 1]$. Resolvendo as Eqs. (6.11) e (6.12), obtém-se

$$\Psi_n(x, \mu) = e^{-(x-x_L)\Sigma/\mu} L(\mu) + \frac{1}{\mu} \int_{x_L}^x e^{-(x-x')\Sigma/\mu} Q(x', \mu) dx' \quad (6.13a)$$

◻

$$\Psi_n(x, -\mu) = e^{-(x_R-x)\Sigma/\mu} R(\mu) + \frac{1}{\mu} \int_x^{x_R} e^{-(x'-x)\Sigma/\mu} Q(x', -\mu) dx' \quad (6.13b)$$

para $\mu \in [0, 1]$. O termo de fonte $Q(x, \mu)$ é condicionado a

$$Q(x, \mu) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\min\{\mathcal{L}, N\}} P_l(\mu) C_D^l \int_{-1}^{+1} P_l(\mu') \Psi_D(x, \mu') d\mu', & \text{se } NDS \neq 0, \\ 0, & \text{se } NDS = 0, \end{cases} \quad (6.14)$$

onde C_D^l e $\Psi_D(x, \mu')$ são definidos no início deste capítulo.

Similarmente, o fluxo angular espalhado, $\Phi(x, \mu)$, deve satisfazer

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, \mu) + \Sigma \Phi(x, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} P_l(\mu) C_l \int_{-1}^{+1} P_l(\mu') \Phi(x, \mu') d\mu' + S(x, \mu) \quad (6.15)$$

associado às condições

$$\Phi(x_L, \mu) = 0 \quad (6.16a)$$

e

$$\Phi(x_R, -\mu) = 0, \quad (6.16b)$$

para $\mu \in (0, 1]$. O termo de fonte na Eq. (6.15),

$$S(x, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} P_l(\mu) C_l \int_{-1}^{+1} P_l(\mu') \Psi_n(x, \mu') d\mu', \quad (6.17)$$

para $\mu \in [-1, 1]$, pode ser considerado conhecido, uma vez solucionado o problema não-colidido. As Eqs. (6.15) e (6.16) definem uma classe de problemas que pode ser solucionada aplicando a técnica do Capítulo 5 para obter as soluções P_N para o fluxo espalhado, $\Phi(x, \mu)$.

6.3.1 Problema-Teste

Para se ter certeza de grande parte das limitações a que o método pode se sujeitar na resolução de problemas considerados de difícil solução, foi selecionado o problema que GARCIA e SIEWERT³¹ elaboraram para testar, em toda sua plenitude, o método F_N implementado para a solução de problemas de transporte de radiação multigrupo com “upscattering”. Mais recentemente, SIEWERT⁶⁶ resolveu este mesmo problema associando técnicas numéricas de álgebra linear com o método das ordenadas discretas para estabelecer soluções igualmente precisas para os mesmos tipos de problemas de transporte multigrupo para os quais o fenômeno de “upscattering” é importante e obteve resultados idênticos aos da Referência 31 com quatro algarismos significativos de precisão. A estrutura multigrupo do problema subdivide a faixa de energia de 0 a 4 eV em 42 grupos permitindo que em qualquer grupo também apareçam nêutrons de transferência que ganham energia nas colisões ($NDS = 0$). Trata-se de uma placa de concreto de 100 cm de espessura irradiada perpendicularmente na superfície esquerda, em $x = x_L$, por um feixe uniforme de nêutrons térmicos com energia correspondente ao grupo 4. As condições de contorno expressas pelas Eqs. (6.12) são dadas neste caso

por

$$\Psi_n(x_L, \mu) = \mathbf{L}\delta(\mu - \mu_0) \quad (6.18a)$$

e

$$\Psi_n(x_R, -\mu) = \mathbf{0} \quad (6.18b)$$

para $\mu \in (0, 1]$, onde o co-seno do ângulo de incidência μ_0 é considerado igual a 1, 0 e o vetor \mathbf{L} tem componentes $L_g = \delta_{g,j}$ para $g = 1, 2, \dots, 42$, com $1 \leq j \leq 42$ designando o grupo de energia de incidência (no caso estudado, $j = 4$). A quantidade usada como parâmetro de comparação é o albedo duplamente diferencial, $\alpha_{g,j}(\mu, \mu_0)$, definido como

$$\alpha_{g,j}(\mu, \mu_0) = \frac{J_g^-(\mu)}{J_j^+(\mu_0)} \quad (6.19)$$

para $g = 1, 2, \dots, 42$ e $\mu \in (0, 1]$, onde $J_g^-(\mu) = \mu\Psi_g(x_L, -\mu)$ e $J_j^+(\mu_0) = \mu_0 L_j$. Este conceito é importante para análises de reflexão de nêutrons térmicos nas paredes dos dutos que penetram blindagens complexas de reatores nucleares. Na Referência 31 as seções de choque macroscópicas totais e as matrizes de transferência foram calculadas usando as correspondentes seções de choque microscópicas da biblioteca WIMKAL-88⁴⁰ para os elementos de um tipo de concreto comum. Neste trabalho, o problema foi resolvido em um computador Pentium II, 400 MHz e 128 Mbytes de memória RAM com o programa computacional primeiramente implementado com as rotinas BALANC, ELMHES, ELTRAN, HQR2 e BALBAK do pacote EISPACK⁶⁸ e, depois resolvido novamente com a rotina DGEEV do pacote LAPACK¹ implementada. Em ambas as alternativas o objetivo é calcular os autovalores e correspondentes autovetores à esquerda e à direita das matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} das Eqs. (5.6) e (5.8), respectivamente, e verificar os efeitos nos resultados finais dos albedos diferenciais. Os resultados obtidos utilizando rotinas do pacote EISPACK apresentaram valores incoerentes e fortemente divergentes com valores crescentes de N , enquanto que, com as rotinas do LAPACK os resultados apresentaram-se apenas levemente incoerentes. Para obter resultados precisos e idênticos para ambos os métodos foi necessário processar os programas em um computador de palavra longa, o CRAY J90, com permissão cedida pelo Núcleo de Atendimento em Computação de Alto Desempenho da COPPE/UFRJ. Nas Tabelas 6.9 e 6.10 são apresentados os resultados obtidos, com $N = 89$, para o albedo duplamente diferencial para nêutrons térmicos quando o grupo de incidência é $j = 4$ (delimitado

por 1,5 e 2,1 eV), concordantes com as Referências 31 e 66 em até quatro dígitos significativos.

Tabela 6.9: Albedo Duplamente Diferencial para Nêutrons Térmicos,

 $\alpha_{g,j}(\mu, \mu_0)$, com $j = 4$ e $\mu_0 = 1, 0$, para $\mu = 0, 1(0, 1)0, 5$.

g	$\mu = 0, 1$	$\mu = 0, 2$	$\mu = 0, 3$	$\mu = 0, 4$	$\mu = 0, 5$
1	3,9530E-10	8,9960E-10	1,4619E-09	2,0497E-09	2,6418E-09
2	1,9557E-07	4,4250E-07	7,0229E-07	9,5784E-07	1,2006E-06
3	1,1968E-04	2,1801E-04	2,9382E-04	3,4892E-04	3,8560E-04
4	1,8178E-02	3,0962E-02	3,8964E-02	4,2899E-02	4,3394E-02
5	9,6961E-03	1,7937E-02	2,4631E-02	2,9902E-02	3,3906E-02
6	5,3348E-03	1,0174E-02	1,4275E-02	1,7619E-02	2,0243E-02
7	8,1455E-04	1,5302E-03	2,1042E-03	2,5329E-03	2,8237E-03
8	7,5808E-04	1,4224E-03	1,9511E-03	2,3401E-03	2,5960E-03
9	7,3729E-04	1,3832E-03	1,8952E-03	2,2684E-03	2,5091E-03
10	7,2272E-04	1,3579E-03	1,8616E-03	2,2278E-03	2,4621E-03
11	6,8545E-04	1,2908E-03	1,7727E-03	2,1246E-03	2,3509E-03
12	6,5420E-04	1,2356E-03	1,7009E-03	2,0425E-03	2,2639E-03
13	6,5060E-04	1,2319E-03	1,6996E-03	2,0453E-03	2,2721E-03
14	5,9829E-04	1,1373E-03	1,5749E-03	1,9019E-03	2,1204E-03
15	1,0864E-03	2,0726E-03	2,8798E-03	3,4901E-03	3,9056E-03
16	1,6590E-03	3,1954E-03	4,4818E-03	5,4847E-03	6,2026E-03
17	1,9992E-03	3,8950E-03	5,5249E-03	6,8398E-03	7,8314E-03
18	4,8078E-03	9,5604E-03	1,3831E-02	1,7467E-02	2,0421E-02
19	4,4578E-03	9,1017E-03	1,3498E-02	1,7465E-02	2,0924E-02
20	4,1406E-03	8,6414E-03	1,3077E-02	1,7252E-02	2,1065E-02
21	2,3508E-03	4,9795E-03	7,6386E-03	1,0207E-02	1,2618E-02
22	1,5299E-03	3,2666E-03	5,0481E-03	6,7928E-03	8,4538E-03
23	1,0806E-03	2,3190E-03	3,6007E-03	4,8668E-03	6,0830E-03
24	1,1399E-03	2,4565E-03	3,8294E-03	5,1957E-03	6,5179E-03
25	1,8435E-03	3,9941E-03	6,2586E-03	8,5335E-03	1,0756E-02
26	2,0570E-03	4,4880E-03	7,0807E-03	9,7187E-03	1,2329E-02
27	3,2815E-03	7,2290E-03	1,1516E-02	1,5959E-02	2,0435E-02
28	4,4831E-03	1,0008E-02	1,6165E-02	2,2709E-02	2,9473E-02
29	7,2442E-03	1,6405E-02	2,6898E-02	3,8360E-02	5,0523E-02
30	5,7150E-03	1,3060E-02	2,1619E-02	3,1127E-02	4,1378E-02
31	4,9263E-03	1,1308E-02	1,8808E-02	2,7205E-02	3,6326E-02
32	4,0872E-03	9,4016E-03	1,5672E-02	2,2722E-02	3,0409E-02
33	4,1233E-03	9,4941E-03	1,5846E-02	2,3005E-02	3,0830E-02
34	4,5651E-03	1,0516E-02	1,7564E-02	2,5521E-02	3,4235E-02
35	4,2686E-03	9,8299E-03	1,6420E-02	2,3866E-02	3,2031E-02
36	3,1427E-03	7,2305E-03	1,2072E-02	1,7546E-02	2,3550E-02
37	3,1312E-03	7,1930E-03	1,1999E-02	1,7429E-02	2,3388E-02
38	3,0111E-03	6,9007E-03	1,1493E-02	1,6677E-02	2,2365E-02
39	2,7485E-03	6,2749E-03	1,0423E-02	1,5099E-02	2,0225E-02
40	2,2929E-03	5,2026E-03	8,6055E-03	1,2428E-02	1,6613E-02
41	1,5832E-03	3,5517E-03	5,8283E-03	8,3693E-03	1,1141E-02
42	5,9234E-04	1,2967E-03	2,0913E-03	2,9647E-03	3,9085E-03

Tabela 6.10: Albedo Duplamente Diferencial para Nêutrons Térmicos,

 $\alpha_{g,j}(\mu, \mu_0)$, com $j = 4$ e $\mu_0 = 1, 0$, para $\mu = 0, 6(0, 1)1, 0$.

g	$\mu = 0, 6$	$\mu = 0, 7$	$\mu = 0, 8$	$\mu = 0, 9$	$\mu = 1, 0$
1	3,2247E-09	3,7896E-09	4,3316E-09	4,8478E-09	5,3368E-09
2	1,4265E-06	1,6337E-06	1,8219E-06	1,9914E-06	2,1430E-06
3	4,0608E-04	4,1236E-04	4,0621E-04	3,8914E-04	3,6244E-04
4	4,0974E-02	3,6069E-02	2,9036E-02	2,0167E-02	9,7056E-03
5	3,6798E-02	3,8715E-02	3,9779E-02	4,0095E-02	3,9751E-02
6	2,2209E-02	2,3578E-02	2,4414E-02	2,4770E-02	2,4699E-02
7	2,9878E-03	3,0373E-03	2,9836E-03	2,8374E-03	2,6083E-03
8	2,7295E-03	2,7518E-03	2,6740E-03	2,5063E-03	2,2578E-03
9	2,6273E-03	2,6342E-03	2,5406E-03	2,3566E-03	2,0914E-03
10	2,5741E-03	2,5746E-03	2,4741E-03	2,2828E-03	2,0095E-03
11	2,4604E-03	2,4632E-03	2,3691E-03	2,1876E-03	1,9272E-03
12	2,3730E-03	2,3791E-03	2,2916E-03	2,1194E-03	1,8706E-03
13	2,3873E-03	2,3999E-03	2,3190E-03	2,1534E-03	1,9112E-03
14	2,2367E-03	2,2586E-03	2,1943E-03	2,0517E-03	1,8381E-03
15	4,1368E-03	4,1974E-03	4,1016E-03	3,8635E-03	3,4963E-03
16	6,6480E-03	6,8391E-03	6,7959E-03	6,5384E-03	6,0856E-03
17	8,5095E-03	8,8921E-03	9,0003E-03	8,8559E-03	8,4800E-03
18	2,2693E-02	2,4308E-02	2,5304E-02	2,5723E-02	2,5608E-02
19	2,3849E-02	2,6240E-02	2,8116E-02	2,9501E-02	3,0425E-02
20	2,4471E-02	2,7452E-02	3,0009E-02	3,2154E-02	3,3904E-02
21	1,4836E-02	1,6843E-02	1,8635E-02	2,0213E-02	2,1582E-02
22	1,0005E-02	1,1432E-02	1,2729E-02	1,3895E-02	1,4932E-02
23	7,2292E-03	8,2941E-03	9,2724E-03	1,0162E-02	1,0965E-02
24	7,7735E-03	8,9496E-03	1,0040E-02	1,1041E-02	1,1953E-02
25	1,2887E-02	1,4904E-02	1,6793E-02	1,8548E-02	2,0168E-02
26	1,4865E-02	1,7296E-02	1,9606E-02	2,1783E-02	2,3824E-02
27	2,4864E-02	2,9191E-02	3,3380E-02	3,7407E-02	4,1258E-02
28	3,6336E-02	4,3209E-02	5,0028E-02	5,6747E-02	6,3331E-02
29	6,3178E-02	7,6163E-02	8,9349E-02	1,0263E-01	1,1593E-01
30	5,2203E-02	6,3466E-02	7,5053E-02	8,6870E-02	9,8838E-02
31	4,6025E-02	5,6182E-02	6,6694E-02	7,7474E-02	8,8450E-02
32	3,8615E-02	4,7237E-02	5,6190E-02	6,5400E-02	7,4804E-02
33	3,9202E-02	4,8020E-02	5,7196E-02	6,6655E-02	7,6334E-02
34	4,3576E-02	5,3432E-02	6,3708E-02	7,4319E-02	8,5194E-02
35	4,0796E-02	5,0058E-02	5,9729E-02	6,9731E-02	7,9998E-02
36	3,0002E-02	3,6827E-02	4,3961E-02	5,1349E-02	5,8941E-02
37	2,9795E-02	3,6577E-02	4,3673E-02	5,1028E-02	5,8595E-02
38	2,8481E-02	3,4960E-02	4,1745E-02	4,8784E-02	5,6035E-02
39	2,5737E-02	3,1579E-02	3,7702E-02	4,4062E-02	5,0622E-02
40	2,1111E-02	2,5881E-02	3,0884E-02	3,6089E-02	4,1466E-02
41	1,4116E-02	1,7271E-02	2,0582E-02	2,4033E-02	2,7605E-02
42	4,9161E-03	5,9818E-03	7,1006E-03	8,2678E-03	9,4795E-03

7 EXTENSÃO PARA GEOMETRIA DE MULTIPLACAS

7.1 Formulação do Problema

Para facilitar a exposição da formulação matemática do problema é considerado um sistema com R regiões, conforme Figura 7.1 abaixo. Nesta figura, x_r , $r = 1, 2, \dots, R - 1$, são as ordenadas das interfaces das regiões.

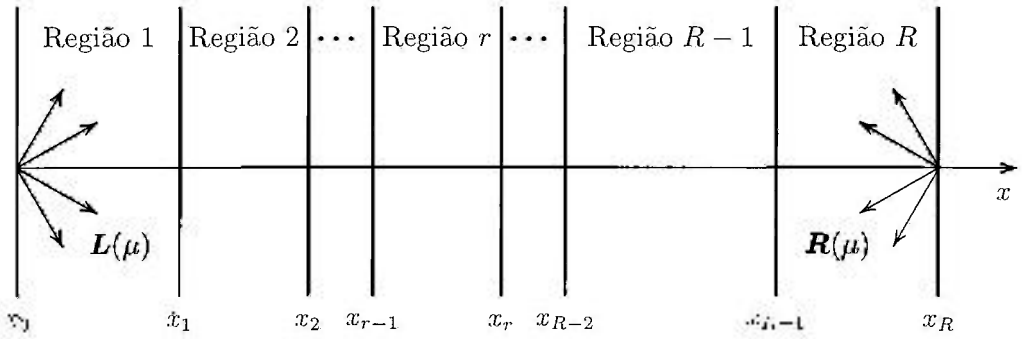


Figura 7.1 - Geometria de Multiplacas.

A distribuição $\mathbf{L}(\mu)$ incidente na superfície esquerda da região 1, em $x = x_0$, e a distribuição $\mathbf{R}(\mu)$ incidente na superfície direita, em $x = x_R$, são conhecidas. Os métodos P_N acoplados são aplicados subdividindo-se a estrutura de G grupos de energia do modelo de multigrupos em duas faixas de energia, compreendendo NDS grupos de moderação e NUS grupos complementares de energia onde ocorre o “upscattering”. Os fluxos angulares devem se sujeitar às seguintes condições de contorno: para a região 1, a condição de contorno à esquerda, para $\mu > 0$, pode ser expressa como

$$\Psi_1(x_0, \mu) = \mathbf{L}(\mu), \quad (7.1a)$$

e para cada uma das interfaces, x_r , $r = 1, 2, \dots, R - 1$, considera-se a condição de

continuidade, para $\mu > 0$,

$$\Psi_r(x_r, \pm\mu) = \Psi_{r+1}(x_r, \pm\mu), \quad (7.1b)$$

e para a última região, a condição de contorno à direita, para $\mu > 0$, pode ser expressa como

$$\Psi_R(x_R, -\mu) = R(\mu). \quad (7.1c)$$

É importante lembrar que, nestas equações,

$$\Psi_r(x_r, \mu) = \begin{pmatrix} \Psi_r^D(x_r, \mu) \\ \Psi_r^U(x_r, \mu) \end{pmatrix}, \quad (7.2)$$

onde

$$\Psi_r^D(x_r, \mu) = \left(\Psi_{r,1}(x_r, \mu) \quad \Psi_{r,2}(x_r, \mu) \quad \dots \quad \Psi_{r,NDS}(x_r, \mu) \right)^T, \quad (7.3)$$

e

$$\Psi_r^U(x_r, \mu) = \left(\Psi_{r,NDS+1}(x_r, \mu) \quad \Psi_{r,NDS+2}(x_r, \mu) \quad \dots \quad \Psi_{r,G}(x_r, \mu) \right)^T. \quad (7.4)$$

Para a primeira faixa de energia, a Eq. (2.1) é resolvida região por região para cada grupo g , com $1 \leq g \leq NDS$; para a segunda faixa de energia a Eq. (4.1), com o termo de fonte, $Q(x, \mu)$, dado pela Eq. (6.1), também é resolvida região por região para determinar os fluxos angulares de uma só vez para os NUS grupos restantes, ou seja, para todos $NDS < g \leq G$. Cada ida ou vinda, da esquerda para a direita, ou vice-versa, corresponde a uma varredura espacial. Evidentemente que os fluxos angulares incidentes nas margens das regiões internas são desconhecidos. Então adota-se um procedimento iterativo, tal que, em cada região, para cada varredura, sejam utilizados os fluxos emergentes da última região calculada e o da posterior calculada na varredura anterior. Na primeira varredura, opcionalmente da esquerda para a direita, os fluxos angulares incidentes na superfície direita de cada região excetuando a última, são considerados iguais a zero. A convergência será atingida quando o valor absoluto do máximo erro relativo entre os fluxos angulares de duas varreduras sucessivas for menor que um valor pré-estabelecido.

Para melhor compreensão, considerando que o processo de varreduras seja iniciado pela esquerda, estabelece-se que as varreduras da esquerda para a direita

correspondem às iterações de ordem ímpar e as da direita para a esquerda às de ordem par. Uma vez definido o sentido inicial das varreduras, pode-se expressar as condições de contorno nas interfaces internas de uma região r , para $\mu > 0$, da forma descrita a seguir. Para as varreduras de ordem ímpar, no contorno esquerdo para $r = 2, 3, \dots, R$, tem-se

$$\Psi_r^{(\nu)}(x_{r-1}, \mu) = \Psi_{r-1}^{(\nu)}(x_{r-1}, \mu), \quad (7.5a)$$

observando-se que, para $\nu > 1$,

$$\Psi_2^{(\nu)}(x_1, \mu) = \Psi_1^{(\nu-1)}(x_1, \mu), \quad (7.5b)$$

e no contorno direito para $r = 1, 2, \dots, R-1$, tem-se

$$\Psi_r^{(\nu)}(x_r, -\mu) = \Psi_{r+1}^{(\nu-1)}(x_r, -\mu) \quad (7.5c)$$

exceto na primeira iteração, quando se considera

$$\Psi_r^{(1)}(x_r, -\mu) = 0. \quad (7.5d)$$

Para as varreduras de ordem par, no contorno esquerdo para $r = R-1, R-2, \dots, 2$, tem-se

$$\Psi_r^{(\nu+1)}(x_{r-1}, \mu) = \Psi_{r-1}^{(\nu)}(x_{r-1}, \mu) \quad (7.6a)$$

e, no contorno direito para $r = R-1, R-2, \dots, 1$,

$$\Psi_r^{(\nu+1)}(x_r, -\mu) = \Psi_{r+1}^{(\nu)}(x_r, -\mu) \quad (7.6b)$$

observando-se que para $r = R-1$

$$\Psi_r^{(\nu+1)}(x_r, -\mu) = \Psi_{r+1}^{(\nu)}(x_r, -\mu). \quad (7.6c)$$

Quanto ao critério de convergência, considera-se os fluxos angulares convergidos quando as condições

$$\max \left\{ \left| \frac{\Psi_r^{(\nu)}(x_r, \mu) - \Psi_r^{(\nu-1)}(x_r, \mu)}{\Psi_r^{(\nu-1)}(x_r, \mu)} \right| \right\} < EPS, \quad (7.7a)$$

para $r = 1, \dots, R-1$ e $\mu \in [-1, 1]$, e

$$\max \left\{ \left| \frac{\Psi_r^\nu(x, \mu) - \Psi_r^{\nu-2}(x, \mu)}{\Psi_r^{\nu-2}(x, \mu)} \right| \right\} < EPS, \quad (7.7b)$$

para $x = x_0$ e $\mu \leq 0$ e $x = x_R$ e $\mu \geq 0$, forem satisfeitas para um valor pré-estabelecido de EPS e valores selecionados de μ .

7.2 Problemas-Teste

A parte principal do desenvolvimento do programa computacional dos métodos P_N acoplados estendido para multiregiões é a elaboração do programa gerenciador das rotinas que calculam o transporte de partículas pelos métodos escalar e vetorial. Não menos importantes são as modificações feitas nas subrotinas que calculam os fluxos angulares incidentes e emergentes nas interfaces internas, em cada iteração específica, usando as fórmulas de fluxo angular sem pós-processamento nas mesmas direções da aproximação de Mark selecionada para aplicar às condições de contorno. Para testar o programa final, primeiramente, foram resolvidos os mesmos problemas usados nas Seções 3.9.1 e 6.1 para testar os métodos escalar e vetorial acoplados e não-acoplados, quais sejam o problema de 20 grupos e o de seis grupos, ambos reformulados em quatro regiões de mesmo material. Os resultados obtidos foram idênticos aos tabulados nas referidas seções.

Para testar o programa mais apropriadamente, foi resolvido um problema-teste²⁸ de cinco regiões, 20 grupos de energia e décima ordem de espalhamento, usado para testar o método F_N para problemas de moderação em multiregiões. Trata-se de uma placa de 20 cm com uma distribuição de radiação incidindo isotropicamente, com energia igual à do primeiro grupo, na superfície esquerda, ou seja, para $\mu > 0$, os elementos de $\mathbf{L}(\mu)$ são dados por

$$L_i(\mu) = \delta_{i,1} \quad (7.8a)$$

e na superfície direita os elementos de $\mathbf{R}(\mu)$ por

$$R_i(\mu) = 0. \quad (7.8b)$$

A espessura de cada região é especificada por $\Delta_r = (r + 1)$ cm, $r = 1, 2, \dots, 5$. O conjunto de seções de choque é definido através de uma relação fictícia de fácil reprodução, dado, para $i = 1, 2, \dots, 20$, pelas seções de choque totais

$$\sigma_i^r = \left(\frac{r+20}{21} \right)^5 \left[\left(\frac{i}{10} \right) - 0,15\delta_{i,5} - 0,15\delta_{i,10} \right] \quad (7.9)$$

e pelas seções de choque de transferência

$$\sigma_{ij}^{l,r} = (2l + 1) \binom{r + 20}{21} \left[100(i - j + 1) \right] (g_{ij})^l, \quad (7.10)$$

com $j = 1, 2, \dots, i$ e $l = 0, 1, \dots, 10$, sendo

$$g_{ij} = 0,7 - (i + j)/200. \quad (7.11)$$

O objetivo principal do teste foi o de verificar a eficiência dos métodos P_N acoplados estendidos para multiplacas. Como já foi constatado nas seções anteriores, a convergência dos resultados finais é mais lenta nos contornos do que nos pontos internos, portanto, os resultados apresentados aqui limitam-se aos albedos, fatores de transmissão e fluxos angulares nas posições onde a convergência é mais difícil. Nas Tabelas 7.1 e 7.2 são apresentados os albedos de grupo A_g^* e os fatores de transmissão B_g^* para várias ordens de aproximação (N) juntamente com os resultados de alta precisão obtidos com o método F_N e publicados na Referência 28. Observa-se, nas Tabelas 7.1 e 7.2, que os albedos de grupo claramente convergem, embora lentamente, para os resultados do método F_N e que os fatores de transmissão convergem muito mais rapidamente. E, ainda, comparando os resultados obtidos com os do código de ordenadas discretas DTF69 também publicados na Referência 28, verifica-se que os aqui obtidos são melhores principalmente para os valores dos fatores de transmissão, embora o código de ordenadas discretas utilizado seja um tanto quanto obsoleto. Na Tabela 7.3 observa-se que o método P_N escalar é significativamente mais rápido do que o vetorial e, quando acoplado ao vetorial, atenua o tempo de processamento do vetorial acentuadamente. Não foram obtidos resultados para o método vetorial com $N = 199$ por insuficiência de memória no computador utilizado. No que diz respeito à convergência dos fluxos angulares nos contornos internos das regiões, foi verificado que:

- o número de varreduras final independe do valor de N para um dado valor de EPS e,
- quando o meio é puramente moderador o número de iterações final é o mesmo para ambos os métodos e independe do número de grupos usado em cada método (escalar/vetorial);

Comparando os resultados P_N para os fluxos angulares pós-processados, apresentados nas Tabelas 7.4 e 7.5, com os resultados tabulados na Referência 28, verificou-se que, para $N = 199$ e $NDS = 20$ a magnitude da máxima diferença foi da ordem de 0,15%.

Tabela 7.1: Albedos de Grupo A_g^* para o Problema de 5 Regiões

g	$N = 19$	$N = 39$	$N = 59$	$N = 199$	Ref. 28
1	5,0300(-3)	5,6651(-3)	5,7845(-3)	5,8722(-3)	5,8809(-3)
2	2,3271(-3)	2,2927(-3)	2,2855(-3)	2,2797(-3)	2,2791(-3)
3	1,3207(-3)	1,3019(-3)	1,2977(-3)	1,2943(-3)	1,2939(-3)
4	8,8058(-4)	8,6826(-4)	8,6542(-4)	8,6306(-4)	8,6280(-4)
5	8,6768(-4)	8,5642(-4)	8,5393(-4)	8,5192(-4)	8,5170(-4)
6	5,0656(-4)	4,9984(-4)	4,9820(-4)	4,9679(-4)	4,9662(-4)
7	4,0501(-4)	3,9970(-4)	3,9837(-4)	3,9720(-4)	3,9706(-4)
8	3,3417(-4)	3,2985(-4)	3,2874(-4)	3,2775(-4)	3,2763(-4)
9	2,8222(-4)	2,7862(-4)	2,7767(-4)	2,7682(-4)	2,7671(-4)
10	2,8495(-4)	2,8138(-4)	2,8047(-4)	2,7966(-4)	2,7956(-4)
11	2,1400(-4)	2,1136(-4)	2,1064(-4)	2,0998(-4)	2,0989(-4)
12	1,8852(-4)	1,8622(-4)	1,8559(-4)	1,8499(-4)	1,8491(-4)
13	1,6796(-4)	1,6594(-4)	1,6537(-4)	1,6483(-4)	1,6476(-4)
14	1,5101(-4)	1,4921(-4)	1,4870(-4)	1,4821(-4)	1,4814(-4)
15	1,3681(-4)	1,3520(-4)	1,3474(-4)	1,3429(-4)	1,3423(-4)
16	1,2475(-4)	1,2331(-4)	1,2289(-4)	1,2247(-4)	1,2242(-4)
17	1,1442(-4)	1,1311(-4)	1,1273(-4)	1,1234(-4)	1,1229(-4)
18	1,0547(-4)	1,0428(-4)	1,0392(-4)	1,0357(-4)	1,0352(-4)
19	9,7655(-5)	9,6571(-5)	9,6241(-5)	9,5906(-5)	9,5859(-5)
20	9,0783(-5)	8,9789(-5)	8,9483(-5)	8,9169(-5)	8,9125(-5)

Tabela 7.2: Fatores de Transmissão B_g^* para o Problema de 5 Regiões

g	$N = 19$	$N = 39$	$N = 59$	$N = 199$	Ref. 28
1	1,0453(-2)	1,0453(-2)	1,0453(-2)	1,0453(-2)	1,0453(-2)
2	1,9995(-4)	1,9993(-4)	1,9993(-4)	1,9993(-4)	1,9993(-4)
3	6,9020(-5)	6,9014(-5)	6,9013(-5)	6,9012(-5)	6,9012(-5)
4	3,5398(-5)	3,5394(-5)	3,5393(-5)	3,5393(-5)	3,5393(-5)
5	3,5354(-5)	3,5351(-5)	3,5350(-5)	3,5350(-5)	3,5350(-5)
6	1,4901(-5)	1,4900(-5)	1,4899(-5)	1,4899(-5)	1,4899(-5)
7	1,0718(-5)	1,0716(-5)	1,0716(-5)	1,0716(-5)	1,0716(-5)
8	8,0874(-6)	8,0865(-6)	8,0864(-6)	8,0863(-6)	8,0863(-6)
9	6,3211(-6)	6,3204(-6)	6,3203(-6)	6,3202(-6)	6,3202(-6)
10	6,1280(-6)	6,1273(-6)	6,1272(-6)	6,1271(-6)	6,1271(-6)
11	4,1843(-6)	4,1838(-6)	4,1837(-6)	4,1837(-6)	4,1837(-6)
12	3,4897(-6)	3,4893(-6)	3,4893(-6)	3,4892(-6)	3,4892(-6)
13	2,9549(-6)	2,9545(-6)	2,9545(-6)	2,9545(-6)	2,9545(-6)
14	2,5336(-6)	2,5333(-6)	2,5332(-6)	2,5332(-6)	2,5332(-6)
15	2,1956(-6)	2,1953(-6)	2,1953(-6)	2,1953(-6)	2,1953(-6)
16	1,9203(-6)	1,9200(-6)	1,9200(-6)	1,9200(-5)	1,9200(-5)
17	1,6930(-6)	1,6928(-6)	1,6927(-6)	1,6927(-6)	1,6927(-6)
18	1,5031(-6)	1,5030(-6)	1,5029(-6)	1,5029(-6)	1,5029(-6)
19	1,3430(-6)	1,3428(-6)	1,3428(-6)	1,3428(-6)	1,3428(-6)
20	1,2066(-6)	1,2065(-6)	1,2064(-6)	1,2064(-6)	1,2064(-6)

Tabela 7.3: Tempos de Processamento* (min.)

N	ESCALAR	ACOPLADOS	VETORIAL
	$NDS = 20$	$NDS = 10$	$NDS = 0$
19	0,5	1,2	1,8
29	1,5	2,9	7,0
39	3,5	6,2	12,7
59	10,7	18,6	49,1

*Pentium II - 400 MHz - 128 Mbytes RAM.

Tabela 7.4: Fluxo Angular Emergente à Esquerda da Região 1

g	$\mu = 0,1$	$\mu = 0,2$	$\mu = 0,3$	$\mu = 0,4$	$\mu = 0,5$
1	2,7795E-02	1,7787E-02	1,2216E-02	8,8392E-03	6,6443E-03
2	8,6359E-03	6,1210E-03	4,4877E-03	3,4036E-03	2,6538E-03
3	4,2688E-03	3,1984E-03	2,4411E-03	1,9078E-03	1,5235E-03
4	2,5737E-03	1,9989E-03	1,5700E-03	1,2548E-03	1,0204E-03
5	2,4602E-03	1,9360E-03	1,5351E-03	1,2354E-03	1,0095E-03
6	1,2671E-03	1,0343E-03	8,4758E-04	7,0169E-04	5,8757E-04
7	9,6037E-04	7,9614E-04	6,6130E-04	5,5401E-04	4,6873E-04
8	7,5560E-04	6,3483E-04	5,3353E-04	4,5163E-04	3,8564E-04
9	6,1153E-04	5,1984E-04	4,4140E-04	3,7708E-04	3,2464E-04
10	5,9911E-04	5,1425E-04	4,4024E-04	3,7857E-04	3,2762E-04
11	4,2843E-04	3,7198E-04	3,2184E-04	2,7958E-04	2,4437E-04
12	3,6591E-04	3,2025E-04	2,7906E-04	2,4397E-04	2,1449E-04
13	3,1663E-04	2,7919E-04	2,4491E-04	2,1540E-04	1,9041E-04
14	2,7698E-04	2,4592E-04	2,1708E-04	1,9199E-04	1,7058E-04
15	2,4456E-04	2,1853E-04	1,9402E-04	1,7250E-04	1,5399E-04
16	2,1769E-04	1,9568E-04	1,7468E-04	1,5607E-04	1,3994E-04
17	1,9514E-04	1,7639E-04	1,5827E-04	1,4206E-04	1,2792E-04
18	1,7603E-04	1,5995E-04	1,4421E-04	1,3000E-04	1,1753E-04
19	1,5968E-04	1,4580E-04	1,3206E-04	1,1954E-04	1,0847E-04
20	1,4558E-04	1,3354E-04	1,2147E-04	1,1039E-04	1,0053E-04
g	$\mu = 0,6$	$\mu = 0,7$	$\mu = 0,8$	$\mu = 0,9$	$\mu = 1,0$
1	5,1358E-03	4,0676E-03	3,2970E-03	2,7137E-03	2,2727E-03
2	2,1124E-03	1,7124E-03	1,4146E-03	1,1850E-03	1,0049E-03
3	1,2368E-03	1,0187E-03	8,5246E-04	7,2273E-04	6,1820E-04
4	8,4103E-04	7,0145E-04	5,9305E-04	5,0755E-04	4,3724E-04
5	8,3529E-04	6,9891E-04	5,9209E-04	5,0712E-04	4,3737E-04
6	4,9654E-04	4,2299E-04	3,6393E-04	3,1634E-04	2,7599E-04
7	3,9974E-04	3,4328E-04	2,9738E-04	2,6007E-04	2,2811E-04
8	3,3161E-04	2,8687E-04	2,5010E-04	2,1996E-04	1,9390E-04
9	2,8124E-04	2,4495E-04	2,1482E-04	1,8992E-04	1,6823E-04
10	2,8507E-04	2,4925E-04	2,1930E-04	1,9435E-04	1,7261E-04
11	2,1467E-04	1,8938E-04	1,6799E-04	1,5001E-04	1,3414E-04
12	1,8946E-04	1,6801E-04	1,4973E-04	1,3428E-04	1,2056E-04
13	1,6906E-04	1,5065E-04	1,3486E-04	1,2144E-04	1,0946E-04
14	1,5218E-04	1,3623E-04	1,2248E-04	1,1071E-04	1,0017E-04
15	1,3800E-04	1,2407E-04	1,1200E-04	1,0161E-04	9,2268E-05
16	1,2594E-04	1,1369E-04	1,0302E-04	9,3786E-05	8,5463E-05
17	1,1558E-04	1,0473E-04	9,5246E-05	8,6998E-05	7,9541E-05
18	1,0659E-04	9,6937E-05	8,8457E-05	8,1053E-05	7,4342E-05
19	9,8726E-05	9,0095E-05	8,2482E-05	7,5806E-05	6,9741E-05
20	9,1803E-05	8,4050E-05	7,7186E-05	7,1143E-05	6,5642E-05

Tabela 7.5: Fluxo Angular Emergente à Direita da Região 5

g	$\mu = 0,1$	$\mu = 0,2$	$\mu = 0,3$	$\mu = 0,4$	$\mu = 0,5$
1	8,7378E-05	1,2533E-04	1,9871E-04	4,4550E-04	1,3050E-03
2	2,3228E-05	3,0390E-05	4,0727E-05	5,6122E-05	7,9503E-05
3	1,0926E-05	1,3902E-05	1,8012E-05	2,3833E-05	3,2169E-05
4	6,4480E-06	8,0857E-06	1,0296E-05	1,3357E-05	1,7639E-05
5	6,5021E-06	8,1596E-06	1,0379E-05	1,3434E-05	1,7691E-05
6	3,1827E-06	3,9235E-06	4,8942E-06	6,2000E-06	7,9782E-06
7	2,4031E-06	2,9460E-06	3,6513E-06	4,5920E-06	5,8625E-06
8	1,8905E-06	2,3066E-06	2,8432E-06	3,5536E-06	4,5060E-06
9	1,5328E-06	1,8626E-06	2,2848E-06	2,8401E-06	3,5797E-06
10	1,5225E-06	1,8463E-06	2,2581E-06	2,7967E-06	3,5104E-06
11	1,0843E-06	1,3080E-06	1,5907E-06	1,9579E-06	2,4410E-06
12	9,2945E-07	1,1176E-06	1,3544E-06	1,6603E-06	2,0608E-06
13	8,0773E-07	9,6839E-07	1,1696E-06	1,4283E-06	1,7654E-06
14	7,0989E-07	8,4870E-07	1,0218E-06	1,2433E-06	1,5305E-06
15	6,2985E-07	7,5100E-07	9,0141E-07	1,0930E-06	1,3404E-06
16	5,6343E-07	6,7007E-07	8,0193E-07	9,6920E-07	1,1842E-06
17	5,0763E-07	6,0220E-07	7,1869E-07	8,6584E-07	1,0543E-06
18	4,6022E-07	5,4465E-07	6,4825E-07	7,7861E-07	9,4485E-07
19	4,1957E-07	4,9538E-07	5,8807E-07	7,0425E-07	8,5184E-07
20	3,8441E-07	4,5284E-07	5,3621E-07	6,4032E-07	7,7207E-07
g	$\mu = 0,6$	$\mu = 0,7$	$\mu = 0,8$	$\mu = 0,9$	$\mu = 1,0$
1	3,4157E-03	7,3116E-03	1,3259E-02	2,1265E-02	3,1162E-02
2	1,1508E-04	1,6810E-04	2,4387E-04	3,4652E-04	4,7836E-04
3	4,4073E-05	6,0800E-05	8,3692E-05	1,1401E-04	1,5281E-04
4	2,3613E-05	3,1819E-05	4,2820E-05	5,7130E-05	7,5179E-05
5	2,3616E-05	3,1758E-05	4,2697E-05	5,6985E-05	7,5100E-05
6	1,0398E-05	1,3649E-05	1,7926E-05	2,3405E-05	3,0229E-05
7	7,5780E-06	9,8683E-06	1,2865E-05	1,6689E-05	2,1436E-05
8	5,7835E-06	7,4795E-06	9,6887E-06	1,2498E-05	1,5976E-05
9	4,5659E-06	5,8684E-06	7,5584E-06	9,7006E-06	1,2348E-05
10	4,4577E-06	5,7041E-06	7,3170E-06	9,3578E-06	1,1878E-05
11	3,0781E-06	3,9116E-06	4,9849E-06	6,3381E-06	8,0043E-06
12	2,5865E-06	3,2715E-06	4,1508E-06	5,2567E-06	6,6163E-06
13	2,2058E-06	2,7775E-06	3,5091E-06	4,4272E-06	5,5541E-06
14	1,9042E-06	2,3875E-06	3,0042E-06	3,7763E-06	4,7226E-06
15	1,6610E-06	2,0740E-06	2,5995E-06	3,2560E-06	4,0596E-06
16	1,4618E-06	1,8181E-06	2,2701E-06	2,8337E-06	3,5226E-06
17	1,2965E-06	1,6064E-06	1,9985E-06	2,4863E-06	3,0818E-06
18	1,1577E-06	1,4293E-06	1,7718E-06	2,1972E-06	2,7157E-06
19	1,0402E-06	1,2795E-06	1,5808E-06	1,9541E-06	2,4085E-06
20	9,3958E-07	1,1519E-06	1,4183E-06	1,7478E-06	2,1483E-06

8 PROBLEMAS EM GEOMETRIA DE MULTIPLACAS

8.1 Moderação de Nêutrons num Sistema Típico de Monitoração

O problema esquematizado na Figura 8.1 é um modelo de blindagem para nêutrons rápidos que lembra o esquema de simulação da moderação e captura de nêutrons em um “Long Counter” usado como padrão para medidas de fluência e calibração de equipamentos de monitoração.¹⁷

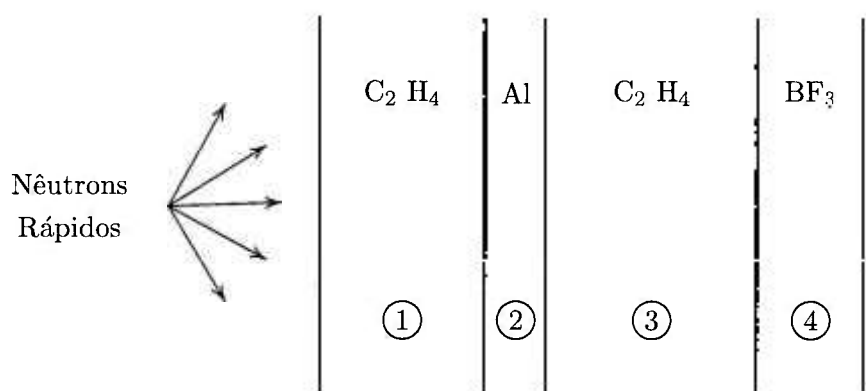


Figura 8.1 - Esquema para Simulação da Moderação e Captura de Nêutrons em um Detector de Nêutrons Rápidos.

O que se pretende com este problema típico é explorar a dificuldade existente em cálculos de fluxos de nêutrons onde a moderação é acentuada para demonstrar a eficiência relativa entre os métodos P_N acoplados, o método P_N vetorial e o de ordenadas discretas, como implementado no código ANISN. Consiste de quatro regiões, sendo duas de polietileno de baixa densidade, uma de alumínio e a última de trifluoreto de boro com as dimensões e densidades específicas dos materiais apresentadas na Tabela 8.1. A densidade atômica dos elementos por região é apresentada na Tabela 8.2. A energia dos nêutrons incidentes na superfície esquerda corresponde à do grupo de

mais alta energia da estrutura de grupos selecionada, a qual está descrita no próximo parágrafo. A distribuição dos nêutrons incidentes é isotrópica e unitária ($L_1(\mu) = 1$). A região 4 simula a câmara de gás cilíndrica de 26 cm de comprimento com BF_3 enriquecido (96% de Boro-10 e 4% de Boro-11) a uma pressão de 250 mmHg.

As seções de choque foram geradas a partir dos dados nucleares avaliados das bibliotecas ENDF/B⁶¹ pelo conjunto de programas de computador que constitui o sistema de processamento de dados nucleares conhecido como NJOY.⁵⁰ A estrutura de grupos foi escolhida com fundamento na moderação em 12 grupos cobrindo a faixa de energia entre 5,0435 eV e 4,5 MeV e na importância do espalhamento entre 9 grupos que cobrem a faixa térmica compreendida entre 10^{-5} eV e 5,0435 eV. A função de ponderação utilizada é uma combinação das funções Maxwelliana, $1/E$ e do espectro de fissão. A aproximação da ordem da lei de espalhamento considerada é $\mathcal{L} = 7$ e o conjunto de seções de choque macroscópicas foi calculado usando o código de ordenadas discretas ANISN-W⁶⁹ através da tabela de misturas onde aproveitou-se para incluir o fator $(2l + 1)$ nas seções de choque de transferência. Nos Apêndices 1 a 6 constam os limites dos intervalos dos grupos de energia e os da aplicação das funções de ponderação juntamente com os outros dados de entrada para os módulos do sistema NJOY utilizados para gerar as bibliotecas microscópicas. No Apêndice 7 apresentam-se os dados de entrada para o código ANISN para obter as seções de choque macroscópicas e no Apêndice 8 os dados de entrada do ANISN para calcular os fluxos e correntes totais de grupo utilizados na comparação com os calculados pelos métodos P_N acoplados.

O problema foi resolvido para vários valores de N , explorando as principais opções de resultados que os programas P_N oferecem para comparações. Na Tabela 8.3 estão apresentados os tempos de processamento e o número de varreduras para cada valor de N para os métodos acoplados e vetorial, considerando o critério de convergência $EPS = 10^{-6}$. É claro que o tempo de processamento aumenta com o valor da ordem de aproximação para ambos os métodos, no entanto a diferença relativa para baixos valores de N é muito menor do que para altos valores, ou seja, para $N = 15$ a diferença é de aproximadamente 62% enquanto que para $N = 149$ é superior a 400%. O número de varreduras, conforme verificado anteriormente, independe do

valor de N para ambos os métodos mas no método vetorial depende da combinação NDS e NUS . Para comparar os métodos P_N acoplados com o método das ordenadas discretas como implementado no código ANISN, o problema foi resolvido considerando as opções de saída dos códigos para obter apenas os fluxos e correntes totais de grupo para valores de N iguais a 7, 15 e 31. Como os resultados do método S_{N+1} dependem fortemente da discretização espacial e angular, estabeleceu-se o número fixo de pontos espaciais em 1061 para se verificar a variação dos resultados com a ordem de aproximação N . A escolha do número de pontos espaciais foi baseada numa pesquisa prévia onde a máxima diferença entre os resultados dos métodos para $N = 7$ não fosse significativamente grande, numa tentativa de estabelecer a mais próxima equivalência possível para efeitos de comparação. Comparando os tempos de processamento para os três métodos, conforme pode ser visto na Tabela 8.4, nota-se que para valores de N menores do que 15 os métodos P_N acoplados apresentam vantagens, porém, para valores crescentes de N o método das ordenadas discretas leva significativa vantagem. Quanto aos valores dos resultados obtidos pelos métodos acoplados e S_{N+1} , observa-se nas Tabelas 8.5 a 8.10 que para $N = 7$ a máxima diferença obtida, em torno de 1,3%, ocorre na comparação entre as correntes totais e que essa diferença diminui para menos de 0,04% com $N = 31$. Para o fluxo total a máxima diferença para $N = 7$ é de $\sim 0,36\%$ e para $N = 31$ cai para $\sim 0,029\%$.

Na Figura 8.2 está traduzido o resultado principal desejado, ou seja, moderar os nêutrons através das três primeiras regiões, tal que ao atravessarem a interface da região de trifluoreto de boro, apenas nêutrons térmicos sejam capturados, particularmente no Boro-10, para que a reação $^{10}\text{B}(n,\alpha)^7\text{Li}$ possa ser medida pelo detetor proporcional BF_3 simulado pela região 4. A taxa de captura por grupo, C_g , na região de trifluoreto de boro é calculada por

$$C_g = \sigma_g^c \int_{x_3}^{x_4} \phi_g(x) dx \quad (8.1)$$

onde σ_g^c é a seção de choque macroscópica de captura para o grupo g na região 4 e $\phi_g(x)$ é o fluxo escalar no grupo g .

Tabela 8.1: Dimensões, Pesos Moleculares e Densidades

Região	Dimensão (cm)	Material	P. Molecular	$\rho(g/cm^3)$
1	12,00	C ₂ H ₄	28,054	0,916
2	1,25	Al	26,982	2,699
3	15,00	C ₂ H ₄	28,054	0,916
4	3,60	BF ₃	67,814	—

Tabela 8.2: Densidades Atômicas [átomos/(barn.cm)] dos Elementos

Elementos	P. Atômico	Região 1	Região 2	Região 3	Região 4
Hidrogênio	1,008	3,9159E-02		3,9159E-02	
Carbono	12,011	7,8317E-02		7,8317E-02	
Alumínio	26,982		6,0248E-02		
Boro-10	10,0129				1,2151E-07
Boro-11	11,0093				4,6046E-09
Flúor	18,998				3,5139E-07

Tabela 8.3: Métodos P_N Acoplados \times Vetorial

	Tempos de Processamento* (s)		Número de Varreduras		
	ACOPLADOS	VETORIAL	ESCALAR	VETORIAL	VETORIAL
N	$NDS = 12$	$NDS = 0$	$NDS = 12$	$NUS = 9$	$NDS = 0$
15	54	88	21	31	35
19	88	155	21	31	35
29	223	482	21	31	35
39	451	1 204	21	31	35
49	815	2 307	21	31	35
59	1 350	3 800	21	31	35
69	2 180	6 076	21	31	35
79	3 064	10 616	21	31	35
89	4 246	12 487	21	31	35
99	5 710	17 036	21	31	35
149	17 920	60 077	21	31	35
199	41 001	—	21	31	—

*Pentium II - 350 MHz - 512 Mbytes RAM.

Tabela 8.4: Tempos de Processamento* (s) - $P_N \times \text{ANISN}$

N	P_N	P_N	S_{N+1}
	ACOPLADOS	VETORIAL	ANISN
7	3,6	10,8	12,9
15	19,0	68,4	16,6
31	121,1	540,2	23,7

*Pentium II - 350 MHz - 512 Mbytes RAM.

Tabela 8.5: Fluxo Total de Grupo $\phi_g(x_r)$, $r = 0, 1, 2, 3$ e 4, para $N = 7$

g	$x_0 = 0, 0$ cm		$x_1 = 12, 0$ cm		$x_2 = 13, 25$ cm		$x_3 = 28, 25$ cm		$x_4 = 31, 85$ cm	
	P_N	S_{N+1}	P_N	S_{N+1}	P_N	S_{N+1}	P_N	S_{N+1}	P_N	S_{N+1}
1	1,507E-01	1,502E-01	5,803E-02	5,802E-02	5,189E-02	5,190E-02	1,906E-03	1,908E-03	1,906E-03	1,908E-03
2	1,291E-01	1,294E-01	3,973E-02	3,968E-02	3,564E-02	3,560E-02	1,528E-03	1,531E-03	1,528E-03	1,531E-03
3	6,164E-02	6,171E-02	3,927E-02	3,922E-02	3,495E-02	3,490E-02	1,448E-03	1,451E-03	1,448E-03	1,451E-03
4	4,087E-02	4,096E-02	3,126E-02	3,123E-02	2,782E-02	2,779E-02	9,856E-04	9,874E-04	9,856E-04	9,874E-04
5	1,889E-02	1,895E-02	1,589E-02	1,589E-02	1,419E-02	1,419E-02	4,694E-04	4,700E-04	4,694E-04	4,700E-04
6	1,928E-02	1,932E-02	1,730E-02	1,732E-02	1,469E-02	1,471E-02	5,009E-04	5,015E-04	5,009E-04	5,014E-04
7	1,812E-02	1,815E-02	2,244E-02	2,242E-02	2,001E-02	2,000E-02	5,103E-04	5,107E-04	5,103E-04	5,107E-04
8	2,089E-02	2,093E-02	2,827E-02	2,830E-02	2,739E-02	2,743E-02	6,797E-04	6,803E-04	6,797E-04	6,802E-04
9	1,363E-02	1,366E-02	2,183E-02	2,185E-02	2,125E-02	2,128E-02	5,087E-04	5,091E-04	5,087E-04	5,091E-04
10	1,739E-02	1,742E-02	3,313E-02	3,316E-02	3,234E-02	3,237E-02	7,664E-04	7,672E-04	7,663E-04	7,672E-04
11	6,376E-03	6,390E-03	1,330E-02	1,331E-02	1,299E-02	1,301E-02	3,083E-04	3,086E-04	3,082E-04	3,086E-04
12	7,433E-03	7,449E-03	1,665E-02	1,667E-02	1,628E-02	1,629E-02	3,886E-04	3,891E-04	3,885E-04	3,890E-04
13	4,719E-02	4,733E-02	1,147E-01	1,149E-01	1,115E-01	1,117E-01	6,583E-03	6,597E-03	6,581E-03	6,594E-03
14	2,533E-02	2,539E-02	7,177E-02	7,187E-02	7,015E-02	7,026E-02	4,531E-03	4,539E-03	4,528E-03	4,536E-03
15	1,341E-02	1,344E-02	4,087E-02	4,093E-02	4,004E-02	4,010E-02	2,750E-03	2,755E-03	2,748E-03	2,753E-03
16	1,908E-02	1,911E-02	6,353E-02	6,363E-02	6,242E-02	6,251E-02	4,719E-03	4,727E-03	4,715E-03	4,723E-03
17	2,075E-02	2,078E-02	7,587E-02	7,599E-02	7,478E-02	7,489E-02	6,313E-03	6,324E-03	6,306E-03	6,317E-03
18	2,154E-02	2,157E-02	8,686E-02	8,699E-02	8,589E-02	8,602E-02	8,171E-03	8,184E-03	8,158E-03	8,171E-03
19	1,828E-02	1,830E-02	8,051E-02	8,063E-02	7,984E-02	7,996E-02	8,414E-03	8,425E-03	8,391E-03	8,403E-03
20	2,315E-02	2,317E-02	1,159E-01	1,161E-01	1,154E-01	1,156E-01	1,391E-02	1,392E-02	1,385E-02	1,386E-02
21	9,747E-03	9,751E-03	5,637E-02	5,650E-02	5,631E-02	5,644E-02	6,971E-03	6,975E-03	6,906E-03	6,913E-03

Tabela 8.6: Fluxo Total de Grupo $\phi_g(x_r)$, $r = 0, 1, 2, 3$ e 4, para $N = 15$

g	$x_0 = 0, 0$ cm		$x_1 \approx 12, 0$ cm		$x_2 = 13, 25$ cm		$x_3 = 28, 25$ cm		$x_4 = 31, 85$ cm	
	P_N	S_{N+1}	P_N	S_{N+1}	P_N	S_{N+1}	P_N	S_{N+1}	P_N	S_{N+1}
1	1,514E-01	1,511E-01	5,812E-02	5,807E-02	5,195E-02	5,192E-02	1,902E-03	1,904E-03	1,902E-03	1,904E-03
2	1,286E-01	1,288E-01	3,978E-02	3,976E-02	3,569E-02	3,567E-02	1,524E-03	1,526E-03	1,524E-03	1,526E-03
3	6,150E-02	6,156E-02	3,932E-02	3,930E-02	3,500E-02	3,499E-02	1,444E-03	1,446E-03	1,444E-03	1,446E-03
4	4,074E-02	4,079E-02	3,128E-02	3,128E-02	2,785E-02	2,784E-02	9,833E-04	9,841E-04	9,833E-04	9,841E-04
5	1,883E-02	1,886E-02	1,587E-02	1,588E-02	1,417E-02	1,418E-02	4,686E-04	4,688E-04	4,686E-04	4,688E-04
6	1,922E-02	1,924E-02	1,726E-02	1,727E-02	1,466E-02	1,467E-02	5,003E-04	5,005E-04	5,003E-04	5,005E-04
7	1,808E-02	1,809E-02	2,243E-02	2,244E-02	1,999E-02	2,001E-02	5,099E-04	5,100E-04	5,099E-04	5,100E-04
8	2,084E-02	2,086E-02	2,821E-02	2,823E-02	2,732E-02	2,735E-02	6,792E-04	6,794E-04	6,792E-04	6,794E-04
9	1,360E-02	1,361E-02	2,179E-02	2,180E-02	2,121E-02	2,123E-02	5,081E-04	5,083E-04	5,081E-04	5,083E-04
10	1,734E-02	1,736E-02	3,307E-02	3,309E-02	3,228E-02	3,230E-02	7,653E-04	7,657E-04	7,653E-04	7,657E-04
11	6,360E-03	6,366E-03	1,328E-02	1,328E-02	1,297E-02	1,298E-02	3,078E-04	3,080E-04	3,078E-04	3,079E-04
12	7,414E-03	7,421E-03	1,662E-02	1,663E-02	1,624E-02	1,626E-02	3,879E-04	3,882E-04	3,878E-04	3,881E-04
13	4,700E-02	4,707E-02	1,143E-01	1,144E-01	1,111E-01	1,113E-01	6,563E-03	6,571E-03	6,561E-03	6,568E-03
14	2,526E-02	2,528E-02	7,158E-02	7,165E-02	6,997E-02	7,004E-02	4,519E-03	4,523E-03	4,516E-03	4,520E-03
15	1,337E-02	1,339E-02	4,077E-02	4,081E-02	3,994E-02	3,998E-02	2,743E-03	2,746E-03	2,741E-03	2,744E-03
16	1,904E-02	1,905E-02	6,338E-02	6,344E-02	6,227E-02	6,233E-02	4,707E-03	4,712E-03	4,702E-03	4,707E-03
17	2,070E-02	2,072E-02	7,568E-02	7,577E-02	7,459E-02	7,468E-02	6,298E-03	6,304E-03	6,290E-03	6,297E-03
18	2,150E-02	2,151E-02	8,663E-02	8,673E-02	8,567E-02	8,576E-02	8,153E-03	8,160E-03	8,138E-03	8,146E-03
19	1,825E-02	1,826E-02	8,027E-02	8,036E-02	7,960E-02	7,969E-02	8,397E-03	8,402E-03	8,371E-03	8,378E-03
20	2,312E-02	2,313E-02	1,155E-01	1,156E-01	1,150E-01	1,151E-01	1,389E-02	1,389E-02	1,381E-02	1,383E-02
21	9,742E-03	9,742E-03	5,615E-02	5,623E-02	5,609E-02	5,617E-02	6,964E-03	6,965E-03	6,889E-03	6,896E-03

Tabela 8.7: Fluxo Total de Grupo $\phi_g(x_r)$, $r = 0, 1, 2, 3$ e 4, para $N = 31$

g	$x_0 = 0, 0, 0, 0, 0$		$x = 2, 0 \text{ cm}$		$x_2 = 13, 25 \text{ cm}$		$x_3 = 25, 25 \text{ cm}$		$x_4 = 31, 55 \text{ cm}$	
	P_N	S_{N+}	P_N	S_{N+}	P_N	S_{N+}	P_N	S_{N+}	P_N	S_{N+}
1	1,516E-01	5,516E-01	5,814E-02	5,814E-02	5,194E-02	5,194E-02	1,901E-03	1,901E-03	1,901E-03	1,901E-03
2	1,285E-01	2,285E-01	3,978E-02	3,978E-02	3,568E-02	3,568E-02	1,523E-03	1,523E-03	1,523E-03	1,523E-03
3	6,146E-02	6,146E-02	3,931E-02	3,930E-02	3,499E-02	3,499E-02	1,443E-03	1,443E-03	1,443E-03	1,443E-03
4	4,071E-02	4,071E-02	3,127E-02	3,127E-02	2,783E-02	2,783E-02	9,828E-04	9,828E-04	9,828E-04	9,827E-04
5	1,882E-02	1,882E-02	1,586E-02	1,586E-02	1,416E-02	1,416E-02	4,685E-04	4,685E-04	4,685E-04	4,681E-04
6	1,921E-02	1,921E-02	1,725E-02	1,725E-02	1,466E-02	1,466E-02	5,002E-04	5,002E-04	5,002E-04	5,002E-04
7	1,807E-02	1,807E-02	2,242E-02	2,242E-02	1,998E-02	1,998E-02	5,098E-04	5,098E-04	5,098E-04	5,098E-04
8	2,083E-02	2,083E-02	2,819E-02	2,819E-02	2,729E-02	2,729E-02	6,791E-04	6,791E-04	6,791E-04	6,790E-04
9	1,359E-02	1,359E-02	2,178E-02	2,178E-02	2,120E-02	2,120E-02	5,080E-04	5,080E-04	5,080E-04	5,079E-04
10	1,733E-02	1,733E-02	3,305E-02	3,305E-02	3,226E-02	3,226E-02	7,651E-04	7,651E-04	7,650E-04	7,649E-04
11	6,357E-03	6,355E-03	1,327E-02	1,327E-02	1,296E-02	1,296E-02	3,077E-04	3,077E-04	3,077E-04	3,076E-04
12	7,410E-03	7,410E-03	1,661E-02	1,661E-02	1,624E-02	1,624E-02	3,878E-04	3,878E-04	3,877E-04	3,877E-04
13	4,695E-02	4,695E-02	1,142E-01	1,142E-01	1,110E-01	1,110E-01	6,559E-03	6,558E-03	6,555E-03	6,555E-03
14	2,524E-02	2,524E-02	7,153E-02	7,152E-02	6,992E-02	6,991E-02	4,516E-03	4,515E-03	4,512E-03	4,512E-03
15	1,336E-02	1,336E-02	4,074E-02	4,074E-02	3,991E-02	3,991E-02	2,741E-03	2,741E-03	2,739E-03	2,739E-03
16	1,903E-02	1,902E-02	6,334E-02	6,333E-02	6,223E-02	6,222E-02	4,704E-03	4,704E-03	4,699E-03	4,699E-03
17	2,069E-02	2,069E-02	7,563E-02	7,563E-02	7,454E-02	7,454E-02	6,295E-03	6,294E-03	6,286E-03	6,285E-03
18	2,149E-02	2,149E-02	8,657E-02	8,656E-02	8,561E-02	8,560E-02	8,149E-03	8,148E-03	8,132E-03	8,131E-03
19	1,824E-02	1,824E-02	8,020E-02	8,018E-02	7,953E-02	7,952E-02	8,393E-03	8,391E-03	8,363E-03	8,361E-03
20	2,311E-02	2,311E-02	1,154E-01	1,153E-01	1,149E-01	1,149E-01	1,388E-02	1,388E-02	1,380E-02	1,380E-02
21	9,741E-03	9,739E-03	5,612E-02	5,610E-02	5,606E-02	5,604E-02	6,963E-03	6,961E-03	6,879E-03	6,877E-03

Tabela 8.8: Corrente Total de Grupo $J_g(x_r)$, $r = 0, 1, 2, 3$ e 4, para $N = 7$

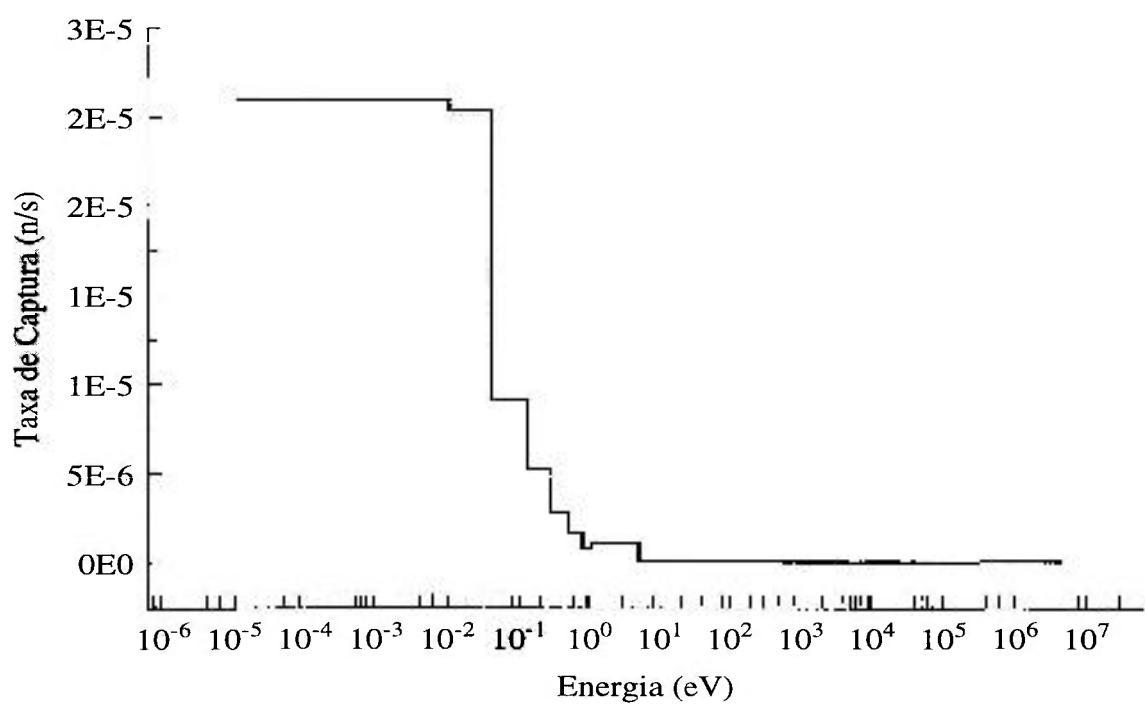
g	$x_0 = 0, 0$ cm		$x_1 = 12, 0$ cm		$x_2 = 13, 25$ cm		$x_3 = 28, 25$ cm		$x_4 = 31, 85$ cm	
	P_N	S_{N+1}	P_N	S_{N+1}	P_N	S_{N+1}	P_N	S_{N+1}	P_N	S_{N+1}
1	4,419E-01	4,436E-01	2,977E-02	2,981E-02	2,684E-02	2,688E-02	1,392E-03	1,393E-03	1,392E-03	1,393E-03
2	-5,964E-02	-6,040E-02	1,078E-02	1,078E-02	1,057E-02	1,058E-02	1,006E-03	1,008E-03	1,006E-03	1,008E-03
3	-2,885E-02	-2,910E-02	7,979E-03	7,984E-03	8,890E-03	8,895E-03	8,908E-04	8,924E-04	8,908E-04	8,924E-04
4	-2,041E-02	-2,054E-02	4,217E-03	4,220E-03	5,410E-03	5,411E-03	5,801E-04	5,812E-04	5,801E-04	5,812E-04
5	-9,843E-03	-9,892E-03	1,955E-03	1,957E-03	2,092E-03	2,092E-03	2,714E-04	2,718E-04	2,714E-04	2,718E-04
6	-1,034E-02	-1,037E-02	2,216E-03	2,219E-03	1,434E-03	1,433E-03	2,880E-04	2,884E-04	2,880E-04	2,884E-04
7	-9,963E-03	-9,992E-03	1,021E-03	1,021E-03	2,597E-03	2,601E-03	2,932E-04	2,935E-04	2,932E-04	2,935E-04
8	-1,170E-02	-1,173E-02	2,721E-03	2,724E-03	2,672E-03	2,675E-03	3,923E-04	3,927E-04	3,923E-04	3,927E-04
9	-7,702E-03	-7,719E-03	1,879E-03	1,880E-03	1,876E-03	1,877E-03	2,948E-04	2,950E-04	2,948E-04	2,950E-04
10	-9,883E-03	-9,904E-03	2,630E-03	2,633E-03	2,622E-03	2,624E-03	4,454E-04	4,458E-04	4,454E-04	4,458E-04
11	-3,634E-03	-3,642E-03	1,020E-03	1,021E-03	1,012E-03	1,013E-03	1,794E-04	1,795E-04	1,793E-04	1,795E-04
12	-4,243E-03	-4,253E-03	1,243E-03	1,245E-03	1,228E-03	1,229E-03	2,262E-04	2,265E-04	2,262E-04	2,264E-04
13	-2,643E-02	-2,650E-02	1,055E-02	1,056E-02	9,622E-03	9,635E-03	3,898E-03	3,905E-03	3,897E-03	3,904E-03
14	-1,417E-02	-1,420E-02	5,059E-03	5,065E-03	4,753E-03	4,759E-03	2,657E-03	2,662E-03	2,656E-03	2,661E-03
15	-7,511E-03	-7,526E-03	2,573E-03	2,576E-03	2,424E-03	2,427E-03	1,609E-03	1,612E-03	1,608E-03	1,611E-03
16	-1,071E-02	-1,073E-02	3,411E-03	3,415E-03	3,190E-03	3,193E-03	2,752E-03	2,756E-03	2,750E-03	2,755E-03
17	-1,168E-02	-1,170E-02	3,334E-03	3,338E-03	3,035E-03	3,038E-03	3,668E-03	3,675E-03	3,665E-03	3,672E-03
18	-1,216E-02	-1,217E-02	2,961E-03	2,964E-03	2,514E-03	2,516E-03	4,731E-03	4,738E-03	4,726E-03	4,733E-03
19	-1,034E-02	-1,035E-02	2,160E-03	2,161E-03	1,428E-03	1,428E-03	4,855E-03	4,862E-03	4,846E-03	4,853E-03
20	-1,315E-02	-1,316E-02	2,046E-03	2,047E-03	2,298E-04	2,268E-04	7,998E-03	8,007E-03	7,973E-03	7,981E-03
21	-5,556E-03	-5,558E-03	1,077E-03	1,080E-03	-8,807E-04	-8,845E-04	3,999E-03	4,002E-03	3,973E-03	3,976E-03

Tabela 8.9: Corrente Total de Grupo $J_g(x_r)$, $r = 0, 1, 2, 3$ e 4, para $N = 15$

g	$x_0 = 0, 0$ cm		$x_1 = 12, 0$ cm		$x_2 = 13, 25$ cm		$x_3 = 28, 25$ cm		$x_4 = 31, 85$ cm	
	P_N	S_{N+1}	P_N	S_{N+1}	P_N	S_{N+1}	P_N	S_{N+1}	P_N	S_{N+1}
1	4,395E-01	4,405E-01	2,975E-02	2,976E-02	2,681E-02	2,683E-02	1,390E-03	1,391E-03	1,390E-03	1,391E-03
2	-5,847E-02	-5,896E-02	1,076E-02	1,077E-02	1,055E-02	1,056E-02	1,004E-03	1,005E-03	1,004E-03	1,005E-03
3	-2,849E-02	-2,864E-02	7,963E-03	7,970E-03	8,877E-03	8,882E-03	8,886E-04	8,895E-04	8,886E-04	8,895E-04
4	-2,023E-02	-2,030E-02	4,205E-03	4,210E-03	5,404E-03	5,406E-03	5,788E-04	5,793E-04	5,788E-04	5,793E-04
5	-9,780E-03	-9,805E-03	1,950E-03	1,952E-03	2,090E-03	2,091E-03	2,708E-04	2,710E-04	2,708E-04	2,710E-04
6	-1,028E-02	-1,030E-02	2,209E-03	2,212E-03	1,434E-03	1,434E-03	2,875E-04	2,877E-04	2,875E-04	2,877E-04
7	-9,927E-03	-9,941E-03	1,021E-03	1,021E-03	2,591E-03	2,593E-03	2,929E-04	2,930E-04	2,929E-04	2,930E-04
8	-1,167E-02	-1,168E-02	2,715E-03	2,717E-03	2,667E-03	2,669E-03	3,920E-04	3,921E-04	3,920E-04	3,921E-04
9	-7,681E-03	-7,689E-03	1,876E-03	1,877E-03	1,873E-03	1,874E-03	2,944E-04	2,946E-04	2,944E-04	2,946E-04
10	-9,857E-03	-9,867E-03	2,626E-03	2,628E-03	2,617E-03	2,619E-03	4,448E-04	4,451E-04	4,448E-04	4,450E-04
11	-3,625E-03	-3,628E-03	1,018E-03	1,019E-03	1,010E-03	1,011E-03	1,791E-04	1,792E-04	1,791E-04	1,792E-04
12	-4,233E-03	-4,237E-03	1,241E-03	1,242E-03	1,225E-03	1,226E-03	2,259E-04	2,260E-04	2,259E-04	2,260E-04
13	-2,635E-02	-2,638E-02	1,053E-02	1,054E-02	9,607E-03	9,613E-03	3,888E-03	3,892E-03	3,887E-03	3,891E-03
14	-1,413E-02	-1,414E-02	5,051E-03	5,054E-03	4,746E-03	4,748E-03	2,650E-03	2,653E-03	2,649E-03	2,652E-03
15	-7,493E-03	-7,500E-03	2,569E-03	2,571E-03	2,421E-03	2,422E-03	1,605E-03	1,606E-03	1,604E-03	1,606E-03
16	-1,069E-02	-1,070E-02	3,406E-03	3,408E-03	3,186E-03	3,187E-03	2,745E-03	2,748E-03	2,743E-03	2,746E-03
17	-1,166E-02	-1,166E-02	3,330E-03	3,332E-03	3,032E-03	3,033E-03	3,660E-03	3,663E-03	3,657E-03	3,660E-03
18	-1,213E-02	-1,214E-02	2,959E-03	2,960E-03	2,513E-03	2,513E-03	4,720E-03	4,724E-03	4,715E-03	4,719E-03
19	-1,033E-02	-1,033E-02	2,158E-03	2,158E-03	1,430E-03	1,429E-03	4,846E-03	4,849E-03	4,836E-03	4,839E-03
20	-1,313E-02	-1,314E-02	2,043E-03	2,044E-03	2,359E-04	2,331E-04	7,985E-03	7,989E-03	7,960E-03	7,963E-03
21	-5,552E-03	-5,552E-03	1,072E-03	1,075E-03	-8,729E-04	-8,765E-04	3,995E-03	3,996E-03	3,969E-03	3,970E-03

Tabela 8.10: Corrente Total de Grupo $J_g(x_r)$, $r = 0, 1, 2, 3$ e 4, para $N = 31$

g	$x_0 = 0, 0$ cm		$x_1 = 12, 0$ cm		$x_2 = 13, 25$ cm		$x_3 = 28, 25$ cm		$x_4 = 31, 85$ cm	
	P_N	S_{N+1}	P_N	S_{N+1}	P_N	S_{N+1}	P_N	S_{N+1}	P_N	S_{N+1}
1	4,389E-01	4,389E-01	2,975E-02	2,975E-02	2,680E-02	2,680E-02	1,389E-03	1,389E-03	1,389E-03	1,389E-03
2	-5,816E-02	-5,816E-02	1,075E-02	1,075E-02	1,054E-02	1,054E-02	1,004E-03	1,003E-03	1,004E-03	1,003E-03
3	-2,841E-02	-2,841E-02	7,959E-03	7,959E-03	8,874E-03	8,874E-03	8,881E-04	8,881E-04	8,881E-04	8,881E-04
4	-2,019E-02	-2,019E-02	4,202E-03	4,202E-03	5,403E-03	5,403E-03	5,785E-04	5,784E-04	5,785E-04	5,784E-04
5	-9,767E-03	-9,766E-03	1,948E-03	1,948E-03	2,090E-03	2,090E-03	2,707E-04	2,707E-04	2,707E-04	2,707E-04
6	-1,027E-02	-1,027E-02	2,208E-03	2,208E-03	1,434E-03	1,434E-03	2,874E-04	2,874E-04	2,874E-04	2,874E-04
7	-9,920E-03	-9,920E-03	1,021E-03	1,021E-03	2,589E-03	2,589E-03	2,928E-04	2,928E-04	2,928E-04	2,928E-04
8	-1,166E-02	-1,166E-02	2,713E-03	2,713E-03	2,665E-03	2,665E-03	3,919E-04	3,918E-04	3,919E-04	3,918E-04
9	-7,677E-03	-7,677E-03	1,875E-03	1,875E-03	1,872E-03	1,872E-03	2,944E-04	2,944E-04	2,944E-04	2,944E-04
10	-9,852E-03	-9,852E-03	2,624E-03	2,624E-03	2,616E-03	2,616E-03	4,447E-04	4,447E-04	4,447E-04	4,447E-04
11	-3,623E-03	-3,623E-03	1,017E-03	1,017E-03	1,010E-03	1,010E-03	1,791E-04	1,790E-04	1,790E-04	1,790E-04
12	-4,231E-03	-4,231E-03	1,241E-03	1,241E-03	1,225E-03	1,225E-03	2,258E-04	2,258E-04	2,258E-04	2,258E-04
13	-2,633E-02	-2,633E-02	1,052E-02	1,052E-02	9,604E-03	9,603E-03	3,885E-03	3,885E-03	3,884E-03	3,884E-03
14	-1,412E-02	-1,412E-02	5,049E-03	5,049E-03	4,744E-03	4,743E-03	2,648E-03	2,648E-03	2,647E-03	2,647E-03
15	-7,489E-03	-7,489E-03	2,568E-03	2,568E-03	2,420E-03	2,420E-03	1,604E-03	1,604E-03	1,603E-03	1,603E-03
16	-1,069E-02	-1,069E-02	3,405E-03	3,405E-03	3,185E-03	3,185E-03	2,743E-03	2,743E-03	2,742E-03	2,742E-03
17	-1,165E-02	-1,165E-02	3,329E-03	3,329E-03	3,031E-03	3,031E-03	3,658E-03	3,658E-03	3,655E-03	3,655E-03
18	-1,213E-02	-1,213E-02	2,958E-03	2,958E-03	2,513E-03	2,513E-03	4,718E-03	4,717E-03	4,713E-03	4,712E-03
19	-1,032E-02	-1,032E-02	2,157E-03	2,157E-03	1,430E-03	1,430E-03	4,843E-03	4,842E-03	4,834E-03	4,833E-03
20	-1,313E-02	-1,313E-02	2,042E-03	2,041E-03	2,383E-04	2,384E-04	7,982E-03	7,980E-03	7,957E-03	7,954E-03
21	-5,551E-03	-5,550E-03	1,070E-03	1,070E-03	-8,701E-04	-8,700E-04	3,994E-03	3,993E-03	3,968E-03	3,967E-03

Figura 8.2 - Taxa de Captura de Nêutrons no Trifluoreto de Boro (BF_3)

8.2 Blindagem para um Conceito de Reator Rápido Experimental

Na Figura 8.3 é mostrado o modelo de uma blindagem unidimensional plana proposta para um conceito de reator rápido experimental do projeto REARA.¹⁸

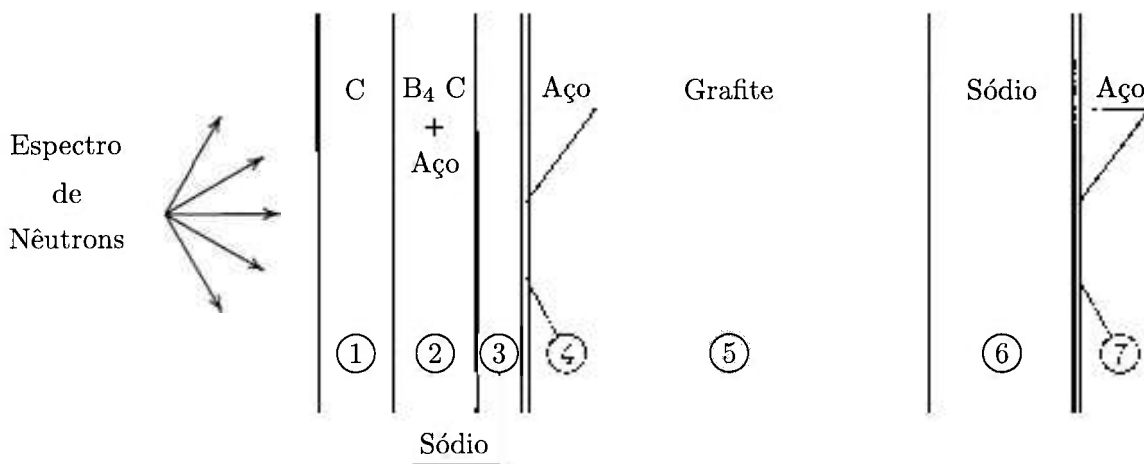


Figura 8.3 - Esquema Representativo Unidimensional para Análise de Blindagem do Reator Rápido Experimental.

As dimensões e composições das regiões, apresentadas na Tabela 8.11, são os primeiros valores considerados para iniciar o trabalho de elaboração das análises de blindagem de radiação para se poder interagir e iterar com as outras áreas afins, fornecendo e obtendo resultados para realimentar o projeto e finalmente chegar a uma concepção mais aprimorada.

A condição considerada no contorno da esquerda na Figura 8.3, que é a interface entre o núcleo e o refletor do reator experimental, é baseada num cálculo inicial do k -efetivo⁵⁶ em geometria unidimensional a 70 grupos do núcleo do reator. Neste cálculo foi verificado que o espectro da corrente de nêutrons nesta interface tem o mesmo comportamento do espectro de Watt ligeiramente suavizado. Então, por uma questão de comodidade, foi utilizado o espectro de Watt⁸ (Figura 8.4) para definir o fluxo angular isotrópico incidente à esquerda, $L(\mu)$, da primeira blindagem radial, como a condição de contorno necessária para resolver o problema de transporte de nêutrons na blindagem em 199 grupos e da radiação gama produzida em 42 grupos.

Tabela 8.11: Dimensões (cm) e Composições (% volume) das Regiões

Identificação	Dimensão	Sódio	Aço	Grafite	Aço+B ₄ C
Região 1 (Refletor)	16,85		5,40	94,60	
Região 2 (Blind. Removível)	17,73	20,00			80,00
Região 3 (Sódio)	34,00	100,00			
Região 4 (Tambor do Núcleo)	1,25		100,00		
Região 5 (Grafite)	67,50			100,00	
Região 6 (Sódio)	30,00	100,00			
Região 7 (Tanque do Reator)	5,08		100,00		

O objetivo deste cálculo inicial realizado com o código ANISN foi o de gerar as seções de choque macroscópicas nêutrons-gama acopladas e condensadas para 21 grupos de nêutrons, sendo 12 grupos rápidos e 9 grupos térmicos, e 4 grupos de gama acoplados ($NUS = 13$). A condição de contorno à direita é $\mathbf{R}(\mu) = \mathbf{0}$.

A biblioteca de seções de choque de grupos finos utilizada é a VITAMIN-B6⁷² produzida para aplicações em transporte de radiação. A estrutura de grupos de nêutrons na faixa térmica, a qual compreende 36 grupos para cobrir a faixa de energia de 10^{-5} eV até 5,043 eV, é mais refinada porque experiências obtidas com as bibliotecas anteriores para aplicações de nêutrons rápidos indicaram que poderia haver melhorias nos resultados (ver Referência 72). Os limites dos grupos na estrutura de grupos finos e correspondentes grupos largos podem ser observados no Apêndice 9. A ordem de espalhamento usada tanto para nêutrons como para radiação gama é $\mathcal{L} = 7$ para todos os núclídeos do problema.

Para que fosse permitido gerar as constantes de grupo em computadores de pequeno porte a partir da biblioteca VITAMIN-B6 foram adotadas algumas simplificações para adequar o programa ANISN-W⁶⁹ às exigências de memória e precisão para o cálculo final das seções de choque macroscópicas. No lugar do aço foi utilizado o ferro, o grafite foi representado pelo carbono comum e nas demais regiões apenas os

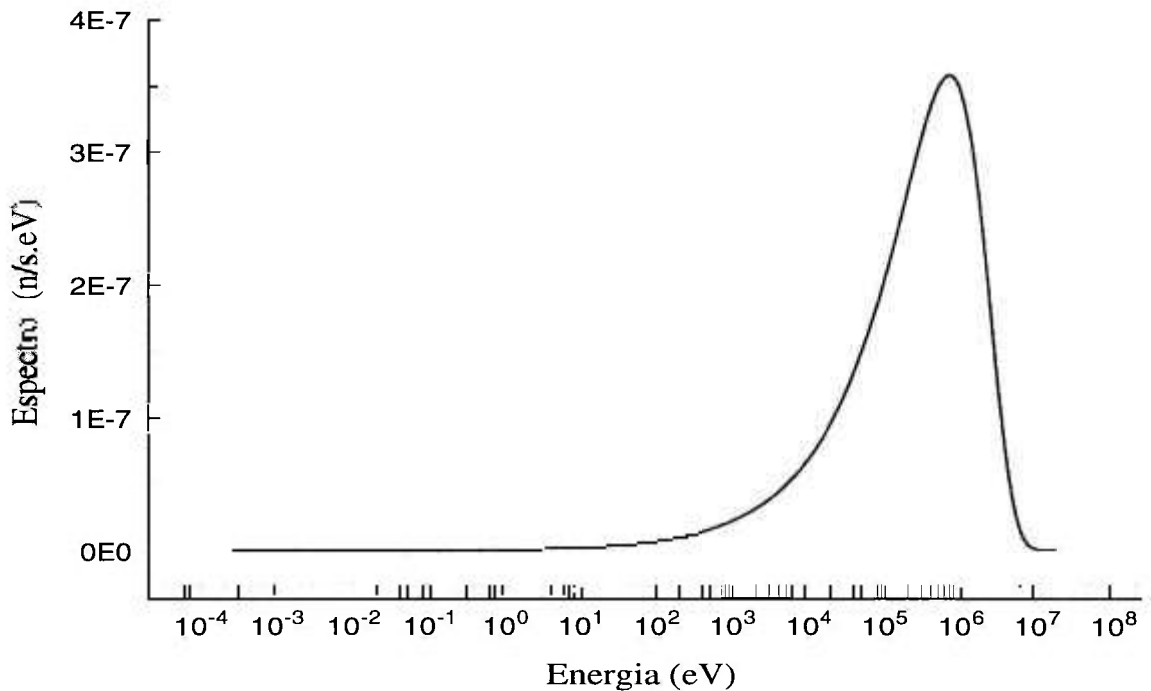


Figura 8.4 - Espectro de Nêutrons Utilizado para Definir o Fluxo Angular Incidente na Blindagem do Reator Rápido Experimental

elementos principais foram considerados deixando os elementos estruturais para posteriores cálculos em máquinas mais potentes e precisas. Como o propósito principal é testar as metodologias e ter como ganho adicional uma idéia preliminar dos valores dos fluxos angulares emergentes à direita da última região e dos fluxos e correntes totais nas interfaces das regiões, as aproximações não minimizam a importância do trabalho. Na Tabela 8.12 são apresentadas as densidades atômicas dos elementos considerados para cada região.

Na Figura 8.5 é mostrado um diagrama de fluxo auto-explicativo para a utilização de programas de pós-processamento da biblioteca de grupos finos. São módulos do sistema AMPX^{34,70} que formatam, organizam e finalmente caracterizam uma biblioteca de trabalho tornando-a dependente do problema em questão. O código ANISN-AF é uma versão modificada do código ANISN-W para ampliar a capacidade do código para além de 241 grupos de energia e fornecer arquivos de saída específicos para o programa baseado nos métodos P_N acoplados. A versão ANISN-AF resolve o problema usando as seções de choque microscópicas nêutrons-gama acopladas preparadas pelo programa NITAWL, calcula as seções de choque macroscópicas nêutrons-gama

Tabela 8.12: Densidades Atômicas [átomos/(barn.cm)] dos Elementos

Identificação	Carbono	Boro-10	Sódio	Ferro
Região 1 (Refletor)	2,1305E-02			
Região 2 (Blind. Removível)	1,5671E-02	1,2394E-02		
Região 3 (Sódio)			2,2521E-02	
Região 4 (Tambor do Núcleo)				5,3231E-02
Região 5 (Grafite)	8,0233E-02			
Região 6 (Sódio)			2,2521E-02	
Região 7 (Tanque do Reator)				5,3231E-02

condensadas para cada região e as fornece diretamente aos códigos ANISN-W e ao programa baseado nos métodos P_N acoplados.

Uma vez determinado o conjunto das seções de choque macroscópicas, decidiu-se resolver o problema de transporte através das 7 regiões para várias ordens N das aproximações P_N e S_{N+1} e, no caso desta última, com o número fixo de 1061 posições espaciais. Para baixos valores de N foi verificado que a maior diferença obtida entre os resultados P_N e S_{N+1} ocorre no valor da corrente total na interface entre as regiões de sódio e ferro ($r = 6$) no grupo 22 correspondente ao primeiro grupo de energia dos raios gama e, como exemplo, para $N = 15$ vale 46%. Curiosamente, para $N = 15$, a segunda maior diferença é aproximadamente 42 vezes menor e também ocorre no primeiro grupo de energia da radiação gama mas na interface entre as regiões de ferro e grafite ($r = 4$). Para analisar o comportamento do máximo desvio percentual obtido entre os dois métodos com relação a ordem de aproximação N , adotou-se como referência os resultados do método P_N para $N = 63$. Não foi possível gerar resultados para S_{64} com o número de pontos espaciais considerados no ANISN-W devido às exigências de memória. Os comportamentos do tempo de processamento e do desvio percentual máximo para cada ordem estão apresentados na Tabela 8.13. Observa-se que, embora o máximo desvio percentual para baixos valores de N seja alto, a convergência para os valores de P_{63} acontece coerentemente para ambos os métodos. Quanto aos tempos de

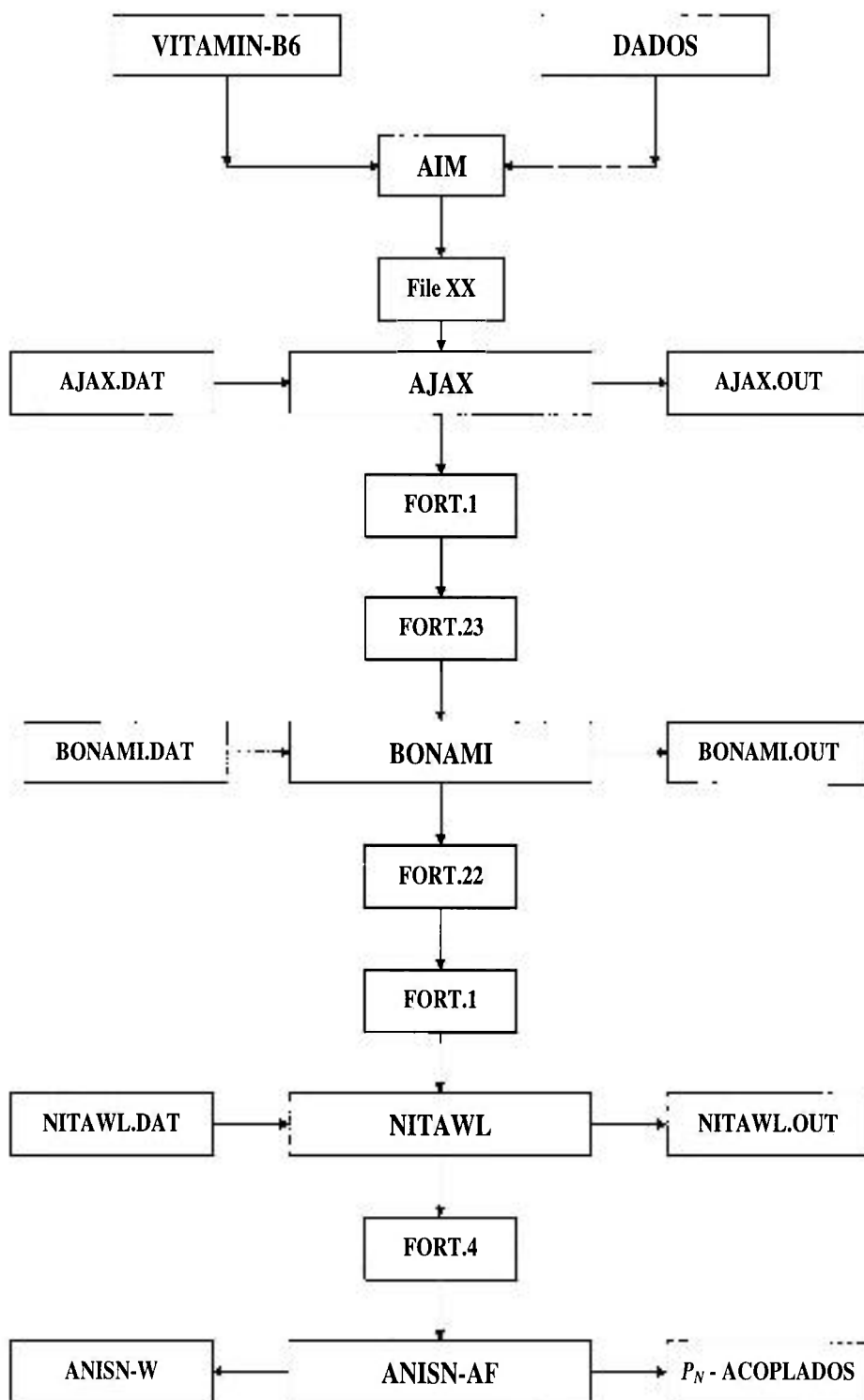


Figura 8.5 - Diagrama de Blocos para os Módulos do Sistema AMPX

processamento, para valores de N menores do que 31, nota-se que os métodos P_N acoplados são bem mais rápidos para este problema. É necessário mencionar que, embora se trate de um problema relativamente grande é menos moderador do que o anterior, e a discretização espacial adotada pode ser considerada um tanto quanto grosseira para o método das ordenadas discretas. Apesar disso, verificou-se ser suficiente, uma vez que os resultados S_{N+1} mostraram que tendem a convergir para os resultados P_N cuja precisão independe de discretização espacial. Os resultados mostrados nas Tabelas 8.14 a 8.17 são para os fluxos e correntes totais nas interfaces das regiões, com $N = 47$. Pode ser notado que a maior diferença entre os métodos está abaixo de 0,19% ($r = 2$ e grupo 7) para os valores dos fluxos e abaixo de 0,38% ($r = 0$ e grupo 17) para os valores das correntes.

Na Tabela 8.18 são apresentados, para $N = 47$, os fluxos angulares emergentes à direita do tanque do reator onde pode ser observado que a máxima diferença percentual entre os métodos situa-se abaixo de 0,16%.

A evolução da corrente parcial de nêutrons na direção positiva através das blindagens do reator é mostrada nas Figuras 8.6, 8.7 e 8.8. A curva definida por $r = 0$, é a corrente incidente na superfície esquerda da primeira blindagem para o conceito de reator rápido experimental. Na Figura 8.8, as correntes nas interfaces $r = 5$ e 6 são mostradas novamente para facilitar a visualização dos valores das correntes incidindo na e emergindo da penúltima blindagem considerada. Nota-se que as blindagens adotadas não permitem que nêutrons rápidos atinjam o tanque do reator.

Tabela 8.13: Tempos de Processamento* e Desvios Percentuais Máximos

N	P_N		S_{N+1}	
	Tempo (s)	Máx. Desvio (%)	Tempo (s)	Max. Desvio (%)
7	34,8	65,9	554,9	69,9
15	158,6	23,2	652,8	47,4
31	960,0	3,9	820,8	4,6
47	2739,7	1,2	1215,0	1,3
63	6338,2	—	—	—

*Pentium II - 350 MHz - 512 Mbytes RAM

Tabela 8.14: Fluxo Total de Grupo $\phi_g(x_r)$, $r = 0, 1, 2$ e 3 , para $N = 47$

g	$x_0 = 0, 0$ cm		$x_1 = 16, 85$ cm		$x_2 = 34, 58$ cm		$x_3 = 68, 58$ cm	
	P_N	S_{N+1}	P_N	S_{N+1}	P_N	S_{N+1}	P_N	S_{N+1}
1	1,261E-03	1,261E-03	4,460E-04	4,460E-04	1,846E-04	1,846E-04	5,044E-05	5,044E-05
2	9,016E-01	9,016E-01	3,523E-01	3,523E-01	1,432E-01	1,432E-01	3,808E-02	3,808E-02
3	1,407E+00	1,407E+00	6,462E-01	6,462E-01	2,946E-01	2,946E-01	8,560E-02	8,559E-02
4	1,736E+00	1,736E+00	9,582E-01	9,582E-01	4,050E-01	4,050E-01	1,660E-01	1,660E-01
5	1,368E+00	1,368E+00	7,074E-01	7,074E-01	2,911E-01	2,912E-01	1,304E-01	1,304E-01
6	1,326E+00	1,326E+00	9,056E-01	9,056E-01	4,082E-01	4,082E-01	2,379E-01	2,379E-01
7	8,119E-01	8,120E-01	5,196E-01	5,196E-01	2,973E-01	2,973E-01	2,868E-01	2,868E-01
8	4,306E-01	4,306E-01	2,070E-01	2,070E-01	1,160E-01	1,160E-01	2,680E-01	2,679E-01
9	1,729E-01	1,728E-01	4,588E-02	4,586E-02	4,137E-02	4,136E-02	1,875E-01	1,875E-01
10	5,787E-02	5,787E-02	2,090E-02	2,090E-02	4,370E-02	4,369E-02	1,745E-01	1,744E-01
11	1,701E-02	1,701E-02	5,195E-03	5,194E-03	9,750E-03	9,747E-03	4,697E-02	4,696E-02
12	1,053E-02	1,053E-02	3,358E-03	3,357E-03	7,794E-03	7,790E-03	3,918E-02	3,918E-02
13	5,847E-03	5,847E-03	1,881E-03	1,880E-03	7,690E-03	7,684E-03	4,035E-02	4,034E-02
14	3,324E-03	3,324E-03	8,567E-04	8,562E-04	2,815E-03	2,812E-03	1,534E-02	1,534E-02
15	2,849E-03	2,849E-03	7,953E-04	7,947E-04	1,419E-03	1,417E-03	7,898E-03	7,896E-03
16	2,624E-03	2,624E-03	8,109E-04	8,098E-04	1,935E-03	1,932E-03	1,117E-02	1,117E-02
17	1,961E-03	1,960E-03	6,082E-04	6,071E-04	2,261E-03	2,257E-03	1,344E-02	1,344E-02
18	1,447E-03	1,447E-03	4,301E-04	4,294E-04	3,402E-03	3,396E-03	2,282E-02	2,282E-02
19	9,869E-04	9,868E-04	2,884E-04	2,880E-04	9,034E-03	9,024E-03	7,853E-02	7,852E-02
20	4,138E-04	4,138E-04	8,228E-05	8,220E-05	4,551E-03	4,547E-03	4,776E-02	4,776E-02
21	1,185E-04	1,185E-04	1,259E-05	1,259E-05	3,397E-04	3,395E-04	4,641E-03	4,639E-03
22	3,733E-03	3,733E-03	5,808E-03	5,808E-03	8,149E-03	8,149E-03	3,298E-02	3,299E-02
23	1,095E-02	1,095E-02	1,617E-02	1,617E-02	2,335E-02	2,335E-02	5,691E-02	5,691E-02
24	3,987E-01	3,987E-01	1,099E+00	1,099E+00	9,577E-01	9,560E-01	1,890E-01	1,890E-01
25	2,987E-01	2,987E-01	1,408E+00	1,408E+00	1,382E+00	1,382E+00	1,933E-01	1,934E-01

Tabela 8.15: Fluxo Total de Grupo $\phi_g(x_r)$, $r = 4, 5, 6$ e 7 , para $N = 47$

g	$x_4 = 69, 83 \text{ cm}$		$x_5 = 137, 33 \text{ cm}$		$x_6 = 167, 33 \text{ cm}$		$x_7 = 172, 41 \text{ cm}$	
	P_N	S_{N+1}	P_N	S_{N+1}	P_N	S_{N+1}	P_N	S_{N+1}
1	4,397E-05	4,397E-05	3,895E-08	3,895E-08	1,438E-08	1,438E-08	6,565E-09	6,564E-09
2	3,227E-02	3,227E-02	6,748E-06	6,743E-06	2,173E-06	2,171E-06	9,878E-07	9,871E-07
3	7,870E-02	7,870E-02	2,027E-05	2,025E-05	5,442E-06	5,437E-06	2,666E-06	2,664E-06
4	1,509E-01	1,509E-01	3,063E-05	3,060E-05	1,112E-05	1,111E-05	5,306E-06	5,301E-06
5	1,223E-01	1,223E-01	2,561E-05	2,559E-05	8,088E-06	8,081E-06	3,909E-06	3,906E-06
6	2,175E-01	2,175E-01	4,694E-05	4,691E-05	1,698E-05	1,697E-05	6,623E-06	6,618E-06
7	2,700E-01	2,701E-01	8,839E-05	8,834E-05	3,184E-05	3,182E-05	9,878E-06	9,872E-06
8	2,758E-01	2,757E-01	3,024E-04	3,022E-04	4,219E-05	4,214E-05	1,472E-05	1,470E-05
9	1,835E-01	1,835E-01	4,516E-04	4,511E-04	1,393E-04	1,391E-04	2,049E-05	2,047E-05
10	1,936E-01	1,935E-01	1,316E-03	1,315E-03	7,207E-04	7,201E-04	1,032E-04	1,032E-04
11	5,852E-02	5,850E-02	6,389E-04	6,385E-04	3,718E-04	3,716E-04	5,126E-05	5,123E-05
12	4,914E-02	4,913E-02	7,501E-04	7,498E-04	4,215E-04	4,212E-04	5,642E-05	5,640E-05
13	5,155E-02	5,154E-02	1,150E-03	1,150E-03	6,054E-04	6,051E-04	7,707E-05	7,704E-05
14	2,017E-02	2,017E-02	5,435E-04	5,433E-04	2,787E-04	2,786E-04	3,370E-05	3,369E-05
15	1,059E-02	1,058E-02	3,186E-04	3,184E-04	1,548E-04	1,547E-04	1,759E-05	1,758E-05
16	1,524E-02	1,523E-02	5,352E-04	5,350E-04	2,415E-04	2,414E-04	2,627E-05	2,626E-05
17	1,836E-02	1,836E-02	1,151E-03	1,151E-03	4,446E-04	4,445E-04	4,461E-05	4,460E-05
18	3,328E-02	3,328E-02	9,168E-03	9,167E-03	2,745E-03	2,745E-03	2,059E-04	2,059E-04
19	1,355E-01	1,355E-01	6,272E-02	6,271E-02	1,542E-02	1,542E-02	8,831E-04	8,825E-04
20	9,481E-02	9,480E-02	4,718E-02	4,717E-02	9,003E-03	9,002E-03	3,814E-04	3,811E-04
21	1,182E-02	1,182E-02	6,146E-03	6,146E-03	7,500E-04	7,500E-04	1,820E-05	1,817E-05
22	3,327E-02	3,327E-02	5,366E-03	5,366E-03	6,293E-03	6,293E-03	2,121E-03	2,121E-03
23	4,677E-02	4,677E-02	2,412E-02	2,412E-02	1,689E-02	1,689E-02	4,926E-03	4,926E-03
24	1,316E-01	1,316E-01	4,110E-02	4,109E-02	3,179E-02	3,179E-02	7,147E-03	7,147E-03
25	1,133E-01	1,132E-01	7,158E-02	7,157E-02	2,469E-02	2,468E-02	8,438E-04	8,437E-04

Tabela 8.16: Corrente Total de Grupo $J_g(x, \tau)$, $\tau = 0, 1, 2$ e 3, para $N = 47$

g	$x_1 = 0,0 \text{ cm}$		$x_1 = 0,85 \text{ cm}$		$x_2 = 34,58 \text{ cm}$		$x_3 = 68,58 \text{ cm}$	
	P_N	S_{N-1}	P_N	S_{N-1}	P_N	S_{N-1}	P_N	S_{N-1}
1	4,916E-04	4,916E-04	2,239E-04	2,238E-04	9,419E-05	9,419E-05	2,315E-05	2,315E-05
2	2,953E-01	2,953E-01	1,606E-01	1,606E-01	6,206E-02	6,206E-02	1,742E-02	1,742E-02
3	2,951E-01	2,951E-01	1,661E-01	1,661E-01	7,053E-02	7,053E-02	2,006E-02	2,007E-02
4	1,598E-01	1,598E-01	2,115E-01	2,115E-01	4,013E-02	4,013E-02	3,016E-02	3,016E-02
5	1,777E-01	1,777E-01	1,416E-01	1,416E-01	2,230E-02	2,230E-02	1,935E-02	1,935E-02
6	1,639E-02	1,638E-02	1,570E-01	1,570E-01	8,780E-03	8,782E-03	3,150E-02	3,150E-02
7	3,778E-02	3,778E-02	7,763E-02	7,763E-02	1,384E-02	1,385E-02	1,139E-02	1,139E-02
8	1,476E-02	1,476E-02	5,163E-02	5,163E-02	2,090E-02	2,088E-02	6,207E-03	6,222E-03
9	-2,913E-03	-2,902E-03	2,186E-02	2,185E-02	-1,984E-02	-1,984E-02	-2,833E-03	-2,836E-03
10	7,022E-03	7,023E-03	1,044E-02	1,044E-02	2,248E-02	2,247E-02	9,176E-03	9,174E-03
11	3,062E-03	3,062E-03	2,891E-03	2,891E-03	-5,408E-03	-5,407E-03	-4,560E-03	-4,568E-03
12	1,569E-03	1,570E-03	1,860E-03	1,860E-03	-4,384E-03	-4,384E-03	-3,906E-03	-3,906E-03
13	8,061E-04	8,062E-04	1,046E-03	1,046E-03	-4,375E-03	-4,375E-03	-4,243E-03	-4,243E-03
14	8,028E-04	8,028E-04	5,059E-04	5,060E-04	-1,614E-03	-1,614E-03	1,737E-03	1,737E-03
15	5,366E-04	5,366E-04	4,592E-04	4,592E-04	8,154E-04	8,154E-04	9,113E-04	9,111E-04
16	3,465E-04	3,467E-04	4,556E-04	4,558E-04	-1,116E-03	-1,116E-03	-1,380E-03	-1,379E-03
17	2,619E-04	2,621E-04	3,418E-04	3,420E-04	-1,308E-03	-1,308E-03	-1,648E-03	-1,648E-03
18	2,067E-04	2,068E-04	2,434E-04	2,435E-04	1,990E-03	1,990E-03	-3,213E-03	-3,213E-03
19	1,275E-04	1,275E-04	1,632E-04	1,633E-04	-5,406E-03	-5,407E-03	1,536E-02	1,536E-02
20	1,006E-04	1,006E-04	4,980E-05	4,982E-05	2,744E-03	2,744E-03	1,064E-02	1,064E-02
21	4,218E-05	4,218E-05	8,309E-06	8,309E-06	-2,013E-04	2,013E-04	-1,044E-03	1,044E-03
22	-2,313E-03	-2,313E-03	-3,004E-03	-3,004E-03	-4,223E-03	-4,223E-03	-6,860E-03	-6,861E-03
23	-6,136E-03	-6,135E-03	-6,085E-03	-6,084E-03	-1,030E-02	-1,030E-02	3,186E-03	3,184E-03
24	-2,134E-01	-2,135E-01	-2,226E-01	-2,226E-01	2,629E-01	2,628E-01	5,352E-02	5,351E-02
25	-1,685E-01	-1,685E-01	-1,382E-01	-1,382E-01	1,247E-01	1,247E-01	6,136E-02	6,138E-02

Tabela 8.17: Corrente Total de Grupo $J_g(x_r)$, $r = 4, 5, 6$ e 7 , para $N = 47$

g	$x_4 = 63,83 \text{ cm}$		$x_5 = 137,33 \text{ cm}$		$x_6 = 167,33 \text{ cm}$		$x_7 = 172,41 \text{ cm}$	
	P_N	S_{N+1}	P_N	S_{N+1}	P_N	S_{N+1}	P_N	S_{N+1}
1	1,976E-05	1,976E-05	1,762E-08	1,761E-08	7,160E-09	7,160E-09	4,435E-09	4,434E-09
2	1,523E-02	1,523E-02	3,031E-06	3,029E-06	1,052E-06	1,051E-06	6,662E-07	6,657E-07
3	1,904E-02	1,904E-02	5,575E-06	5,570E-06	1,857E-06	1,855E-06	1,619E-06	1,618E-06
4	3,176E-02	3,176E-02	3,745E-06	3,742E-06	2,757E-06	2,755E-06	3,042E-06	3,039E-06
5	1,825E-02	1,826E-02	3,057E-06	3,055E-06	2,321E-06	2,319E-06	2,275E-06	2,273E-06
6	2,921E-02	2,921E-02	4,569E-06	4,566E-06	4,376E-06	4,373E-06	3,890E-06	3,887E-06
7	1,592E-02	1,594E-02	1,040E-05	1,040E-05	4,945E-06	4,942E-06	5,663E-06	5,659E-06
8	-7,088E-03	-7,102E-03	4,230E-05	4,228E-05	8,626E-06	8,615E-06	8,539E-06	8,528E-06
9	7,788E-04	7,817E-04	2,787E-05	2,785E-05	2,191E-05	2,189E-05	1,207E-05	1,205E-05
10	-8,475E-03	-8,474E-03	1,185E-04	1,184E-04	7,695E-05	7,690E-05	5,993E-05	5,987E-05
11	-4,668E-03	-4,667E-03	5,170E-05	5,167E-05	3,737E-05	3,715E-05	2,972E-05	2,970E-05
12	-4,056E-03	4,056E-03	6,792E-05	6,790E-05	4,365E-05	4,362E-05	3,276E-05	3,274E-05
13	-4,684E-03	4,684E-03	1,152E-04	1,152E-04	6,770E-05	6,767E-05	4,484E-05	4,482E-05
14	-2,067E-03	2,067E-03	5,409E-05	5,407E-05	3,309E-05	3,307E-05	1,965E-05	1,964E-05
15	-1,190E-03	1,190E-03	3,432E-05	3,431E-05	1,993E-05	1,992E-05	1,028E-05	1,028E-05
16	-1,780E-03	-1,780E-03	6,460E-05	6,458E-05	3,268E-05	3,267E-05	1,541E-05	1,540E-05
17	-2,144E-03	2,144E-03	1,713E-04	1,713E-04	6,412E-05	6,411E-05	2,632E-05	2,631E-05
18	-4,742E-03	4,742E-03	1,555E-03	1,555E-03	5,066E-04	5,066E-04	1,238E-04	1,237E-04
19	-2,672E-02	2,672E-02	1,158E-02	1,158E-02	3,363E-03	3,363E-03	5,382E-04	5,378E-04
20	-2,217E-02	-2,217E-02	1,004E-02	1,003E-02	2,230E-03	2,230E-03	2,339E-04	2,337E-04
21	-3,387E-03	-3,387E-03	1,512E-03	1,512E-03	2,114E-04	2,114E-04	1,100E-05	1,099E-05
22	1,139E-02	1,139E-02	-1,672E-03	1,672E-03	3,508E-05	3,507E-05	1,227E-03	1,227E-03
23	1,553E-02	1,553E-02	7,201E-03	7,200E-03	5,394E-03	5,394E-03	3,091E-03	3,091E-03
24	4,620E-02	4,620E-02	1,117E-02	1,017E-02	6,659E-03	6,659E-03	4,217E-03	4,217E-03
25	-1,803E-02	-1,804E-02	1,188E-03	1,191E-03	6,776E-03	6,774E-03	4,563E-04	4,560E-04

Tabela 8.18: Fluxo Angular Emergente à Direita da Blindagem do Reator para $N = 47$

g	$\mu = 0, 0323802$		$\mu = 0, 2873625$		$\mu = 0, 5772247$		$\mu = 0, 9058791$		$\mu = 0, 9987710$	
	P_N	S_{N+1}	P_N	S_{N+1}	P_N	S_{N+1}	P_N	S_{N+1}	P_N	S_{N+1}
1	1,856E-09	1,856E-09	3,381E-09	3,381E-09	6,184E-09	6,183E-09	1,357E-08	1,356E-08	1,812E-08	1,812E-08
2	2,815E-07	2,814E-07	5,100E-07	5,096E-07	9,435E-07	9,429E-07	2,018E-06	2,016E-06	2,745E-06	2,743E-06
3	1,227E-06	1,226E-06	1,913E-06	1,912E-06	2,778E-06	2,776E-06	4,208E-06	4,204E-06	4,792E-06	4,788E-06
4	2,990E-06	2,987E-06	4,376E-06	4,372E-06	5,642E-06	5,637E-06	7,205E-06	7,199E-06	7,721E-06	7,714E-06
5	2,069E-06	2,067E-06	3,114E-06	3,111E-06	4,192E-06	4,189E-06	5,475E-06	5,471E-06	5,880E-06	5,874E-06
6	3,396E-06	3,393E-06	5,138E-06	5,133E-06	7,133E-06	7,127E-06	9,465E-06	9,457E-06	1,017E-05	1,016E-05
7	5,553E-06	5,549E-06	8,148E-06	8,142E-06	1,057E-05	1,056E-05	1,336E-05	1,335E-05	1,423E-05	1,422E-05
8	8,004E-06	7,994E-06	1,181E-05	1,180E-05	1,567E-05	1,565E-05	2,057E-05	2,054E-05	2,218E-05	2,216E-05
9	1,059E-05	1,058E-05	1,579E-05	1,577E-05	2,180E-05	2,177E-05	2,974E-05	2,970E-05	3,223E-05	3,219E-05
10	5,560E-05	5,555E-05	8,246E-05	8,239E-05	1,107E-04	1,106E-04	1,438E-04	1,437E-04	1,537E-04	1,536E-04
11	2,770E-05	2,768E-05	4,106E-05	4,103E-05	5,501E-05	5,496E-05	7,114E-05	7,108E-05	7,589E-05	7,583E-05
12	3,037E-05	3,036E-05	4,506E-05	4,504E-05	6,050E-05	6,047E-05	7,860E-05	7,856E-05	8,399E-05	8,395E-05
13	4,126E-05	4,124E-05	6,123E-05	6,120E-05	8,249E-05	8,245E-05	1,081E-04	1,081E-04	1,159E-04	1,158E-04
14	1,795E-05	1,794E-05	2,664E-05	2,663E-05	3,601E-05	3,599E-05	4,756E-05	4,754E-05	5,113E-05	5,111E-05
15	9,297E-06	9,293E-06	1,380E-05	1,380E-05	1,875E-05	1,874E-05	2,504E-05	2,503E-05	2,703E-05	2,702E-05
16	1,377E-05	1,376E-05	2,047E-05	2,046E-05	2,795E-05	2,794E-05	3,773E-05	3,771E-05	4,089E-05	4,087E-05
17	2,301E-05	2,300E-05	3,428E-05	3,426E-05	4,729E-05	4,727E-05	6,515E-05	6,512E-05	7,114E-05	7,112E-05
18	1,007E-04	1,007E-04	1,508E-04	1,508E-04	2,150E-04	2,149E-04	3,175E-04	3,173E-04	3,553E-04	3,552E-04
19	4,159E-04	4,156E-04	6,243E-04	6,239E-04	9,080E-04	9,074E-04	1,418E-03	1,417E-03	1,621E-03	1,620E-03
20	1,780E-04	1,779E-04	2,655E-04	2,653E-04	3,871E-04	3,867E-04	6,259E-04	6,254E-04	7,290E-04	7,283E-04
21	9,149E-06	9,138E-06	1,316E-05	1,315E-05	1,841E-05	1,838E-05	2,899E-05	2,894E-05	3,396E-05	3,391E-05
22	6,015E-04	6,011E-04	1,951E-03	1,951E-03	2,507E-03	2,507E-03	2,665E-03	2,665E-03	2,712E-03	2,712E-03
23	1,035E-03	1,035E-03	3,281E-03	3,280E-03	6,119E-03	6,119E-03	7,441E-03	7,441E-03	7,634E-03	7,634E-03
24	3,644E-03	3,644E-03	5,458E-03	5,458E-03	7,666E-03	7,666E-03	1,035E-02	1,035E-02	1,106E-02	1,106E-02
25	6,219E-04	6,217E-04	7,691E-04	7,689E-04	8,769E-04	8,766E-04	1,006E-03	1,006E-03	1,056E-03	1,055E-03

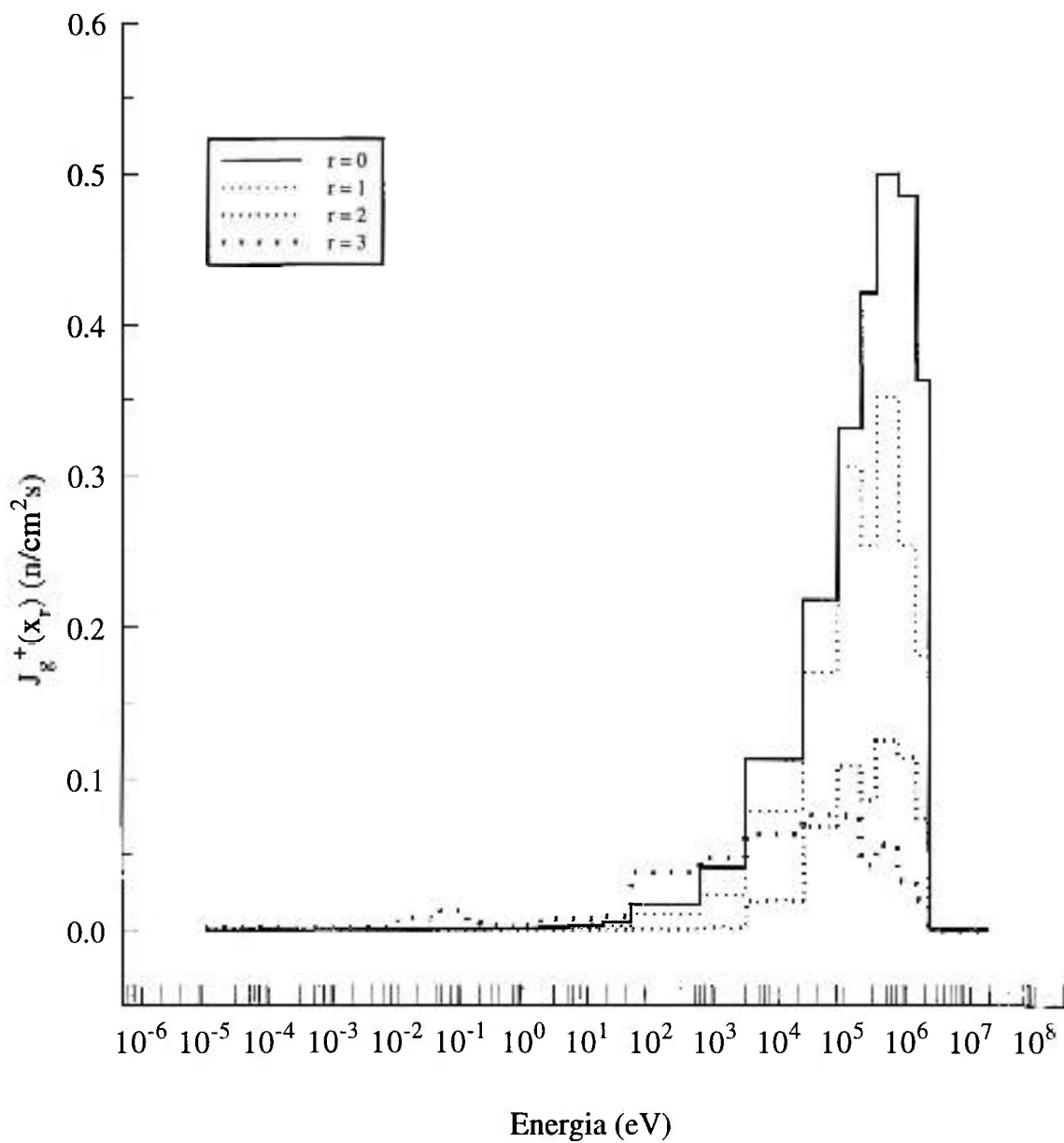


Figura 8.6 - Corrente Parcial de Nêutrons Incidente em $r = 0$ e nas Interfaces $r = 1, 2$ e 3 da Blindagem do Reator Rápido Experimental

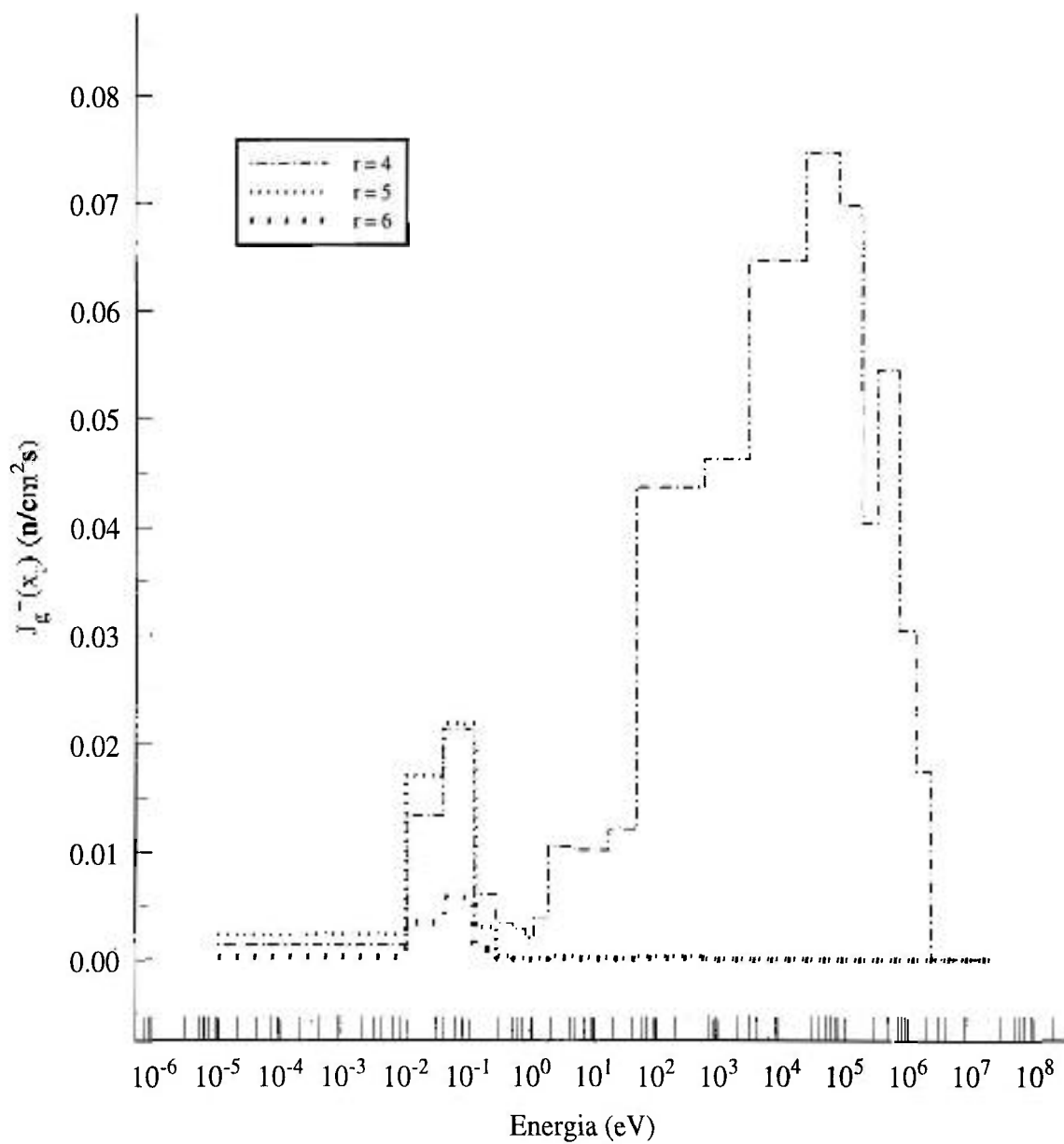


Figura 8.7 - Corrente Parcial de Nêutrons Incidente nas Interfaces $r = 4, 5$ e 6 da Blindagem do Reator Rápido Experimental

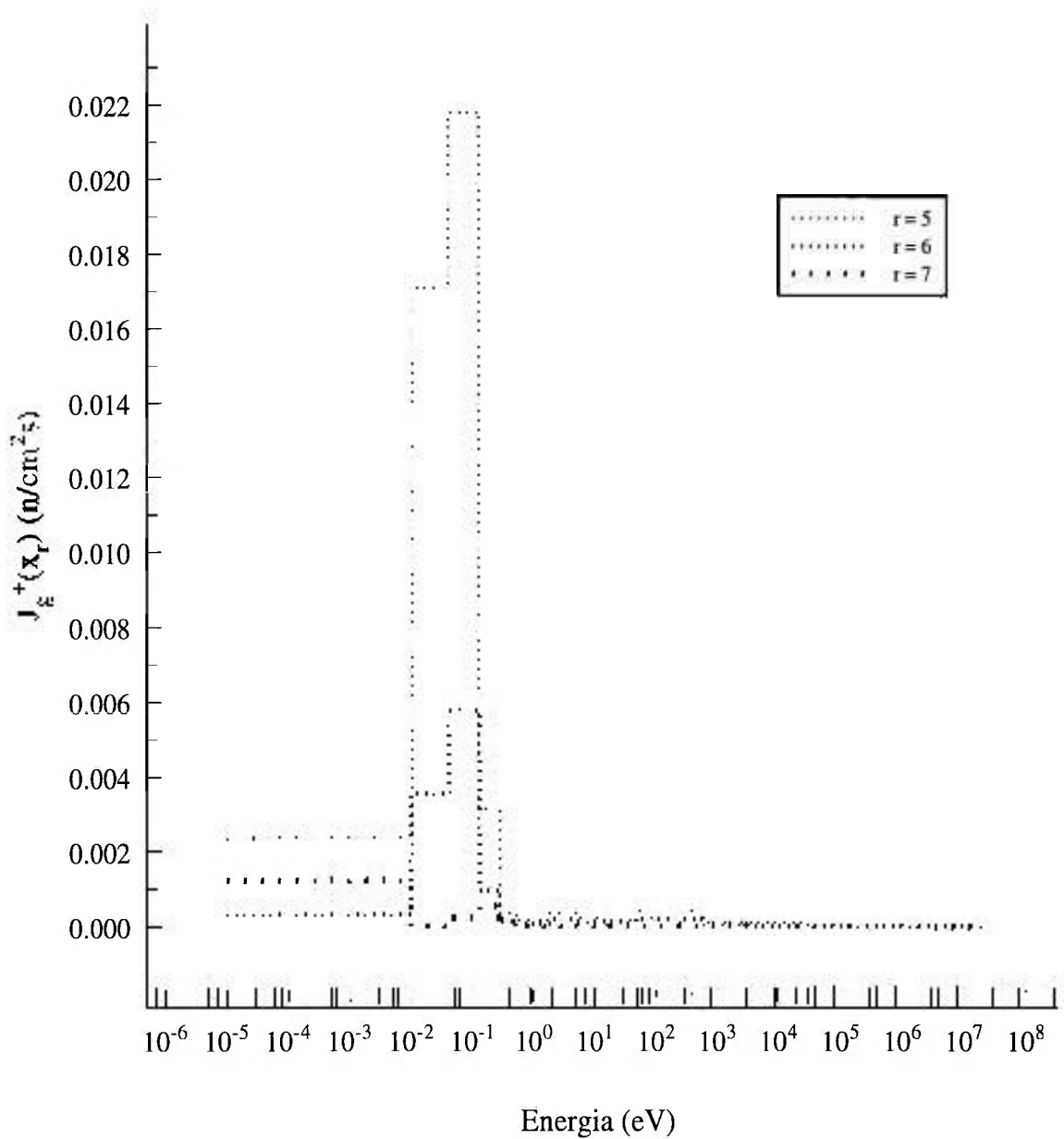


Figura 8.8 - Corrente Parcial de Nêutrons Incidente nas Interfaces $r = 5$ e 6 e Emergente em $r = 7$ da Blindagem do Reator Rápido Experimental

9 CONCLUSÕES

Neste trabalho um método computacional baseado no método P_N para cálculos de blindagem em geometria de multiplacas foi desenvolvido e testado com sucesso. O método P_N desenvolvido para resolver a equação de transporte multigrupo em problemas onde ocorre somente moderação foi chamado de método P_N escalar e o método P_N utilizado em problemas onde também ocorre “upscattering” foi chamado de vetorial. A utilização do método P_N vetorial apenas na faixa de energia onde ocorre “upscattering” usando resultados do método P_N escalar para compor o termo de fonte da versão matricial da equação de transporte deu origem aos métodos P_N acoplados.

Da maneira como foi desenvolvido o programa gerenciador, cujo fluxograma está apresentado no Apêndice 12, a aplicação dos métodos é definida por um único parâmetro, NDS , que identifica os grupos de energia para aplicação do método escalar e, conseqüentemente, para o método vetorial nos remanescentes $G - NDS = NUS$ grupos de energia. Isto facilitou sobremaneira as análises comparativas entre os métodos na resolução de um mesmo problema.

Ficou demonstrado que o método P_N escalar é significativamente mais eficiente do que o método P_N vetorial e que os métodos P_N quando acoplados atenuam sensivelmente o tempo de processamento de um problema totalmente resolvido com o método P_N vetorial. Donde se conclui que na solução de problemas onde a presença de “upscattering” não for comprovadamente expressiva é muito mais vantajoso aplicar o método P_N escalar que explora a técnica de solução grupo-a-grupo.

Problemas com a faixa de energia de “upscattering” subdividida em um número relativamente alto de grupos devem ser resolvidos com cautela em computadores de palavra curta pois podem apresentar imprecisão nos resultados. Estes problemas podem ser resolvidos em computadores de palavra longa conforme foi feito com o pro-

blema da placa de concreto no Capítulo 6. O detalhamento da faixa térmica em grupos finos é considerada importante para cálculos da distribuição do fluxo de nêutrons através dos dutos que atravessam as blindagens distantes do núcleo do conceito de reator rápido do IEAv. Da mesma forma, é igualmente importante o mapeamento do fluxo de nêutrons térmicos no espaço entre o tanque de segurança do reator e a blindagem biológica onde o ar atmosférico é usado para fazer o resfriamento por convecção natural.

Neste trabalho foi também verificado que, quando a geração das constantes de grupo da faixa térmica para nuclídeos tais como hidrogênio, carbono, etc. é completa trazendo todas as informações das leis de espalhamento necessárias, incluindo as ligações nas respectivas moléculas, problemas de imprecisão e dificuldades de convergência podem aparecer ao se processar as versões dos códigos de ordenadas discretas ANISN²⁰ ou XSDRN³⁵ para calcular as seções de choque condensadas para um número menor de grupos.

Uma dificuldade adicional na implementação dos métodos P_N é que podem aparecer autovalores complexo-conjugados para altos valores de N ou do número de grupos de energia térmicos, embora isto dependa de cada problema. Caso isto aconteça e se desejar reduzir os recursos computacionais exigidos na solução, será necessário um trabalho a mais de desenvolvimento da álgebra necessária para se poder trabalhar só com números reais e de sua implementação computacional. Nos problemas resolvidos neste trabalho não se verificou o aparecimento de autovalores complexos.

Comparando os resultados dos métodos P_N acoplados com os do ANISN, verificou-se que para um problema relativamente pequeno, caso do problema resolvido na Seção 8.1, em que o sistema possui 31,85 cm de extensão, os tempos de processamento dos métodos P_N acoplados para $N < 15$ são menores. Mas é bom lembrar que as rotinas utilizadas nos programas acoplados são do pacote EISPACK que requerem tempos de processamentos relativamente longos. As novas rotinas do pacote LAPACK são bem mais rápidas, já foram implementadas e estão prontas para utilização.

Mesmo com as subrotinas do pacote EISPACK, para problemas consi-

derados grandes como o de blindagem do reator rápido experimental, os tempos de processamento dos programas acoplados foram significativamente melhores para valores de $N \leq 31$. Donde conclui-se que, para problemas grandes e da mesma natureza dos que aqui foram resolvidos, vale a pena utilizar os programas P_N desenvolvidos como uma opção para cálculos preliminares dos fluxos com baixos valores de N e usá-los como estimativa inicial para o ANISN, caso cálculos com maiores valores de N sejam desejados.

Ficou claro que a capacidade dos métodos P_N acoplados em calcular os fluxos escalares, correntes totais em qualquer ponto interior e fluxos emergentes transmitidos numa seqüência de blindagens sem qualquer preocupação com discretização espacial ou angular é uma vantagem adicional que pode ser explorada, pois os resultados são mais precisos e podem ser usados como referência quando na comparação com outras metodologias.

Quanto à extensão da aplicação da metodologia em geometria cartesiana bi ou tridimensional, um assunto a ser investigado futuramente, pode-se propor um estudo envolvendo, em princípio, o método espectral³³ usado por Vilhena et al.⁷¹ para desenvolver soluções em problemas multidimensionais, cujo procedimento analítico, baseia-se na expansão do fluxo angular em séries finitas de polinômios ortogonais transformando problemas bi ou tridimensionais em um conjunto de problemas unidimensionais. À primeira vista, a extensão do método P_N vetorial para geometria cartesiana tridimensional parece possível uma vez que os termos de fonte das equações unidimensionais resultantes parecem permitir soluções particulares pela técnica de variação dos parâmetros. No que diz respeito ao método P_N escalar, os termos de fonte adicionais resultantes exigirão novas formas de soluções particulares que deverão ser estudadas e desenvolvidas. Em consequência, caso os desenvolvimentos culminem em êxito, a comprovação numérica pode ser relativamente fácil exigindo poucas modificações na estrutura computacional desenvolvida. Alternativamente, boas vistas devem ser dadas ao método nodal espectral, num sentido análogo ao aplicado por Barros et al. apud Walters,⁵ cujo procedimento consiste em integrar a equação escrita em geometria cartesiana bi ou tridimensional nas direções transversais. O objetivo é formar um sistema

de equações integradas transversalmente em cada nodo juntamente com as condições de contorno e possíveis considerações adicionais que permitam uma solução única para o sistema.

Finalmente, as contribuições originadas durante o desenvolvimento do trabalho podem ser resumidas em:

- desenvolvimento de uma solução P_N particular para resolver a equação de transporte grupo-a-grupo em meios moderadores dando origem a uma nova classe de polinômios denominados polinômios generalizados de Chandrasekhar;
- desenvolvimento de novas formas de solução P_N para casos de degenerescência nos autovalores;
- acoplamento dos métodos P_N escalar e vetorial através do termo de fonte da equação de transporte na formulação matricial;
- é apresentada uma maneira alternativa de solucionar a equação de transporte acoplando os métodos P_N escalar e matricial com a decomposição da distribuição do fluxo angular em componentes espalhado e não-espalhado;
- extensão dos métodos P_N acoplados para geometria de multiplacas e,
- aplicação dos métodos na resolução de problemas típicos de blindagem em geometria plana.

APÊNDICE 1

Dados de Entrada para o Sistema NJOY Usado na Geração das Seções de Choque Microscópicas do Carbono para o Código ANISN

```
0
6
*moder*
1 22
*pendf tape for Carbono from Za06000*/
20 600
0/
*moder*
22 -21
*reconr*
-21 -22
* pendf tape for Carbono from ENDF/B-VI*/
600 0/
.05 0. 7/
0/
*broadr*
-22 -23
600 1/
.05/
300.0
0/
*unresr*
-21 -23 -22
600 1 1 1
300.0
1.0e+10
0/
*grouppr*
-21 -23 0 25
600 1 0 4 7 1 1 1
* Carbono for anisnlib*/
300.0
1.0e+10
21
1.00000e-05 1.00000e-02
4.00000e-02 1.25000e-01
2.75000e-01 5.00000e-01
8.00000e-01 1.08000e+00
1.85540e+00 5.04350e+00
1.76040e+01 4.78510e+01
5.82950e+02 3.03540e+03
2.41760e+04 8.25030e+04
1.92550e+05 3.33730e+05
7.42740e+05 1.42270e+06
2.30690e+06 4.50000e+06
0.1 0.025 0.8208e+06 1.273e+06/
3/
6/
0/
0/
*dtfr*
25 26 0
1 0 0
8 21 3 12 32 0 0
0/
*CARBON* 600 1 300.0
0/
*stop*
```


APÊNDICE 2

Dados de Entrada para o Sistema NJOY Usado na Geração das Seções de Choque Microscópicas do Hidrogênio para o Código ANISN

```
0
6
*moder*
1 22
*pendef tape for Hidrogenio from Za010001*/
20 125
0/
*moder*
22 -21
*reconr*
-21 -22
* pendf tape for Hidrogenio from ENDF/B-VI*/
125 0/
.05 0. 7/
0/
*broadr*
-22 -23
125 1/
.05/
300.0
0/
*unresr*
-21 -23 -22
125 1 1 1
300.0
1.0e+10
0/
*grouppr*
-21 -23 0 25
125 1 0 4 7 1 1 1
* Hidrogenio for anisnlib*/
300.0
1.0e+10
21
1.00000e-05 1.00000e-02
4.00000e-02 1.25000e-01
2.75000e-01 5.00000e-01
8.00000e-01 1.08000e+00
1.85540e+00 5.04350e+00
1.76040e+01 4.78510e+01
5.82950e+02 3.03540e+03
2.41760e+04 8.25030e+04
1.92550e+05 3.33730e+05
7.42740e+05 1.42270e+06
2.30690e+06 4.50000e+06
0.1 0.025 0.8208e+06 1.273e+06/
3/
6/
0/
0/
*dtfr*
25 26 0
1 0 0
8 21 3 12 32 0 0
0/
*HIDRO* 125 1 300.0
0/
*stop*
```

APÊNDICE 3

Dados de Entrada para o Sistema NJOY Usado na Geração das Seções de Choque Microscópicas do Alumínio para o Código ANISN

```
0
6
*moder*
1 22
*pendf tape for Aluminio-27 from Za13027*/
20 1325
0/
*moder*
22 -21
*reconr*
-21 -22
* pendf tape for Aluminio-27 from ENDF/B-VI*/
1325 0/
.05 0. 7/
0/
*broadr*
-22 -23
1325 1/
.05/
300.0
0/
*unresr*
-21 -23 -22
1325 1 1 1
300.0
1.0e+10
0/
*grouppr*
-21 -23 0 25
1325 1 0 4 7 1 1 1
* Aluminio-27 for anisnlib*/
300.0
1.0e+10
21
1.00000e-05 1.00000e-02
4.00000e-02 1.25000e-01
2.75000e-01 5.00000e-01
8.00000e-01 1.08000e+00
1.85540e+00 5.04350e+00
1.76040e+01 4.78510e+01
5.82950e+02 3.03540e+03
2.41760e+04 8.25030e+04
1.92550e+05 3.33730e+05
7.42740e+05 1.42270e+06
2.30690e+06 4.50000e+06
0.1 0.025 0.8208e+06 1.273e+06/
3/
6/
0/
0/
*dtfr*
25 26 0
1 0 0
8 21 3 12 32 0 0
0/
*A127* 1325 1 300.0
0/
*stop*
```

APÊNDICE 4

Dados de Entrada para o Sistema NJOY Usado na Geração das Seções de Choque Microscópicas do Boro-10 para o Código ANISN

```
0
6
*moder*
1 22
*pendef tape for boro-10 from Za05011*/
20 525
0/
*moder*
22 -21
*reconr*
-21 -22
* pendf tape for Boro-10 from ENDF/B-VI*/
525 0/
.05 0. 7/
0/
*broadr*
-22 -23
525 1/
.05/
300.0
0/
*unresr*
-21 -23 -22
525 1 1 1
300.0
1.0e+10
0/
*grouppr*
-21 -23 0 -25
525 1 0 4 7 1 1 1
* boro-10 for anisnlib*/
300.0
1.0e+10
21
1.00000e-05 1.00000e-02
4.00000e-02 1.25000e-01
2.75000e-01 5.00000e-01
8.00000e-01 1.08000e+00
1.85540e+00 5.04350e+00
1.76040e+01 4.78510e+01
5.82950e+02 3.03540e+03
2.41760e+04 8.25030e+04
1.92550e+05 3.33730e+05
7.42740e+05 1.42270e+06
2.30690e+06 4.50000e+06
0.1 0.025 0.8208e+06 1.273e+06/
3/
6/
0/
0/
*dtfrr*
-25 26 0
1 0 0
8 21 3 12 32 0 9
0 0
*BOR010* 525 1 300.0
0/
*stop*
```

APÊNDICE 5

Dados de Entrada para o Sistema NJOY Usado na Geração das Seções de Choque Microscópicas do Boro-11 para o Código ANISN

```
0
6
*moder*
1 22
*pendef tape for boro-11 from Za05011*/
20 528
0/
*moder*
22 -21
*reconr*
-21 -22
* pendf tape for Boro-11 from ENDF/B-VI*/
528 0/
.05 0. 7/
0/
*broadr*
-22 -23
528 1/
.05/
300.0
0/
*unresr*
-21 -23 -22
528 1 1 1
300.0
1.0e+10
0/
*grouppr*
-21 -23 0 25
528 1 0 4 7 1 1 1
* boro-11 for anisnlib*/
300.0
1.0e+10
21
1.00000e-05 1.00000e-02
4.00000e-02 1.25000e-01
2.75000e-01 5.00000e-01
8.00000e-01 1.08000e+00
1.85540e+00 5.04350e+00
1.76040e+01 4.78510e+01
5.82950e+02 3.03540e+03
2.41760e+04 8.25030e+04
1.92550e+05 3.33730e+05
7.42740e+05 1.42270e+06
2.30690e+06 4.50000e+06
0.1 0.025 0.8208e+06 1.273e+06/
3/
6/
0/
0/
*dtfr*
25 26 0
1 0 0
8 21 3 12 32 0 0
0/
*BOR011* 528 1 300.0
0/
*stop*
```

APÊNDICE 6

Dados de Entrada para o Sistema NJOY Usado na Geração das Seções de Choque Microscópicas do Flúor-19 para o Código ANISN

```
0
6
*moder*
1 22
*pendef tape for fluor-19 from Za09019*/
20 925
0/
*moder*
22 -21
*reconr*
-21 -22
* pendf tape for fluor-19 from ENDF/B-VI*/
925 0/
.05 0. 7/
0/
*broadr*
-22 -23
925 1/
.05/
300.0
0/
*unresr*
-21 -23 -22
925 1 1 1
300.0
1.0e+10
0/
*grouppr*
-21 -23 0 25
925 1 0 4 7 1 1 1
* fluor-19 for anisnlib*/
300.0
1.0e+10
21
1.00000e-05 1.00000e-02
4.00000e-02 1.25000e-01
2.75000e-01 5.00000e-01
8.00000e-01 1.08000e+00
1.85540e+00 5.04350e+00
1.76040e+01 4.78510e+01
5.82950e+02 3.03540e+03
2.41760e+04 8.25030e+04
1.92550e+05 3.33730e+05
7.42740e+05 1.42270e+06
2.30690e+06 4.50000e+06
0.1 0.025 0.8208e+06 1.273e+06/
3/
6/
0/
0/
*dtfrr*
25 26 0
1 0 0
8 21 3 12 32 0 0
0/
*FLUOR* 925 1 300.0
0/
*stop*
```

APÊNDICE 7

Dados de Entrada para o Código ANISN Usado no Cálculo das Seções de Choque Macroscópicas

LC - Cálculo das seções de choque macroscópicas -

15\$\$	1	0	7	16	1
0	0	4	257	0	21
3	12	32	96	48	0
80	0	0	0	1	257
100	0	0	0	0	300
2	0	1	0	1	0
0					
16**	0.0	0.0	1.0-06	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	1.0-06
0.0	0.0	0.0			

14**

** seções de choque microscópicas geradas pelo sistema NJOY **

t

18** 9r 1.0 f 0.0 t

3** f 0.0 t

1** f 0.0

4** 79i 0.0 79i 3.60 15i 18.60 79i 19.85 31.85 31.8501

5** f 1.0

6**	0.0	0.0244936	0.0413296	0.0392569	0.0400796
	0.0643754	0.0442097	0.1090850	0.1371702	0.1371702
	0.1090850	0.0442097	0.0643754	0.0400796	0.0392569
	0.0413296	0.0244936			
7**	-.9902984	-.9805009	-.9092855	-.8319966	-.7467506
	-.6504264	-.5370966	-.3922893	-.1389568	.1389568
	.3922893	.5370966	.6504264	.7467506	.8319966
	.9092855	.9805009			

8\$\$ 80r4 80r3 16r2 81r1

9\$\$ 49 57 65 73

10\$\$

3r	49 3r	50 3r	51 3r	52 3r	53
3r	54 3r	55 3r	56 2r	57 2r	58
2r	59 2r	60 2r	61 2r	62 2r	63
2r	64 3r	65 3r	66 3r	67 3r	68
3r	69 3r	70 3r	71 3r	72 4r	73
4r	74 4r	75 4r	76 4r	77 4r	78
4r	79 4r	80			

11\$\$ 0 1 9 0 2 10 0 3 11 0 4 12 0 5 13 0 6 14 0 7 15 0 8 16

0 17 0 18 0 19 0 20 0 21 0 22 0 23 0 24

0 1 9 0 2 10 0 3 11 0 4 12 0 5 13 0 6 14 0 7 15 0 8 16

0 25 33 41 0 26 34 42 0 27 35 43 0 28 36 44

0 29 37 45 0 30 38 46 0 31 39 47 0 32 40 48

12**

0.0 0.07832 0.03916
 0.0 2.3496-1 1.1748-1
 0.0 3.9160-1 1.958-1
 0.0 5.4824-1 2.7412-1
 0.0 7.0488-1 3.5244-1
 0.0 8.6152-1 4.3076-1
 0.0 1.01816 5.09080-1
 0.0 1.1748 5.8740-1

0.0 0.060248
 0.0 1.80744-1
 0.0 3.0124-1
 0.0 4.21736-1
 0.0 5.42232-1
 0.0 6.62728-1
 0.0 7.83224-1
 0.0 9.0372-1

0.0 0.07832 0.03916
 0.0 2.3496-1 1.1748-1
 0.0 3.9160-1 1.958-1
 0.0 5.4824-1 2.7412-1
 0.0 7.0488-1 3.5244-1
 0.0 8.6152-1 4.3076-1
 0.0 1.01816 5.09080-1
 0.0 1.1748 5.8740-1

0.0 1.2151-7 4.6046-9 3.5139-7
 0.0 3.6453-7 1.38138-8 1.05417-6
 0.0 6.0755-7 2.3023-8 1.75695-6
 0.0 8.5057-7 3.22322-8 2.45973-6
 0.0 1.09359-6 4.14414-8 3.16251-6
 0.0 1.33661-6 5.06506-8 3.86529-6
 0.0 1.57963-6 5.98598-8 4.56807-6
 0.0 1.82265-6 6.9069-8 5.27085-6

19\$\$\$ 7 7 7 7

27\$\$\$ 2 3 12 32 1

28\$\$\$ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

t

t

APÊNDICE 8

Dados de Entrada para o Código ANISN Usado no Cálculo dos Fluxos e Correntes de Grupo para o Problema de Moderação de Nêutrons Rápidos

LC - SECOES DE CHOQUE MACROSCOPICAS - 21GRUPOS - COLLAPSED BY ANISN

```

15$$          1      0      7      16      1
              0      0      4     1061      0      21
              3     12     32      0     32      0
              32      0      0      0      1     1061
             100      0      0      0      0     300
              2      0      0      0      1      0
              0
16**          0.0      0.0     1.0-06      0.0      0.0
              0.0      0.0      0.0      0.0      0.5     1.0-06
              0.0      0.0      0.0 t

```

14** *seções de choque condensadas no processamento anterior*

t

18** 9r 1.0 f 0.0 t

3** f 0.0 t

1** f 0.0

```

4** 0.0 98i 0.0001 98i 1.80 3.5999 3.60 98i 3.6001 99i 7.350 99i 11.10
    98i 14.85 18.5999 18.60 57i 18.6001 19.8499 99i 19.85 99i 22.85 99i
    25.85 99i 28.85 31.85 31.8501

```

5** f 1.0

```

6**  0.0  0.0244936  0.0413296  0.0392569  0.0400796
    0.0643754  0.0442097  0.1090850  0.1371702  0.1371702
    0.1090850  0.0442097  0.0643754  0.0400796  0.0392569
    0.0413296  0.0244936

```

```

7** -.9902984 -.9805009 -.9092855 -.8319966 -.7467506
    -.6504264 -.5370966 -.3922893 -.1389568 .1389568
    .3922893 .5370966 .6504264 .7467506 .8319966
    .9092855 .9805009

```

8\$\$ 200r4 400r3 60r2 401r1

9\$\$ 1 9 17 25

19\$\$ 7 7 7 7

t t

APÊNDICE 9

Estrutura de Grupos de Nêutrons e Gama

ESTRUTURA DE GRUPOS DE NÊUTRONS

GRUPOS FINOS	LIMITES DE ENERGIA	GRUPOS LARGOS	GRUPOS FINOS	LIMITES DE ENERGIA	GRUPOS LARGOS	GRUPOS FINOS	LIMITES DE ENERGIA	GRUPOS LARGOS
1	1.96400E+07	1	51	1.92050E+06	2	101	1.35690E+05	6
2	1.73320E+07	1	52	1.82680E+06	2	102	1.29070E+05	6
3	1.69050E+07	1	53	1.73770E+06	2	103	1.22770E+05	6
4	1.64870E+07	1	54	1.65300E+06	2	104	1.16790E+05	6
5	1.56830E+07	1	55	1.57240E+06	2	105	1.11090E+05	6
6	1.49180E+07	1	56	1.49570E+06	2	106	9.80370E+04	6
7	1.45500E+07	1	57	1.42270E+06	3	107	8.65170E+04	6
8	1.41910E+07	1	58	1.35340E+06	3	108	8.25030E+04	7
9	1.38400E+07	1	59	1.28740E+06	3	109	7.94990E+04	7
10	1.34990E+07	1	60	1.22460E+06	3	110	7.19980E+04	7
11	1.28400E+07	1	61	1.16480E+06	3	111	6.73790E+04	7
12	1.25230E+07	1	62	1.10800E+06	3	112	5.65620E+04	7
13	1.22140E+07	1	63	1.00260E+06	3	113	5.24750E+04	7
14	1.16180E+07	1	64	9.61640E+05	3	114	4.63090E+04	7
15	1.10520E+07	1	65	9.07180E+05	3	115	4.08680E+04	7
16	1.05130E+07	1	66	8.62940E+05	3	116	3.43070E+04	7
17	1.00000E+07	1	67	8.20850E+05	3	117	3.18280E+04	7
18	9.51230E+06	1	68	7.80820E+05	3	118	2.85010E+04	7
19	9.04840E+06	1	69	7.42740E+05	4	119	2.70000E+04	7
20	8.60710E+06	1	70	7.06510E+05	4	120	2.60580E+04	7
21	8.18730E+06	1	71	6.72060E+05	4	121	2.47880E+04	7
22	7.78800E+06	1	72	6.39280E+05	4	122	2.41760E+04	8
23	7.40820E+06	1	73	6.08100E+05	4	123	2.35790E+04	8
24	7.04690E+06	1	74	5.78440E+05	4	124	2.18750E+04	8
25	6.70320E+06	1	75	5.50230E+05	4	125	1.93050E+04	8
26	6.59240E+06	1	76	5.23400E+05	4	126	1.50340E+04	8
27	6.37630E+06	1	77	4.97870E+05	4	127	1.17090E+04	8
28	6.06530E+06	1	78	4.50490E+05	4	128	1.05950E+04	8
29	5.76950E+06	1	79	4.07620E+05	4	129	9.11880E+03	8
30	5.48810E+06	1	80	3.87740E+05	4	130	7.10170E+03	8
31	5.22050E+06	1	81	3.68830E+05	4	131	5.53080E+03	8
32	4.96590E+06	1	82	3.33730E+05	5	132	4.30740E+03	8
33	4.72370E+06	1	83	3.01970E+05	5	133	3.70740E+03	8
34	4.49330E+06	1	84	2.98490E+05	5	134	3.35460E+03	8
35	4.06570E+06	1	85	2.97210E+05	5	135	3.03540E+03	9
36	3.67880E+06	1	86	2.94520E+05	5	136	2.74650E+03	9
37	3.32870E+06	1	87	2.87250E+05	5	137	2.61260E+03	9
38	3.16640E+06	1	88	2.73240E+05	5	138	2.48520E+03	9
39	3.01190E+06	1	89	2.47240E+05	5	139	2.24870E+03	9
40	2.86510E+06	1	90	2.35180E+05	5	140	2.03470E+03	9

41	2.72530E+06	1	91	2.23710E+05	5	141	1.58460E+03	9
42	2.59240E+06	1	92	2.12800E+05	5	142	1.23410E+03	9
43	2.46600E+06	1	93	2.02420E+05	5	143	9.61120E+02	9
44	2.38520E+06	1	94	1.92550E+05	6	144	7.48520E+02	9
45	2.36530E+06	1	95	1.83160E+05	6	145	5.82950E+02	10
46	2.34570E+06	1	96	1.74220E+05	6	146	4.54000E+02	10
47	2.30690E+06	2	97	1.65730E+05	6	147	3.53570E+02	10
48	2.23130E+06	2	98	1.57640E+05	6	148	2.75360E+02	10
49	2.12250E+06	2	99	1.49960E+05	6	149	2.14450E+02	10
50	2.01900E+06	2	100	1.42640E+05	6	150	1.67020E+02	10

GRUPOS	LIMITES DE	GRUPOS	GRUPOS	LIMITES DE	GRUPOS
FINOS	ENERGIA	LARGOS	FINOS	ENERGIA	LARGOS

151	1.30070E+02	10	176	8.00000E-01	16
152	1.01300E+02	10	177	6.82560E-01	16
153	7.88930E+01	10	178	6.25060E-01	16
154	6.14420E+01	10	179	5.31580E-01	16
155	4.78510E+01	11	180	5.00000E-01	17
156	3.72660E+01	11	181	4.13990E-01	17
157	2.90230E+01	11	182	3.66800E-01	17
158	2.26030E+01	11	183	3.25000E-01	17
159	1.76040E+01	12	184	2.75000E-01	18
160	1.37100E+01	12	185	2.25000E-01	18
161	1.06770E+01	12	186	1.84000E-01	18
162	8.31530E+00	12	187	1.50000E-01	18
163	6.47600E+00	13	188	1.25000E-01	19
164	5.04350E+00	13	189	1.00000E-01	19
165	3.92790E+00	13	190	7.00000E-02	19
166	3.05900E+00	13	191	5.00000E-02	19
167	2.38240E+00	13	192	4.00000E-02	20
168	1.85540E+00	14	193	3.00000E-02	20
169	1.44500E+00	14	194	2.10000E-02	20
170	1.30000E+00	14	195	1.45000E-02	20
171	1.12530E+00	14	196	1.00000E-02	21
172	1.08000E+00	15	197	5.00000E-03	21
173	1.04000E+00	15	198	2.00000E-03	21
174	1.00000E+00	15	199	5.00000E-04	21
175	8.76430E-01	15		1.00000E-05	

ESTRUTURA DE GRUPOS DE GAMA

GRUPOS	LIMITES DE	GRUPOS	GRUPOS	LIMITES DE	GRUPOS
FINOS	ENERGIA	LARGOS	FINOS	ENERGIA	LARGOS

1	3.00000E+07	22	23	1.00000E+06	24
2	2.00000E+07	22	24	8.00000E+05	24
3	1.40000E+07	22	25	7.00000E+05	24
4	1.20000E+07	22	26	6.00000E+05	24

5	1.00000E+07	22	27	5.12000E+05	24
6	8.00000E+06	22	28	5.10000E+05	24
7	7.50000E+06	22	29	4.50000E+05	24
8	7.00000E+06	22	30	4.00000E+05	24
9	6.50000E+06	22	31	3.00000E+05	24
10	6.00000E+06	22	32	2.00000E+05	25
11	5.50000E+06	23	33	1.50000E+05	25
12	5.00000E+06	23	34	1.00000E+05	25
13	4.50000E+06	23	35	7.50000E+04	25
14	4.00000E+06	23	36	7.00000E+04	25
15	3.50000E+06	23	37	6.00000E+04	25
16	3.00000E+06	23	38	4.50000E+04	25
17	2.50000E+06	23	39	4.00000E+04	25
18	2.00000E+06	23	40	3.00000E+04	25
19	1.66000E+06	23	41	2.00000E+04	25
20	1.50000E+06	23	42	1.00000E+04	25
21	1.34000E+06	24		1.00000E+03	
22	1.33000E+06	24			

APÊNDICE 10

Dados de Entrada para o Código ANISN Usado na Geração das Seções de Choque Macroscópicas para o Problema da Blindagem do Reator Rápido Experimental

RE. - (199 grs n + 42 grs g) finos = (21grs n+4 grs g) largos

15\$\$	1	0	7	16	1
0	0	7	1061	0	241
3	39	279	120	56	0
112	0	0	0	1	1061
100	0	0	0	0	300
2	0	1	0	1	1
0					
16**	0.0	0.0	1.0e-03	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	1.0e-03
0.0	0.0	0.0	t		

14**

** seções de choque microscópicas gerado pelo módulo NITAWL do sistema AMPX **

t

18** (obs: fluxo de nêutrons incidente baseado no espectro de Watt)

204r 0.0000

9r 0.001 8r 0.000

9r 0.001 8r 0.000

9r 0.001 8r 0.000

9r 0.002 8r 0.000

9r 0.003 8r 0.000

9r 0.004 8r 0.000

9r 0.006 8r 0.000

9r 0.008 8r 0.000

9r 0.012 8r 0.000

9r 0.016 8r 0.000

9r 0.021 8r 0.000

9r 0.027 8r 0.000

9r 0.032 8r 0.000

9r 0.036 8r 0.000

9r 0.044 8r 0.000

9r 0.054 8r 0.000

9r 0.067 8r 0.000

9r 0.082 8r 0.000

9r 0.098 8r 0.000

9r 0.117 8r 0.000

9r 0.137 8r 0.000

9r 0.171 8r 0.000

9r 0.224 8r 0.000

9r 0.284 8r 0.000

9r 0.333 8r 0.000
9r 0.366 8r 0.000
9r 0.401 8r 0.000
9r 0.436 8r 0.000
9r 0.471 8r 0.000
9r 0.506 8r 0.000
9r 0.536 8r 0.000
9r 0.551 8r 0.000
9r 0.556 8r 0.000
9r 0.565 8r 0.000
9r 0.582 8r 0.000
9r 0.611 8r 0.000
9r 0.644 8r 0.000
9r 0.677 8r 0.000
9r 0.709 8r 0.000
9r 0.739 8r 0.000
9r 0.768 8r 0.000
9r 0.795 8r 0.000
9r 0.821 8r 0.000
9r 0.845 8r 0.000
9r 0.867 8r 0.000
9r 0.888 8r 0.000
9r 0.907 8r 0.000
9r 0.924 8r 0.000
9r 0.939 8r 0.000
9r 0.958 8r 0.000
9r 0.973 8r 0.000
9r 0.981 8r 0.000
9r 0.989 8r 0.000
9r 0.994 8r 0.000
9r 0.997 8r 0.000
9r 0.999 8r 0.000
9r 1.000 8r 0.000
9r 0.999 8r 0.000
9r 0.998 8r 0.000
9r 0.995 8r 0.000
9r 0.990 8r 0.000
9r 0.985 8r 0.000
9r 0.979 8r 0.000
9r 0.972 8r 0.000
9r 0.960 8r 0.000
9r 0.942 8r 0.000
9r 0.926 8r 0.000
9r 0.915 8r 0.000
9r 0.898 8r 0.000
9r 0.874 8r 0.000
9r 0.860 8r 0.000
9r 0.857 8r 0.000
9r 0.856 8r 0.000

9r 0.851 8r 0.000
 9r 0.842 8r 0.000
 9r 0.822 8r 0.000
 9r 0.801 8r 0.000
 9r 0.788 8r 0.000
 9r 0.774 8r 0.000
 9r 0.760 8r 0.000
 9r 0.747 8r 0.000
 9r 0.733 8r 0.000
 9r 0.719 8r 0.000
 9r 0.705 8r 0.000
 9r 0.692 8r 0.000
 9r 0.678 8r 0.000
 9r 0.665 8r 0.000
 9r 0.652 8r 0.000
 9r 0.638 8r 0.000
 9r 0.625 8r 0.000
 9r 0.612 8r 0.000
 9r 0.599 8r 0.000
 9r 0.578 8r 0.000
 9r 0.547 8r 0.000
 9r 0.526 8r 0.000
 9r 0.517 8r 0.000
 9r 0.501 8r 0.000
 9r 0.483 8r 0.000
 9r 0.458 8r 0.000
 9r 0.431 8r 0.000
 9r 0.412 8r 0.000
 9r 0.388 8r 0.000
 9r 0.362 8r 0.000
 9r 0.341 8r 0.000
 9r 0.326 8r 0.000
 9r 0.313 8r 0.000
 9r 0.306 8r 0.000
 9r 0.300 8r 0.000
 9r 0.295 8r 0.000
 9r 0.291 8r 0.000
 9r 0.284 8r 0.000
 9r 0.271 8r 0.000
 9r 0.248 8r 0.000
 9r 0.219 8r 0.000
 9r 0.201 8r 0.000
 9r 0.189 8r 0.000
 9r 0.171 8r 0.000
 9r 0.151 8r 0.000
 9r 0.134 8r 0.000
 9r 0.121 8r 0.000
 9r 0.113 8r 0.000
 9r 0.108 8r 0.000

```

9r 0.103 8r 0.000
9r 0.099 8r 0.000
9r 0.096 8r 0.000
9r 0.093 8r 0.000
9r 0.088 8r 0.000
9r 0.081 8r 0.000
9r 0.072 8r 0.000
9r 0.063 8r 0.000
9r 0.056 8r 0.000
9r 0.049 8r 0.000
9r 0.044 8r 0.000
9r 0.038 8r 0.000
9r 0.034 8r 0.000
9r 0.030 8r 0.000
9r 0.026 8r 0.000
9r 0.023 8r 0.000
9r 0.021 8r 0.000
9r 0.018 8r 0.000
9r 0.016 8r 0.000
9r 0.014 8r 0.000
9r 0.012 8r 0.000
9r 0.011 8r 0.000
9r 0.010 8r 0.000
9r 0.009 8r 0.000
9r 0.008 8r 0.000
9r 0.007 8r 0.000
9r 0.006 8r 0.000
9r 0.005 8r 0.000 1q17
9r 0.004 8r 0.000 1q17
9r 0.003 8r 0.000 1q17
9r 0.002 8r 0.000 9q17
9r 0.001 8r 0.000 11q17
f 0.000 t
3** f 0.0 t
1** f 0.0
4** 39i 0.0 99i 5.08 99i 20.08 99i 35.08 99i 51.955 99i 68.830
99i 85.705 19i 102.58 99i 103.83 99i 120.83 99i 137.83 99i 155.56
172.41 172.4101
5** f 1.0
6** 0.0 0.0244936 0.0413296 0.0392569 0.0400796
0.0643754 0.0442097 0.1090850 0.1371702 0.1371702
0.1090850 0.0442097 0.0643754 0.0400796 0.0392569
0.0413296 0.0244936
7** -.9902984 -.9805009 -.9092855 -.8319966 -.7467506
-.6504264 -.5370966 -.3922893 -.1389568 .1389568
.3922893 .5370966 .6504264 .7467506 .8319966
.9092855 .9805009
8$$ 40r7 200r6 400r5 20r4 200r3 100r2 101r1
9$$ 57 65 73 81 89 97 105

```

10\$\$\$

2r	57 2r	58 2r	59 2r	60 2r	61
2r	62 2r	63 2r	64 3r	65 3r	66
3r	67 3r	68 3r	69 3r	70 3r	71
3r	72 2r	73 2r	74 2r	75 2r	76
2r	77 2r	78 2r	79 2r	80 2r	81
2r	82 2r	83 2r	84 2r	85 2r	86
2r	87 2r	88 2r	89 2r	90 2r	91
2r	92 2r	93 2r	94 2r	95 2r	96
2r	97 2r	98 2r	99 2r	100 2r	101
2r	102 2r	103 2r	104 2r	105 2r	106
2r	107 2r	108 2r	109 2r	110 2r	111
2r	112				

11\$\$\$

0 33 0 34 0 35 0 36 0 37 0 38 0 39 0 40
0 17 25 0 18 26 0 19 27 0 20 28 0 21 29 0 22 30 0 23 31 0 24 32
0 41 0 42 0 43 0 44 0 45 0 46 0 47 0 48
0 1 0 2 0 3 0 4 0 5 0 6 0 7 0 8
0 25 0 26 0 27 0 28 0 29 0 30 0 31 0 32
0 49 0 50 0 51 0 52 0 53 0 54 0 55 0 56
0 9 0 10 0 11 0 12 0 13 0 14 0 15 0 16

12**

0.0 2.1305-2 7q2
0.0 1.2394-2 1.5671-2 7q3
0.0 2.2521-2 7q2
0.0 5.3231-2 7q2
0.0 8.0233-2 7q2
0.0 2.2521-2 7q2
0.0 5.3231-2 7q2

19\$\$\$ f7

27\$\$\$ 2 3 12 36 1
28\$\$\$ 46r1 10r2 12r3 13r4 12r5 14r6 14r7 13r8 10r9 10r10 4r11 4r12 5r13
4r 14 4r15 4r16 4r17 4r18 4r19 4r20 4r21 10r22 10r23 11r24 11r25
t
t

APÊNDICE 11

Dados de Entrada para o Código ANISN Usado no Cálculo dos Fluxos e Correntes de Grupo para o Problema da Blindagem do Reator Rápido Experimental

R.- XS Ja condensadas para 21grs n+4 grs g (Carbon comum)

15\$\$	1	0	7	48	1
0	0	7	1061	0	25
3	12	36	0	56	0
56	0	0	0	1	1061
100	0	0	0	0	300
2	0	0	0	1	0
0					
16**	0.0	0.0	1.0-06	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	1.0-06
0.0	0.0	0.0	t		

14** ** Seções de choque macroscópicas calculadas no passo anterior **

t

18**

25r .0011 24r 0.00
 25r .7264 24r 0.00
 25r .9717 24r 0.00
 25r 1.000 24r 0.00
 25r .8421 24r 0.00
 25r .6619 24r 0.00
 25r .4358 24r 0.00
 25r .2259 24r 0.00
 25r .0830 24r 0.00
 25r .0347 24r 0.00
 25r .0112 24r 0.00
 25r .0066 24r 0.00
 25r .0036 24r 0.00
 25r .0024 24r 0.00
 25r .0019 24r 0.00
 25r .0016 24r 0.00
 25r .0012 24r 0.00
 25r .0009 24r 0.00
 25r .0006 24r 0.00
 25r .0003 24r 0.00
 25r .0001 24r 0.00

f 0.0 t

3** f 0.0 t

1** f 0.0

4** 0.0 38i 0.0001 99i 5.08 99i 20.08 99i 35.08 99i 51.955 99i 68.830

99i 85.705 19i 102.58 99i 103.83 99i 120.83 99i 137.83 99i 155.56

172.41 172.4101

5** f 1.0

6** 0.0

.00157665	.00366380	.00573860	.00778965	.00980810
.01178540	.01371325	.01558360	.01738860	.01912070
.02077255	.02233730	.02380835	.02517950	.02644510
.02759975	.02863865	.02955740	.03035220	.03101970
.03155710	.03196210	.03223310	.03236885	
.03236885	.03223310	.03196210	.03155710	.03101970
.03035220	.02955740	.02863865	.02759975	.02644510
.02517950	.02380835	.02233730	.02077255	.01912070
.01738860	.01558360	.01371325	.01178540	.00980810
.00778965	.00573860	.00366380	.00157665	

7** 0.1

-.99877100	-.99353020	-.98412460	-.97059160	-.95298770
-.93138670	-.90587910	-.87657200	-.84358830	-.80706620
-.76715900	-.72403410	-.67787240	-.62886740	-.57722470
-.52316100	-.46690290	-.40868650	-.34875590	-.28736250
-.22476380	-.16122240	-.09700470	-.03238020	
.03238020	.09700470	.16122240	.22476380	.28736250
.34875590	.40868650	.46690290	.52316100	.57722470
.62886740	.67787240	.72403410	.76715900	.80706620
.84358830	.87657200	.90587910	.93138670	.95298770
.97059160	.98412460	.99353020	.99877100	

8\$\$ 40r7 200r6 400r5 20r4 200r3 100r2 101r1

9\$\$ 1 9 17 25 33 41 49

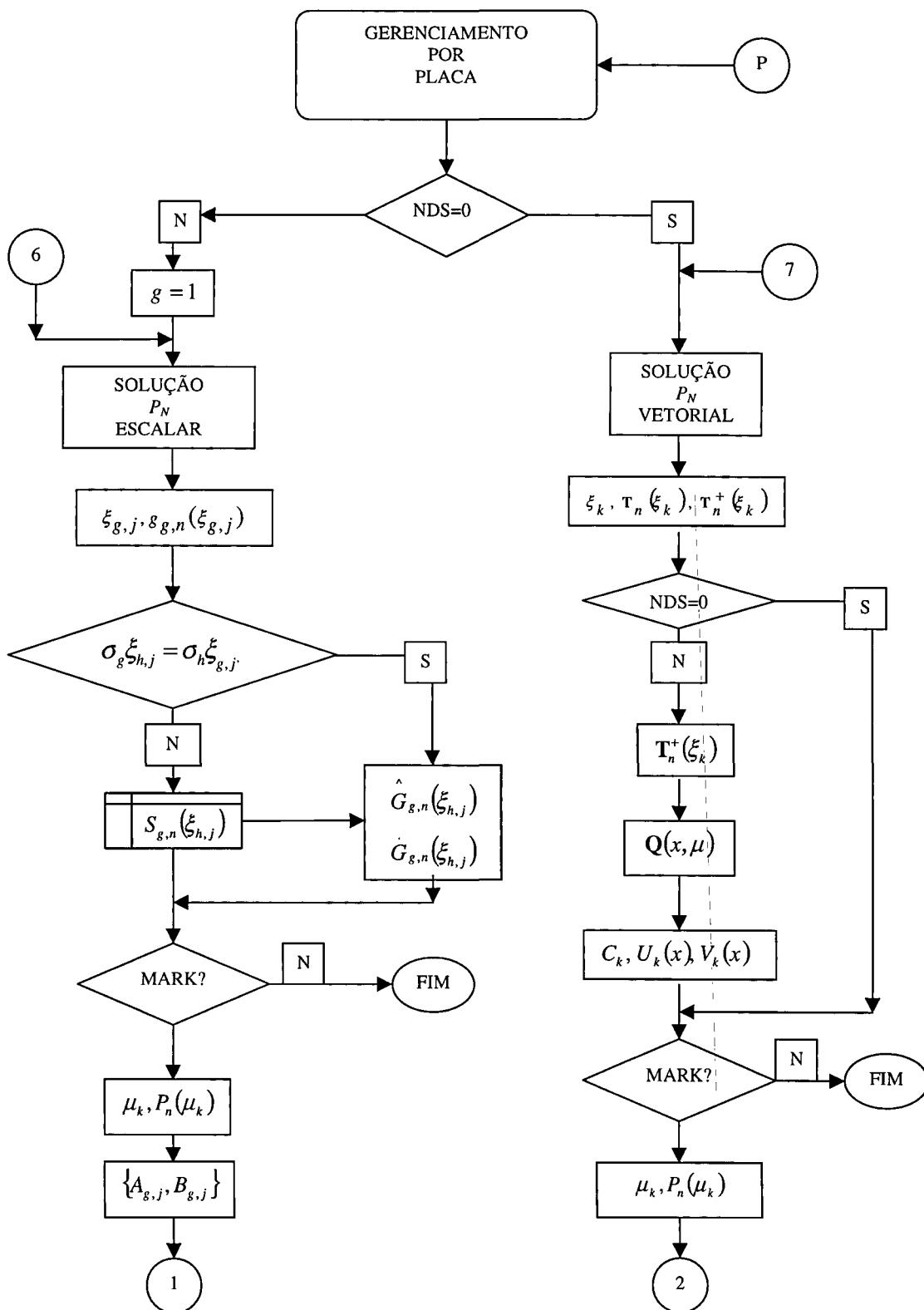
19\$\$ f7

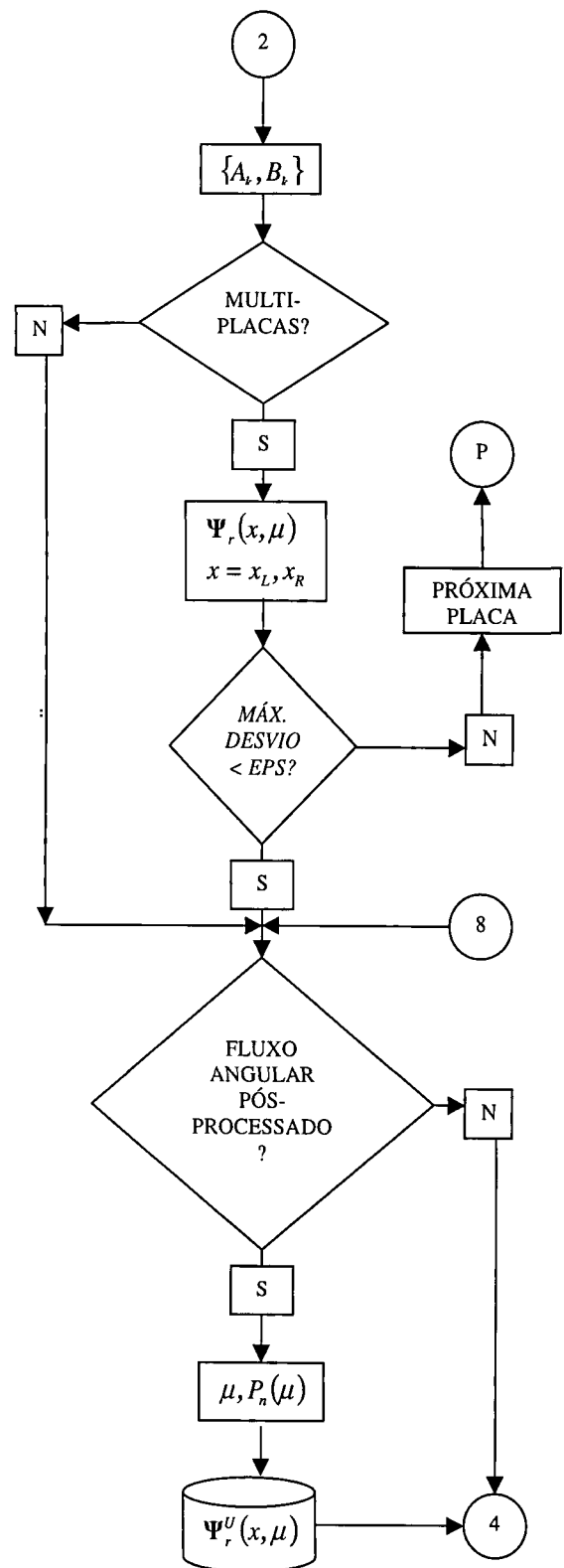
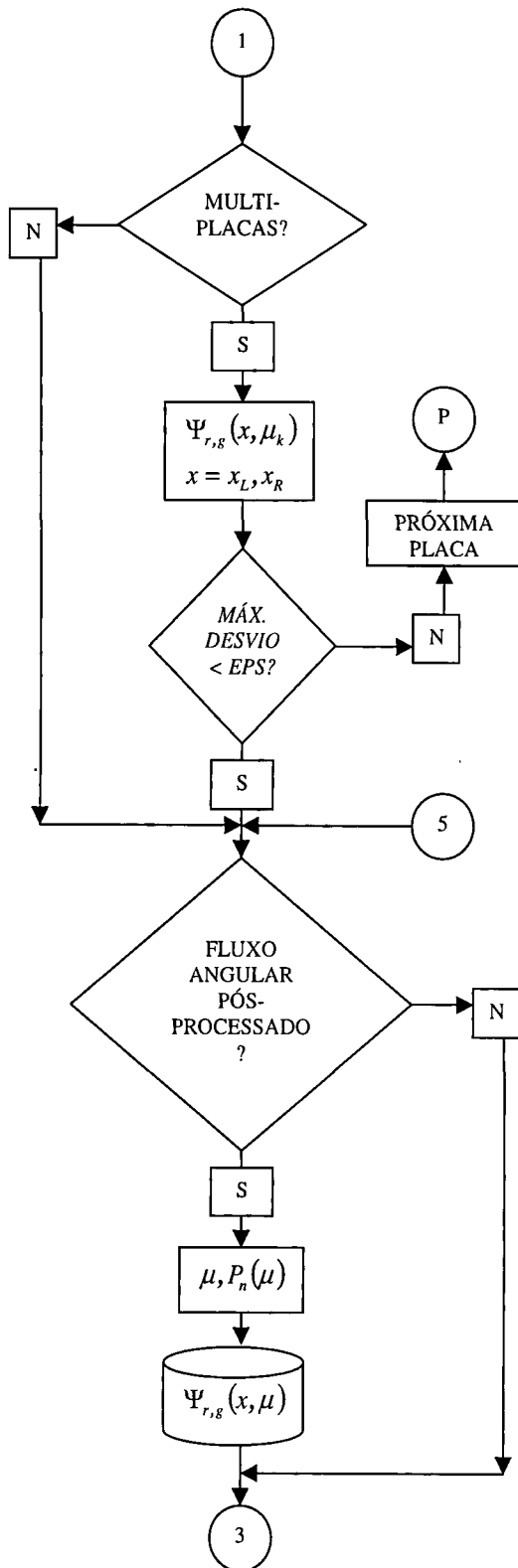
t

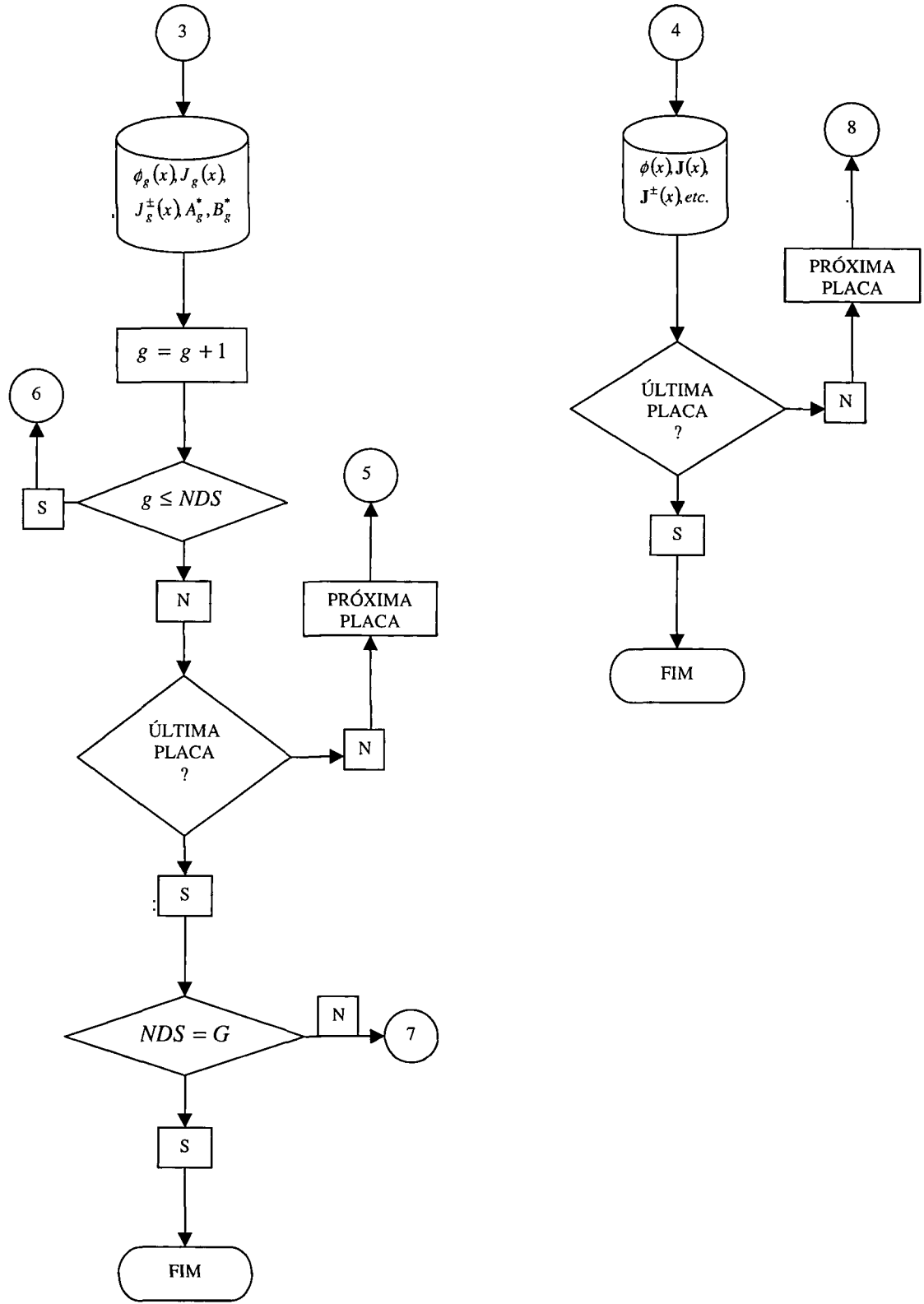
t

APÊNDICE 12

Fluxograma do Programa Baseado nos Métodos P_N Escalar e Vetorial Acoplados para Cálculos de Blindagem em Geometria de Multiplacas







REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 – ANDERSON, E.; BAI, Z.; BISCHOF, C.; DEMMEL, J.; DONGARRA, J.; DUCROZ, J.; GREENBAUM, A.; HAMMARLING, S.; MCKENNEY, A.; OSTROUCHOV, S.; SORENSEN, D. **LAPACK user's guide**. SIAM, Philadelphia, 1995.
- 2 – ARONSON, R. Subcritical problems in spherical geometry, **Nucl Sci Eng**, v. 86, p. 136–149, 1984.
- 3 – ARONSON, R. Critical problems for bare and reflected slabs and spheres, **Nucl Sci Eng**, v. 86, p. 150–156, 1984.
- 4 – BARICHELO, L. B.; GARCIA, R. D. M.; SIEWERT, C. E. A spherical-harmonics solution for radiative-transfer problems with reflecting boundaries and internal sources, **J Quant Spectrosc Radiat Transfer**, v.60, p. 247–260, 1998.
- 5 – BARROS, R. C.; SILVA, F. C.; FILHO, H. A. Recent advances in spectral nodal methods for x,y - geometry discrete ordinates deep penetration and eigenvalue problems. In: XI ENFIR/IV ENAN BRAZILIAN JOINT NUCLEAR CONFERENCE, 18–22 August, 1997, Poços de Caldas. **Prog Nucl Energy**, v. 35, p. 293–331, 1999.
- 6 – BELL, G.; GLASSTONE, S. **Nuclear reactor theory**. New York: Van Nostrand Reinold, 1970.
- 7 – BENASSI, M.; GARCIA, R. D. M.; KARP, A. H.; SIEWERT, C. E. A high-order spherical harmonics solution to the standard problem in radiative transfer. **Astrophys J**, v. 280, p. 853–864, 1984.
- 8 – CALDEIRA, A. D.; CHALHOUB, E. S. A Program for Generating Pointwise Weighting Functions, **Ann Nucl Energy**, v.20, pp. 605–609, 1993.
- 9 – CALDEIRA, A. D. **Soluções P_N para os problemas da moderação e do cálculo de célula em geometria plana**. São Paulo: 1999. Tese (Doutoramento) - Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares.

- 10 – CALDEIRA, A. D.; DIAS, A. F.; GARCIA, R. D. M. A P_N solution to the multigroup slowing-down problem – I: Basic formulation, *Nucl Sci Eng*, v. 130, p. 60–69, 1998.
- 11 – CALDEIRA, A. D.; DIAS, A. F.; GARCIA, R. D. M. A P_N solution to the multigroup slowing-down problem – II: The degenerate case, *Nucl Sci Eng*, v. 130, p. 70–78, 1998.
- 12 – CALDEIRA, A. D.; GARCIA, R. D. M. The P_N method for cell calculations of plate-type fuel assemblies. Submetido para publicação em *Transp Theory Stat Phys*, 1999.
- 13 – CHANDRASEKHAR, S. *Radiative Transfer*. London: Oxford University Press, 1950.
- 14 – DAVE, J. V. A direct solution of the spherical harmonics approximation to the radiative transfer equation for an arbitrary solar elevation. Part I: theory. *J Atmos Sci*, v. 32, p. 790–798, 1975.
- 15 – DAVE, J. V.; ARMSTRONG, B. H. Smoothing of the intensity curve obtained from a solution of the spherical harmonics approximation to the transfer equation. *J Atmos Sci*, v. 31, p. 1934–1937, 1974.
- 16 – DAVISON, B. *Neutron transport theory*. London: Oxford University Press, 1957.
- 17 – De PANGHER, J.; NICHOLS, L. L. *A precision long counter for measuring fast neutron flux density*, BNWL-260, Pacific Northwest Laboratory, Richland, Washington, 1966.
- 18 – DIAS, A. F.; ONO, S. *Concepção das blindagens do reator experimental*. Instituto de Estudos Avançados, S.J.Campos, SP, 1995: (Nota Técnica IEAv - 005/95).
- 19 – DONGARRA, J. J.; BUNCH, J. R.; MOLER, C. B.; STEWART, G. W. *LINPACK user's guide*. Philadelphia: SIAM, 1979.

- 20 – ENGLE Jr., W. W. *A users manual for ANISN, a one dimensional discrete ordinates transport code with anisotropic scattering*. Report K-1693 (updated), Union Carbide Corp., Nuclear Division, 1973.
- 21 – FEDERIGHI, F. D. Vacuum boundary conditions for the spherical harmonics method. *Nukleonik*, v. 6, p. 277–285, 1964.
- 22 – FLETCHER, J. K. The solution of the multigroup neutron transport equation using spherical harmonics. *Nucl Sci Eng*, v. 84, p. 33–46, 1983.
- 23 – FLETCHER, J. K. The solution of the multigroup neutron transport equation using spherical harmonics. *Transp Theory Stat Phys*, v. 15, p. 157–179, 1986.
- 24 – GANAPOL, B. D., KELLEY, C. T.; POMRANING, G. C. Asymptotically exact boundary conditions for the P_N equations. *Nucl Sci Eng*, v. 114, p. 12–19, 1993.
- 25 – GARCIA, R. D. M.; SIEWERT, C. E. Multigroup transport theory II. Numerical results. *Nucl Sci Eng*, v. 78, p. 315–523, 1981.
- 26 – GARCIA, R. D. M.; SIEWERT, C. E. *A spherical harmonics solution to the standard problem in radiative transfer*. Report G320-3438, IBM Scientific Center, Palo Alto, Cal., 1982.
- 27 – GARCIA, R. D. M.; SIEWERT, C. E. Multigroup transport theory with anisotropic scattering. *J Comput Phys*, v. 46, p. 237–270, 1982.
- 28 – GARCIA, R. D. M.; SIEWERT, C. E. Multislabs multigroup transport theory with L-th order anisotropic scattering. *J Comput Phys*, v. 50, p. 181–192, 1983.
- 29 – GARCIA, R. D. M.; SIEWERT, C. E. A stable shifted-Legendre projection scheme for generating P_N boundary conditions. *Ann Nucl Energy*, 1996.
- 30 – GARCIA, R. D. M.; SIEWERT, C. E.; THOMAS Jr., J. R. The classical spherical-harmonics method in transport theory. *Transactions of the American Nuclear Society*, v. 71, p. 220–222, 1994.

- 31 – GARCIA, R. D. M.; SIEWERT, C. E. The F_N method for multigroup transport theory with upscattering. *Nucl Sci Eng*, v. 130, p. 194–212, 1998.
- 32 – GELBARD, E. M. *Spherical harmonics methods: P_L and double- P_L approximations*. Em *Computing methods in reactor physics*. p. 271–358, GREENSPAN, H.; KELBER, C. N.; OKRENT, D., New York: Eds. Gordon & Breach, 1968.
- 33 – GOTTLIEB, D.; ORSZAG, S. A. Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications. NSF-CBMS REGIONAL CONFERENCE SERIES IN APPLIED MATHEMATICS 26, *SIAM*, Philadelphia.
- 34 – GREENE, N. M.; FORD, W. E.; PETRIE, L. M.; ARWOOD, J. W. *AMPX-77: a modular code system for generating coupled multigroup neutron-gamma cross-section libraries from ENDF/B-IV and/or ENDF/B-V*, ORNL/CSD/TM-283, 1978.
- 35 – GREENE, N. M.; CRAVEN JR, C. W. *XSDRN: a discrete ordinates spectral averaging code*, ORNL-TM-2500, Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, Tennessee, 1969.
- 36 – GUILLEMOT, J. C. Contribution a l'étude du transfert de rayonnement dans les nuages par la méthode des harmoniques sphériques. *Rev Opt*, v. 46, p. 281–308, 1967.
- 37 – JEANS, J. H. The equations of radiative transfer of energy. *Mon Not Roy Astron Soc*, v. 78, p. 28–36, 1917.
- 38 – KARP, A. H.; GREENSTADT, J.; FILLMORE, J. A. Radiative transfer through an arbitrarily thick, scattering atmosphere. *J Quant Spectrosc Radiat Transfer*, v. 24, p. 391–406, 1980.
- 39 – KARP, A. H. Computing the angular dependence of the radiation of a planetary atmosphere. *J Quant Spectrosc Radiat Transfer*, v. 25, p. 403–412, 1981.
- 40 – KIM, J. D. *WIMKAL-88, the 1988 version of the WIMS-KAERI library*. Report IAEA-NDS-98, IAEA Nuclear Data Section, Viena, 1990.

- 41 – KOBAYASHI, K. Spherical harmonics method for a two-dimensional multigroup transport equation using a semi-discrete ordinates equation: part I. *Nucl Sci Eng*, v. 92, p. 397–406, 1986.
- 42 – KOBAYASHI, K. Spherical harmonics method for a two-dimensional multigroup transport equation using a semi-discrete ordinates equation: part II. *Nucl Sci Eng*, v. 92, p. 407–420, 1986.
- 43 – KOFINK, W. Complete spherical harmonics solution of the Boltzmann equation for neutron transport in homogeneous media with cylindrical geometry. *Nucl Sci Eng*, v. 6, p. 475–486, 1959.
- 44 – KOURGANOFF, V. *Basic methods in transfer problems*, Clarendon Press, Oxford: 1952.
- 45 – LARSEN, E. W.; POMRANING, G. C. The P_N theory as an asymptotic limit of transport theory in planar geometry – I: Analysis. *Nucl Sci Eng*, v. 109, p. 49–75, 1991.
- 46 – LEE, C. E; DIAS, M. P. Analytical solutions to the moment transport equations –I : one-group one-region slab and sphere criticality. *Ann Nucl Energy*, v. 11, p. 515–530, 1984.
- 47 – LEE, C. E; FAN, W. C. P; DIAS, M. P. Analytical solutions to the moment transport equations –II : multiregion, multigroup 1-D slab, cylinder and sphere criticality and source problems. *Ann Nucl Energy*, v. 12, p. 613–632, 1985.
- 48 – LENOBLE, J. Application de la méthode des harmoniques sphériques au cas de la diffusion anisotrope. *C R Acad Sc Paris*, v. 252, p. 2087–2089, 1961.
- 49 – LUX, I.; KOBLINGER, L. *Monte carlo particle transport methods: neutron and photon calculations*, Boca Raton, CRC Press, Inc, Florida: 1991.
- 50 – MacFARLANE, R. E.; MUIR, D. W.; BOICOURT, R. M. *The NJOY nuclear data processing system, volume I: user's manual*, Report LA-9303-M, Vol. I (ENDF-324). Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, NM, 1982.

- 51 – MANDL, M. E. *The spherical harmonics method in plane and spherically symmetric geometry in multi-velocity-group theory, and its application in the two-velocity-group P_3 approximation*, Report AE-RE T/R 1295, Atomic Energy Establishment, 1953.
- 52 – MARK, J. C. *The spherical harmonic method I*. Report MT92, National Research Council of Canada, Atomic Energy Project, Ottawa, Canada: 1944.
- 53 – MARK, J. C. *The spherical harmonic method II*. Report MT97, National Research Council of Canada, Atomic Energy Project, Ottawa, Canada: 1945.
- 54 – MARSHAK, R. E. Note on the spherical harmonics method as applied to the Milne problem for a sphere. *Phys Rev*, v. 71, p. 443–446, 1947.
- 55 – McCORMICK, N. J.; SIEWERT C. E. Particular solutions for the radiative transfer equation. *J Quant Spectrosc Radiat Transfer*, v. 46, p. 519–522, 1991.
- 56 – NASCIMENTO, J. A.; PRATI, A.; CLARO, L. H. *Cálculos do Pré-Projeto Conceitual do Núcleo do Reator Rápido Experimental do Projeto REARA*. Instituto de Estudos Avançados, S.J. Campos, SP: 1994. (RP-IEAv-031).
- 57 – NESHAT, K.; SIEWERT, C. E.; ISHIGURO, Y. An improved P_L solution to the reflected critical-reactor problem in slab geometry. *Nucl Sci Eng*, v. 62, p. 330–332, 1977.
- 58 – NOBLE, B.; DANIEL, J. W. *Applied Linear Algebra*, 2nd. ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey: 1977.
- 59 – POMRANING, G. C. An improved free-surface boundary condition for the P_3 approximation. *Nucl Sci Eng*, v. 18, p. 528–530, 1964.
- 60 – POMRANING, G. C. Variational boundary conditions for the spherical harmonics approximation to the neutron transport equation. *Ann Phys*, v. 27, p. 193–215, 1964.

- 61 – ROSE, P. F.; DUNFORD, C. L. (Eds.) *Data formats and procedures for the evaluated nuclear data file ENDF-6*. BNL-NCS 44945, National Nuclear Data Center, Brookhaven National Laboratory, New York, 1991.
- 62 – ROUX, J. A.; SMITH, A. M.; TODD, D. C. Radiative transfer with anisotropic scattering and arbitrary temperature for plane geometry. *AIAAJ*, v. 13, p. 1203–1211, 1975.
- 63 – RULKO, R. P.; LARSEN E. W.; POMRANING, G. C. The P_N theory as an asymptotic limit of transport theory in planar geometry – II: Numerical results. *Nucl Sci Eng*, v. 109, p. 76–85, 1991.
- 64 – SIEWERT, C. E. A spherical-harmonics method for multi-group or non-gray radiation transport, *J Quant Spectrosc Radiat Transfer*, v. 49, p. 95–106, 1993.
- 65 – SIEWERT, C. E. On intensity calculations in radiative transfer. *J Quant Spectrosc Radiat Transfer*, v. 50, p. 555–560, 1993.
- 66 – SIEWERT, C. E. A discrete-ordinates solution for multigroup transport theory with upscattering, *J Quant Spectrosc Radiat Transfer*, v. 64, p. 255–271, 2000.
- 67 – SIEWERT, C. E.; THOMAS Jr. A particular solution for the P_N method in radiative transfer. *J Quant Spectrosc Radiat Transfer*, v. 43, p. 433–436, 1990.
- 68 – SMITH, B. T.; BOYLE, J. M.; DONGARRA, J. J.; GARROW, B. S.; IKEBE, Y.; KLEMA, V. C.; MOLER, C. B. *Matrix Eigensystem Routines - EISPACK Guide*, Springer, Berlin, 1976.
- 69 – SOLTESZ, R. G.; DISNEY, R. K. *Nuclear rocket shielding methods, modification, updating, and input data preparation, v. 4 - One-dimensional, discrete ordinates transport technique*. Pittsburg, Pa., Westinghouse Electric Corp. Aug. 1970. (WANL-PR-(LL)-034 (vol.4)).

- 70 – VIEIRA, W. J.; CLARO, L. H.; DIAS, A. F.; ONO, S. *Relatório de implantação de sistema para análise de transporte de radiação*. Instituto de Estudos Avançados, S. J. Campos, SP: 1995. (Nota Interna IEAv/RI-007).
- 71 – VILHENA, M. T.; BARICHELLO, L. B.; ZABADAL, J. R.; SEGATO, C. F.; CARDONA, A. V.; PAZOS, R. P. Solutions to the multidimensional linear transport equation by the spectral method. In: XI ENFIR/IV ENAN BRAZILIAN JOINT NUCLEAR CONFERENCE, 18-22 August, 1997, Poços de Caldas. *Prog Nucl Energy*, v. 35, p. 275-291, 1999.
- 72 – WHITE, J. E.; WRIGHT, R. Q.; INGERSOLL, D. T.; ROUSSIN, R. W.; GREENE, N. M.; MacFARLANE, R. E. *Vitamin-B6: A fine-group cross section library based on ENDF/B-VI for radiation transport applications*. INTERNATIONAL CONFERENCE ON NUCLEAR DATA FOR SCIENCE AND TECHNOLOGY, May 8-13, 1994, Gatlinburg, Tennessee.
- 73 – YAMAGUCHI, M.; MAIORINO, J. R. *MPN-1: Um módulo de computação para a solução da equação de transporte em multiregiões através do método P_N* . Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, São Paulo, SP: 1981. (IPEN - Inf-10).