CÁLCULO DO FATOR DE DESVANTAGEM TÉRMICA PARA UMA CÉLULA COM ESPALHAMENTO ANISOTROPICO ATRAVÉS DO MÉTODO F_N

J. R. MAIORINO

Centro de Engenharia Nuclear
Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares
Cidade Universitária - SP

RESUMO

O método F_N é usado para o cálculo do fator de desvantagem térmica em células com espalhamento anisotropico no moderador. Resultados numéricos foram obtidos para várias células e comparados com os resultados obtidos por outros métodos. Os resultados confirmaram a conclusão física, que termos de ordem superior na expansão da lei de espalhamentos' possuem um efeito insignificante sobre o fator de desvantagem térmica .

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho nós consideramos a aplicação do método F_N para calcular o fator de desvantagem térmica, requerido no cálculo da utilização térmica em células heterogeneas de reatores nucleares . Dos livros padrões em física de reatores /1, 2, 3/, é bem conhecido que o fator de desvantagem térmica é uma medida das diferenças dos fluxos de neutrons no combustível e no moderador, sendo definido em geometria plana, como :

$$\zeta = \frac{a}{\Delta} \frac{\int_a^b dx \int_{-1}^{1} \Psi_2(x,\mu)d\mu}{\int_0^a dx \int_{-1}^{1} \Psi_1(x,\mu)d\mu} , \qquad (1)$$

onde os subindices 1 e 2 denotam as regiões do combustível e do moderador respectivamente de uma célula básica, e "a" e "Δ=b-a", suas espessuras oticas, i.é., médidas em termos de livres caminhos médios .

Os cálculos anteriores desse parametro foram baseados na teoria de difusão /4/, no método A-B-H (Amouyal, Benoist e Horowitz) /5, 6/ e técnicas aproximadas de transporte /7, 8/ Ferziger e Robinson /9/ foram os primeiros que usaram o método de expansão em auto funções singulares /10/ para calcular ξ em uma célula com espalhamento isotropico no moderador. Bond e Siewert /11/, aqui referidos como B & S, extenderam este método e solucionaram o caso mais realista de espalhamento linearmente anisotropico no moderador. O caso mais geral de espalhamento anisotropico arbitrário no moderador, foi realizado por Eccleston e McCormick /12/, aqui referidos como E & M, entretanto os resultados numéricos desse trabalho foram questionados pelo trabalho de Laletin, Sultanov, Vlasov e Koniaev /13/, aqui referidos como L-S-V-K. Neste trabalho, nós pretendemos reportar alguns resultados numéricos, com o intuito de demonstrar os méritos computacionais do método F_N e decidir a controversia entre os trabalhos de E & M e L-S-V-K .

2. ANÁLISE

As equações de transporte de neutrons em um grupo de energia para o combustível e o moderador de uma célula básica são dadas por :

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \Psi_1(x,\mu) + \Psi_1(x,\mu) = \frac{1}{2} c_1 \sum_{\ell=0}^{L_1} (2\ell + 1) f_{1,\ell} P_\ell(\mu) \int_{-1}^{1} P_\ell(\mu')\Psi_1(x,\mu')d\mu', \quad 0 \leq x \leq a, \qquad (2.a)$$

e

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \Psi_2(x,\mu) + \Psi_2(x,\mu) = \frac{1}{2} c_2 \sum_{\ell=0}^{L_2} (2\ell + 1) f_{2,\ell} P_\ell(\mu) \int_{-1}^{1} P_\ell(\mu')\Psi_2(x,\mu')d\mu' + \frac{S}{\sigma_2}, \quad a \leq x \leq b. \qquad (2.b)$$

Aqui, nós permitimos espalhamento anisotropico de qualquer ordem em ambas as regiões, entretanto é bem conhecido que a hipotese de espalhamento isotropico na região do combustível é razoável, e então nós podemos considerar $L_1 = 0$, enquanto que no moderador, constituido de materiais leves, o espalhamento é anisotropico, e então $L_2 > 0$. O termo S representa uma fonte constante e isotrópica resultando dos neutrons moderados no moderador, σ_2 é a secção de choque macroscópico total no moderador, e as condições de contorno são :

$$\Psi_1(0,\mu) = \Psi_1(0,-\mu) \ , \ \mu > 0, \qquad (3.a)$$

$$\Psi_2(b,\mu) = \Psi_2(b,-\mu) \ , \ \mu > 0, \qquad (3.b)$$

$$\Psi_1(a,\mu) = \Psi_2(a,\mu) \ , \ \mu > 0, \tag{3.c}$$

$$\Psi_1(a,-\mu) = \Psi_2(a,-\mu) \ , \ \mu > 0, \tag{3.d}$$

$$\int_{-1}^{1} \mu\Psi_1(0,\mu)d\mu = 0, \tag{3.e}$$

e

$$\int_{-1}^{1} \mu\Psi_1(b,\mu)d\mu = 0. \tag{3.f}$$

Desde que $\psi_1 \ (x,\mu)$ e

$$\Psi_2^*(x,\mu) = \Psi_2(x,\mu) - \frac{S}{\sigma_2(1 - c_2)} \tag{4}$$

podem ser expressas em termos das soluções elementares /9/ das Eqs. (2), fornecidas pelo método de Case, nós podemos usar as propriedades de ortogonalidade das autofunções de Case junto com as condições de contorno, dadas pelas Eqs. (3), para deduzir o seguinte conjunto de equações integrais singulares, para as distribuições angulares nos contornos :

$$\int_0^1 \mu \left[\phi_1(\xi,\mu) - \phi_1(-\xi,\mu)\right] \Psi(0,\mu)d\mu + e^{-a/\xi}\int_0^1 \mu \left[\phi_1(-\xi,\mu)\Psi(a,\mu) - \phi_1(\xi,\mu)\Psi(a,-\mu)\right] d\mu = 0, \tag{5.a}$$

$$\int_0^1 \mu \left[\phi_1(\xi,\mu)\Psi(a,\mu) - \phi_1(-\xi,\mu)\Psi(a,-\mu)\right] d\mu + e^{-a/\xi}\int_0^1 \mu \left[\phi_1(-\xi,\mu) - \phi_1(\xi,\mu)\right] \Psi(0,\mu)d\mu = 0, \tag{5.b}$$

$$\int_0^1 \mu \left[\phi_2(\xi,\mu)\Psi(a,-\mu) - \phi_2(-\xi,\mu)\Psi(a,\mu)\right] d\mu$$

$$+ e^{-\Delta/\xi}\int_0^1 \mu \left[\phi_2(-\xi,\mu) - \phi_2(\xi,\mu)\right]\Psi(b,\mu)d\mu \tag{6.a}$$

$$= \frac{S\xi}{\sigma_2}\left[1 - e^{-\Delta/\xi}\right],$$

$$\int_0^1 \mu \left[\phi_2(\xi,\mu) - \phi_2(-\xi,\mu)\right]\Psi(b,\mu)d\mu$$

$$+ e^{-\Delta/\xi}\int_0^1 \mu \left[\phi_2(-\xi,\mu)\Psi(a,-\mu) - \phi_2(\xi,\mu)\Psi(a,\mu)\right] d\mu \tag{6.b}$$

$$= \frac{S\xi}{\sigma_2}\left[1 - e^{-\Delta/\xi}\right],$$

onde $\varnothing_j$ (ξ, μ), $j=1,2$ são as auto funções de Case /9/, e nós omitimos os subindices nas distribuições angulares. Nós notamos, que as Eqs. (5) requerem $\xi \in P_1=\{\nu_{1,\beta}\}\cup(0,1)$, e as Eqs. (6) requerem $\xi \in P_2=\{\nu_{2,\beta}\}\cup(0,1)$, onde $\nu_{1,\beta}$ e $\nu_{2,\beta}$ são os autovalores discretos da equação de transporte, Eqs.2, para as regiões 1 e 2 respectivamente.

Nós agora introduzimos, para $\mu>0$, as seguintes aproximações.

$$\Psi(0,\mu) = \sum_{\alpha=0}^{N} a_\alpha \mu^\alpha, \tag{7.a}$$

$$\Psi(a,-\mu) = \sum_{\alpha=0}^{N} e_\alpha \mu^\alpha, \tag{7.b}$$

$$\Psi(a,\mu) = \sum_{\alpha=0}^{N} f_\alpha \mu^\alpha, \tag{7.c}$$

e

$$\Psi(b,\mu) = \sum_{\alpha=0}^{N} b_\alpha \mu^\alpha \tag{7.d}$$

nas Eqs. (5 e 6) e consideramos as equações resultantes para valores sele cionados de ξ_β. Então os coeficientes das aproximações F_N, dadas pelas Eqs. (7), podem ser obtidos da solução do seguinte sistema de 4 (N+1) equações algebricas lineares :

$$\sum_{\alpha=0}^{N} \left\{ a_\alpha \left[B_\alpha^{(1)}(\xi_\beta) - A_\alpha^{(1)}(\xi_\beta) \right] + e^{-a/\xi_\beta} \left[f_\alpha A_\alpha^{(1)}(\xi_\beta) - e_\alpha B_\alpha^{(1)}(\xi_\beta) \right] \right\} = 0, \tag{8.a}$$

$$\sum_{\alpha=0}^{N} \left\{ \left[f_\alpha B_\alpha^{(1)}(\xi_\beta) - e_\alpha A_\alpha^{(1)}(\xi_\beta) \right] + e^{-a/\xi_\beta} a_\alpha \left[A_\alpha^{(1)}(\xi_\beta) - B_\alpha^{(1)}(\xi_\beta) \right] \right\} = 0, \tag{8.b}$$

$$\sum_{\alpha=0}^{N} \left\{ \left[e_\alpha B_\alpha^{(2)}(\xi_\beta) - f_\alpha A_\alpha^{(2)}(\xi_\beta) \right] + e^{-\Delta/\xi_\beta} b_\alpha \left[A_\alpha^{(2)}(\xi_\beta) - B_\alpha^{(2)}(\xi_\beta) \right] \right\} = \frac{2S}{c_2\sigma_2} \left[1 - e^{-\Delta/\xi_\beta} \right], \tag{9.a}$$

e

$$\sum_{\alpha=0}^{N} \left\{ b_\alpha \left[B_\alpha^{(2)}(\xi_\beta) - A_\alpha^{(2)}(\xi_\beta) \right] + e^{-\Delta/\xi_\beta} \left[e_\alpha A_\alpha^{(2)}(\xi_\beta) - f_\alpha B_\alpha^{(2)}(\xi_\beta) \right] \right\} = \frac{2S}{c_2\sigma_2} \left[1 - e^{-\Delta/\xi_\beta} \right]. \tag{9.b}$$

as funções $A\alpha^{(i)}$ e $B\alpha^{(i)}(\xi)$ aparecendo nas Eqs. (8) e (9) são aquelas publicadas por Siewert, Maiorino e Ozisik /14/, e então neste trabalho nós não repetimos todas as definições requeridas. Agora, integrando a Eq (2) de $\mu=-1$ a $\mu=1$, nós podemos definir as seguintes equações de continuidade .

$$\frac{d}{dx}\int_{-1}^{1}\Psi_1(x,\mu)d\mu + (1-c_1)\int_{-1}^{1}\Psi_1(x,\mu)d\mu = 0, \tag{10.a}$$

e

$$\frac{d}{dx}\int_{-1}^{1}\mu\Psi_2(x,\mu)d\mu + (1-c_2)\int_{-1}^{1}\Psi_2(x,\mu)d\mu = \frac{2S}{\sigma_2} . \tag{10.b}$$

Agora, nós integramos na variável x, a Eq (10-a), de x=0 até x=a, e a Eq (10-b) de x=a até x=b, e fazemos uso das condições de contorno, Eqs. (3e-3f), para obtermos :

$$(1-c_1)\int_0^a dx\int_{-1}^{1}\Psi_1(x,\mu)d\mu = -\int_{-1}^{1}\Psi(a,\mu)\mu d\mu , \tag{11.a}$$

e

$$(1-c_2)\int_a^b dx\int_{-1}^{1}\Psi_2(x,\mu)d\mu = \frac{2S}{\sigma_2}(b-a)\int_{-1}^{1}\Psi(a,\mu)\mu d\mu . \tag{11.b}$$

Portanto, nós podemos expressar o fator de desvantagem, dado pela Eq. (1) como :

$$\zeta = \frac{a}{\Delta}\left(\frac{1-c_1}{1-c_2}\right)\left\{-1-\frac{2S\Delta}{\sigma_2}\left[\int_{-1}^{1}\Psi(a,\mu)\mu d\mu\right]^{-1}\right\}, \tag{12}$$

ou, se nós usarmos as aproximações dadas pelas Eqs. (1b e 1c), e normalizeremos, sem perda de generalidade, $2s\Delta = \sigma_2$ nós obtemos :

$$\varsigma = \frac{a}{\Delta}\left(\frac{1 - c_1}{1 - c_2}\right)\left\{\left[\sum_{\alpha=0}^{N}\left(\frac{e_\alpha - f_\alpha}{\alpha + 2}\right)\right]^{-1} - 1\right\} \tag{13}$$

Então, solucionada as equações F_N, dadas pelas Eqs. (8) e (9) para os coeficientes e_α e f_α nós podemos calcular o fator de desvantagem através da Eq. (13) .

3. RESULTADOS NUMÉRICOS

Os pontos ξ_β, usados na Eq. (8), foram selecionados de acordo com o seguinte esquema : $\xi_\beta^{(1)} = \nu_{1,\beta}$, $\beta = 0, 1, 2, \ldots\ldots \kappa_1-1$, $\xi^{(i)}_{j+\kappa_1-1} = (2j-1) / [2(N-\kappa_1+1)]$, $j=1,2 \ldots, (N-\kappa_1 + 1)$, onde N é a ordem da aproximação, $\nu_{1,\beta}$ são os auto valores discretos e κ_1 é o número de pares de auto valores discretos. Nós escolhemos os pontos $\xi\beta^{(2)}$ a serem usados na Eq. (9) da mesma maneira .

Nós calculamos o fator de desvantagem para as mesmas células consideradas por B & S, E & M e L-S-V-K, e então nós consideramos $c_1 = 0{,}55370$ e $c_2 = 0{,}99163$. Para termos uma comparação entre vários métodos computacionais, nós inicialmente consideramos espalhamento isotropico nas duas regiões, e na tabela 1 nós reportamos os resultados do método F_N junto com outros resultados obtidos por vários metódos. Nós também consideramos os casos de espalhamento linearmente anisotropico no moderador, estudados por B & S, e na tabela 2 nós mostramos os resultados do método F_N e comparamos com aqueles de B & S. A tabela 3 contém os dados básicos, para a lei de espalhamento, estudados por E & M e L-S-V-K, e na tabela 4, nós resportamos os resultados do método F_N junto com os resultados obtidos por E & M e L-S-V-K. Torna-se evidente que os resultados de E & M estão errados para os casos 3,4 e 6. Finalmente, notamos que o Método F_N fornece resultados de acordo com os publicados na literatura. Além disso, nossos resultados confirmam a conclusão física (questionada por E & M) que termos de alta ordem na lei de espalhamento possuem pouco efeito no cálculo do fator de desvantagem .

Tabela 1

Fator de Desvantagem para Espalhamento Isotropico no Moderador e Combustível : Comparação entre vários Métodos .

MÉTODO COMPUTACIONAL	CÉLULA 1[8]	CÉLULA 2[8]	CÉLULA 3[8]	CÉLULA 4[8]
P-1 (10)	1,028	1,113	1,253	1,447
Difusão Asimtótica (72)	1,06	1,18	1,34	1,56
A.B.H. (104)	1,08	1,20	1,36	1,58
S-8 (75)	1,090	1,231	1,410	1,632
Teoria Integral Transporte (18)	1,0979	1,2318	1,408	1,629
Ferziger e Robinson (36)	1,094	1,227	1,401	1,623
E & S (10)	1,0978	1,2317	1,4077	1,6284
F_3	1,0969	1,2305	1,4072	1,6286
F_5	1,0971	1,2317	1,4077	1,6285
F_7	1,0975	1,2318	1,4076	1,6284
F_9	1,0977	1,2318	1,4075	1,6284

[8]Dimensões das células são as mesmas daquelas resportadas na Tabela 2 .

Tabela 2

Fator de desvantagem para Espalhamento Linearmente Anisotropico no Moderador

MÉTODO COMPUTACIONAL	COEFICIENTE DE ANISOTROPIA ($f_{2,1}$)	ξ-FATOR DE DESVANTAGEM CÉLULA $_1$[9]	CÉLULA $_2$[9]	CÉLULA $_3$[9]	CÉLULA $_4$[9]
B & S		1.0970	1.2283	1.4001	1.6151
F_3	0.0333	1.0960	1.2271	1.3996	1.6153
F_5		1.0962	1.2283	1.4001	1.6153
F_7		1.0967	1.2284	1.4000	1.6151
B & S		1.0953	1.2215	1.3849	1.5885
F_3	0.1	1.0943	1.2203	1.3844	1.5887
F_5		1.0945	1.2214	1.3849	1.5887
F_7		1.0950	1.2216	1.3848	1.5885
B & S		1.0927	1.2113	1.3621	1.5485
F_3	0.2	1.0917	1.2101	1.3616	1.5487
F_5		1.0919	1.2111	1.3621	1.5486
F_7		1.0924	1.2114	1.3620	1.5485
B & S		1.0901	1.2010	1.3392	1.5083
F_3	0.3	1.0892	1.1998	1.3388	1.5985
F_5		1.0894	1.2010	1.3393	1.5085
F_7		1.0898	1.2011	1.3392	1.5084

[9] Célula 1 : a=0,0717 (0,10cm), b=0,8872 (0,45cm); Célula 2 : a=0,1434 (0,20 cm), b=1,7744 (0,90 cm); Célula 3 ; a=0,2150 (0,30 cm), b=2.6015 (1,35 cm); Célula 4 : a=0,2868 (0,40 cm), b =3.5488 (1,80 cm) .

Tabela 3 - Dados Básicos[10]

Caso	$3f_{2,1}$	$5f_{2,2}$	$7f_{2,3}$	$9f_{2,4}$
1	0	0	0	0
2	2	0	0	0
3	2	1.25	0	0
4	2	1.25	0	-0,375
5	0.97088	0	0	0
6	0.97088	0.24428	0	0

[10] Para todos os casos $f_{1,L} = \delta_{0,L} = 1, \quad f_{2,L} = 0, \quad L > 4$

Tabela 4 - Fator de desvantagem, Comparação de E & M, L-S-V-K e F_N

	E & S		L-S-V-K		F_3		F_5		F_7	
CASO	CÉLULA A	CÉLULA B	CÉLULA A	CÉLULA B	CÉLULA A	CÉLULA B	CÉLULA A	CÉLULA B	CÉLULA A	CÉLULA B
1	1,2317	1,6284	1,2314	1,6284	1,2305	1,6286	1,2317	1,6286	1,2316	1,6284
2	1,1634	1,3599	1,1630	1,3599	1,1622	1,3601	1,1633	1,3600	1,1635	1,3599
3	1,0664	1,1924	1,1679	1,3682	1,1672	1,3685	1,1683	1,3684	1,1684	1,3683
4	1,0554	1,1752	1,1678	1,3682	1,1671	1,3684	1,1681	1,3683	1,1683	1,3682
5	1,1986	1,4988	1,1982	1,4989	1,1974	1,4990	1,1985	1,4990	1,1986	1,4988
6	1,1405	1,4049	1,1991	1,5002	1,1963	1,5004	1,1994	1,5003	1,1995	1,5002

[11] Dimensões Celulares : Cell A - a = 0.1434 (0,2 cm), Δ = 1,631 (0,7 cm)

Cell B - a = 0.2868 (0,4 cm), Δ = 3,262 (1,4 cm)

REFERÊNCIAS

1. Lamarsh, J.R. 1966 . "Introduction to Nuclear Reactor Theory". Addison - Wesley Publishing Co., Reading, Massachusetts .

2. Murray, R.L. 1957. "Nuclear Reactor Physics", Prentice-Hall - Englewood Cliffs, N.J.

3. Zweifeld, P.F. 1973. "Reactor Physics" MacGraw Hill, New York.

4. Pomraning, G. C.; & M. Clark 1963 . "A new asymptotic diffusion theory" Nuc. Sci. Eng. 17:227-233 .

5. Amouyal, A., P. Benoist, & J. Horowitz. 1975. Nouvelle methode de determination du facteur d'utilization termique d'ume cellule. J. Nucl. Energy. 6:79-98 .

6. Theys, M. 1960. "Integral transport theory of thermal utilization factor in infinite slab geometry. Nucl. Sci. Eng. 7:58-63 .

7. Carlvik, I. 1967. "Calculations of neutron flux distributions by means of integral transport methods . AE-279, Aktiebolaget Atomenergi, Stockholm.

8. Case, K.M., & P.F. Zweifel. 1967. "Linear Transport Theory" Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Massachusetts .

9. Robinson, A. 1965. "Transport calculation of the disadvantage factor. Ph.D. Thesis, Stanford University, Stanford, California .

10. Ferziger, J. H., & A. Robinson. 1965. "A transport theoretical calculation of the disadvantage factor" Nucl Sci. Eng. 21:382-389 .

11. Bond, G.R., & C.E. Siewert. 1969. "The effect of linearly anisotropic neutron scattering on disadvantage factor calculation". Nucl. Sci. Eng. 35:277-282 .

12. Eccleston, G.W., & N.J. McCormick. 1970. "One speed transport disadvantage factor calculation of general anisotropic scattering", J. Nucl. Energy. 24:23-34 .

13. Latelin, N.I., N.V. Sultanov, Y.A. Vlasov & S.I. Koniaev. 1974. "The effects of the anisotropic scattering on the thermal utilization factor". Annals of Nucl. Sci Eng. 1:333-338 .

14. Siewert, C.E., J.R.Maiorino, & M.N. Ozisik. 1980. The use of the F_N method for radiative transfer with reflective boundary conditions. J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer (in press) .