



**AUTARQUIA ASSOCIADA À UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

**MODELAGEM DE TESTES ACELERADOS COM  
ESFORÇO APLICADO EM NÍVEIS EM  
UM ESTUDO DE FADIGA MECÂNICA**

**JOÃO MÁRIO ANDRADE PINTO**

**Tese apresentada como parte dos  
requisitos para obtenção do Grau de  
Doutor em Ciências na Área de  
Tecnologia Nuclear - Reatores.**

**Orientador:  
Prof. Dr. Miguel Mattar Neto**

©

**São Paulo  
2004**

**INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES**  
Autarquia Associada à Universidade de São Paulo

**MODELAGEM DE TESTES ACELERADOS COM ESFORÇO APLICADO EM  
NÍVEIS EM UM ESTUDO DE FADIGA MECÂNICA**

**JOÃO MÁRIO ANDRADE PINTO**



Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do Grau de Doutor em Ciências na Área de Tecnologia Nuclear – Reatores.

Orientador:

**Prof. Dr. Miguel Mattar Neto**

Para  
Vânia, Felipe e Flávio  
com muito amor.

**“Cumulative exposure models are like the weather. Everybody talks about them, but nobody does anything about them”.**

**“Modelos de exposição cumulativa são como o tempo. Todos falam deles, mas ninguém faz nada concernente a eles”.**

**Wayne Nelson**

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Miguel Mattar Neto pela orientação e pelo constante apoio.

Ao Prof. Dr. Enrico Antônio Colosimo pela inestimável cooperação e pela intensa troca de idéias.

Ao Dr. João Carlos Figueira Pujol pelo apoio na aplicação dos algoritmos genéticos.

Aos amigos fraternos Geraldo, Roberto, Tanius e Silvério por dividirem comigo os meus momentos de angústia e de alegria.

Ao Maurício Mendes Campos e ao Vagner Antônio de Oliveira pela solicitude e pela abnegada contribuição para esta tese.

À minha irmã Eliana Andrade Pinto pela ajuda essencial nas armadilhas da língua inglesa.

Aos técnicos do CDTN, em especial aos do Laboratório de Ensaios Mecânicos do Serviço de Integridade Estrutural (EC2), pela colaboração na realização dos ensaios de fadiga flexo-rotativos.

Ao CDTN, por viabilizar o desenvolvimento deste trabalho.

A todos que, direta ou indiretamente, colaboraram para o desenvolvimento deste trabalho, meus sinceros agradecimentos.

Ao Felipe e ao Flávio, meus filhos e amigos, que souberam compreender meus momentos de ausência quando estive absorvido no trabalho.

À Vânia que me incentivou e me apoiou nos momentos de angústia e de desânimo, com toda a delicadeza que lhe é peculiar, sempre vibrando com minhas conquistas e me estimulando quando me encontrava perdido. Tudo o que conquistei na vida, todos os meus pretensos sucessos, devo à minha encantadora esposa, companheira, solidária e fonte de inspiração e de amparo.

## MODELAGEM DE TESTES ACECELERADOS COM ESFORÇO APLICADO EM NÍVEIS EM UM ESTUDO DE FADIGA MECÂNICA

João Mário Andrade Pinto

### RESUMO

O trabalho aqui apresentado diz respeito à modelagem de vida de fadiga em corpos-de-prova de aço submetidos a esforços cíclicos aplicados em níveis. O modelo desenvolvido é um modelo de exposição cumulativa linear, que consiste de dois componentes: um determinístico e outro estocástico. Para o componente determinístico foi empregado a relação potência inversa e para o estocástico foram utilizados tanto a distribuição de Weibull quanto a distribuição lognormal. No desenvolvimento do modelo utilizaram-se os ensaios flexo-rotativos em corpos de prova de aço SAE 8620 para gerar os dados experimentais, necessários para estimar os parâmetros do modelo.

O método de estimação dos parâmetros do modelo, desenvolvido neste trabalho, foi o da máxima verossimilhança, já que este método permite a incorporação das censuras no processo de estimação, além de possuir propriedades que possibilitam a construção de intervalos de confiança para as grandezas de interesse. No entanto, a função de verossimilhança, obtida neste trabalho, é uma função mal comportada, possuindo vários máximos, pontos de singularidades (pontos onde a função não é definida como logaritmos de zero e de números negativos), exponenciais com expoente muito grande etc, tornando-se inviável a aplicação de algoritmos clássicos para obtenção do máximo da função. Para contornar este problema foram utilizados algoritmos genéticos (AG) pela sua capacidade de pesquisar espaços grandes e complexos e que exige as menores restrições possíveis para a função de verossimilhança.

Depois de feito o ajuste dos modelos aos dados experimentais foi definido e analisado os resíduos, com o propósito de avaliar a adequação do modelo ajustado a tais dados. Verificou-se que não há razão para duvidar da adequação do modelo potência inversa-lognormal, já o modelo potência inversa-Weibull parece ser inapropriado para descrever os resultados do teste de fadiga em questão.

Utilizando-se o modelo potência inversa-lognormal foram construídas as curvas SNP e suas respectivas faixas de confiança no nível de significância de 5%.

## STEP-STRESS ACCELERATED TESTS MODELING IN A MECHANICAL FATIGUE STUDY

João Mário Andrade Pinto

### *ABSTRACT*

This work presents fatigue life-time modeling applied to steel specimen submitted to a step-stress accelerated-life test. Two linear cumulative exposure models were developed, that consist of deterministic and stochastic components. For the first component it was used the inverse power relationship and for the stochastic component, both the Weibull and the lognormal distributions were used. To develop the model rotating-bending fatigue testing was applied to specimens of steel SAE 8620 to generate the experimental data, necessary to estimate the model parameters.

To estimate the parameters of the models, the maximum likelihood method was used. This method was selected, because it allows the incorporation of censored data in the estimate process and, moreover this method has properties that make it possible the construction of confidence intervals for the features of interest. However, the maximum likelihood function, obtained in this work, is a complex, multimodal function, showing several singularities, high order powers, etc, making it infeasible the application of traditional optimization algorithms. To bypass this problem genetic algorithms were utilized, due to its ability to search large and complex spaces, and because they impose less constraints to the likelihood function.

After fitting the models to the experimental data, the residuals were defined and analyzed, to assess the adequacy of the statistical model fitted to such data. The results suggest that inverse power-lognormal model fits the data well, whereas the inverse power-Weibull model does not seem to be suitable to

describe the SAE 8620 fatigue data. As a consequence, the inverse power-lognormal model was used to estimate the SNP curves and their respective 95% confidence limits.

## SUMÁRIO

	<b>Página</b>	
1	INTRODUÇÃO	21
2	O ESTADO DA ARTE DE TESTES ACELERADOS	25
2.1	<i>Modelos para Teste Acelerado com Estresse Aplicado em Níveis, com Distribuição Conhecida e Abordagem Bayesiana.</i>	27
2.2	<i>Modelos para Teste Acelerado com Estresse Aplicado em Níveis, com Distribuição Conhecida e Abordagem Freqüentista.</i>	29
2.3	<i>Modelos para Teste Acelerado com Estresse Constante, com Distribuição Conhecida e Abordagem Freqüentista.</i>	33
2.4	<i>Modelos de Estresse Constante e com Distribuição Desconhecida (Modelos não Paramétricos)</i>	34
2.5	<i>Modelos de Estresse Aplicado em Níveis e com Distribuição Desconhecida (Modelos não Paramétricos).</i>	34
2.6	<i>Otimização de Testes com Esforço Aplicado em Níveis.</i>	35
2.7	<i>Conclusões e Comentários sobre as Abordagens de Modelagem dos Testes Acelerados</i>	37
3	FADIGA	40
3.1	<i>Fadiga Controlada pela Tensão</i>	41
3.2	<i>Fadiga Controlada pela Deformação</i>	44
3.3	<i>Acúmulo de Danos</i>	45
3.4	<i>Dispersão dos Dados de Fadiga</i>	48

		11
4	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	53
4.1	<i>Conceitos Básicos em Confiabilidade</i>	53
4.1.1	<i>Confiabilidade e falha</i>	53
4.1.2	<i>Censura</i>	54
4.1.3	<i>Função de confiabilidade</i>	54
4.2	<i>Tipos de Testes Acelerados</i>	55
4.3	<i>Modelos para Testes Acelerados com Amplitude Constante da Tensão Alternada</i>	58
4.3.1	<i>Relações tensão-resposta</i>	59
4.3.1.1	Relação de Arrhenius	59
4.3.1.2	Relação potência inversa	59
4.3.2	<i>Modelos probabilísticos para o tempo de vida</i>	60
4.3.2.1	Modelos Arrhenius-Weibull e potência inversa-Weibull	60
4.3.2.2	Modelos Arrhenius-valor extremo e potência inversa-valor extremo	60
4.3.2.3	Modelos Arrhenius-lognormal e potência inversa-lognormal	61
4.3.2.4	Dispersão do tempo de vida	62
4.4	<i>Estimação dos Parâmetros do Modelo Estatístico</i>	63
4.4.1	<i>Método da máxima verossimilhança</i>	63
4.4.2	<i>Intervalos de confiança</i>	64
4.5	<i>Teste Acelerado com Tensão Alternada Aplicada em Níveis – Modelo de Exposição Cumulativa</i>	65
4.5.1	<i>Uso da distribuição lognormal e relação potência inversa</i>	68
4.5.2	<i>Uso da distribuição de Weibull e relação potência inversa</i>	69
4.5.3	<i>Uso da distribuição lognormal e relação de Arrhenius</i>	69
4.5.4	<i>Uso da distribuição de Weibull e relação de Arrhenius</i>	70
4.5.5	<i>Função de verossimilhança</i>	71
5	MODELO PROBABILÍSTICO PARA O TEMPO DE FALHA POR FADIGA COM EXPOSIÇÃO CUMULATIVA	72

		12
5.1	<i>Distribuição de Weibull e Relação Potência Inversa</i>	72
5.1.1	<i>Função densidade e função de distribuição do modelo EC</i>	73
5.1.2	<i>Determinação do tempo inicial equivalente</i>	73
5.1.3	<i>Função de verossimilhança</i>	75
5.2	<i>Distribuição Lognormal e Relação Potência Inversa</i>	76
5.2.1	<i>Função densidade e função de distribuição do modelo EC</i>	76
5.2.2	<i>Determinação do tempo inicial equivalente</i>	77
5.2.3	<i>Função de verossimilhança</i>	77
5.3	<i>Estimadores de Máxima Verossimilhança dos Parâmetros</i>	78
5.4	<i>Solução Numérica</i>	78
5.4.1	<i>Uso do aplicativo baseado em algoritmo genético</i>	78
5.5	<i>Definição dos Resíduos</i>	80
6	EXPERIMENTOS E RESULTADOS	83
6.1	<i>Material Testado</i>	87
6.1.1	<i>Composição química</i>	87
6.1.2	<i>Caracterização mecânica</i>	88
6.2	<i>Corpo-de-prova</i>	88
6.3	<i>Descrição do Ensaio</i>	89
6.4	<i>Planejamento do Ensaio</i>	92
6.5	<i>Resultados Obtidos</i>	93
7	APLICAÇÃO DOS MODELOS AOS DADOS EXPERIMENTAIS	95
7.1	<i>Estimação dos Parâmetros e Intervalos de Confiança</i>	95
7.1.1	<i>Modelo potência inversa- Weibull</i>	95
7.1.2	<i>Modelo potência inversa-lognormal</i>	97
7.2	<i>Verificação da Adequação dos Modelos por Meio dos Resíduos</i>	98
7.2.1	<i>Modelo potência inversa-Weibull</i>	99
7.2.2	<i>Modelo potência inversa-lognormal</i>	101

7.3	<i>Aplicação do Modelo Ajustado: Estimação por Intervalo dos Percentis</i>	103
7.3.1	<i>Modelo potência inversa-lognormal</i>	103
8	CONCLUSÕES, CONTRIBUIÇÕES E PERSPECTIVAS DE TRABALHO FUTURO.	109
8.1	<i>Conclusão</i>	109
8.2	<i>Contribuições</i>	110
8.3	<i>Perspectivas de Trabalho Futuro</i>	110
	ANEXO A: Algoritmos Genéticos	113
1	Introdução	113
2	O que são algoritmos genéticos (AG)?	115
3	Justificativa para uso de algoritmo genético	117
4	Implementação de um AG	117
4.1	Codificação	118
4.2	Medida de aptidão	119
4.3	Operadores genéticos	119
4.3.1	Seleção	121
4.3.2	Cruzamento ("CROSSOVER")	123
4.3.3	Mutação	125
4.4	Parâmetros genéticos	125
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	127

## LISTA DE FIGURAS

	<b>Página</b>
FIGURA 3-1: Gráfico da tensão cíclica reversa	43
FIGURA 3-2: Temperaturas medidas no diâmetro externo da tubulação em função das horas do dia	44
FIGURA 3-3 – Curva S-N genérica	46
FIGURA 3-4 – Curva S-N em escala semi-log.	47
FIGURA 3-5 - Dados de fadiga para níveis da tensão constante em um gráfico S-N	50
FIGURA 3-6 - Representação estatística de dados de fadiga	51
FIGURA 3-7 - Curva S-N típica em escala log-log	51
FIGURA 4-1: Funções de confiabilidade para dois produtos	55
FIGURA 4-2: Aplicação de nível constante da tensão.	56
FIGURA 4-3: Aplicação da tensão em diferentes níveis	56
FIGURA 4-4: Aplicação de nível progressivo da tensão	57
FIGURA 4-5: Aplicação da tensão alternada.	57
FIGURA 4-6: Carregamento com nível aleatório da tensão	58
FIGURA 4-7: Tempo de falha e de censura numa configuração da tensão alternada aplicada em três níveis diferentes.	66
FIGURA 4-8: Funções de distribuição para os três níveis da tensão alternada constantes ( $S_1$ , $S_2$ e $S_3$ ) e os tempos iniciais equivalentes.	66

FIGURA 4-9: Modelo probabilístico para o tempo de falha como função do nível aplicado da tensão alternada.	67
FIGURA 6-1 - Resultados de dois tipos de ensaios de fadiga, axial e flexo-rotativo.	86
FIGURA 6-2: Geometria dos corpos-de-prova utilizados nos testes de fadiga flexo-rotativa	89
FIGURA 6-3: Foto do corpo-de-prova utilizado nos testes de fadiga flexo-rotativa.	89
FIGURA 6-4: Máquina de fadiga flexo-rotativa	90
FIGURA 6-5: Esquema que mostra a aplicação de cargas (dimensões em mm).	90
FIGURA 6-6: Máquina de fadiga flexo-rotativa com sistema de refrigeração	91
FIGURA 6-7: Montagem com fixação bilateral. Diagrama dos momentos fletores e força cortante (MANSUR, 2003)	92
FIGURA 6-8: Gráfico das curvas S-N-P para o aço SAE 8620, com probabilidades de falha de 1%, 50% e 99%	93
FIGURA 7-1: Gráfico da distribuição do valor extremo para os resíduos.	101
FIGURA 7-2: Gráfico da distribuição normal para os resíduos.	103
FIGURA 7-3: Limites de 95% de confiança para o percentil 1%. Gráfico do log (S) vs. Log (N), onde S é dado em MPa e N em número de ciclos.	107
FIGURA 7-4: Limites de 95% de confiança para o percentil 50%. Gráfico do log (S) vs. Log (N), onde S é dado em MPa e N em número de ciclos.	107
FIGURA 7-5: Limites de 95% de confiança para o percentil 99%. Gráfico do log (S) vs. Log (N), onde S é dado em MPa e N em número de ciclos.	108
FIGURA A-1: Fluxograma do algoritmo genético convencional (adaptado de KOZA, 2000).	116
FIGURA A-2: Cruzamento de um ponto.	124
FIGURA A-3: Cruzamento de dois pontos.	124
FIGURA A-4: Cruzamento uniforme.	124

FIGURA A-5: Exemplo de mutação "flip over".

**LISTA DE TABELAS**

	<b>Página</b>
TABELA 6-1 – Composição química prevista para o aço SAE 8620	88
TABELA 6-2 – Composição química prevista para o aço SAE 8620 (continuação)	88
TABELA 6-3 – Propriedades mecânicas do aço SAE 8620 virgem no nível de confiança de 95% (ALVARENGA JUNIOR, 2001)	88
TABELA 6-4 – Resultados do número de ciclos a que os corpos-de-prova foram submetidos para cada nível da tensão alternada	94
TABELA 7-1: Resultados das estimativas de máxima verossimilhança	96
TABELA 7-2: Matriz de covariância assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança	96
TABELA 7-3: Resultados das estimativas de máxima verossimilhança	98
TABELA 7-4: Matriz de covariância assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança	98
TABELA 7-5: Resultados dos resíduos	100
TABELA 7-6: Resultados dos resíduos	102
TABELA 7-7: Estimativa por intervalo dos percentis	106

## LISTA DE SÍMBOLOS

- A – parâmetro da relação potência inversa, cujo valor depende do item, da fabricação, das condições de teste, etc.
- C – parâmetro da relação de Arrhenius, cujo valor depende do mecanismo de falha do item, das condições de teste.
- D – dano no material provocado por fadiga
- $D_j$  – dano parcial sob o nível da tensão  $S_j$ .
- E – energia de ativação (normalmente dada em elétrons-volt) da relação de Arrhenius.
- $F(.)$  – função de distribuição.
- $f(.)$  – função densidade de probabilidade.
- $j$  – denota o nível da tensão aplicado ao corpo-de-prova;  $0 \leq j \leq m$ .
- $I_\theta$  – matriz de informação observada.
- $k$  – constante de Boltzmann ( $8,617385 \times 10^{-5}$  eV/K, valor extraído de LIDE, 1996).
- L – função de verossimilhança.
- $i$  – índice para o corpo-de-prova;  $0 \leq i \leq n$ .
- $m$  – número de níveis da tensão.
- $n$  – número de corpos-de-prova.
- $n_j$  – número de ciclos aplicado ao material na amplitude  $S_j$  da tensão alternada.
- N – logaritmo do número de ciclos da curva S-N-P.
- S – amplitude da tensão alternada.
- $S_j$  – nível  $j$  da tensão.
- $X_j$  – tempo aleatório até a falha, dado em número de ciclos.
- $x_j$  – tempo em que o item é submetido a um nível  $S_j$  da tensão, dado em número de ciclos.
- $x_p$  – percentil (100p)%.
- Z – é a variável aleatória da distribuição normal padrão.

## SÍMBOLOS GREGOS

- $\alpha$  – parâmetro de escala da distribuição de Weibull.
- $\delta$  – função indicadora.
- $\Phi(.)$  – função de distribuição da normal padrão.

$\gamma$  – parâmetro de forma da distribuição de Weibull.

$\mu$  – média, parâmetro da distribuição lognormal.

$\theta$  – vetor genérico de parâmetros.

$\sigma$  – desvio-padrão, parâmetro da distribuição lognormal.

$\xi_j$  – tempo de início equivalente de teste de um corpo-de-prova submetido a uma tensão alternada de amplitude  $S_j$ .

$\omega$  - parâmetro da relação potência inversa, cujo valor depende do item, da fabricação, das condições de teste, etc.

$\tau_j$  – tempo até a falha de um item submetido a uma amplitude  $S_j$  da tensão alternada.

$\zeta_\theta$  – matriz de informação de Fisher.

## ABREVIATURAS E SIGLAS

AE - algoritmos evolucionários

AG - algoritmos genéticos

CDTN - Centro de Desenvolvimento da Tecnologia Nuclear

CNEN - Comissão Nacional de Energia Nuclear

EC – exposição cumulativa

LI[.] – limite inferior do respectivo parâmetro

LS[.] – limite superior do respectivo parâmetro

LIC – limite inferior de confiança

LSC – limite superior de confiança

TFR – tampered failure rate model

TRV - tampered random variable

## 1 INTRODUÇÃO

Um importante processo de degradação de materiais de engenharia é a fadiga, considerado o principal modo de falha para várias estruturas e sistemas mecânicos. Para se obter informações a respeito do comportamento de fadiga de materiais de engenharia é necessário realizar testes de tempo de vida, em que a variável de interesse é o tempo até a falha, e analisá-los por meio de modelos estatísticos adequados. Esse tempo costuma ser muito longo, tornando impraticável a realização de tais testes. É neste contexto que se insere o teste de vida acelerado.

Para se obter informações de maneira mais rápida sobre a distribuição de vida de um produto ou material, ou seja, para se prever sua confiabilidade, são utilizados os chamados testes de vida acelerados. Espécimes são ensaiados sob condições severas e falham mais rapidamente que sob condições normais de operação. Um modelo físico-estatístico razoável é ajustado aos tempos de falha acelerados e então extrapolados para as condições de uso. Por exemplo, corpos-de-prova são testados em altos níveis da tensão alternada, para induzir falhas precoces, e o tempo até a ocorrência de uma falha é então relacionado ao nível da tensão operacional, por meio de um dado modelo físico-estatístico.

Na condução de testes de vida acelerados, a amplitude da tensão alternada pode ser aplicada de várias maneiras, conforme descrito por NELSON (1990), sendo as mais comuns a com amplitude da tensão alternada constante e a com amplitude da tensão alternada aplicada em diferentes níveis. As principais razões para se usar teste com amplitude da tensão alternada aplicada em níveis são: (1) evitar censura, especialmente em níveis mais baixos de amplitude da tensão alternada, em que o corpo-de-prova pode ter alta confiabilidade e não falhar dentro de um determinado período de tempo; (2) permitir a avaliação e o estudo do fenômeno denominado de acúmulo de danos, que é a soma dos danos provocados no corpo-de-prova, durante a aplicação de cada nível da tensão alternada. A principal desvantagem deste tipo de teste é a dificuldade de se

analisarem os resultados para se obter as informações de interesse (FREITAS e COLOSIMO, 1997; NELSON, 1990).

A primeira parte deste trabalho de tese visa a estabelecer um modelo numérico que permita estimar a vida de um aço, considerando que este aço tenha sido submetido a esforço cíclico, aplicado em diferentes níveis. Para estabelecer o modelo são utilizados resultados de teste de fadiga mecânica obtidos em laboratório. Para a modelagem de fadiga, a literatura recomenda tanto a distribuição de Weibull quanto a distribuição lognormal (COLLINS, 1993 e SOBCZYK e SPENCER, 1992). No caso da distribuição de Weibull, NELSON (1990) descreve um modelo referente ao tempo de vida, com esforço aplicado em níveis, utilizando esta distribuição e o programa de computador STATPAC, que, segundo comunicação pessoal do autor (NELSON, 2000), não se encontra mais disponível. Para a distribuição lognormal não se encontrou qualquer trabalho que a tenha utilizado.

Um outro aspecto essencial em qualquer análise de dados é avaliar a adequação do modelo estatístico ajustado aos dados obtidos. A metodologia normalmente utilizada para isto é a denominada *análise de resíduos*. Para um esforço constante, essa metodologia se encontra bem desenvolvida (NELSON, 1990). Porém, no caso de esforço aplicado em níveis, a definição de resíduos e sua análise não estão ainda desenvolvidas, constituindo então um outro objetivo deste trabalho.

Para a realização deste estudo foi escolhido o aço SAE 8620, tendo em vista ser este o aço disponível no mercado nacional cuja composição química mais se aproxima do aço empregado na fabricação do vaso de pressão do reator nuclear de Angra 2 (BARROSO, 1996). Os experimentos foram realizados com esforços cíclicos aplicados em níveis ("step-stress"), em que cada corpo-de-prova é inicialmente submetido a um nível da tensão alternada por um determinado período de tempo. Se o corpo-de-prova não falhar<sup>1</sup>, o nível da tensão alternada é alterado para um novo patamar, aguardando-se um determinado período de tempo; se o corpo-de-prova também não falhar, repete-se o procedimento até que ocorra a falha ou a censura.

---

<sup>1</sup> Falha, no contexto deste trabalho, é definida como a quebra do corpo-de-prova.

Neste contexto, são objetivos deste trabalho:

- (1) estabelecer um modelo numérico, utilizando tanto a distribuição de Weibull quanto a distribuição lognormal, que permita estimar a vida de fadiga de um aço em função da amplitude da tensão alternada, considerando que este aço tenha sido submetido a um esforço cíclico aplicado em diferentes níveis;
- (2) avaliar a adequação do modelo estatístico ajustado aos dados por meio da análise de resíduos.

Este texto foi estruturado em oito capítulos e um apêndice.

O Capítulo 1 apresenta o contexto em que a modelagem de testes acelerados com esforço aplicado em níveis é necessária e os objetivos deste trabalho.

O Capítulo 2 fornece uma visão do estado da arte dos testes acelerados com aplicação de mais de um nível de tensão, mostrando o ineditismo deste trabalho.

O Capítulo 3 fornece uma visão global de certos aspectos relacionados com a fadiga, apresentando as características básicas da fadiga controlada pela tensão e pela deformação, aspectos essenciais de acúmulo de danos e discussão a respeito da dispersão dos dados de fadiga.

O Capítulo 4 apresenta uma visão global dos conceitos relacionados com confiabilidade, pertinentes a este trabalho, os principais tipos de testes acelerados utilizados, os modelos utilizados para analisar seus resultados e o método da máxima verossimilhança para estimação dos parâmetros do modelo.

No Capítulo 5 apresenta-se o desenvolvimento dos modelos de exposição cumulativa linear associado com o modelo potência inversa-Weibull e com o modelo potência inversa-lognormal, bem como a definição dos resíduos.

No Capítulo 6 é descrito o ensaio de fadiga flexo-rotativo realizado e são apresentados os resultados obtidos.

No Capítulo 7 mostram-se os resultados obtidos das estimativas de máxima verossimilhança e os correspondentes intervalos de confiança para os parâmetros dos modelos potência inversa-lognormal e potência inversa-Weibull, as estimativas e os intervalos de confiança correspondentes aos percentis relacionados a diversos níveis da tensão alternada, dentro dos valores limites dos

níveis da tensão alternada adotados no experimento, e por último, apresentam-se as curvas S-N-P para 1%, 50% e 99%.

Finalmente, no Capítulo 8 apresentam-se as considerações finais sobre o trabalho, suas principais contribuições e sugestões para trabalhos que podem dar continuidade a esta pesquisa.

Julgou-se oportuno acrescentar um apêndice ao texto para apresentar um resumo dos algoritmos genéticos, para melhor esclarecimento dos termos usados na solução numérica do método da máxima verossimilhança.

## 2 O ESTADO DA ARTE DE TESTES ACELERADOS

Testes de vida acelerados encontram importantes aplicações por todo o mundo, seja pelo governo, seja pela indústria. Tanto é assim que o Departamento de Defesa dos Estados Unidos editou em 1977 uma publicação, denominada MIL-STD-781C, com vistas a sistematizar estes testes sob o nome de “testes ambientais” (SHADED e SINGPURWALLA, 1983). O principal problema com tais testes é fazer extrapolação a partir dos dados obtidos sob condições de estresse<sup>2</sup> elevado, para se chegar a conclusões quanto ao comportamento da falha do item submetido às condições de operação para as quais ele foi projetado.

Em análise de teste acelerado com estresse aplicado em níveis, a literatura existente centra em dois tipos de modelos: o modelo de “tampered random variable” (TRV), atribuído a DEGROOT E GOEL (1979), com sua versão modificada “tampered failure rate model – TFR”, atribuída a BHATTACHARYYA e SOEJOETI (1989), e o modelo de exposição cumulativa linear (EC), atribuído a NELSON (1980). O modelo TRV supõe que o efeito de mudar o nível de estresse, de  $S_1$  para  $S_2$  no tempo  $x$ , é o de multiplicar a vida restante por um fator desconhecido  $1/\alpha$  que depende de  $S_1$  e  $S_2$ . NELSON (1980) introduziu o modelo (EC), admitindo que “... a vida restante de itens de teste depende somente da atual fração de falha cumulativa e do nível atual de estresse, independentemente de como a fração se acumulou. Ademais, se for mantido o nível atual de estresse, sobreviventes falharão em conformidade com a função de distribuição de probabilidade para aquele nível de estresse, começando, porém, na fração de falha acumulada anterior”. Estabelece-se assim uma função de distribuição de probabilidade, constituída de segmentos de  $F_1$  e  $F_2$ , unidos no ponto de mudança do nível de estresse. NELSON (1980) e MILLER e NELSON (1983) aplicam esta metodologia aos conjuntos paramétricos de  $F_1$  e  $F_2$ . A distribuição utilizada é a

<sup>2</sup> O termo **estresse**, apesar de ser usado, a rigor, apenas na área médica, por falta de um termo mais apropriado, será usado neste trabalho num sentido abrangente. Quando se tratar de fadiga, este termo será substituído por **tensão alternada** ou **esforço**.

exponencial ou a Weibull com um parâmetro de forma constante e o parâmetro de escala seguindo um modelo de regressão log-linear. Em modelos de regressão log-linear, as relações estresse-resposta mais utilizadas na prática são (XIONG e MILLIKEN, 1999 e FREITAS e COLOSIMO, 1997):

- (1) relação potência inversa:  $\theta(S) = \frac{\exp(\alpha)}{\exp[\beta \cdot \log(S)]}$ , utilizada para lâmpadas incandescentes, fadiga de metais, isolantes, dielétricos etc.;
- (2) relação de Eyring:  $\theta(S) = \frac{\alpha}{T} \cdot \exp\left(\frac{\beta}{k \cdot S}\right)$ , utilizada para componentes eletrônicos com estresse térmico e estresse elétrico;
- (3) relação de Arrhenius:  $\theta(S) = \exp\left(\alpha + \frac{\beta}{S}\right)$ , utilizada para relacionar o tempo de falha do produto com a variável de estresse temperatura.

Nas relações acima:

- (1)  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros característicos dos produtos e dos métodos de teste;
- (2)  $S$  é o estresse;
- (3)  $k$  é a constante de Boltzmann;
- (4)  $T$  é a temperatura absoluta.

A maioria dos trabalhos publicados que tratam de inferência em testes acelerados se restringe a dois tipos de teste.

O primeiro tipo, denominado de teste acelerado com estresse constante é aquele em que os itens são submetidos a testes acelerados com a aplicação de nível de estresse elevado e constante e observados até que falhem ou sejam censurados, ou seja, interrompendo-se o teste antes que os espécimes falhem. Os níveis de estresse podem variar de um espécime para outro, mas, para um determinado espécime, não é permitido alterar o nível de estresse aplicado enquanto o espécime estiver sob teste.

O segundo tipo é aquele em que o estresse é aplicado em níveis. Nesse tipo de teste acelerado, cada espécime é submetido a diferentes níveis de estresse, antes que seja observada a falha ou que ocorra censura. A principal

vantagem desse tipo de teste é conduzir rapidamente o espécime à ocorrência de falha e permitir, no caso de fadiga, a análise na presença de acúmulo de danos. Sua maior desvantagem está relacionada à complicada metodologia para estimação das medidas de confiabilidade, já que o modelo a ser utilizado é mais complexo do que aquele para estresse constante.

Cada um destes dois tipos de teste acelerado pode ser modelado considerando:

- (1) conhecida a distribuição de vida dos espécimes sob qualquer nível de estresse, exceto pelos seus parâmetros, usando a abordagem estatística freqüentista;
- (2) desconhecida a distribuição de vida dos itens sob qualquer nível de estresse, usando a abordagem estatística bayesiana.

Neste capítulo pretende-se fornecer uma visão do estado da arte dos testes acelerados. Abrange o planejamento do teste, onde, em função de vários critérios, propõem-se planos ótimos de teste que fornecem o tempo ótimo de aplicação do nível mais baixo de estresse, e os modelos para o teste acelerado com mais de um nível de estresse. Por último, mostra-se o ineditismo deste trabalho, face às referências pesquisadas.

## 2.1 Modelos para Teste Acelerado com Estresse Aplicado em Níveis, com Distribuição Conhecida e Abordagem Bayesiana.

DEGROOT e GOEL (1979) introduziram um tipo de teste acelerado, denominado teste parcialmente acelerado, no qual, se um espécime não falhar em um tempo especificado nas condições de projeto, o nível de estresse é alterado para um nível mais alto. Para este tipo de teste foi criado o modelo de "tampered random variable" (TRV). Neste modelo, supõe-se que o efeito de mudar o estresse, de  $S_1$  para  $S_2$  no tempo  $t$ , seja o de multiplicar a vida restante por um fator desconhecido  $1/\alpha$  ("tampering coefficient"), que depende de  $S_1$  e  $S_2$ . Mais especificamente, se  $Y_1$  corresponde à duração de vida sob o estresse constante  $S_1$ , a vida  $Y^*$  sob o padrão estabelecido de estresse aplicado em níveis é modelada como:

$$Y^* = Y_1 \quad \text{se } Y_1 \leq t$$

$$= t + \alpha^{-1} (Y_1 - t) \quad \text{se } Y_1 > t$$

Admitindo, além disso, que  $Y_1$  seja exponencialmente distribuída e que  $S_1$  seja o estresse da condição de uso, e permitindo que o “tampering point”  $t$  se torne diferente para diferentes espécimes, discute-se o planejamento ótimo, no âmbito da teoria de decisão bayesiana.

Para que todos os parâmetros sejam estimados, é necessário, na condução do teste parcialmente acelerado, que os dados sejam obtidos não só nas condições de uso, como também com aplicação do estresse em nível mais elevado. Isto pode constituir um problema, quando o experimentador tem limitações quanto à disponibilidade de espécimes a serem testados ao mesmo tempo.

DeGroot e Goel discutem, ainda, o planejamento ótimo de testes acelerados, no âmbito da teoria de decisão bayesiana.

BHATTACHARYYA e SOEJOETI (1989) propõem uma modificação no modelo de DEGROOT e GOEL (1979), ao qual denominaram “tampered failure rate model – TFR”, admitindo que uma mudança no estresse gera um efeito multiplicativo na função taxa de falha sobre a vida restante. No cenário particular de teste parcialmente acelerado em dois níveis (o primeiro nível de estresse é igual ao de projeto) e supondo que a distribuição inicial de vida pertence a uma família Weibull de dois parâmetros, os autores estudaram a estimativa de máxima verossimilhança dos parâmetros e deduziram a matriz de informação de Fisher. Propuseram também um conjunto de hipóteses sob as quais se torna possível a extensão do modelo a uma situação totalmente acelerada ( $x_1$  mais alto que as condições usuais).

MADI (1993) generalizou o modelo TFR de um cenário de dois níveis, (“step stress” simples) para um cenário de “step-stress” múltiplo, onde o nível de estresse nos espécimes não falhados (após o segundo intervalo de tempo) foi aumentado continuamente em um número determinado de intervalos de tempo. A estimativa de máxima verossimilhança dos parâmetros para o cenário de múltiplo “step-stress” é investigada, no caso em que a distribuição de vida inicial pertence a uma família Weibull de dois parâmetros.

Para contornar problema já mencionado de disponibilidade de espécimes a serem testados ao mesmo tempo, MADI (1997) propõe uma abordagem bayesiana empírica que permite o agrupamento de dados de vários

grupos de itens testados em diferentes situações, a fim de estimar os parâmetros de interesse.

Usando a abordagem bayesiana, VAN DORP et al (1996) desenvolveram um modelo para teste acelerado com estresse em níveis. O tempo de falha em cada nível de estresse é descrito por uma distribuição exponencial, não sendo porém necessário considerar uma função de transformação de tempo. Por outro lado, usa-se informação prévia para definir indiretamente uma distribuição a priori multivariada para as taxas de falha nos vários níveis de estresse. A distribuição a priori preserva a ordenação natural das taxas de falha em ambas as estimativas (a priori e a posteriori). Métodos são desenvolvidos para propiciar estimativas por ponto de Bayes e fazer afirmativas de probabilidades relativas a parâmetros de vida com uso de estresse.

O uso da distribuição exponencial para descrever a vida de itens em cada ambiente introduz uma grande simplificação na solução dos problemas de teste acelerado com estresse aplicado em níveis.

## **2.2 Modelos para Teste Acelerado com Estresse Aplicado em Níveis, com Distribuição Conhecida e Abordagem Frequentista.**

Utilizando a distribuição de Weibull e a relação potência inversa, NELSON (1980) apresenta modelos e métodos estatísticos para análise dos dados obtidos a partir de testes acelerados com estresses aplicados em níveis. É denominado modelo de exposição cumulativa. O autor não justifica o uso da distribuição de Weibull.

Se algum nível de estresse selecionado for muito baixo, haverá muitos produtos que não falharão durante um tempo limitado de teste, reduzindo portanto a efetividade do teste acelerado. Para resolver esse problema, TANG et al (1996) introduziram um parâmetro de locação no modelo de exposição cumulativo linear de NELSON (1980).

IUCULANO e ZANINI (1984) estimaram, a partir de um número suficiente de testes (com estresses aplicados em níveis) independentes e distintos, os valores esperados e as variâncias dos parâmetros da relação de Eyring, assim como suas significativas correlações com a variável aleatória "failure step" ("step" em que ocorre a falha), o que possibilita a extrapolação dos resultados destes testes a qualquer par de estresses térmico e elétrico,

particularmente aqueles correspondentes às condições de uso. A relação de Eyring é um modelo físico-matemático que fornece a taxa de degradação de um componente eletrônico em função do estresse térmico e do estresse elétrico. A distribuição de probabilidade usada é a normal padronizada, após uma conveniente mudança de variável. A metodologia usada não permite o uso de observações censuradas.

NAMENSON (1984) utiliza as distribuições lognormal e normal e o método da máxima verossimilhança para estimar a média,  $\mu$ , e o desvio padrão,  $\sigma$ , a partir de dados amostrais, obtidos de testes com estresse aplicado em níveis. O problema neste caso é que o modelo não contempla, como variável, o nível de estresse, pressupondo, portanto, que fiquem constantes os parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$ .

IUCULANO e ZANINI (1986) propõem um modelo que estabelece a relação entre a performance da degradação de um tipo de componente em tempo e os correspondentes níveis de estresse aplicados durante um teste de "step-stress". Para estabelecer a relação entre a taxa de degradação e a variável de estresse, que, no caso, é a temperatura, é utilizada a relação de Arrhenius. Para estimar os parâmetros, utiliza-se o método dos momentos, supostos com distribuição normal. Esta metodologia não permite o uso de observações censuradas.

DOKSUM e HOYLAND (1992) tratam de dados censurados e utilizam, para modelar o dano acumulado, o processo Wiener. O processo Wiener é um modelo matemático do movimento Browniano de uma partícula livre imersa em um líquido, constituindo um exemplo do processo de difusão de Markov. Esse modelo considera que o dano acumulado possa ser explicado por um processo gaussiano  $W(y)$  contínuo, cuja distribuição depende do estresse  $S(y)$ , definido para o espécime em cada ponto  $y$  de tempo. A falha ocorre à primeira vez que o dano acumulado  $W(y)$  cruza um limite crítico  $\omega$ . O tempo de falha segue então uma distribuição gaussiana inversa e seus parâmetros são estimados pelo método da máxima verossimilhança, com apoio do "software" SAS. Os autores consideram que a diferença básica entre o modelo proposto e os até então estabelecidos, por exemplo, o de NELSON (1980), é que, enquanto no primeiro o tempo de falha é modelado em termos do dano acumulado ao atingir um nível

crítico, no segundo o tempo de falha segue uma distribuição, que consiste em segmentos da distribuição de Weibull com o parâmetro de forma constante.

XIONG (1998) apresenta as inferências relativas aos parâmetros do modelo de estresse aplicado em níveis simples (uso de apenas dois níveis de estresse) em teste acelerado com censura tipo II (censura por falha). Considera-se que a vida de um item possa ser descrita por meio de uma distribuição exponencial com a vida média função log-linear do estresse. Para estimar os parâmetros deste modelo usa-se o método da máxima verossimilhança. Discute-se também o teste de hipótese referente aos parâmetros do modelo. Usando uma quantidade pivotal constroem-se intervalos de confiança dos parâmetros. A vantagem desses resultados é que eles se aplicam a qualquer tamanho de amostra.

KHAMIS e HIGGINS (1998) alteraram o modelo de exposição cumulativa linear de Nelson (1980), usando a distribuição de Weibull e propondo uma transformação na variável aleatória tempo, com objetivo de facilitar o tratamento matemático.

A aplicação de testes com estresses em níveis foi, no passado, bastante limitado. Isto se deveu à descrição inadequada do dano acumulado (ou ao controle inadequado das amostras de teste) e a dificuldades na análise dos dados de falha. Para resolver ou mitigar estes e outros problemas comuns de teste acelerado, MCLINN (1998) propõe uma série compacta de regras fundamentais. Ele apresenta também métodos para melhorar a análise do teste de estresses aplicados em níveis.

XIONG (1999) abordou a inferência para o modelo de teste acelerado com estresse aplicado em níveis simples, com um parâmetro limiar dependente do nível de estresse. Uma distribuição exponencial de vida com uma média, que é uma função log-linear de estresse, e um modelo de exposição cumulativa foram adotados. Obtiveram-se estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros do modelo e, usando quantidades pivotais, foram construídos intervalos de confiança dos parâmetros.

O parâmetro limiar funciona como o “tempo garantido” ou o tempo mínimo de sobrevivência. A introdução do limiar dependente do estresse faz sentido em muitas aplicações. Por exemplo, se um componente eletrônico é

operado sob voltagens diferentes, é então plausível que o tempo de sobrevivência mínimo diminua à medida que o nível de voltagem aumenta.

XIONG e MILLIKEN (1999) consideraram a distribuição do tempo de vida para um teste acelerado com estresse aplicado em níveis simples, quando o nível de estresse é mudado em conformidade com uma distribuição. Assim, em vez de se aumentar o estresse após um tempo predeterminado, aumenta-se o estresse imediatamente após falhar um certo número de espécimes. Nestas condições, os tempos de mudança de nível de estresse se tornam aleatórios. Eles apresentaram a distribuição de tempo de vida marginal de um espécime sob um plano de teste com estresse aplicado em níveis, quando os tempos de mudança de estresse são variáveis aleatórias. Estimativas dos parâmetros foram obtidas pelo método da máxima verossimilhança, com base nas distribuições de vida condicional e marginal. Os autores não tecem comentários a respeito da aplicação dos modelos desenvolvidos para o tempo de mudança do nível de estresse aleatório. Isto introduz um grande complicador no modelo, além de restringir sua aplicação (segundo os próprios autores) ao caso em que o tempo de vida para estresse constante segue a distribuição exponencial. Isto ocorre porque a distribuição exponencial é a única distribuição que apresenta a propriedade de "falta de memória". Percebe-se que esse modelo só deve ser aplicado quando se tem pouca, ou quase nenhuma, informação sobre o desempenho do item em consideração. Neste caso, fica difícil predefinir o tempo de mudança do nível de estresse para se ter itens que falharam e que não falharam numa quantidade que permita a realização do teste acelerado com estresse em níveis e que forneça uma boa estatística.

WANG e KECECIOGLU (2000) apresentam um algoritmo para obter a estimativa de máxima verossimilhança dos parâmetros de um modelo log-linear de Weibull em teste acelerado com estresse em níveis, a partir de resultados do teste. Esse algoritmo contempla tanto a hipótese de que o desvio padrão,  $\sigma$ , do logaritmo da vida é independente do estresse quanto à hipótese da sua dependência. A justificativa dos autores para considerar a dependência de  $\sigma$  com o nível de estresse é que pesquisas teórico-experimentais sugerem que, em muitos casos, ocorre essa dependência, conforme mencionado nas seguintes referências: NELSON (1990); CHEN (1991); JOYCE et al. (1985); SCHWARZ (1987); MEETER e MEEKER JR. (1994).

WATKINS (2001) propôs uma reparametrização dos parâmetros do modelo apresentado por XIONG (1998). Parece realmente mais fácil trabalhar com os novos parâmetros, já que a suposição de que a vida segue a distribuição exponencial permite que a análise venha a ser subdividida, via a propriedade de “falta de memória” desta distribuição.

### **2.3 Modelos para Teste Acelerado com Estresse Constante, com Distribuição Conhecida e Abordagem Frequentista.**

METTAS (2000) descreve um modelo para dados de vida em teste acelerado tipo múltiplos estresses. Além disso, ilustra o uso de um algoritmo que foi especificamente desenvolvido para este modelo. O modelo é baseado no bem conhecido modelo log-linear e é formulado com as distribuições de Weibull e lognormal para vários esquemas de censura, usando a teoria da verossimilhança. O algoritmo desenvolvido para solução deste modelo foi implementado em um recente software, ALTA ProTM, específico para análise de dados de vida em teste acelerado. O algoritmo foi especialmente projetado para ser bastante flexível e ter a capacidade de resolver simultaneamente mais de oito diferentes tipos de estresse. O modelo apresentado, e utilizado no algoritmo, foi desenvolvido apenas para estresse constante.

METTAS e VASSILIOU (2002) examinam o modelo de dano cumulativo em duas situações. A primeira, para dados obtidos em testes acelerados em que o estresse aplicado é dependente do tempo (por exemplo, estresse aplicado em níveis) e a segunda fazendo as previsões de confiabilidade, quando o estresse de operação é dependente do tempo (mesmo quando o estresse de teste não é dependente do tempo). Pode-se determinar, por exemplo, a confiabilidade de um motor de avião, que opera sob diferentes níveis de estresse durante o levantamento do vôo, durante o vôo em cruzeiro e durante a aterrissagem. O modelo de dano acumulado é formulado supondo que a vida segue a distribuição de Weibull e sendo consideradas as relações de Arrhenius e de potência inversa. Um algoritmo foi desenvolvido para tratamento deste modelo e implementado no software denominado ALTA 6 PRO. Os testes são realizados com nível de estresse constante.

## **2.4 Modelos de Estresse Constante e com Distribuição Desconhecida (Modelos não Paramétricos)**

A abordagem paramétrica para testes acelerados normalmente supõe: (1) que a distribuição do tempo de vida em cada nível de estresse venha de uma família paramétrica pré-especificada de uma distribuição tal como a exponencial, Weibull, lognormal etc.; (2) que uma relação funcional, referida como função de transformação do tempo, exista entre o parâmetro da distribuição do tempo de vida e o estresse aplicado. Os seguintes artigos, entre outros, tratam deste tipo de modelo: SHAKED, ZIMMER and BALL (1979); PROSCHAN and SIGPURWALLA (1980); SETHURAMAN and SINGPURWALLA (1982); BAI, LEE (1996).

O último artigo considera a estimação não paramétrica de distribuição do tempo de vida, com base em dados grupados, obtidos em testes acelerados com estresse constante sob inspeção intermitente, na qual os itens de teste são inspecionados somente em pontos especificados no tempo.

## **2.5 Modelos de Estresse Aplicado em Níveis e com Distribuição Desconhecida (Modelos não Paramétricos).**

SHADED e SINGPURWALLA (1983) apresentam um modelo não paramétrico para teste acelerado com estresse em níveis e propõem um estimador para a distribuição do tempo de vida sob nível de estresse utilizado nas condições normais de uso. O caso de dados censurados não é considerado.

TYOSKIN e KRIVOLAPOV (1996) apresentam um modelo não paramétrico para estimação por intervalo da vida de itens com base em resultados de teste acelerado com estresse em níveis. A abordagem inclui:

- (1) aplicação de um modelo linear de acúmulo de dano;
- (2) estimação da função de transformação do tempo, usando os resultados do teste em todos os níveis de carga;
- (3) aplicação de uma abordagem não paramétrica para estimação de medidas de confiabilidade, com base na hipótese de que a distribuição da vida sob carga constante tem uma taxa de falha crescente.

Os autores informam que o modelo proposto pode ser aplicado a dados censurados, mas não apresentam detalhes para esta aplicação. O exemplo apresentado é para dados não censurados.

## 2.6 Otimização de Testes com Esforço Aplicado em Níveis.

MILLER e NELSON (1983) apresentam planos ótimos para testes simples com estresse em níveis (dois níveis de estresse), em que todos os espécimes testados falham. Tais planos minimizam a variância assintótica do estimador de máxima verossimilhança da vida média para um estresse definido. O modelo do teste de vida consiste em: (1) uma distribuição de vida exponencial com (2) uma média que é uma função log-linear de estresse, e (3) um modelo de exposição cumulativo para o efeito de mudança de estresse. Dois tipos de testes simples de estresse em níveis são considerados: teste nível-tempo e teste nível-falha. O teste nível-tempo se caracteriza pelo fato de que os espécimes são submetidos a um nível de estresse por um determinado tempo após o qual se muda para um outro nível, nele permanecendo até ocorrer a falha. O teste nível-falha se caracteriza pelo fato de que a alteração do nível de estresse ocorre somente após ter falhado uma determinada quantidade de espécimes.

BAI, KIM e LEE (1989) estenderam os resultados de Miller e Nelson para o caso em que a observação é censurada e sob observações periódicas.

KHAMIS (1997) estende os modelos de estresse aplicado em apenas dois níveis para k-níveis de estresse. Considera o modelo polinomial como um caso especial, e apresenta uma análise de teste de falta de ajuste. Propõe um teste de adequação e mostra o uso da distribuição assintótica do qui-quadrado. Ele supõe que seja aplicável um modelo de exposição cumulativo, com uma distribuição de vida exponencial, e que todos os espécimes falhem durante o teste, ou seja, não considera a censura. Obtém estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros e a matriz de informação de Fisher. O critério de otimização dos tempos para a mudança dos níveis de estresse faz uso da variância do estimador de máxima verossimilhança do logaritmo do tempo médio de falha para o estresse de projeto.

BÁI e KIM (1993) propõem um teste acelerado ótimo com estresse aplicado em dois níveis, utilizando a distribuição de Weibull sob a censura Tipo I. Supõem que uma relação log-linear exista entre o parâmetro de escala e o nível de estresse, e que exista um certo modelo de exposição cumulativa para o efeito de mudança de nível de estresse. Obtém um plano ótimo (baixo nível de estresse e tempo de mudança de estresse) ao minimizar a variância assintótica do

estimador de máxima verossimilhança de um percentil estabelecido para um nível de estresse definido.

BAI e CHUN (1991) apresentam um teste acelerado ótimo com estresse aplicado em níveis simples (uso de dois níveis de estresse) para produtos nos quais várias causas competem para a falha. A distribuição de vida de cada causa de falha, que é independente das outras, é suposta ser exponencial com média que é uma função log-linear do estresse, e é suposto, também, um modelo de exposição cumulativo. São obtidos planos ótimos para teste acelerado com nível-tempo e nível-falha que minimizam a soma, estendida a todas as causas de falha, das variâncias assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança do logaritmo das vidas médias para os estresses de projeto. O plano ótimo de teste leva em conta as causas que competem para a falha por meio de um produto de duas razões: a razão das somas das vidas médias e a razão das somas das taxas de falha, somas estas estendidas a todas as causas de falha, para níveis altos e baixos de estresse. É estudado o efeito dos produtos destas duas razões.

KHAMIS e HIGGINS (1996) apresentam planos de teste com estresse aplicado em 3 níveis, supondo que exista uma relação linear ou uma quadrática entre o logaritmo do tempo médio de falha e o nível de estresse. O plano de teste ótimo para o modelo quadrático é obtido como uma extensão dos resultados para o modelo linear. Propõe-se também um plano de teste de compromisso como uma alternativa aos planos ótimos de teste linear e quadrático, e estudam-se suas propriedades amostrais finitas e assintóticas.

A motivação para este estudo é que planos ótimos de teste acelerado com estresse aplicado em dois níveis encontram limitações práticas. Estes planos dependem fortemente da suposição de existir uma relação linear entre estresse e tempo até a falha e usam somente dois níveis extremos de estresse capazes de causar modos irrelevantes de falha.

YEO e TANG (1999) propõem um plano ótimo para teste acelerado com estresse em níveis utilizando múltiplos níveis, ou seja, estende para vários níveis os planos anteriormente propostos.

## 2.7 Conclusões e Comentários sobre as Abordagens de Modelagem dos Testes Acelerados

No planejamento do teste acelerado com estresse aplicado em níveis, os vários planos ótimos de teste, que fornecem o tempo ótimo de aplicação do nível mais baixo de estresse, baseiam-se em diferentes critérios. MILLER e NELSON (1983) obtiveram o plano ótimo para o teste acelerado com estresse aplicado nos espécimes em dois níveis, com tempo de vida distribuído exponencialmente, sem censura. BAI et al (1989) estenderam os resultados de MILLER e NELSON (1983) para o caso em que a observação é censurada. KHAMIS (1997) estendeu os modelos de estresse aplicado em apenas dois níveis para  $k$  níveis; sem considerar censura, propõe um teste de adequação, mostra o uso da distribuição do qui-quadrado e supõe um modelo de exposição cumulativo com distribuição de vida exponencial. BAI e KIM (1993) apresentam um teste acelerado ótimo de estresse aplicado em dois níveis usando a distribuição de Weibull, sob a censura Tipo I. BAI e CHUN (1991) apresentam teste acelerado ótimo com estresse aplicado em dois níveis para produtos nos quais várias causas competem para produzir a falha. KHAMIS e HIGGINS (1996) apresentam planos para estresse aplicado em três níveis. YEO e TANG (1999) propõem um plano ótimo para teste acelerado com estresse aplicado em múltiplos níveis, ou seja, estendem os planos anteriormente propostos para vários níveis.

DEGROOT e GOEL (1979) e BHATTACHARYYA e SOEJOETI (1989) introduziram o denominado teste parcialmente acelerado, no qual os espécimes que não falham em um determinado tempo, nas condições de projeto, têm o seu nível de estresse alterado para um nível mais alto. MADI (1993) generalizou o modelo proposto por BHATTACHARYYA e SOEJOETI (1989), mudando de um cenário de dois níveis para um cenário de múltiplos níveis de estresse. Para estes modelos, os dados deverão ser obtidos tanto sob condições normais de uso, quanto sob níveis de estresse mais elevados. Esta necessidade inviabiliza a aplicação destes modelos em estudo de fadiga, uma vez que na aplicação do nível de estresse em condições de projeto, o tempo necessário para a falha se tornaria proibitivamente grande, em termos práticos.

Usando a abordagem bayesiana, VAN DORP et al (1996) desenvolveram um modelo para teste acelerado com estresse em níveis. O tempo de falha em cada nível de estresse é descrito por uma distribuição exponencial,

não sendo porém necessário considerar uma função de transformação de tempo. Para o estudo de fadiga, as distribuições normalmente utilizadas para descrever o tempo de vida, segundo COLLINS (1993) e SOBCZYK e SPENCER (1992), são a Weibull, que é uma distribuição mais geral que a exponencial, e a lognormal; isto inviabiliza o uso do modelo para estudo de fadiga.

Os modelos desenvolvidos para teste acelerado com estresse aplicado em níveis, supondo que o tempo de vida possa ser descrito por uma distribuição conhecida, baseiam-se igualmente em vários critérios. Considerando dados censurados e utilizando a distribuição de Weibull e a relação potência inversa do estresse-resposta, NELSON (1980) introduziu o modelo de exposição cumulativa linear. IUCULANO e ZANINI (1984) utilizaram, no modelo, a distribuição normal padronizada, após uma conveniente mudança de variável, e a relação estresse-resposta de Eyring. NAMENSON (1984) emprega as distribuições lognormal e normal, considerando os parâmetros independentes do nível de estresse. IUCULANO e ZANINI (1986) utilizaram a distribuição normal e a relação estresse-resposta de Arrhenius. DOKSUN e HOYLAND (1992) consideram dados censurados e utilizaram o processo de Wiener (processo do movimento browniano) para modelar o dano acumulado, pressupondo também que o tempo de falha segue a distribuição gaussiana inversa. A diferença básica entre esse modelo e o de NELSON (1980) é que, enquanto no primeiro o tempo de falha é modelado em termos do dano acumulado ao atingir um nível crítico, no segundo, o tempo de falha segue uma distribuição virtual, formada de segmentos da distribuição de Weibull com o parâmetro de forma constante. XIONG (1998) usa a distribuição exponencial, com a vida média função log-linear do estresse, censura tipo II (censura por falha) e estresse aplicado em apenas dois níveis. KHAMIS e HIGGINS (1998) propõem uma transformação na variável aleatória tempo do modelo de NELSON (1980), para facilitar o tratamento matemático. XIONG (1999) introduz um parâmetro limiar, dependente do nível de estresse, no modelo de XIONG (1998). XIONG e MILLIKEN (1999) consideram que a mudança do nível de estresse se faz em conformidade com uma distribuição, ou seja, o nível de estresse, aplicado nos espécimes que não falharam, é aumentado após a ocorrência de um certo número de espécimes falhados. Assim, os tempos de mudança de nível de estresse se tornam aleatórios. WANG e KECECIOGLU (2000) apresentam um algoritmo para obter a estimativa de máxima

verossimilhança dos parâmetros de um modelo log-linear de Weibull, considerando tanto a dependência quanto a independência do desvio padrão do logaritmo da vida com o nível de estresse. Para facilitar a análise dos dados, WATKINS (2001) propôs uma reparametrização dos parâmetros do modelo de XIONG (1998).

Do exposto conclui-se que:

- (1) nenhuma das referências pesquisadas apresenta um modelo e exemplo de aplicação do teste acelerado com estresse aplicado em vários níveis, usando a distribuição lognormal;
- (2) no caso da distribuição de Weibull, NELSON (1990) descreve um modelo relativo ao tempo de vida com esforço aplicado em níveis, utilizando esta distribuição e o programa de computador STATPAC, que, segundo comunicação pessoal do autor (NELSON, 2000), não mais se encontra disponível;
- (3) nas referências pesquisadas não se demonstra obtenção do máximo global na aplicação do método da máxima verossimilhança;
- (4) o uso da distribuição do tempo de vida não é justificado em nenhuma das referências pesquisadas.

### 3 FADIGA

Fadiga é o processo de degradação localizada, progressiva e permanente, que ocorre em material sujeito a variações de tensões e deformações que produzem a nucleação de trincas ou a completa fratura, depois de um número suficiente de ciclos (ASTM E 1823-96, 2001).

O fenômeno de fadiga, ao longo dos anos, tem constituído um problema expressivo e difícil para engenheiros, especialmente para os projetistas de estruturas. Em materiais de engenharia, a fadiga é considerada um processo importante de deterioração e o principal modo de falha para várias estruturas e sistemas mecânicos, tais como aviões, pontes, vasos de pressão de reatores nucleares, guindastes, locomotivas e vagões sobre trilhos, navios, tubulações de centrais nucleares etc. Estima-se que 50 a 90% de todas as falhas mecânicas em estruturas metálicas sejam atribuídas à fadiga (COLLINS, 1993).

A preocupação com danos provocados por fadiga começou na Europa no início do século dezanove. Apesar de o termo fadiga ter sido introduzido por Poncelet em 1839, acredita-se que o primeiro estudo do fenômeno foi conduzido por volta de 1829 pelo engenheiro de minas alemão W. A. J. Albert, ao realizar ensaios, com cargas repetidas, em correntes de ferro de guindastes utilizados em mineração (SURESH, 1991). O primeiro esforço de pesquisa detalhada da fadiga de metais se iniciou em 1842, logo após um grave acidente ocorrido com uma composição ferroviária na França, próximo a Versailles, (SURESH, 1991). Em anos posteriores, vários ensaios e estudos de fadiga foram realizados com o objetivo de conhecer o fenômeno da fadiga sob o ponto de vista da mecânica.

Entre 1852 e 1870, o engenheiro ferroviário alemão August Wohler conduziu experimentos em eixos sujeitos a flutuações de cargas repetidas de tração, dobramento e torção (COLLINS, 1993). Este trabalho é importante porque propiciou as bases para o diagrama de Goodman, que foi a primeira metodologia desenvolvida para prever o limite de fadiga para qualquer razão da tensão [Eq. (3.4)]. A fadiga foi incorporada em critérios de projeto no final do século dezanove e desde então tem sido bem estudada. Entretanto, os desenvolvimentos mais

significativos só ocorreram a partir de 1950. Atualmente, a fadiga é parte da especificação de projeto para muitas estruturas de engenharia (BARSOM, ROLFE, 1999).

Segundo COLLINS (1993), as investigações de falha por fadiga, ao longo dos anos, levaram à conclusão de que o processo de fadiga abrange dois domínios da tensão ou de deformação cíclica, que são significativamente diferentes em suas características, e de que, para cada um deles, a falha provavelmente é produzida por meio de mecanismos físicos diferentes. Um dos domínios de carregamento cíclico é aquele para o qual uma deformação plástica significativa acontece durante cada ciclo. Este domínio é associado a cargas altas e vidas curtas, ou baixos números de ciclos, para produzir falha de fadiga, e é geralmente chamado de fadiga de baixo-ciclo ou fadiga controlada pela deformação. O outro domínio de carregamento cíclico é aquele para o qual os ciclos de deformação são limitados à faixa elástica. Este domínio é associado a cargas mais baixas e vidas longas, ou números altos de ciclos para produzir falha de fadiga, e é geralmente chamado de fadiga de alto-ciclo ou fadiga controlada pela tensão. Fadiga de baixo-ciclo é tipicamente associada a ciclos de vida de 1 a  $10^4$  ou  $10^5$  ciclos, e fadiga de alto-ciclo, a ciclos de vida maiores que  $10^4$  ou  $10^5$  ciclos.

Este capítulo fornece uma visão global de certos aspectos relacionados com a fadiga, apresentando as características básicas da fadiga controlada pela tensão e pela deformação, aspectos essenciais de acúmulo de danos e discussão a respeito da dispersão dos dados de fadiga (mostrando com isto a importância de se introduzir o componente estocástico na modelagem do tempo de vida de fadiga).

### **3.1 Fadiga Controlada pela Tensão**

Sabe-se, há muito tempo, que certas peças metálicas, submetidas a esforços variáveis no tempo e repetidos um grande número de vezes, se rompem bruscamente, sem que qualquer deformação macroscópica permanente anuncie sua ruptura, enquanto que as mesmas peças, submetidas a um esforço maior mas aplicado de maneira contínua, resistem perfeitamente. Assim, o simples fato de os esforços serem variáveis no tempo implica uma ação drasticamente mais agressiva, do ponto de vista de resistência (COLLINS, 1993).

Diz-se que é por fadiga controlada pela tensão a causa da falha que um item sofre quando submetido à ação de esforços variáveis no tempo, em que a amplitude  $S_a$  da tensão alternada aplicada, definida pela Eq. (3.2), está dentro do intervalo elástico.

Fadiga controlada pela tensão pode ser definida como o fenômeno que ocorre em componentes e estruturas sujeitos a carregamento variável com o tempo, em que a amplitude da tensão cíclica resultante produz deformações plásticas microscópicas que, cumulativas, resultam na diminuição gradual da resistência do material, ou na sua fratura. Assim, a denominação fadiga controlada pela tensão advém do fato de que a variável controladora do fenômeno de fadiga é a tensão alternada que oscila entre dois extremos (MEYERS e CHAWLA, 1982).

O processo de fadiga controlada pela tensão é bastante complexo, uma vez que a falha pode ocorrer, sem nenhum aviso prévio, sob tensões inferiores ao limite de escoamento do material<sup>3</sup>. Além disso, o dano provocado pela fadiga controlada pela tensão é cumulativo e irrecuperável. Períodos de “descanso”, nos quais os esforços externos são retirados, não provocam recuperação do componente ou estrutura (COLLINS, 1993 e SOBCZYK e SPENCER, 1992).

Os esforços cíclicos e repetidos, a que os componentes mecânicos e estruturais estão sujeitos, provocam tensões cíclicas, podendo conduzir a falha por fadiga. Estes esforços podem se originar de vários espectros de carregamento, dependendo da configuração de projeto e do uso operacional do componente estrutural. Para conceituar os parâmetros de ensaio de fadiga, será utilizado o espectro da tensão de fadiga mais simples ao qual um item pode estar sujeito. Este espectro é o padrão senoidal de variação da tensão com o tempo, de média zero, amplitude constante e frequência fixa, aplicado por um número de ciclos definido, apresentado na FIGURA 3-1.

---

<sup>3</sup> Limite de escoamento é o valor da tensão, particular para cada material, que estabelece a fronteira entre a região elástica e a plástica.

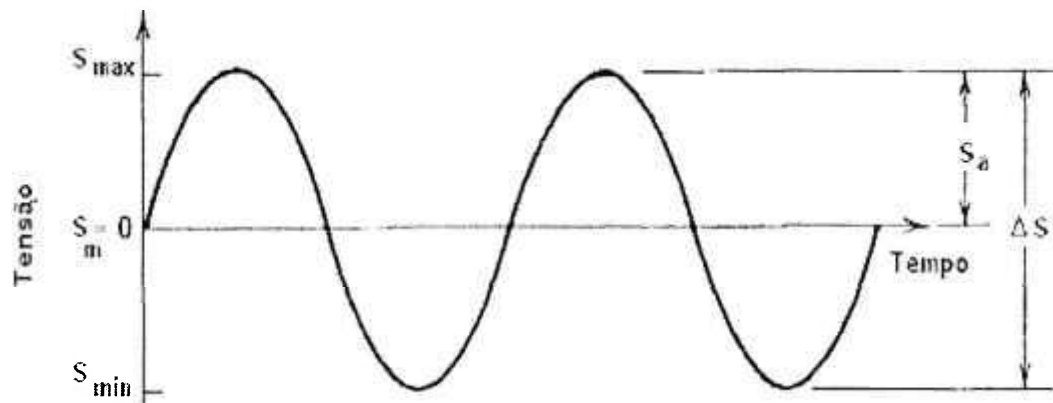


FIGURA 3-1: Gráfico da tensão cíclica reversa

Com base na FIGURA 3-1, definem-se as seguintes quantidades:

- (1)  $S_{max}$  = tensão máxima no ciclo;
- (2)  $S_{min}$  = tensão mínima no ciclo;
- (3) tensão média  $S_m$ :

$$S_m = (S_{max} + S_{min})/2 \quad (3.1)$$

- (4) amplitude  $S_a$  da tensão alternada:

$$S_a = (S_{max} - S_{min})/2 \quad (3.2)$$

- (5) faixa da tensão alternada,  $\Delta S$ , também chamada de intervalo da tensão alternada ou de variação da tensão alternada:

$$\Delta S = S_{max} - S_{min} \quad (3.3)$$

- (6) razão de tensão em fadiga:

$$R_f = S_{min}/S_{max} \quad (3.4)$$

- (7) razão de amplitude:

$$A = S_a/S_m = (1-R_f)/(1+R_f) \quad (3.5)$$

A FIGURA 3-2 ilustra a estratificação térmica em uma tubulação horizontal, que pode ocasionar um problema de fadiga de alto ciclo. As temperaturas foram medidas no diâmetro externo da linha auxiliar de remoção do calor residual da usina nuclear de potência Angra 1. Termopares foram instalados, como mostra o esquema apresentado na FIGURA 3-2, em cinco pontos perimetrais (MANESCHY, SUANNO 2000).

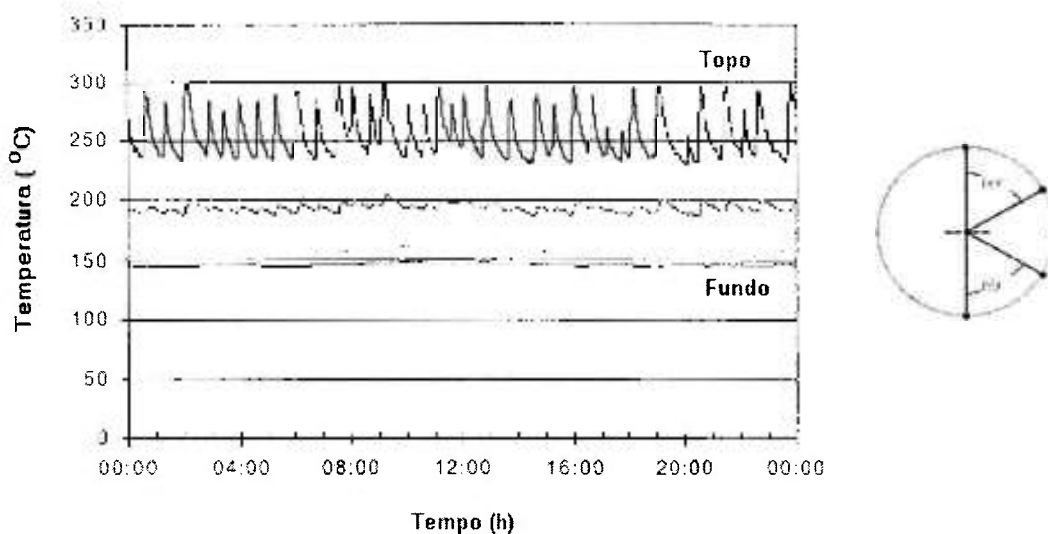


FIGURA 3-2: Temperaturas medidas no diâmetro externo da tubulação em função das horas do dia

### 3.2 Fadiga Controlada pela Deformação

Fadiga controlada pela deformação ou fadiga de baixo-ciclo é aquela em que a variável controladora do fenômeno de fadiga é a deformação, que oscila entre dois extremos, provocada por altas cargas cíclicas, induzindo quantidades significativas de deformação plástica durante cada ciclo e provocando, portanto, vida curta ou reduzido número de ciclos até a falha, se essas cargas, relativamente altas, são aplicadas repetidamente.

Embora o objetivo usual do engenheiro projetista seja o de prover vida longa, a fadiga de baixo-ciclo ou controlada pela deformação é ainda de grande importância em várias circunstâncias. Por exemplo, no projeto de dispositivos de alta performance, tais como mísseis e foguetes, o tempo de vida de projeto pode ser somente de umas poucas centenas ou poucos milhares de ciclos do lançamento até o objetivo final, e a análise de fadiga de baixo-ciclo e os métodos de projeto são de interesse direto. No projeto de outros dispositivos de alta performance, tais como palhetas e eixos de turbinas a gás de avião, vasos de pressão e elementos combustíveis nucleares, ou rotores e palhetas de turbinas a vapor, a ocorrência ocasional de grandes transientes térmicos ou mecânicos durante a operação pode provocar acúmulos de danos significativos, devidos a

poucas centenas ou poucos milhares desses grandes ciclos. Métodos de projeto de fadiga de baixo ciclo assumem, assim, grande importância. Mesmo que as cargas em uma máquina ou estrutura sejam normalmente baixas, o material na raiz de qualquer entalhe experimentará plasticidade localizada (controlada pela deformação cíclica), devido às restrições impostas pelo volume de material elástico ao redor do entalhe, e os métodos de baixo ciclo ou fadiga controlada pela deformação serão novamente importantes na predição de vida de tais componentes (COLLINS, 1993).

### 3.3 Acúmulo de Danos

A fadiga pode ser então caracterizada como um fenômeno de falha progressiva, constituindo-se basicamente na nucleação e propagação de trincas, até que se atinja um tamanho crítico, a partir do qual a propagação ocorre de maneira instável e incontrolável. Apesar de os aspectos microscópicos serem de grande importância para a compreensão do processo de fadiga, os engenheiros projetistas de equipamentos e estruturas se interessam predominantemente pelos aspectos macroscópicos da falha por fadiga e pelos meios necessários para sua prevenção dentro da vida prevista (COLLINS, 1993 e SOBCZYK e SPENCER, 1992).

Para a prevenção de falhas por fadiga, deve-se considerar a resposta do material aos diversos carregamentos passíveis de ocorrer durante a vida prevista do componente. Além disso, as características de fadiga de um material não podem ser deduzidas a partir de outras propriedades mecânicas quase estáticas. Elas devem ser medidas diretamente, utilizando-se ensaios mecânicos específicos. Por meio destes ensaios, obtêm-se as curvas de fadiga denominadas de S-N, em que a vida do material ou o número N de ciclos até a falha é expressa em função da amplitude  $S_a$  da tensão alternada aplicada ao material. Determina-se uma curva S-N aplicando-se em corpos-de-prova uma certa amplitude relativamente alta da tensão alternada, mantida constante até a ruptura do material. (COLLINS, 1993 e SOBCZYK e SPENCER, 1992). Este procedimento é repetido em outros corpos-de-prova, com amplitude da tensão alternada progressivamente descendente. Os dados são registrados num gráfico, em que a ordenada representa a amplitude da tensão cíclica (S) e a abscissa o número de

ciclos ( $N$ ) até a falha. Na FIGURA 3-3 é representado esquematicamente estes ensaios.

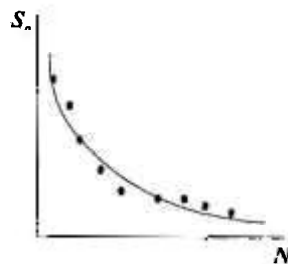


FIGURA 3-3 – Curva S-N genérica

Na FIGURA 3-4 é mostrado uma outra maneira de representar os resultados dos ensaios de fadiga. A ordenada representa a amplitude da tensão alternada e a abscissa representa o logaritmo do número de ciclos até a falha para o corpo-de-prova testado (MANSUR, 2003). Uma terceira maneira para representar os dados de fadiga é em um gráfico log-log da tensão alternada versus vida.

Pelas curvas S-N, observa-se que quanto maior a amplitude da tensão alternada aplicada, menor é o número de ciclos que o material será capaz de suportar antes da fratura. Para alguns materiais, como o aço, a amplitude  $S$  da tensão alternada permanece constante a partir de um determinado valor  $N_f$ . Isto significa que existe um nível limite da tensão alternada, chamado de *limite de resistência à fadiga*<sup>4</sup> ( $S_e$ ), abaixo do qual a falha por fadiga não ocorrerá [COLLINS, 1993]. Este limite de resistência à fadiga representa o maior valor da amplitude da tensão alternada que não causará dano ao material submetido a qualquer número de ciclos.

<sup>4</sup> Limite de resistência a fadiga corresponde ao termo inglês "fatigue limit" (TAYLOR, 2000).

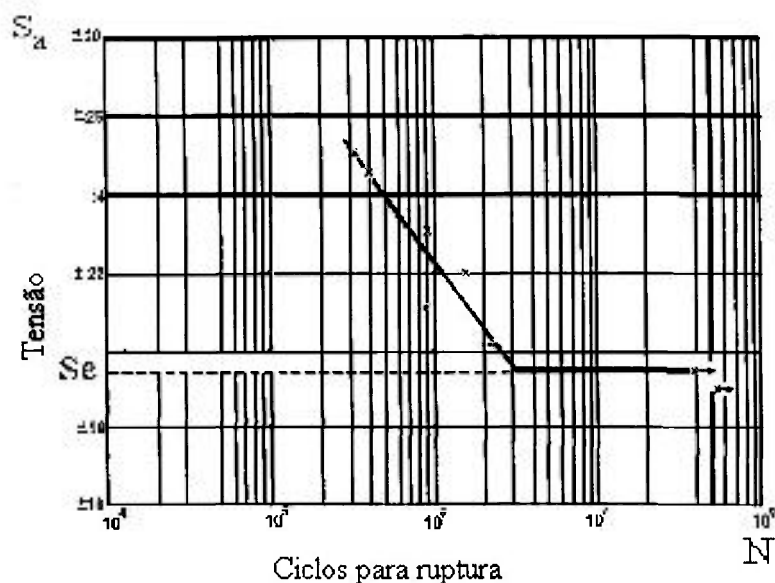


FIGURA 3-4 – Curva S-N em escala semi-log, onde a tensão é dada em MPa.

Estes gráficos encerram informações de projeto de fundamental importância para estruturas sujeitas a carregamentos repetidos.

Cabe observar, entretanto, que, na grande maioria de componentes mecânicos ou estruturais que trabalham sob carregamentos cíclicos em que fadiga é o modo de falha predominante, a amplitude da tensão alternada varia ou muda de algum modo durante a vida em serviço. Assim, em vez de uma única amplitude  $S_a$  da tensão alternada durante  $n$  ciclos, uma peça pode estar sujeita à amplitude  $S_{a1}$  da tensão alternada durante  $n_1$  ciclos, à amplitude  $S_{a2}$  da tensão alternada durante  $n_2$  ciclos, e assim por diante. Tais variações e mudanças da amplitude da tensão alternada tornam inadequado o uso direto das curvas S-N, já que estas curvas são determinadas sob condição de amplitude constante ( $S_a = \text{cte.}$ ) da tensão alternada. Desta forma, é importante para o projetista conhecer o efeito de esforços externos com a amplitude variável da tensão alternada sobre a curva S-N, em materiais de uso em engenharia (COLLINS, 1993 e SOBCZYK e SPENCER, 1992). Decorre daí a necessidade de estudos de fadiga com esforço aplicado em níveis.

Todos os pesquisadores de fadiga pressupõem, como postulado básico, que a operação em qualquer amplitude da tensão cíclica produzirá dano de fadiga e que sua severidade depende do número de ciclos de operação para

aquela amplitude da tensão alternada e também do número total de ciclos necessário para produzir falha em um corpo-de-prova, sem danos naquela amplitude da tensão alternada. É postulado também que o dano ocasionado é permanente e que a operação em diferentes amplitudes da tensão alternada, em seqüência, resultarão em um acúmulo de dano total igual à soma dos incrementos de dano produzidos por cada nível da tensão cíclica. Ocorrerá falha por fadiga (COLLINS, 1993), quando o dano acumulado total atingir um valor crítico.

Os ensaios de fadiga com aplicação da amplitude da tensão alternada em níveis são importantes e necessários para que se possa estudar e avaliar o fenômeno denominado de acúmulo de danos, que é a soma dos danos provocados na estrutura durante cada carregamento. O estudo do acúmulo de danos é também importante, já que os carregamentos cíclicos, a que os componentes mecânicos e estruturais estão sujeitos, variam na sua amplitude, provocando assim danos parciais que se acumulam até a ocorrência da falha.

### **3.4 Dispersão dos Dados de Fadiga**

Dados experimentais, obtidos em ensaios de corpos-de-prova, sob várias condições de carregamento, constituem a principal fonte de informação sobre fadiga de materiais de engenharia. Entretanto, estes resultados de testes de corpos-de-prova realizados em laboratório mostram significativa dispersão aleatória, o que pode mesmo comprometer a confiabilidade da informação. A natureza aleatória da fadiga é óbvia, se uma estrutura é submetida a carregamento que varia aleatoriamente; mas, mesmo em condições de laboratório rigorosamente controladas e sob carregamento cíclico determinístico, os resultados obtidos mostram considerável dispersão estatística. Isto se deve a atuação de fatores que atuam ao acaso fazendo com que os resultados obtidos apresentem variabilidade.

São muitos os fatores que afetam o efeito da fadiga em componentes estruturais. Entre eles, ressaltam-se os parâmetros relacionados à tensão (carga), geometria e propriedades do componente, e ao ambiente externo. Entre os parâmetros da tensão, encontram-se os de estado de tensão, variação da tensão, razão de tensão, carregamento constante ou variável, frequência e tensão máxima. Entre os relacionados à geometria e propriedades do componente, estão os concentradores de tensão, tamanho, gradiente de tensão e propriedades

mecânicas e metalúrgicas do material. Entre os parâmetros do ambiente externo, citam-se temperatura e grau de agressividade do ambiente.

Assim, devido à aleatoriedade inerente aos dados de fadiga, a modelagem estocástica não só é apropriada como necessária. Este ponto de vista tem sido amplamente aceito e, conseqüentemente, os problemas associados à teoria estocástica de fadiga são geralmente considerados importantes e desafiantes em mecânica e em estocástica aplicada.

Extremamente desejável seria formular uma teoria estocástica para o comportamento de fadiga de materiais que fosse capaz de tratar todos os processos físicos e químicos em micro-escala e de descrever as características macroscópicas observadas do processo de fadiga. Uma tal modelagem – verdadeiramente arraigada na física de fadiga aleatória – não parece atualmente possível (SOBCZYK e SPENCER, 1992). As teorias físicas existentes (por exemplo, termodinâmica, física estatística), embora úteis para explicar qualitativamente o comportamento da fadiga, não podem ainda fornecer uma base para a modelagem micro-macro do processo de fadiga e para obter resultados de interesse em engenharia. Em vista destas dificuldades, é conveniente e importante formular uma teoria estocástica macroscópica (fenomenológica), a fim de reconhecer regularidades em dados dispersos de fadiga e fornecer uma base consistente para a predição do comportamento de fadiga com propósitos de estimação confiável e segura. Esta dispersão é tratada, estatisticamente, por meio da distribuição de Weibull ou da distribuição lognormal (COLLINS, 1993, SOBCZYK e SPENCER, 1992).

Em razão então da dispersão dos dados de vida de fadiga em qualquer nível da tensão alternada, não haverá uma única curva S-N para um determinado material, mas sim uma família de curvas com probabilidade de falha como parâmetro. Estas curvas são chamadas curvas S-N-P, ou curvas de probabilidade de falha constante em um gráfico da tensão versus vida (COLLINS, 1993). Em estatística, a vida de probabilidade constante é denominada percentil. O percentil  $100p\%$  de uma distribuição de probabilidade  $F(x_p)$  é a idade  $x_p$  em que uma proporção  $p$  da população irá falhar, ou seja, a solução de  $p = F(x_p)$ .

Normalmente os percentis usados nas curvas S-N-P são os correspondentes aos valores de  $p$ , de 1%, 50% e 99%. É também de interesse notar que a confiabilidade  $R$  é definida por 1 menos a probabilidade de falha, ou

seja,  $R = 1 - F(x_p)$ . Portanto, a curva de probabilidade de falha 1% pode alternativamente ser designada como a curva de confiabilidade de 99% ( $R = 99\%$ , por exemplo).

As curvas S-N-P são construídas aplicando-se níveis constantes da tensão a cada grupo de corpos-de-prova. São realizados ensaios em grupos de aproximadamente 15 corpos-de-prova para cada nível de amplitude da tensão alternada previamente escolhido, entre o limite de escoamento do material e o limite de resistência à fadiga. Na FIGURA 3-5 é mostrado, esquematicamente, os resultados que se obtêm em ensaios deste tipo.

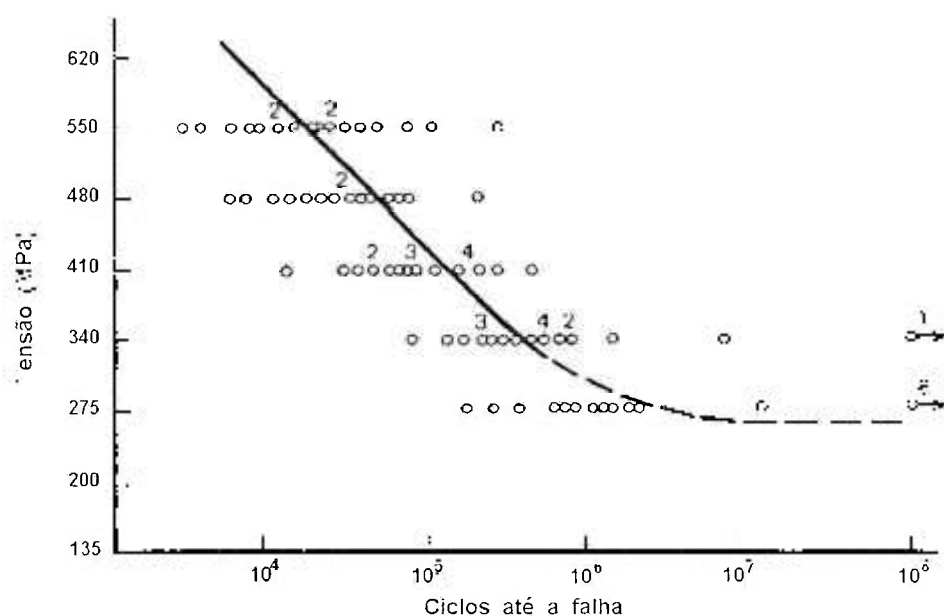


FIGURA 3-5 - Dados de fadiga para níveis da tensão constante em um gráfico S-N

Para interpretar os resultados dos ensaios, é necessário construir uma família de curvas S-N tendo como parâmetro a probabilidade de falha ( $P$ ), ou seja, as chamadas curvas de probabilidade constante, ou curvas S-N-P (FIGURA 3-6).

As curvas S-N-P são representadas, tendo como abscissa o logaritmo do número de ciclos como é mostrado na FIGURA 3-6 (COLLINS, 1993), ou usando escala logarítmica nos dois eixos coordenados como é mostrado na FIGURA 3-7 (SOBCZYK e SPENCER, 1992).

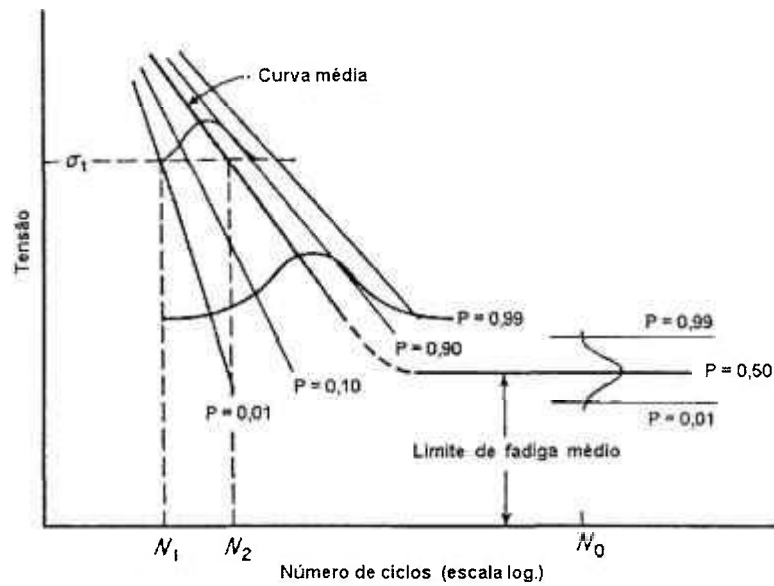


FIGURA 3-6 - Representação estatística de dados de fadiga



FIGURA 3-7 - Curva S-N típica em escala log-log

A expressão analítica da parte linear da curva representada na FIGURA 3-6, conhecida como equação de Wöhler (BUCH, 1988), é dada por:

$$S_a = b - c \times \log(N_i) \quad (3.6)$$

onde  $b$  é o intercepto da reta com o eixo das tensões,  $c$  é a inclinação da reta,  $N_i$  é o número de ciclos e  $S_a$  é a amplitude da tensão alternada.

A expressão analítica da parte linear da curva representada na FIGURA 3-7, conhecida como equação de Basquin (BUCH, 1988), é dada por:

$$N_i = C_1 \times [S_a]^K, \quad (3.7)$$

onde,  $c_1$  é uma constante do material,  $\kappa_1$  é a inclinação da reta,  $N_f$  é o número de ciclos e  $S_a$  é a amplitude da tensão alternada.

A expressão (3.7) reparametrizada é a relação potência inversa apresentada na seção 4.3.1.2.

A modelagem estocástica do fenômeno da fadiga é normalmente tratada no âmbito da teoria da confiabilidade. Para estruturas que necessitam operar sem correr perigo na presença de incertezas durante toda a sua vida em serviço, é necessário ter uma medida probabilística apropriada da falha por fadiga. Por esta razão, os problemas de confiabilidade de estruturas do ponto de vista de fadiga (sujeitas a carregamento complexo que varia com o tempo) são de grande interesse em pesquisa recente.

Além disto, em praticamente todas as aplicações de engenharia em que a fadiga é um modo de falha importante, a amplitude da tensão alternada varia ou muda de alguma maneira durante a vida em serviço. Tais variações e mudanças da amplitude de carregamento, freqüentemente referida como espectro de carregamento, tornam inaplicáveis o uso direto das curvas S-N padrão, porque estas curvas são desenvolvidas e apresentadas para operação com amplitude constante da tensão alternada. Torna-se assim importante para o projetista ter disponível uma teoria ou hipótese, verificada por observações experimentais, que permitirão fazer boas estimativas dos parâmetros de projeto para operação sob condições de espectro de carregamento. Neste contexto foi utilizado o modelo de exposição cumulativa linear associado com o modelo de potência inversa-Weibull e o modelo de exposição cumulativa linear associado com o modelo potência inversa-lognormal.

## 4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para modelagem do tempo de vida de fadiga, como descrito no capítulo anterior, é necessário introduzir um componente estocástico. Este componente é tratado em estatística no ramo denominado *confiabilidade*. Assim, neste capítulo pretende-se apresentar uma visão global dos conceitos relacionados com confiabilidade, pertinentes a este trabalho.

Para gerar informações sobre a confiabilidade dos produtos em tempo suficientemente curto para que elas possam ser usadas em novos projetos e na melhoria dos já existentes, são utilizados testes acelerados. Assim, revêem-se, sumariamente, os principais tipos de testes acelerados utilizados neste contexto.

Para analisar os resultados obtidos nos testes, é necessário aplicar modelos que dependem do tipo de teste e do modo de falha do produto. Em primeiro lugar são abordados os modelos para testes acelerados com amplitude constante da tensão alternada e, em seguida, o modelo para testes acelerados com tensão alternada aplicada em níveis. Esses modelos contêm um componente determinístico e um componente estocástico, caracterizado pela distribuição de probabilidade da resposta e capaz de explicar a dispersão observada nos tempos de vida.

É descrito o método da máxima verossimilhança utilizado para a estimação dos parâmetros do modelo. Este método foi adotado porque ele permite incorporar as informações provenientes das censuras.

Na pesquisa do máximo da função de verossimilhança, adotou-se a técnica algorítmica baseada na evolução natural, denominada de algoritmos genéticos, descrita, resumidamente, no Anexo A.

### 4.1 Conceitos Básicos em Confiabilidade

#### 4.1.1 Confiabilidade e falha

Confiabilidade é a probabilidade de um item desempenhar satisfatoriamente a função requerida, sob condições de operação estabelecidas, por um período de tempo predeterminado (FREITAS e COLOSIMO, 1997). Em

outros termos, é o estudo probabilístico do tempo despendido por um item até a sua falha, durante o desempenho de uma determinada função, sob condições de operação especificadas.

A falha, quando catastrófica, é de fácil reconhecimento, como por exemplo, o rompimento de um corpo-de-prova durante o ensaio de fadiga. Outros itens falham por deterioração gradativa, tornando necessário uma definição clara da falha, de modo a não gerar dúvidas. É o caso, por exemplo, do vaso de um reator nuclear: uma falha ocorre quando surge uma trinca em sua parede.

O período de utilização do item até a falha é denominado de tempo de falha ou tempo de vida e pode ser medido por qualquer grandeza que seja função do tempo. Exemplos: tempo de utilização do vaso de um reator nuclear, número de ciclos em um teste de fadiga, quilometragem de um veículo etc.

#### **4.1.2 Censura**

Independentemente do tipo de aplicação da tensão (tensão constante ou em níveis), os testes de vida podem ser interrompidos antes de a falha ter ocorrido. Essa interrupção dos testes gera o que se denomina censura, ou seja, o item submetido a teste não chega a falhar e o que se observa é um tempo inferior ao de falha. Existem três tipos de censura, conforme descrito por FREITAS e COLOSIMO (1997):

- (1) **censura por número de ciclos ou do tipo I** – o teste é interrompido após a ocorrência de um número predeterminado de ciclos.
- (2) **censura por falha ou do tipo II** – o teste é interrompido após ter falhado uma fração especificada do número de itens sob teste.
- (3) **censura do tipo aleatório** – quando o item é retirado no decorrer do teste, sem ter atingido a falha; por exemplo, se ocorrer falha no equipamento de teste, ou se o item falhar por uma razão diferente da estudada.

#### **4.1.3 Função de confiabilidade**

A função de confiabilidade é definida como a probabilidade de um produto operar sem falha, até um certo tempo  $x$ , conforme descrito por FREITAS e COLOSIMO (1997). Em termos probabilísticos, escrevemos:

$$R(x) = P(X \geq x), \quad (4.1)$$

onde  $X$  é a variável aleatória que representa o tempo até a ocorrência da falha.

Na FIGURA 4-1 é mostrada uma representação esquemática de duas funções de confiabilidade para dois itens diferentes que exercem a mesma função. Percebe-se que a durabilidade do item 1 é superior a do item 2. Nota-se que, para um lote de itens representado pelo item 1, o tempo para cerca de 50% dos itens deste lote já terem falhado é de 20 anos, enquanto que, para os itens do lote representado pelo item 2, este tempo é de cerca de 10 anos. A função de distribuição, usualmente apresentada nos livros de probabilidade, é

$$F(x) = 1 - R(x) = P(X < x). \quad (4.2)$$

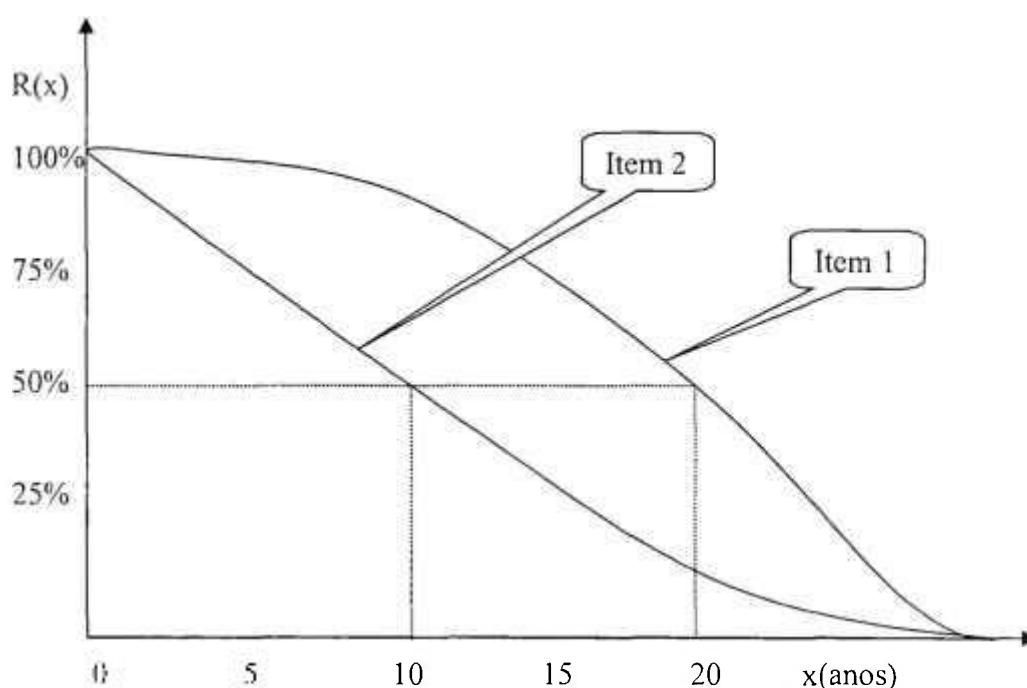


FIGURA 4-1: Funções de confiabilidade para dois produtos

## 4.2 Tipos de Testes Acelerados

Conforme descrito por NELSON (1990), os testes acelerados são classificados em função da maneira de aplicação do nível da tensão alternada:

**Tensão constante:** é o tipo mais comum. Cada espécime é submetido a um nível constante da tensão (FIGURA 4-2). Para que se possa modelar esse tipo de teste, é necessário utilizar vários níveis da tensão. No entanto, uma vez

fixado o nível da tensão para um determinado espécime, este ficará submetido a este nível até o final do teste.

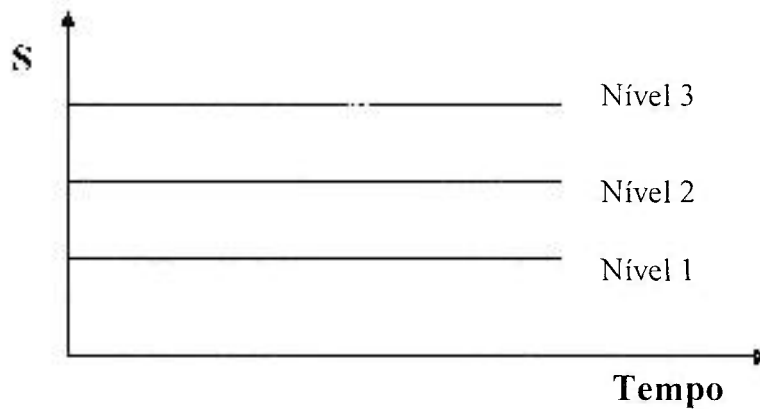


FIGURA 4-2: Aplicação de nível constante da tensão.

**Tensão aplicada em diferentes níveis ("step stress"):** cada espécime é submetido a um nível da tensão por um certo tempo. Se o espécime não falhar, o nível da tensão é alterado para um novo patamar, e o procedimento se repete. Na FIGURA 4-3 é ilustrado esse tipo de teste.

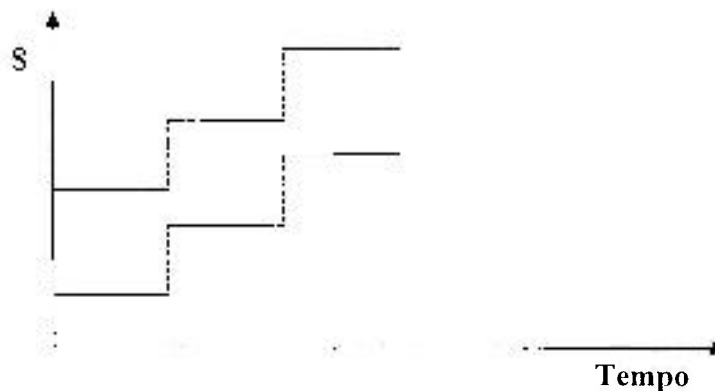


FIGURA 4-3: Aplicação da tensão em diferentes níveis

**Nível progressivo da tensão:** cada espécime é submetido a um nível crescente da tensão, porém esse aumento não é feito em patamares, mas continuamente, conforme é mostrado na FIGURA 4-4.

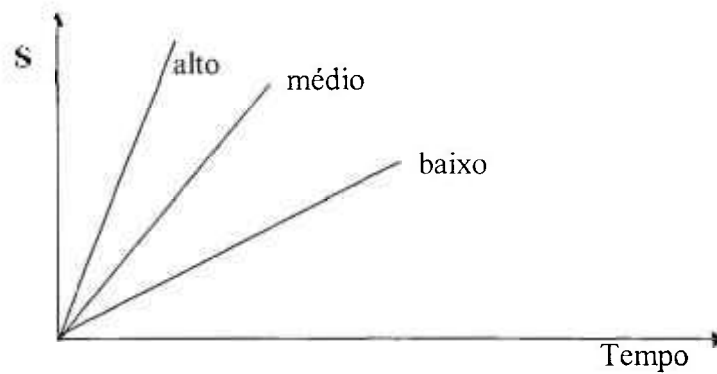


FIGURA 4-4: Aplicação de nível progressivo da tensão

**Tensão alternada:** cada espécime é submetido a tensões cujos níveis variam de maneira cíclica, conforme é ilustrado na FIGURA 4-5.

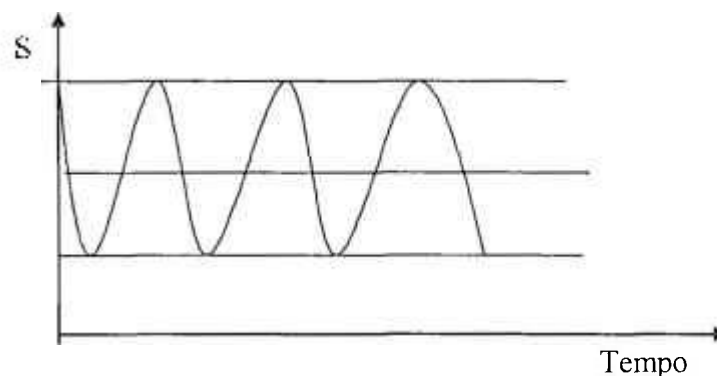


FIGURA 4-5: Aplicação da tensão alternada.

**Tensão aleatória:** alguns produtos, quando em uso, estão sujeitos a níveis da tensão que se alteram de maneira aleatória, como é mostrado na FIGURA 4-6. Exemplos incluem: estratificação térmica em tubulação de central nuclear, pontes e viadutos e componentes estruturais de aviões e de navios.

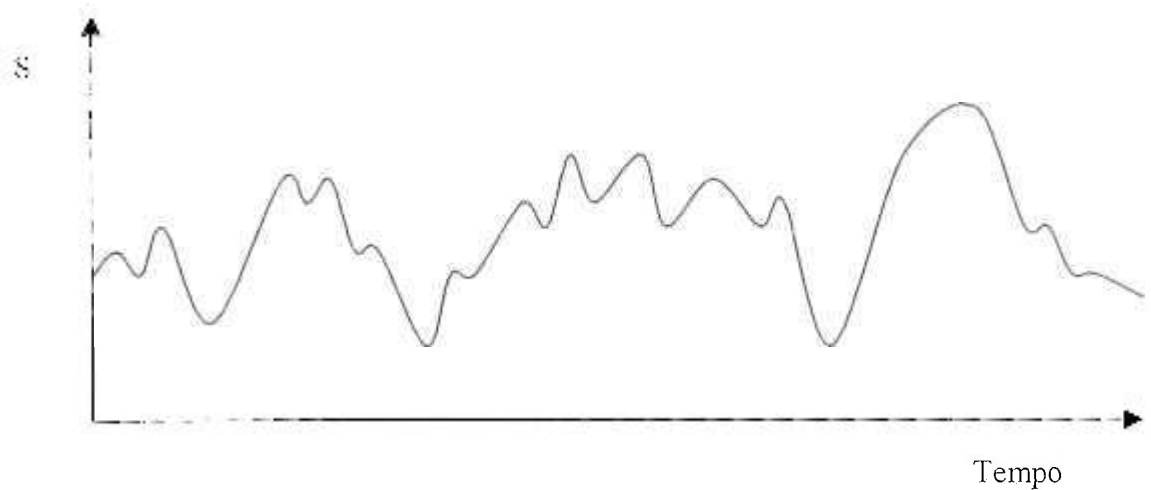


FIGURA 4-6: Carregamento com nível aleatório da tensão

Uma descrição mais exaustiva das formas apresentadas de aplicação da carga pode ser encontrada em NELSON (1990).

### 4.3 Modelos para Testes Acelerados com Amplitude Constante da Tensão Alternada

O tempo até a falha (tempo de vida) está relacionado com o nível da tensão alternada aplicado. A equação que estabelece essa relação é denominada relação tensão-resposta. Esta relação tensão-tempo de vida é determinística, ou seja, para um dado valor do nível da tensão alternada, obtém-se um único valor para o tempo de vida. Ela não é capaz, portanto, de explicar a variabilidade observada nos resultados experimentais. Assim sendo, é necessário acrescentar ao componente determinístico um componente estocástico, caracterizado pela distribuição de probabilidade da resposta, e capaz de explicar a referida dispersão observada nos tempos de vida. O componente probabilístico é definido pela distribuição que se supõe para o tempo de vida.

Assim, um modelo para um teste de vida acelerado consiste em:

- uma distribuição do tempo de vida, que representa a dispersão dos valores do tempo de vida de um produto;
- uma relação tensão-resposta.

Em confiabilidade são utilizadas, basicamente, as seguintes distribuições para o tempo de vida: exponencial, normal, Weibull, lognormal e do valor extremo (também denominada distribuição de Gumbel). No caso das relações tensão-resposta, são duas as mais utilizadas: a relação de Arrhenius e a relação potência inversa (FREITAS e COLOSIMO, 1997 e SOBCZYK e

SPENCER, 1992). Na Seção 4.3.1, serão apresentadas as relações tensão-resposta e, na Seção 4.3.2, os modelos probabilísticos.

### 4.3.1 Relações tensão-resposta

#### 4.3.1.1 Relação de Arrhenius

É utilizada para relacionar o tempo de vida  $X$  com a variável de estresse  $S$ , onde  $S$  é a temperatura absoluta em kelvin. Essa relação é descrita pela seguinte equação (FREITAS e COLOSIMO, 1997):

$$X = C \exp\left(\frac{E}{kS}\right) \quad (4.3)$$

onde:

$C$  – constante que é característica do mecanismo de falha do produto e das condições de teste;

$E$  – energia de ativação, normalmente em elétrons-volt; e

$k$  – constante de Boltzmann ( $8,617385 \times 10^{-5}$  eV/K) (LIDE, 1996).

Segundo FREITAS e COLOSIMO (1997), a relação de Arrhenius se aplica, por exemplo, aos testes em::

- (1) Dielétricos;
- (2) Plásticos;
- (3) Filamentos de lâmpadas incandescentes.

#### 4.3.1.2 Relação potência inversa

É utilizada para relacionar o tempo de vida  $X$  com qualquer outro tipo de variável de estresse  $S$ . Esta relação é expressa pela seguinte equação:

$$X = \left(\frac{A}{S}\right)^\omega, \quad (4.4)$$

onde  $A$  e  $\omega$  são parâmetros característicos do produto, unidade, geometria, fabricação, método de teste, etc. Segundo FREITAS e COLOSIMO (1997), a relação potência inversa se aplica, por exemplo, aos testes em:

- (1) Lâmpadas incandescentes;
- (2) Fadiga de metais;
- (3) Isolantes e dielétricos.

### 4.3.2 Modelos probabilísticos para o tempo de vida

#### 4.3.2.1 Modelos Arrhenius-Weibull e potência inversa-Weibull

A distribuição de Weibull é caracterizada por dois parâmetros:  $\gamma$ , parâmetro de forma e  $\alpha$ , parâmetro de escala, conforme descrito por FREITAS e COLOSIMO (1997) e COLLET, (1994). O parâmetro de forma  $\gamma$  é suposto constante para todos os níveis da tensão alternada e o parâmetro de escala  $\alpha$  é função do nível S da tensão alternada, ou seja,  $\alpha = \alpha(S)$ .

A função de densidade da distribuição de Weibull é dada pela expressão:

$$f(x|S) = \gamma [\alpha(S)]^{-\gamma} x^{\gamma-1} \exp \left[ - \left( \frac{x}{\alpha(S)} \right)^\gamma \right], \quad x \geq 0. \quad (4.5)$$

A função de confiabilidade para o tempo de vida X é expressa por:

$$R(x|S) = \exp \left\{ - \left[ \frac{x}{\alpha(S)} \right]^\gamma \right\} \quad (4.6)$$

onde:

$$\alpha(S) = \left( \frac{A}{S} \right)^n, \quad \text{no caso de se usar a relação potência inversa} \quad (4.7)$$

$$\alpha(S) = A \exp \left( \frac{E}{kS} \right), \quad \text{no caso de se usar a relação de Arrhenius} \quad (4.8)$$

Para  $\gamma = 1$ , a distribuição de Weibull se reduz à distribuição exponencial e suas propriedades são descritas por FREITAS e COLOSIMO (1997) e por COLLET (1994).

O percentil 100p%,  $x_p$ , é dado por

$$x_p = \alpha(S) [-\ln(1-p)]^{1/\gamma} \quad (4.9)$$

#### 4.3.2.2 Modelos Arrhenius-valor extremo e potência inversa-valor extremo

A distribuição do valor extremo ou de Gumbel é bastante relacionada com a de Weibull. Obtém-se sua função densidade de probabilidade, tomando-se o logaritmo natural de uma variável que segue a distribuição de Weibull. Isto é, se a variável X segue a distribuição de Weibull, então a variável  $\ln(X)$  segue a do valor extremo com a seguinte função densidade (FREITAS e COLOSIMO, 1997 e COLLET, 1994):

$$f[\ln(x)] = \frac{1}{\sigma} \exp\left[\frac{x-\mu}{\sigma} - \exp\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right] \quad (4.10)$$

onde:

- $\sigma = \frac{1}{\gamma}$  é o parâmetro de escala, e
- $\mu = \ln(\alpha)$  é o parâmetro de locação.

A função de confiabilidade da variável  $\ln(X)$  é dada por

$$R(x) = \exp\left[-\exp\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right] \quad (4.11)$$

O parâmetro de escala é suposto constante e o de locação é função do nível  $S$  da tensão alternada. Assim,

- $\mu(S) = \ln\left[\left(\frac{A}{S}\right)^{\gamma}\right]$ , no caso de se usar a relação potência inversa (4.12)
- $\mu(S) = \ln\left[A \exp\left(\frac{E}{kS}\right)\right]$ , no caso de se usar a relação de Arrhenius (4.13)

O percentil 100p% é dado por:

$$x_p = \mu + \sigma \ln[-\ln(1-p)] \quad (4.14)$$

Em análise dos tempos de vida é muitas vezes conveniente trabalhar com o logaritmo natural dos valores observados, tanto no uso do método da máxima verossimilhança (para estimar os valores dos parâmetros), quanto na análise dos resíduos (para a verificação da adequação do modelo ajustado). Desta forma, se os dados seguirem uma distribuição de Weibull, a distribuição do valor extremo aparecerá naturalmente nas aplicações destes métodos.

#### 4.3.2.3 Modelos Arrhenius-lognormal e potência inversa-lognormal

A distribuição lognormal é assim denominada porque o logaritmo natural de uma variável com distribuição lognormal com parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$ , tem uma distribuição normal com média  $\mu$  e desvio-padrão  $\sigma$ . Esta definição implica que os dados provenientes de uma distribuição lognormal podem ser analisados segundo uma distribuição normal, desde que se opere com o logaritmo natural dos dados, em vez de seus valores originais.

O parâmetro  $\sigma$  é suposto constante para todos os níveis da tensão alternada e o parâmetro  $\mu$  depende da amplitude  $S$  da tensão alternada, ou seja,  $\mu = \mu(S)$ .

A função de densidade da distribuição lognormal é dada por

$$f(x|S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x\sigma} \exp\left\{-\frac{[\ln(x) - \mu(S)]^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x \geq 0. \quad (4.15)$$

A função de confiabilidade para o tempo de vida  $X$  é dada pela seguinte expressão:

$$R(x|S) = \Phi\left[-\frac{\ln(x) - \mu(S)}{\sigma}\right] \quad (4.16)$$

onde:

(1)  $\Phi(\cdot)$  é a função de distribuição acumulada de uma normal padrão, ou seja, de uma normal com média igual a zero e desvio-padrão igual a um;

(2)  $\mu(S) = \ln\left[\left(\frac{A}{S}\right)^w\right]$ , no caso de se usar a relação potência inversa (4.17)

(3)  $\mu(S) = \ln\left[A \exp\left(\frac{E}{kS}\right)\right]$ , no caso de se usar a relação de Arrhenius (4.18)

O percentil 100p%,  $x_p$ , é dado por

$$x_p = \exp[z_p\sigma + \mu(S)] \quad (4.19)$$

onde  $z_p$  é o 100p% percentil da normal padrão.

#### 4.3.2.4 Dispersão do tempo de vida

Em muitos modelos de teste acelerado, o parâmetro que caracteriza a dispersão do tempo de vida é suposto ser constante em relação aos níveis da tensão de interesse. Segundo NELSON (1990), há duas razões para a suposição da independência do parâmetro da dispersão com o nível da tensão alternada. Primeiro, a experiência com tais dados sugere que um parâmetro constante da dispersão modela adequadamente o tempo de vida. Segundo, os analistas preferem usar um modelo com parâmetro constante da dispersão porque tal modelo é tradicional ou mais simples. Por exemplo, quase todos programas de ajuste de modelo (especialmente programas que usam mínimos quadrados) admitem que é constante o parâmetro da dispersão dos dados.

#### 4.4 Estimação dos Parâmetros do Modelo Estatístico

Para se individualizar uma distribuição de probabilidade (ou caracterizar uma determinada população), é necessário conhecer o valor numérico de seus parâmetros. Em estatística, esses parâmetros devem ser estimados a partir das observações amostrais. Existem vários métodos de estimação, conforme descrito por MOOD, GRAYBILL e BOES (1974) e por GARTHWAITE, JOLLIFFE e JONES (1995). No entanto, no caso particular de confiabilidade, o método mais adequado é o da máxima verossimilhança, descrito por CORDEIRO (1992), uma vez que este método permite incorporar as informações provenientes das censuras. Esse método, além de ser relativamente simples, tem a vantagem de fornecer estimadores, cujas distribuições convergem para a distribuição normal, à medida que se aumenta o tamanho da amostra, sob certas condições de regularidade (CORDEIRO, 1992).

##### 4.4.1 Método da máxima verossimilhança

Considerando que, de uma amostra de  $n$  observações, algumas são censuradas, a função de verossimilhança será composta pela função densidade de probabilidade para aquelas observações não censuradas e pela função de confiabilidade, para as censuradas. A razão de se usar a função de confiabilidade é que, não tendo alguns itens falhados, só se pode dizer que o tempo de vida é superior ao tempo de censura observado. A função que descreve a probabilidade de a variável tempo de vida  $X$  ser superior a um valor qualquer  $x$  é a função de confiabilidade, definida na Subseção 4.1.3. Assim, a expressão da função de verossimilhança, descrita por FREITAS e COLOSIMO (1997), é:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \{ [f(x_i; \theta)]^{\delta_i} \cdot [R(x_i; \theta)]^{1-\delta_i} \} \quad (4.20)$$

onde  $\theta$  é o vetor de parâmetros e

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se o } i\text{ésimo item falhar} \\ 0 & \text{se o } i\text{ésimo item não falhar} \end{cases}$$

Essa expressão é válida para todos os tipos de censura, com a suposição de que eles sejam *não-informativos*, ou seja, não carreguem informações sobre os parâmetros (LAWLESS, 1982).

Os estimadores de máxima verossimilhança são os valores de  $\theta$  que maximizam  $L(\theta)$  ou, equivalentemente,  $l(\theta) = \ln L(\theta)$ .

#### 4.4.2 Intervalos de confiança

Os intervalos de confiança para os parâmetros são construídos a partir de algumas propriedades que os estimadores de máxima verossimilhança possuem, descritas, entre outros, por CORDEIRO (1992). A principal delas é: sendo atendidas as condições usuais de regularidade, se  $\hat{\theta}$  é o estimador de máxima verossimilhança de  $\theta$ , então, assintoticamente,  $\hat{\theta} \sim N(\theta, \zeta_{\theta}^{-1})$ . Onde:

$$\zeta_{\theta} = -E \left[ \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta^2} \right] e$$

$$l(\theta) = \ln L(\theta).$$

$\zeta_{\theta}$  é chamada matriz de informação de Fisher.  $\zeta_{\theta}$  é usualmente função de  $\theta$ . Uma estimativa para  $\zeta_{\theta}$  é obtida substituindo  $\theta$  por  $\hat{\theta}$ , que iremos simbolizar por  $\hat{\zeta}_{\theta}$ .

No caso em que a esperança seja de cálculo difícil ou mesmo impossível, ela é substituída por:

$$I_{\theta} = - \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta^2}$$

que é denominada matriz de informação observada.

No caso especial em que  $\theta$  é um escalar, o intervalo de  $(1 - \alpha)100\%$  de confiança é

$$\hat{\theta} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{I}_{\theta}^{-1}} \quad (4.21)$$

Quando  $\theta$  não for um escalar, o intervalo de confiança de  $(1 - \alpha)100\%$  para o  $i$ ésimo componente de  $\theta$  ( $\theta_i$ ) é dado por

$$\hat{\theta}_i \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{I}_{ii}^{-1}} \quad (4.22)$$

onde

$$\hat{I}_{\theta}^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{I}_{11}^{-1} & \dots & \hat{I}_{1v}^{-1} & \dots & \hat{I}_{1v}^{-1} \\ \hat{I}_{21}^{-1} & \hat{I}_{22}^{-1} & \dots & \hat{I}_{2i}^{-1} & \dots & \hat{I}_{2j}^{-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \hat{I}_{i1}^{-1} & \dots & \hat{I}_{ii}^{-1} & \dots & \hat{I}_{iv}^{-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hat{I}_{r1}^{-1} & \dots & \hat{I}_{ri}^{-1} & \dots & \hat{I}_{rv}^{-1} \end{bmatrix}$$

Ou seja,  $\hat{I}_\theta^{-1}$  é uma matriz  $p \times p$  simétrica, na qual os elementos da diagonal principal  $(\hat{I}_{11}^{-1} \dots \hat{I}_{pp}^{-1})$  são as estimativas da variância de  $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_p)$ .

#### 4.5 Teste Acelerado com Tensão Alternada Aplicada em Níveis – Modelo de Exposição Cumulativa

Para tratar os dados provenientes de teste acelerado com tensão alternada aplicada em níveis, necessita-se de um modelo que leve em conta o efeito cumulativo de exposição em níveis sucessivos da tensão alternada. Neste trabalho foi adotado o modelo de exposição cumulativa linear. Tal modelo, também chamado de modelo de dano cumulativo linear, tem sido estudado por vários autores: NELSON (1980 e 1990), MILLER e NELSON (1983), TANG, SUN e ONG (1996), XIONG (1998). Este modelo supõe que:

- (1) o tempo de vida restante de um espécime depende somente da fração cumulativa atual de dano e do nível aplicado da tensão alternada, e independe de como a fração se acumulou - propriedade de Markov (SOBCZYK e SPENCER, 1992);
- (2) se for mantido o nível aplicado da tensão alternada, os sobreviventes falharão em conformidade com a função de distribuição para esta tensão, iniciando-se, porém, na fração anterior de falha acumulada.

A representação gráfica do modelo EC para o tempo de falha, como função do nível aplicado da tensão alternada, é mostrada nas FIGURA 4-7, FIGURA 4-8 e FIGURA 4-9 (NELSON, 1980).

Na FIGURA 4-7 é mostrada uma configuração da tensão alternada aplicada em três níveis diferentes. São representados os tempos de falha e os de censura de corpos-de-prova. Na FIGURA 4-8 são mostradas as três funções de distribuição para os níveis constantes da tensão alternada ( $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$ ). As setas indicam que os corpos-de-prova seguem primeiro a função de distribuição para  $S_1$  até o tempo  $x_1$ . Quando o nível da tensão alternada aumenta de  $S_1$  para  $S_2$ , os corpos-de-prova, que não falharam, continuam ao longo da função de distribuição de  $S_2$ , começando na fração de falha acumulada. Analogamente, quando o nível da tensão alternada passa de  $S_2$  para  $S_3$ , os corpos-de-prova que não falharam continuam ao longo da próxima função de distribuição, começando na fração de

falha acumulada. A função de distribuição para o tempo de vida, sob a configuração da tensão alternada aplicada em níveis, é representada na

FIGURA 4-9 e é formada pelos segmentos das funções de distribuição para nível constante da tensão alternada da, (NELSON, 1980).

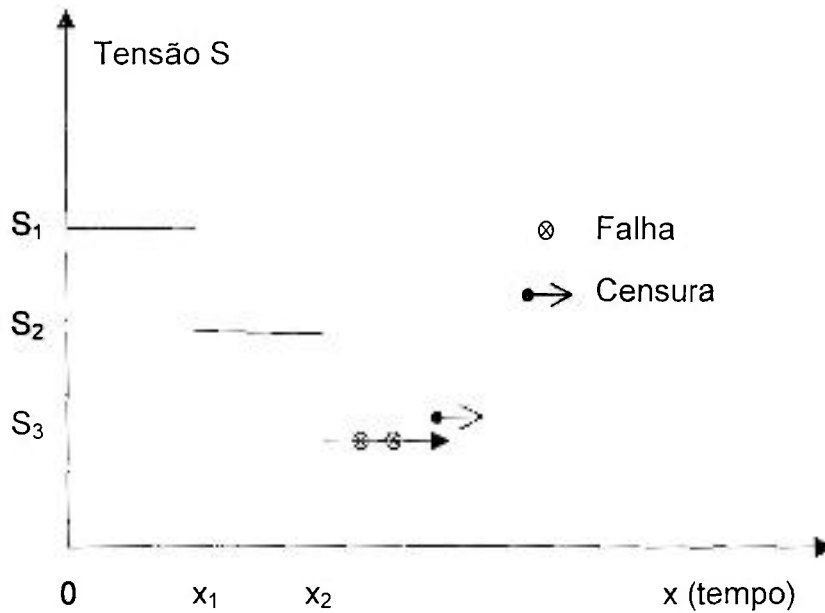


FIGURA 4-7: Tempo de falha e de censura numa configuração da tensão alternada aplicada em três níveis diferentes.

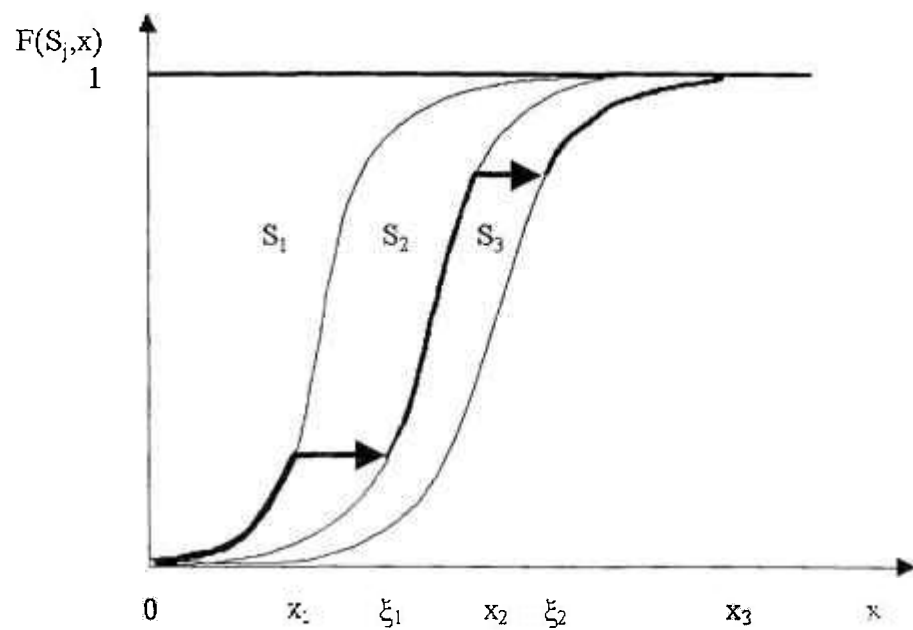


FIGURA 4-8: Funções de distribuição para os três níveis da tensão alternada constantes ( $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$ ) e os tempos iniciais equivalentes.

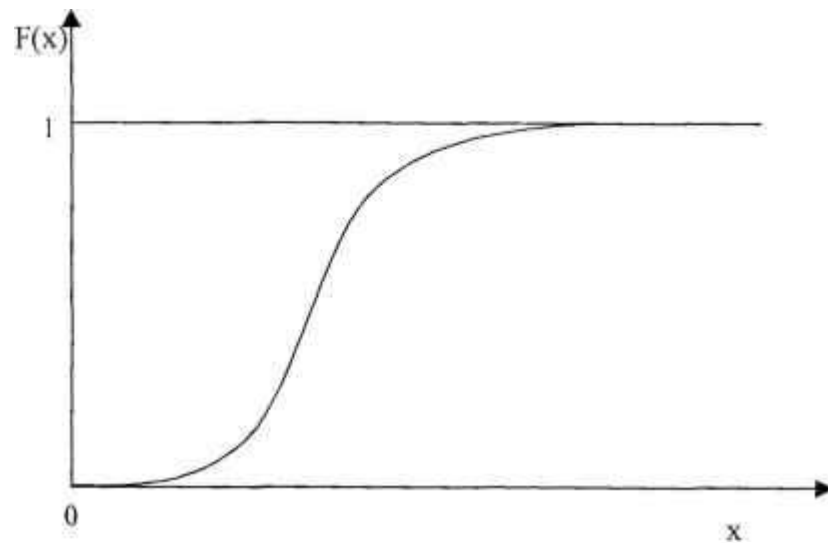


FIGURA 4-9: Modelo probabilístico para o tempo de falha como função do nível aplicado da tensão alternada.

Matematicamente, este modelo é expresso a seguir, onde se obterá a função de distribuição  $F_0(x)$  do tempo de vida sob uma configuração particular da tensão alternada aplicada em  $m$  níveis. Suponha que, para uma configuração particular, o nível  $j$  corresponda à amplitude  $S_j$  da tensão alternada, iniciando-se no tempo  $x_{j-1}$  até o tempo  $x_j$ , sendo  $j = 1, 2, \dots, m$  e  $x_0 = 0$ . A função de distribuição do tempo de falha, no nível constante  $S_j$  da tensão alternada é denotado por  $F(S_j, x)$ .

No nível 1 da tensão alternada, a fração acumulada da população de corpos-de-prova que falham é

$$F_0(x) = F(S_1, x), \quad 0 \leq x \leq x_1.$$

No nível 2 da tensão alternada, o tempo inicial equivalente ( $\xi_1$ ) é o que teria produzido a mesma fração de falha acumulada da população no nível 1 da tensão alternada (como é mostrado na FIGURA 4-8); isto é,  $\xi_1$  é a solução de

$$F(S_1, \Delta x_1 + \xi_0) = F(S_2, \xi_1),$$

onde:

$$\xi_0 = 0; \text{ e}$$

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0.$$

A fração acumulada da população de corpos-de-prova que falham no nível 2 da tensão alternada é

$$F_0(x) = F(S_2, x-x_1+\xi_1), \quad x_1 \leq x \leq x_2.$$

Analogamente, o tempo inicial equivalente ( $\xi_2$ ) no nível 3 da tensão alternada é o que teria produzido a mesma fração de falha acumulada da população no nível 2 da tensão alternada, isto é,  $\xi_2$  é a solução de

$$F(S_2, \Delta x_2 + \xi_1) = F(S_3, \xi_2),$$

onde  $\Delta x_2 = x_2 - x_1$ .

A fração acumulada da população de corpos-de-prova que falham no nível 3 é

$$F_0(x) = F(S_3, x-x_2+\xi_2), \quad x_2 \leq x \leq x_3.$$

Generalizando, o tempo inicial equivalente ( $\xi_{j-1}$ ) no nível  $j$  da tensão alternada é o que teria produzido a mesma fração de falha acumulada da população no nível  $(j-1)$  da tensão alternada, isto é,  $\xi_{j-1}$  é a solução de:

$$F(S_{j-1}, \Delta x_{j-1} + \xi_{j-2}) = F(S_j, \xi_{j-1}) \quad (4.23)$$

onde:

$$\Delta x_{j-1} = x_{j-1} - x_{j-2} \text{ e}$$

$$j = 1, 2, \dots, m.$$

A fração acumulada da população de corpos-de-prova que falham no nível  $j$  da tensão alternada é

$$F_0(x) = F(S_j, x-x_{j-1}+\xi_{j-1}), \quad x_{j-1} \leq x \leq x_j. \quad (4.24)$$

#### 4.5.1 *Uso da distribuição lognormal e relação potência inversa*

Para o caso da lognormal e relação potência inversa, a  $F(S_j, x)$  é:

$$F(S_j, x) = 1 - \Phi \left\{ -\frac{1}{\sigma} \ln \left[ x \left( \frac{S_j}{A} \right)^\omega \right] \right\} \quad (4.25)$$

Substituindo a expressão (4.25) em (4.23):

$$\Phi \left\{ -\frac{1}{\sigma} \ln \left[ (\Delta x_{j-1} + \xi_{j-2}) \left( \frac{S_{j-1}}{A} \right)^\omega \right] \right\} = \Phi \left\{ -\frac{1}{\sigma} \ln \left[ \xi_{j-1} \left( \frac{S_j}{A} \right)^\omega \right] \right\}. \quad (4.26)$$

Simplificando a expressão (4.26) obtém-se

$$-\frac{1}{\sigma} \ln \left[ (\Delta x_{j-1} + \xi_{j-2}) \left( \frac{S_{j-1}}{A} \right)^\omega \right] = -\frac{1}{\sigma} \ln \left[ \xi_{j-1} \left( \frac{S_j}{A} \right)^\omega \right]. \quad (4.27)$$

Explicitando o tempo inicial equivalente  $\xi_{j-1}$  na expressão (4.27), obtém-se

$$\xi_{j-1} = (\Delta x_{j-1} + \xi_{j-2}) \left( \frac{S_{j-1}}{S_j} \right)^\omega \quad (4.28)$$

Considerando a expressão (4.24), a fração acumulada da população de corpos-de-prova que falham no nível j da tensão alternada é:

$$F_0(x) = 1 - \Phi \left\{ -\frac{1}{\sigma} \ln \left[ (x - x_{j-1} + \xi_{j-1}) \left( \frac{S_j}{A} \right)^\omega \right] \right\}, \quad x_{j-1} \leq x \leq x_j \quad (4.29)$$

e  $\xi_{j-1}$  é dado pela fórmula recursiva (4.28).

#### 4.5.2 Uso da distribuição de Weibull e relação potência inversa

Para o caso da Weibull e relação potência inversa, a  $F(S_j, x)$  é:

$$F(S_j, x) = 1 - \exp \left\{ - \left[ x \left( \frac{S_j}{A} \right)^\omega \right]^\gamma \right\} \quad (4.30)$$

Substituindo a expressão (4.30) em (4.23):

$$\exp \left\{ - \left[ (\Delta x_{j-1} + \xi_{j-2}) \left( \frac{S_{j-1}}{A} \right)^\omega \right]^\gamma \right\} = \exp \left\{ - \left[ \xi_{j-1} \left( \frac{S_j}{A} \right)^\omega \right]^\gamma \right\} \quad (4.31)$$

Fazendo-se as devidas simplificações na expressão (4.31) e explicitando o tempo inicial equivalente no nível j da tensão alternada obtém-se

$$\xi_{j-1} = (\Delta x_{j-1} + \xi_{j-2}) \left( \frac{S_{j-1}}{S_j} \right)^\omega \quad (4.32)$$

Considerando (4.24), a fração acumulada da população de corpos-de-prova que falham no nível j da tensão alternada é:

$$F_0(x) = 1 - \exp \left\{ - \left[ (x - x_{j-1} + \xi_{j-1}) \left( \frac{S_j}{A} \right)^\omega \right]^\gamma \right\}, \quad x_{j-1} \leq x \leq x_j \quad (4.33)$$

e  $\xi_{j-1}$  é obtido utilizando-se a expressão (4.32).

#### 4.5.3 Uso da distribuição lognormal e relação de Arrhenius

Para o caso da lognormal e relação de Arrhenius, a  $F(S_j, x)$  é:

$$F(S_j, x) = 1 - \Phi \left\{ -\frac{1}{\sigma} \ln \left[ \frac{x}{C \exp\left(\frac{E}{kS_j}\right)} \right] \right\}. \quad (4.34)$$

Substituindo (4.34) na expressão (4.23), fazendo-se as devidas simplificações e explicitando o tempo inicial equivalente no nível j da tensão alternada, obtém-se

$$\xi_{j-1} = (\Delta x_{j-1} + \xi_{j-2}) \exp \left[ \frac{E}{k} \left( \frac{1}{S_j} - \frac{1}{S_{j-1}} \right) \right]. \quad (4.35)$$

Considerando (4.24), a fração acumulada da população de corpos-de-prova que falham no nível j da tensão é:

$$F_j(x) = 1 - \Phi \left\{ -\frac{1}{\sigma} \ln \left[ \frac{x - x_{j-1} + \xi_{j-1}}{C \exp\left(\frac{E}{kS_j}\right)} \right] \right\}, \quad x_{j-1} \leq x \leq x_j, \quad (4.36)$$

e  $\xi_{j-1}$  é dado pela fórmula recursiva (4.35).

#### 4.5.4 Uso da distribuição de Weibull e relação de Arrhenius

Para o caso da Weibull e relação de Arrhenius, a  $F(S_j, x)$  é:

$$F(S_j, x) = 1 - \exp \left\{ - \left[ \frac{x}{C \exp\left(\frac{E}{kS_j}\right)} \right]^r \right\} \quad (4.37)$$

Substituindo (4.37) na expressão (4.23), fazendo-se as devidas simplificações e explicitando o tempo inicial equivalente no nível j da tensão alternada, obtém-se

$$\xi_{j-1} = (\Delta x_{j-1} + \xi_{j-2}) \exp \left[ \frac{E}{k} \left( \frac{1}{S_j} - \frac{1}{S_{j-1}} \right) \right] \quad (4.38)$$

Considerando (4.24), a fração acumulada da população de corpos-de-prova que falham no nível j da tensão alternada é:

$$F_o(x) = 1 - \exp \left\{ - \left[ \frac{x - x_{i-1} - \xi_{i-1}}{C \exp \left( \frac{E}{k\delta_j} \right)} \right]^p \right\}, \quad x_{j-1} \leq x \leq x_j \quad (4.39)$$

e  $\xi_{i-1}$  é dado pela fórmula recursiva (4.38).

#### 4.5.5 Função de verossimilhança

Considerando a expressão (4.20), a função de verossimilhança será:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n [f_o(x_i; \theta)]^\delta [1 - F_o(x_i; \theta)]^{1-\delta} \quad (4.40)$$

onde:

- $F_o(x)$  é dada por uma das seguintes expressões (4.29), (4.33), (4.36) ou (4.39), dependendo do modelo probabilístico (lognormal ou Weibull) e do tipo da relação tensão-resposta (Arrhenius ou potência inversa);
- $f_o(x) = \frac{dF_o(x)}{dx}$ .

## 5 MODELO PROBABILÍSTICO PARA O TEMPO DE FALHA POR FADIGA COM EXPOSIÇÃO CUMULATIVA

Como visto na Seção 4.3, o modelo que estabelece a relação tensão-tempo de vida é composto por dois componentes:

- (1) determinístico, que neste caso é denominado relação tensão-resposta;
- (2) estocástico, que é caracterizado pela distribuição de probabilidade da resposta.

No caso de fadiga, o componente determinístico do modelo (FREITAS e COLOSIMO, 1997) é a relação potência inversa, que será então a relação adotada neste trabalho. Para o componente estocástico, as distribuições adotadas para representar os dados de tempo de vida em nível constante da tensão alternada são a Weibull e a lognormal, segundo COLLINS (1993).

No caso de dados obtidos em testes acelerados com tensão alternada aplicada em níveis, será adotado o modelo de exposição cumulativa linear, para o efeito de mudança de nível de estresse (NELSON, 1980). Neste modelo serão utilizadas a relação potência inversa e as distribuições de Weibull e lognormal. O objetivo do modelo é relacionar a distribuição do tempo de vida em teste acelerado com tensão alternada aplicada em níveis com aquela em tensão cíclica de operação.

Neste capítulo serão apresentados: o desenvolvimento dos modelos de exposição cumulativa linear associado com o modelo potência inversa-Weibull e com o modelo potência inversa-lognormal; a solução numérica da estimação de máxima verossimilhança dos parâmetros; a definição dos resíduos, cuja análise será usada para verificar a adequação dos modelos aos dados experimentais.

### 5.1 Distribuição de Weibull e Relação Potência Inversa

Substituindo a expressão (4.7) nas expressões (4.5), (4.6) e (4.9), obtém-se:

$$f(x/S) = \gamma(x)^{\gamma-1} \left( \frac{S^\omega}{A} \right)^\gamma \exp \left\{ - \left[ x \left( \frac{S}{A} \right)^\omega \right]^\gamma \right\} \quad (5.1)$$

$$R(x/S) = \exp \left\{ - \left[ x \left( \frac{S}{A} \right)^\omega \right]^\gamma \right\} \quad (5.2)$$

$$x_p = \frac{A}{S^\omega} [-\ln(1-p)]^{1/\gamma} \quad (5.3)$$

A função de distribuição da Weibull, utilizando a relação potência inversa, é dada pela expressão (4.30)

### 5.1.1 Função densidade e função de distribuição do modelo EC

A função de distribuição do modelo de exposição cumulativa, utilizando a distribuição de Weibull e a relação potência inversa é dada pela expressão (4.33), ou seja:

$$F_0(x) = 1 - \exp \left\{ - \left[ (x - x_{j-1} - \xi_{j-1}) \left( \frac{S_j}{A} \right)^\omega \right]^\gamma \right\}, \quad x_{j-1} \leq x \leq x_j \quad (5.4)$$

A função densidade de probabilidade deste modelo de exposição é obtida derivando a função de distribuição (5.4), obtendo-se:

$$f_0(x) = \gamma \frac{S_j}{A} \left[ (x - x_{j-1} + \xi_{j-1}) \left( \frac{S_j}{A} \right)^\omega \right]^{\gamma-1} \exp \left\{ - \left[ (x - x_{j-1} + \xi_{j-1}) \left( \frac{S_j}{A} \right)^\omega \right]^\gamma \right\}, \quad x_{j-1} \leq x \leq x_j \quad (5.5)$$

### 5.1.2 Determinação do tempo inicial equivalente

Usando a relação de recorrência (4.32) para determinar o tempo inicial equivalente  $\xi_{j-1}$  e fazendo  $j$  variar a partir de  $j=1$ , procura-se obter uma expressão geral para o cálculo deste tempo inicial equivalente sem a dependência do tempo inicial equivalente no nível anterior da tensão alternada. Assim, para  $j=1$ , obtém-se

$$\begin{aligned}\xi_1 &= (x_1 - x_0 + \xi_0) \left( \frac{S_1}{S_2} \right)^\omega \\ &= (x_1 - x_0) \left( \frac{S_1}{S_2} \right)^\omega - \xi_0 \left( \frac{S_1}{S_2} \right)^\omega\end{aligned}$$

Como  $x_0=0$  e  $\xi_0=0$ , conclui-se que:

$$\xi_1 = x_1 \left( \frac{S_1}{S_2} \right)^\omega - \sum_{j=1}^1 (x_j - x_{j-1}) \left( \frac{S_1}{S_2} \right)^\omega \quad (5.6)$$

Para  $j=2$ , obtém-se

$$\begin{aligned}\xi_2 &= (x_2 - x_1 + \xi_1) \left( \frac{S_2}{S_3} \right)^\omega \\ &= (x_2 - x_1) \left( \frac{S_2}{S_3} \right)^\omega + \xi_1 \left( \frac{S_2}{S_3} \right)^\omega\end{aligned} \quad (5.7)$$

Substituindo (5.6) em (5.7), obtém-se:

$$\begin{aligned}\xi_2 &= (x_2 - x_1) \left( \frac{S_2}{S_3} \right)^\omega + \sum_{k=1}^1 (x_k - x_{k-1}) \left( \frac{S_k}{S_3} \right)^\omega \\ &\quad - \sum_{j=1}^1 (x_j - x_{j-1}) \left( \frac{S_j}{S_3} \right)^\omega\end{aligned} \quad (5.8)$$

Para  $j=3$ , obtém-se:

$$\begin{aligned}\xi_3 &= (x_3 - x_2 + \xi_2) \left( \frac{S_3}{S_4} \right)^\omega \\ &= (x_3 - x_2) \left( \frac{S_3}{S_4} \right)^\omega + \xi_2 \left( \frac{S_3}{S_4} \right)^\omega\end{aligned} \quad (5.9)$$

Substituindo (5.8) em (5.9), obtém-se:

$$\begin{aligned}\xi_3 &= (x_3 - x_2) \left( \frac{S_3}{S_4} \right)^\omega + \sum_{k=1}^2 (x_k - x_{k-1}) \left( \frac{S_k}{S_4} \right)^\omega \\ &\quad - \sum_{j=1}^2 (x_j - x_{j-1}) \left( \frac{S_j}{S_4} \right)^\omega\end{aligned} \quad (5.10)$$

Generalizando para  $\xi_{j-1}$ , chega-se a:

$$\xi_{j-1} = \sum_{k=1}^{j-1} (x_k - x_{k-1}) \left( \frac{S_k}{S_j} \right)^\omega \quad (5.11)$$

A expressão final obtida não é uma relação de recorrência, sendo portanto mais fácil de ser utilizada.

### 5.1.3 Função de verossimilhança

A função de verossimilhança pode ser representada da seguinte forma:

$$L(A, \omega, \gamma) = \prod_{i=1}^n \left\{ f_o(x_i; A, \omega, \gamma)^{\delta_i} [1 - F_o(x_i; A, \omega, \gamma)]^{1-\delta_i} \right\} \quad (5.12)$$

onde:

- (1)  $i$  é o índice que denota o corpo-de-prova;
- (2) as funções  $f_o(x_i; A, \omega, \gamma)$  e  $F_o(x_i; A, \omega, \gamma)$  são dadas, respectivamente, pelas expressões (5.5) e (5.4); e
- (3)  $\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se o item falhar} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

Fazendo

$$\Delta x_j = x_j - x_{j-1}; \quad (5.13)$$

$$\chi_j = x_j - x_{j-1} - \xi_j = \Delta x_j - \xi_{j-1}; \quad (5.14)$$

$$\alpha = \left( \frac{A}{S_m} \right)^{\omega}; \quad (5.15)$$

e levando (5.13), (5.14) e (5.15), em (5.5) e (5.4), obtém-se

$$f_o(\alpha, \gamma) = \frac{\gamma}{\alpha} \left( \frac{\chi_i}{\alpha} \right)^{\gamma-1} \exp \left[ - \left( \frac{\chi_i}{\alpha} \right)^{\gamma} \right] \quad (5.16)$$

e

$$F_o(\alpha, \gamma) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\chi_i}{\alpha} \right)^{\gamma} \right] \quad (5.17)$$

A expressão (5.12) se torna então:

$$L(\alpha, \gamma) = \prod_{i=1}^r \left\{ \frac{\gamma}{\alpha} \left( \frac{\chi_i}{\alpha} \right)^{\gamma-1} \exp \left[ - \left( \frac{\chi_i}{\alpha} \right)^{\gamma} \right] \right\} \prod_{i=r+1}^n \left\{ \exp \left[ - \left( \frac{\chi_i}{\alpha} \right)^{\gamma} \right] \right\} \quad (5.18)$$

Substituindo-se, na expressão (5.18),

$$y_i = \ln(\chi_i) \Rightarrow \chi_i = e^{y_i},$$

$$\frac{d\chi_i}{dy_i} = e^{y_i},$$

$$\gamma = \frac{1}{\sigma}$$

$$\mu = \ln(\alpha) \Rightarrow \alpha = e^\mu$$

obtem-se:

$$\begin{aligned} L(\mu, \sigma) &= \prod_{i=1}^r \left\{ \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{\mu}{\sigma}} e^{\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)y_i} \exp\left[-e^{-\frac{y_i-\mu}{\sigma}}\right] e^{y_i} \right\} \prod_{i=r+1}^n \left\{ \exp\left[-e^{-\frac{y_i-\mu}{\sigma}}\right] \right\} \\ &= \sigma^{-r} e^{-\frac{r\mu}{\sigma}} \prod_{i=1}^r e^{\frac{y_i}{\sigma}} \prod_{i=1}^r e^{-y_i} \prod_{i=1}^r \left\{ \exp\left[-e^{-\frac{y_i-\mu}{\sigma}}\right] \right\} \prod_{i=1}^r e^{y_i} \\ \therefore L(\mu, \sigma) &= \sigma^{-r} \prod_{i=1}^r \exp\left[\frac{y_i-\mu}{\sigma}\right] \prod_{i=1}^n \exp\left[-\exp\left[\frac{y_i-\mu}{\sigma}\right]\right] \end{aligned} \quad (5.19)$$

Tomando-se o logaritmo natural dos dois lados da expressão (5.19), obtém-se:

$$l(\mu, \sigma) = -r \ln(\sigma) + \sum_{i=1}^r \left[ \frac{y_i - \mu}{\sigma} \right] - \sum_{i=1}^n \exp\left[ \frac{y_i - \mu}{\sigma} \right] \quad (5.20)$$

## 5.2 Distribuição Lognormal e Relação Potência Inversa

Substituindo a expressão (4.17) nas expressões (4.15), (4.16) e (4.19) obtém-se:

$$f(x|S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x\sigma}} \exp\left\{-\frac{[\ln(x) - \mu(S)]^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x \geq 0 \quad (5.21)$$

$$R(x|S) = \Phi\left[-\frac{\ln(x) - \mu(S)}{\sigma}\right] \quad (5.22)$$

$$x_p = \exp[z_p \sigma + \mu(S)] \quad (5.23)$$

A função de distribuição da lognormal, utilizando a relação potência inversa, é dada pela expressão (4.25).

### 5.2.1 Função densidade e função de distribuição do modelo EC

A função de distribuição do modelo de exposição cumulativa, utilizando a distribuição lognormal e a relação potência inversa é dada por (4.29), ou seja:

$$F_0(x) = 1 - \Phi\left\{-\frac{1}{\sigma} \ln\left[\left(x - x_{j-1} + \xi_{j-1} \left(\frac{S_j}{S}\right)^{\omega}\right)\right]\right\}, \quad x_{j-1} \leq x \leq x_j \quad (5.24)$$

A função densidade de probabilidade desse modelo de exposição é obtida derivando a função de distribuição (5.24), obtendo-se

$$f_0(x) = \frac{1}{(x - x_{j-1} + \xi_{j-1})\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \left[ \ln\left[ (x - x_{j-1} + \xi_{j-1}) \left(\frac{S_j}{A}\right)^w \right] \right]^2\right\} \quad (5.25)$$

### 5.2.2 Determinação do tempo inicial equivalente

Como as expressões (4.28) e (4.32) são idênticas, então o tempo inicial equivalente do modelo de exposição cumulativa, utilizando-se a distribuição lognormal e relação potência inversa pode ser expresso por (5.11), ou seja:

$$\xi_{j-1} = \sum_{s=1}^{j-1} (x_s - x_{s-1}) \left(\frac{S_s}{S_j}\right)^w \quad (5.26)$$

### 5.2.3 Função de verossimilhança

A função de verossimilhança pode ser representada da seguinte forma:

$$L(A, \omega, \sigma) = \prod_{i=1}^n \left\{ [f_0(x_i; A, \omega, \sigma)]^{\delta_i} [1 - F_0(x_i; A, \omega, \sigma)]^{1-\delta_i} \right\} \quad (5.27)$$

onde:

- (1)  $i$  é o índice que denota o corpo-de-prova;
- (2) as funções  $f_0(x_i; A; \omega, \sigma)$  e  $F_0(x_i; A; \omega, \sigma)$  são dadas, respectivamente, pelas expressões (5.25) e (5.24); e
- (3)  $\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se o item falhar} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

Fazendo as mudanças de variáveis, temos que:

$$x_i - x_{j-1} = \Delta x_j \quad (5.28)$$

$$\chi_j = x_j - x_{j-1} + \xi_{j-1} = \Delta x_j + \xi_{j-1} \quad (5.29)$$

e

$$\psi_j = -\frac{1}{\sigma} \ln\left[ (x_j - x_{j-1} + \xi_{j-1}) \left(\frac{S_j}{A}\right)^w \right] = -\frac{1}{\sigma} \ln\left[ \chi_j \left(\frac{S_j}{A}\right)^w \right] \quad (5.30)$$

Substituindo-se as expressões (5.13), (5.14) e (5.15) nas expressões de  $f_0(A, \omega, \sigma)$  e  $F_0(A, \omega, \sigma)$ , (5.5) e (5.4) respectivamente, obtém-se:

$$f_0(A, \omega, \gamma) = \gamma \psi_j \exp(-\chi_j \psi_j) \quad (5.31)$$

e

$$F_0(A, \omega, \gamma) = 1 - \exp(-\chi_j \psi_j) \quad (5.32)$$

### 5.3 Estimadores de Máxima Verossimilhança dos Parâmetros

Representando os parâmetros por um vetor denotado por  $\theta$ , as expressões (5.12) e (5.27) podem ser representadas por

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \left\{ [f_{\theta}(x_i; \theta)]^{\delta_i} [1 - F_{\theta}(x_i; \theta)]^{1-\delta_i} \right\} \quad (5.33)$$

Tomando-se o logaritmo natural de ambos os membros da expressão (5.33), obtém-se:

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln[f_{\theta}(x_i; \theta)]^{\delta_i} + \sum_{i=1}^n \ln[1 - F_{\theta}(x_i; \theta)]^{1-\delta_i} \quad (5.34)$$

Os estimadores de máxima verossimilhança são os valores de  $\theta$  que maximizam  $L(\theta)$  ou, equivalentemente,  $l(\theta)$ . São encontrados resolvendo-se o sistema de equações que resulta de:

$$U(\theta) = \frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (5.35)$$

onde:

$$\theta = (A, \omega, \gamma)^T, \text{ para a distribuição de Weibull; ou}$$

$$\theta = (A, \omega, \sigma)^T, \text{ para a distribuição lognormal.}$$

### 5.4 Solução Numérica

Uma vez que a função de verossimilhança é muito complexa (mal comportada), apresentando diversos máximos locais, singularidades e outros pontos em que a função não está definida (por exemplo logaritmo de número negativo ou nulo), torna-se inviável o uso de métodos convencionais para a resolução do sistema de equações algébricas. Por esta razão, decidiu-se empregar um método de solução do problema baseado em algoritmos genéticos. Com este propósito foi implementado um aplicativo, utilizando-se a linguagem C++, para se encontrar uma região em torno do máximo global procurado para a função de verossimilhança. Em seguida, aplicou-se o método de Newton-Raphson para refinar o resultado obtido.

#### 5.4.1 Uso do aplicativo baseado em algoritmo genético

Os algoritmos genéticos (AG) têm sido amplamente utilizados em áreas diversas do conhecimento, tais como, otimização combinatória, otimização numérica de funções, processamento de imagem, projeto de redes neurais

artificiais. Em geral os AG têm se revelado bastante exitosos na resolução de problemas complexos. Como já mencionado, a pesquisa do máximo da função de verossimilhança correspondente ao modelo de exposição cumulativa linear se enquadra nesta categoria de problemas.

A determinação dos melhores valores para os principais parâmetros do -AG que potencialmente permitem obter melhores resultados – considerando-se a convergência e o esforço computacional – foi feita por tentativa, levando em conta a discussão apresentada no ANEXO A:. Estes parâmetros são o tamanho da população, número de bits para representar o valor de cada parâmetro (da função de distribuição do modelo de exposição cumulativa), probabilidade de cruzamento e probabilidade de mutação. Além disso, é necessário definir o espaço de busca. Para o caso presente, a estratégia adotada foi a de estabelecer um amplo espaço de busca e, na medida em que os resultados dos parâmetros da função de distribuição do modelo de exposição cumulativa linear foram sendo obtidos, este espaço foi sendo restringido, conseguindo-se com isto uma maior precisão na estimativa destes parâmetros.

A utilização dos AG na pesquisa do máximo da função de verossimilhança envolveu as seguintes escolhas:

- (1) **codificação** – a codificação dos parâmetros da função de distribuição do modelo de exposição cumulativa foi feita utilizando-se um alfabeto binário. A definição do número de bits para representar o valor de cada parâmetro foi feita por tentativa, no sentido de alcançar a convergência do valor máximo da função de verossimilhança e, com adequada precisão, os valores estimados dos parâmetros. Começou-se com valores binários de 10 bits para cada parâmetro. Para o modelo potência inversa-Weibull, chegou-se a 20 bits para cada parâmetro e, para o modelo potência inversa-lognormal, 30 bits. Como a função de verossimilhança possui três parâmetros, cada cromossomo terá assim três genes perfazendo um total de 60 e 90 dígitos binários para os modelos de potência inversa-Weibull e potência inversa-lognormal, respectivamente;
- (2) **tamanho da população** – o aumento do tamanho da população melhora a qualidade das soluções, obtendo-se a convergência com um número menor de gerações; no entanto, esta melhoria é feita à

custa de um aumento do tempo de processamento em cada geração. A definição do tamanho da população foi feita por tentativa, iniciando-se com o tamanho 500 para os dois modelos, e chegando-se então ao tamanho da população igual a 1000 para o modelo potência inversa-Weibull, e 5000 para o modelo potência inversa-lognormal;

- (3) **seleção** – para a seleção foi adotado o “método por torneio”, com o tamanho do torneio fixado em 4 (PUJOL, 1999);
- (4) **probabilidade de cruzamento** – o valor da probabilidade de cruzamento foi definido por tentativa, obtendo-se o valor 0,35;
- (5) **probabilidade de mutação** – o valor da probabilidade de mutação foi definido por tentativa, obtendo-se o valor 0,02.

Para contornar os problemas mencionados apresentados pela função de verossimilhança (pontos de singularidades, logaritmos de zero e de números negativos, exponenciais com expoente muito grande), foi atribuído um valor muito baixo para o valor da função (do tipo  $10^{-100}$ ), para que o indivíduo, representado por esta solução, não exercesse qualquer influência no processo de evolução e para que não ocorresse interrupção no processo computacional.

## 5.5 Definição dos Resíduos

O modelo em questão segue a forma geral:

$$y_{ij} = \text{Log}[x_{ij}] = \beta_0 + \beta_1 u_j + \sigma \varepsilon_{ij} \quad (5.36)$$

$$= \mu(u_j) + \sigma \varepsilon_{ij} \quad (5.37)$$

para  $j = 1, \dots, m$ ;  $i = 1, \dots, n_j$ , onde:

- (1)  $\beta_0 = \omega \text{Log}[A]$  e  $\beta_1 = \omega$
- (2)  $u = -\ln(S)$
- (3) sob a suposição de que o tempo de falha  $x_{ij}$  segue a distribuição de Weibull  $(\exp[\beta_0 + \beta_1 u_j]; \gamma)$ ; então  $y_{ij} = \text{Log}[x_{ij}]$  tem distribuição do valor extremo  $([\beta_0 + \beta_1 u_j]; \sigma)$  (onde  $\sigma = 1/\gamma$ ) ou, de maneira equivalente,  $\varepsilon_{ij}$  tem distribuição do valor extremo padrão, isto é, com  $\mu = 0$  e  $\sigma = 1$ ;

- (4) sob a suposição de que o tempo de falha  $x_{ij}$  segue a distribuição lognormal,  $y_{ij} = \text{Log}[x_{ij}]$  tem distribuição normal  $([\beta_0 + \beta_1 u_j]; \sigma^2)$  ou, de maneira equivalente,  $\varepsilon_{ij}$  tem distribuição normal padrão com  $\mu = 0$  e  $\sigma = 1$ .

Explicitando  $\varepsilon_{ij}$  a partir da expressão (5.36) obtém-se:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{y_{ij} - \beta_0 - \beta_1 u_j}{\sigma} \quad (5.38)$$

Uma maneira natural de definir os resíduos do modelo é estimar os erros  $\varepsilon_{ij}$  por meio da expressão (FREITAS e COLOSIMO, 1997):

$$e_{ij} - \hat{\varepsilon}_{ij} = \frac{y_{ij} - \hat{y}_i}{\hat{\sigma}} \quad (5.39)$$

Assim, os resíduos  $e_{ij}$  podem ser vistos como uma amostra da distribuição dos erros  $\varepsilon_{ij}$ .

Para o caso em que a amostra contém tanto observações censuradas como observações relativas aos tempos de falha, os resíduos  $e_{ij}$  devem ser tratados como se fossem uma amostra censurada da distribuição dos erros  $\varepsilon_{ij}$ . A idéia é que sendo  $x_{ij}$  é uma observação censurada, então o respectivo resíduo dado por (5.39) será também um resíduo censurado.

O cálculo de  $\hat{y}$  é feito aplicando-se o Corolário 1 da Proposição 3.1 de JAMES, 2002, obtendo-se:

$$\hat{y} = \sum_{j=1}^m \int_{D_j} [1 - \hat{F}(y)] dy = \sum_{j=1}^m \int_{D_j} \hat{R}_j dy \quad (5.40)$$

onde  $D_j = [y_{j-1}, y_j)$ .

Para o modelo potência inversa-Weibull:

$$\hat{R}_j = \exp \left[ - \exp \left[ \frac{y_{ij} - \hat{\mu}_j}{\hat{\sigma}} \right] \right] \quad (5.41)$$

onde:

$$(1) \quad y_{ij} = \text{Log}[x_{ij}];$$

$$(2) \quad \hat{\mu}_j = \text{Log} \left[ \frac{\hat{A}}{S_j} \right]^{\hat{\omega}} = \hat{\omega} \text{Log}[\hat{A}] - \hat{\omega} \text{Log}[S_j]$$

$$(3) \quad \chi_{ij} = x - x_{i(j-1)} + \xi_{i(j-1)}$$

$$(4) \quad \xi_{i(j-1)} = \sum (x_{ik} - x_{i(k-1)}) \begin{pmatrix} S_{ik} \\ \xi_{ik} \end{pmatrix}^{\sigma}$$

$$(5) \quad \hat{\sigma} = \frac{1}{\hat{\gamma}}$$

Para o modelo potência inversa-lognormal

$$\hat{R}_j = \Phi \left[ -\frac{1}{\hat{\sigma}} (y_j - \hat{\mu}_j) \right] \quad (5.42)$$

onde  $\Phi(\cdot)$  é a função de distribuição da normal padrão.

## 6 EXPERIMENTOS E RESULTADOS

O trabalho aqui apresentado diz respeito à modelagem de vida de fadiga em corpos-de-prova submetidos a esforços aplicados em níveis. Para aplicação dos modelos desenvolvidos e avaliação da adequação destes modelos por meio da análise de resíduos, foram realizados ensaios de fadiga em corpos-de-prova de aço SAE 8620.

Os equipamentos de ensaio de fadiga são constituídos por um sistema de aplicação de cargas, que permite alterar a intensidade e o sentido do esforço, e por um contador de números de ciclos. O teste é interrompido assim que o corpo-de-prova se rompe.

O ensaio pode ser realizado de diversas maneiras, de acordo com o tipo de solicitação que se deseja aplicar:

- (1) torção;
- (2) carregamento axial;
- (3) flexão;
- (4) carregamento flexo-rotativo.

No desenvolvimento do modelo utilizaram-se os ensaios flexo-rotativos para gerar os dados experimentais, necessários para estimar os parâmetros do modelo. A opção pelo ensaio flexo-rotativo deveu-se, principalmente, à disponibilidade da máquina de testes. O ensaio foi realizado com aplicação da amplitude da tensão alternada em ordem decrescente, com três níveis da tensão alternada em cada corpo-de-prova: os dois primeiros nos valores de 258 MPa e 238 MPa e o último variando em 218 MPa, 198 MPa, 178 MPa e 158 MPa. Os dois primeiros níveis da tensão alternada foram aplicados durante, aproximadamente 35000 ciclos e 65000 ciclos, respectivamente e o terceiro nível da tensão alternada foi aplicado até que ocorresse a falha ou até que a máquina atingisse  $2 \times 10^6$  ciclos, o que caracterizava um mecanismo de censura do tipo I. A escolha da ordem decrescente foi meramente circunstancial, pois sendo um dos pressupostos deste modelo o de acúmulo linear do dano (o modelo de dano cumulativo desenvolvido neste trabalho é uma extensão probabilística da regra de

Palmgren-Miner, como mostrado por NELSON, 1990 e TANG et al, 1996), o sentido de aplicação dos níveis da tensão, crescente ou decrescente, não constitui um fator de influência nos resultados dos ensaios.

A dispersão observada nos resultados de fadiga obtidos em ensaios realizados em laboratório sob as mesmas condições, isto é, mesma amplitude da tensão alternada, mesma frequência de aplicação das cargas e mesmo material, são devidas a vários fatores (COLLINS, 1993). Entre estes fatores destacam-se: condições superficiais, tensões residuais, tensões médias, tipos de carregamentos aplicados, frequências de aplicações das cargas, condições do meio ambiente e a microestrutura do material.

### **Condições superficiais**

As condições superficiais do material exercem fortes influências no processo de fadiga. Se houver rugosidade ou descontinuidade na superfície, será criada uma concentração de tensões, originando deformação localizada. A deformação produzida pode nuclear trincas nesta região e poderá conduzir à ruptura do material. Normalmente, a nucleação de trincas por fadiga ocorre na superfície, propagando-se em direção ao interior do material. Inclusões e vazios em camadas subsuperficiais, devidos a uma heterogeneidade no material, podem provocar a nucleação de trincas no interior do material (DIETER, 1981). Tendo em vista estas considerações, a geometria e o acabamento superficial dos corpos-de-prova foram definidos de forma a não interferir nos resultados dos ensaios, conforme é mostrado nas FIGURA 6-2 e FIGURA 6-3.

### **Tensões residuais**

Tensões residuais são introduzidas no material como resultado de processos como usinagem, lixamento, polimento, que podem produzir deformação nas proximidades da superfície do material. Tensões residuais compressivas podem ser introduzidas no material por meio do processo de jateamento (bombardeamento da superfície por pequenas esferas de vidro, areia ou aço). Este procedimento permite que uma fina camada subsuperficial sofra escoamento, comprimindo a camada superficial e reduzindo a formação de áreas de concentração de tensões de tração, aumentando a resistência do material à fadiga.

O processo de solda introduz tensões residuais em razão da geometria resultante da fusão do material soldado e de seu resfriamento heterogêneo. Além

da alteração microestrutural e da composição química do material na zona afetada pelo calor, introduzida pela soldagem, também se tem o efeito da descontinuidade dos passes e a formação de bolhas e vazios que podem contribuir para a nucleação de trincas, reduzindo a resistência à fadiga.

O comportamento das tensões residuais em relação à resistência por fadiga é muito similar ao comportamento das tensões estáticas presentes na superfície do material. A tensão estática compressiva na superfície aumenta a resistência à fadiga, pois retarda o surgimento de trincas. Por outro lado, tensões residuais de tração reduzem a vida em fadiga (METALS HANDBOOK, 1975).

Todos os corpos-de-prova foram submetidos ao mesmo procedimento de preparação, tendo sido usinados em máquina com controle numérico, produzindo assim corpos-de-prova com o mesmo acabamento superficial.

### **Tensões médias**

A tensão média afeta a curva S-N, pois influi diretamente no limite de fadiga do material. Tensão média nula implica que o material, durante o ciclo de fadiga, sofre tração e compressão completamente reversível. Tensão média positiva implica que o material sofre uma tensão repetida de tração, ou seja, tensão de tração muito maior do que a de compressão ou que o material está submetido somente à tração.

Nas situações em que existe um aumento da tensão média, ocorre um deslocamento da curva S-N, havendo uma diminuição do  $S_e$  do material. Esse comportamento é devido à ação das tensões de tração, diminuindo a resistência à fadiga.

Quando a tensão média é negativa, existe um deslocamento da curva S-N, com o aumento do limite de fadiga. Este comportamento ocorre em razão do efeito das tensões compressivas durante os ciclos de fadiga, resultando em aumento da resistência do material [BUENO, 1996].

Os ensaios flexo-rotativos foram realizados com tensão média nula.

### **Tipos de carregamentos aplicados**

Os materiais sob fadiga podem estar sujeitos a tensões de tração, compressão, torção, flexão ou a um estado complexo de tensões. O limite de resistência à fadiga ( $S_e$ ) depende do modo de carregamento com que os ensaios

foram realizados. Na FIGURA 6-1, são mostradas curvas S-N (ZAHAVI, 1996) obtidas para corpos-de-prova ensaiados sob carregamento flexo-rotativo e axial.

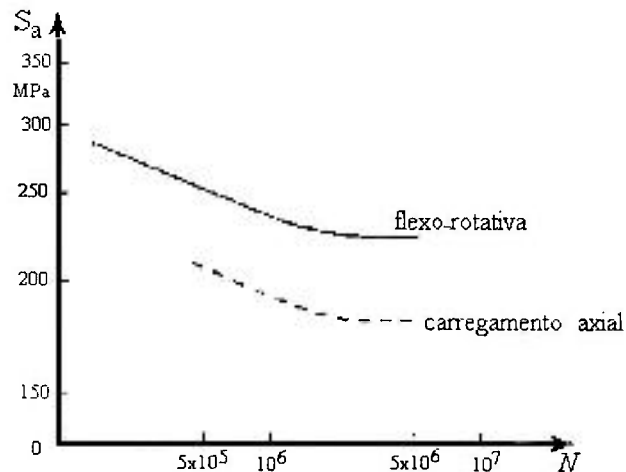


FIGURA 6-1 - Resultados de dois tipos de ensaios de fadiga, axial e flexo-rotativo.

### **Freqüência de aplicações das cargas**

A maior parte das máquinas de fadiga por flexo-rotação operam em freqüências que variam entre 200 e 7.000 rpm. Neste intervalo, a resistência à fadiga para maioria dos materiais é pouco afetada pela freqüência (COLLINS, 1993). Esta observação pressupõe que a temperatura do corpo-de-prova não seja significativamente elevada durante o teste. Há alguma evidência que uma pequena redução na resistência à fadiga seja observada para freqüências menores que 200 rpm.

A freqüência utilizada foi em torno de 3500 rpm.

### **Condições do meio ambiente**

Quando existe o efeito simultâneo de tensões cíclicas com o ataque químico, tem-se a corrosão por fadiga. O ataque corrosivo promove regiões de descontinuidade na superfície do material, que podem ser pontos. Nestes locais, ocorre uma diminuição na resistência do material, acelerando o processo de nucleação e propagação de trincas (DIETER, 1981).

As condições do meio ambiente foram controladas, uma vez que a refrigeração dos corpos-de-prova foi realizada com água natural utilizada normalmente pelas pessoas, ou seja, com água isenta de qualquer substância corrosiva.

### **Microestrutura do material**

A microestrutura do material exerce grande influência no comportamento da curva S-N. Fatores como tamanho de grão, composição química, fases presentes no sistema, endurecimento e deformação plástica, além de tratamentos térmicos alteram as propriedades de fadiga do material (DIETER, 1981).

Os corpos-de-prova foram feitos de material retirado de barras com certificado de mesma procedência, ou seja, de material obtido segundo o mesmo processo.

A descrição do ensaio e os respectivos resultados são apresentados nas próximas seções.

#### **6.1 Material Testado**

O material testado neste trabalho é o aço SAE 8620.

São aços similares ao SAE 8620: ABNT 8620, VB-20, DIN 21NiCrMo2, WNr 1, 6523, JIS G 4103-65 [Catálogo Villares].

O SAE 8620 é um aço de média temperabilidade e com boa resistência ao desgaste na camada cimentada. É empregado na indústria mecânica e automotiva, em engrenagens de câmbio e diferencial, coroas, pinhões, terminais, setores, sem-fins de direção, eixos de comando de válvulas, cruzetas, pinos de pistão, castanhas para placa de tornos, etc. (CATÁLOGO VILLARES).

Este aço foi utilizado no trabalho de dissertação de mestrado de BARROSO, 1996, na dissertação de mestrado de ALVARENGA JUNIOR, 2001 e na tese de doutorado de MANSUR, 2003 e está sendo utilizado no trabalho intitulado Metodologia para Avaliação de Choque Térmico Pressurizado em Reatores PWR, tese de doutorado em andamento de Paulo de Tarso Vida Gomes.

##### **6.1.1 Composição química**

A composição química prevista para este aço [BARROSO, 1996] é mostrada nas TABELA 6-1 TABELA 6-2.

TABELA 6-1 – Composição química prevista para o aço SAE 8620

Elemento	C	Si	Mn	Cr	Ni	Mo	P
% min.	0,18	0,15	0,70	0,40	0,40	0,15	<0,03
% max.	0,23	0,30	0,90	0,60	0,70	0,25	

TABELA 6-2 – Composição química prevista para o aço SAE 8620 (continuação)

Elemento	S	Co	Pb	Cu	Al	U	W
% min.	<0,04	<0,1	0	<0,3	<0,1	<0,1	0
% max.			0,15				0,1

Três barras do aço SAE 8620 com certificado foram adquiridas no mercado. De cada barra foram confeccionados 20 corpos de prova.

### 6.1.2 Caracterização mecânica

As propriedades mecânicas do aço SAE 8620, sem danos, estão apresentadas na TABELA 6-3.

TABELA 6-3 – Propriedades mecânicas do aço SAE 8620 virgem no nível de confiança de 95% (ALVARENGA JUNIOR, 2001)

Limite de Escoamento - $\sigma_{0,2}$ (MPa)	Limite de Resistência à Tração (MPa)	Alongamento A (%)	Redução de Área S (%)	Limite de Ruptura (MPa)	Limite de Resistência à Fadiga- $S_e$ (MPa)
370 ± 10	602 ± 24	21 ± 2	39 ± 1	432 ± 19	194 ± 5

## 6.2 Corpo-de-prova

O projeto dos corpos-de-prova foi desenvolvido com base nas recomendações de CAZAUD (1957) e da Norma ASTM E 466-96 (1996). Sua geometria e acabamento superficial foram definidos de forma a não interferir nos resultados dos ensaios, conforme é mostrado nas FIGURA 6-2 e FIGURA 6-3.

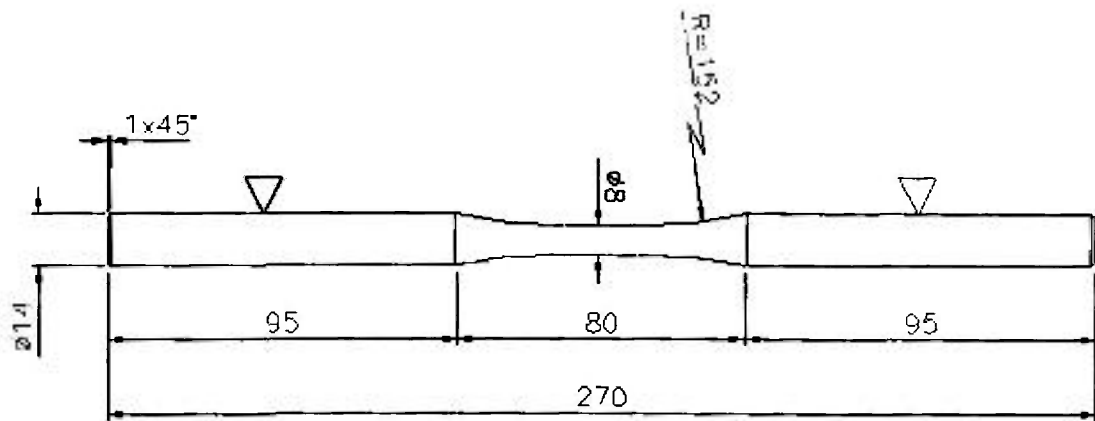


FIGURA 6-2: Geometria dos corpos-de-prova utilizados nos testes de fadiga flexo-rotativa

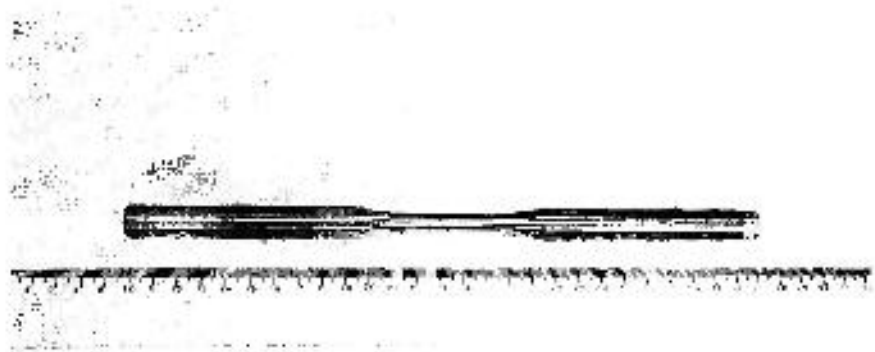


FIGURA 6-3: Foto do corpo-de-prova utilizado nos testes de fadiga flexo-rotativa.

Todos os corpos-de-prova foram submetidos ao mesmo procedimento de preparação, tendo sido usinados em máquina com controle numérico e com o mesmo acabamento superficial.

### 6.3 Descrição do Ensaio

O ensaio por flexão rotativa é um dos métodos utilizados para a determinação das propriedades de fadiga, onde a tensão média aplicada é nula.

Na FIGURA 6-4 é mostrado o equipamento utilizado.

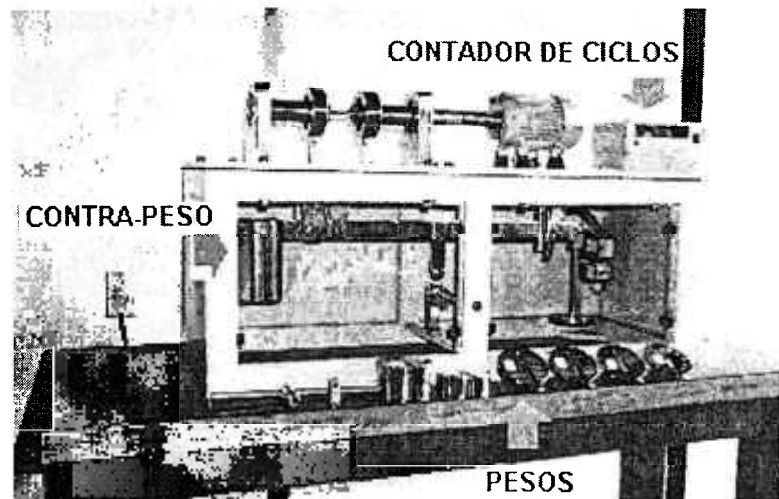


FIGURA 6-4: Máquina de fadiga flexo-rotativa

Neste tipo de máquina, a aplicação da carga se faz por meio de um sistema de alavanca. Num dos lados da alavanca existe um peso de compensação (contra-peso) e, no outro aplicam-se pesos mortos, em conformidade com a amplitude desejada da tensão alternada. Na FIGURA 6-5 é mostrado esquematicamente o sistema de aplicação de cargas. Na máquina, o fator de multiplicação de força é igual a 10, propiciado pela razão dos braços da alavanca, conforme demonstrado na Eq. (6.1).

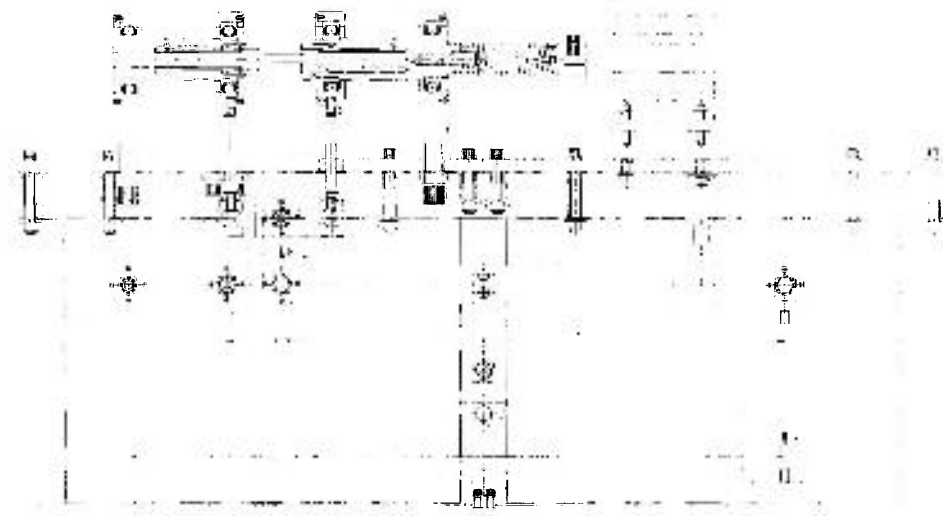


FIGURA 6-5: Esquema que mostra a aplicação de cargas (dimensões em mm).

Da FIGURA 6-5 tem-se:

$$\sum M_R = 0 \text{ ou } F_A 600 = F_{CP} 60$$

$$F_{CP} = \frac{F_A 600}{60} = 10F_A$$

$$F_{CP} = 10F_A \quad (6.1)$$

Nesta equação,  $F_A$  é a força aplicada pelo peso morto,  $F_{CP}$  é a força aplicada no corpo-de-prova e  $R$  é a rótula.

É utilizado um motor elétrico de 3500 rpm para produzir as rotações no corpo-de-prova.

As rotações nos corpos-de-prova são registradas por contadores eletrônicos com capacidade para contar até  $10^9$  ciclos.

Após a falha do corpo-de-prova, ocorre o desligamento automático da máquina.

Com o objetivo de manter a temperatura dos corpos-de-prova constante ao longo de todo o ensaio, independentemente da carga aplicada, foi introduzido um sistema de refrigeração dos corpos-de-prova, como é ilustrado na FIGURA 6-6.



FIGURA 6-6: Máquina de fadiga flexo-rotativa com sistema de refrigeração

A fixação do corpo-de-prova na máquina é feita em dois pontos e este tipo de fixação aplica um momento constante na parte do corpo-de-prova entre as fixações. Nesta região do corpo-de-prova não existe carga atuante ou força cortante; existe apenas o momento fletor.

O esquema referente a este tipo de montagem é mostrado na FIGURA 6-7, onde A e D são os apoios e, B e C são os pontos de aplicação das cargas.

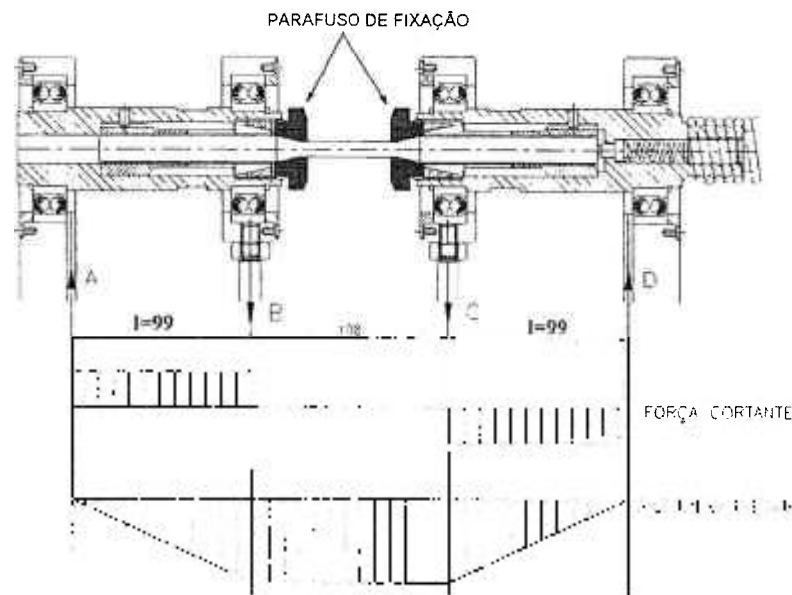


FIGURA 6-7: Montagem com fixação bilateral. Diagrama dos momentos fletores e força cortante (MANSUR, 2003)

#### 6.4 Planejamento do Ensaio

O ensaio foi planejado, utilizando-se as curvas S-N-P obtidas por ALVARENGA JUNIOR, 2001, conforme é mostrado na FIGURA 6-8. Foram aplicados, em ordem decrescente, três níveis da tensão alternada em cada corpo-de-prova: os dois primeiros nos valores de 258 MPa e 238 MPa e o último variando em 218 MPa, 198 MPa, 178 MPa e 158 MPa. Num teste inicial, foram utilizados quatro corpos-de-prova, onde cada corpo-de-prova foi submetido a 258 MPa durante aproximadamente 50000 ciclos, 238 MPa durante aproximadamente 100000 ciclos e, na terceira etapa, foram aplicados os níveis da tensão alternada 218 MPa, 198 MPa, 178 MPa e 158 MPa, respectivamente, para cada corpo-de-prova até que ocorresse a falha ou até a máquina atingisse pelo menos  $2 \times 10^6$  ciclos, o que caracterizava um mecanismo de censura do tipo I. A falha foi definida como fratura completa, e o número de ciclos até a falha denotado por N

Com base nestes quatro experimentos, não deixando de considerá-los no conjunto dos dados experimentais, verificou-se que, para o nível da tensão mais baixo (158MPa), a vida do corpo-de-prova correspondeu a um tempo da ordem de  $1 \times 10^6$  ciclos. Este tempo de vida, mesmo levando em conta que os testes de fadiga apresentam grande dispersão, foi considerado muito baixo, ou seja, provavelmente não ocorreria censura, que não era desejável em vista de

que teria uma simplificação no modelo desenvolvido. Assim, foi definido, com base na FIGURA 6-8, que os tempos de aplicação dos dois primeiros níveis da tensão alternada, 258 MPa e 238 MPa, seriam de 35000 ciclos e 65000 ciclos para o primeiro e segundo nível da tensão alternada, respectivamente. Com base na primeira experiência, verificou-se que, para o nível da tensão mais baixo (158 MPa), a vida do corpo-de-prova correspondeu a um tempo da ordem de  $1,8 \times 10^6$  ciclos, considerado satisfatório e o restante do ensaio foi então realizado com estes valores.

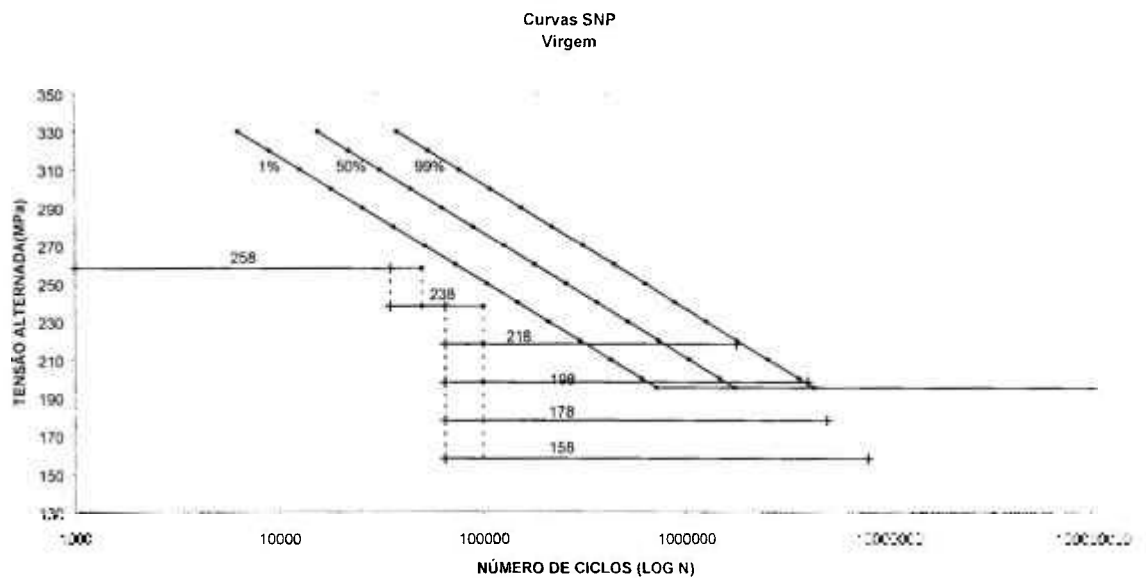


FIGURA 6-8: Gráfico das curvas S-N-P para o aço SAE 8620, com probabilidades de falha de 1%, 50% e 99%

## 6.5 Resultados Obtidos

Os resultados obtidos são os apresentados na TABELA 6-4.

TABELA 6-4 – Resultados do número de ciclos a que os corpos-de-prova foram submetidos para cada nível da tensão alternada

Corpo de prova	Primeiro nível da tensão alternada		Segundo nível da tensão alternada		Terceiro nível da tensão alternada	
	TENSÃO	NÚMERO DE CICLOS	TENSÃO	NÚMERO DE CICLOS	TENSÃO	NÚMERO DE CICLOS
1	258 MPa	50032	238 MPa	100019	218 MPa	212848
2		35021		65025		779027
		35019		65017		687887
		35026		65031		773889
		35028		65036		358453
		35009		65031		708348
		35041		65034		916372
		35011		65010		952438
		35000		65008		702855
		35001		64997		493165
		35055		65023		681238
		50022		100017		402834
		35017		65026		992657
		35025		65019	948233	
		35022		65023	833713	
		35283		65036	815698	
		35016		65024	866419	
		35092		65031	1336343	
		35012		65029	1118548	
		35090		65011	871999	
		34996		65021	909221	
		35008		64993	825585	
		50019		100027	900001	
		35017		69023	1309463	
		35017		65031	1587256	
		35021		65029	1624848	
		34995		65066	1534548	
		35010		65020	1616273	
		35015		65007	1596508	
		34996		65015	1606979	
		35865		65044	2000000	
		35015		65026	2000000	
		35020		65041	2000000	
		50028		100022	1000002	
		35022		65025	1802316	
		34999		66059	1589964	
		34999		65028	1445535	
		35006		64994	1721045	
		35027		65044	2000000	
		35015		65002	2000000	
		35015		65041	2000000	
		35038		65029	2000000	
		35005		65023	2000000	
44				35021	65015	2000000

## 7 APLICAÇÃO DOS MODELOS AOS DADOS EXPERIMENTAIS

Para a aplicação dos modelos desenvolvidos foram utilizados o aplicativo de algoritmo genético e o conjunto de dados experimentais obtidos por meio do ensaio flexo-rotativo. Obtiveram-se os resultados das estimativas de máxima verossimilhança e os correspondentes intervalos de confiança para os parâmetros dos modelos potência inversa-lognormal e potência inversa-Weibull. A aplicação do modelo, individualizado por meio das estimativas dos parâmetros, estará condicionada a comprovação de sua adequação.

Para verificar a adequação dos modelos ajustados aos dados, serão calculados e analisados os resíduos.

Como aplicação do modelo ajustado, considerado adequado pela análise dos resíduos, serão apresentados as estimativas e os intervalos de confiança correspondentes aos percentis relacionados a diversos níveis da tensão alternada, dentro dos valores limites dos níveis da tensão alternada adotados no experimento.

### 7.1 Estimação dos Parâmetros e Intervalos de Confiança

#### 7.1.1 Modelo potência inversa- Weibull

As estimativas de máxima verossimilhança de  $A$ ,  $\omega$ , e  $\gamma$  para o modelo de potência inversa – Weibull, como apresentado na Subseção 4.3.2.1, foram determinadas com base nos seguintes parâmetros do algoritmo genético:

tamanho da população ← 1000
número de gerações ← 1000000
forma de codificação ← binário
número de bits ← 20; 20; 20
regra de seleção ← seleção por torneio
mutação ← "Flip Over"
cruzamento ← dois-pontos
probabilidade de cruzamento ← 0.35
probabilidade de mutação ← 0.02

opção elitista ← não elitista  
 LI[A] ← 0 LS[A] ←  $10^6$   
 LI[omega] ← 0 LS[omega] ←  $10^6$   
 LI[gama] ← 0 LS[gama] ←  $10^6$   
 número de descendentes por cruzamento ← dois  
 tamanho do torneio ← 4

A solução é apresentada nas TABELA 7-1 e TABELA 7-2, onde a variável resposta observada foi transformada para  $x^* = 10^{-4}x$ , para evitar problemas computacionais oriundos do uso de números muito grandes. Na TABELA 7-1 são apresentadas as estimativas dos parâmetros ( $A$ ,  $\omega$  e  $\gamma$ ) e os limites de confiança aproximados para o nível de confiança de 95%. Na TABELA 7-2 é apresentada a matriz de variância-covariância dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros.

TABELA 7-1: Resultados das estimativas de máxima verossimilhança

Parâmetro	Estimativa	Limites de Confiança – 95%	
		Inferior	Superior
A	598,27	460,54	736,00
$\omega$	4,4192	3,4706	5,3678
$\gamma$	5,0829	3,7524	6,4134

TABELA 7-2: Matriz de covariância assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança

	A	$\omega$	$\gamma$
A	4937,79	-33,9359	13,0827
$\omega$	-33,9359	0,23422	-0,0868347
$\gamma$	13,0827	-0,0868347	0,46079

Os limites de confiança evidenciam que os valores dos parâmetros (TABELA 7-1) não são conhecidos com a precisão que o número de algoritmos significativos parece sugerir.

### 7.1.2 Modelo potência inversa-lognormal

As estimativas de máxima verossimilhança de  $A$ ,  $\omega$ , e  $\sigma$  para o modelo de potência inversa-lognormal, como apresentado na Subseção 4.3.2.3, foram determinadas com base nos seguintes parâmetros do algoritmo genético:

tamanho da população	← 5000
número de gerações	← 1000000
forma de codificação	← binário
número de bits	← 30, 30, 30
regra de seleção	← seleção por torneio
mutação	← "Flip Over"
cruzamento	← dois-pontos
probabilidade de cruzamento	← 0.35
probabilidade de mutação	← 0.02
opção elitista	← elitista
LI[A]	← 0 LS[A] ← 1000
LI[omega]	← 0 LS[omega] ← 5
LI[sigma]	← 0 LS[sigma] ← 5
número de descendentes por cruzamento	← dois
tamanho do torneio	← 4

A solução é apresentada nas TABELA 7-3 e TABELA 7-4; para evitar problemas computacionais oriundos do uso de números muito grandes, a variável resposta observada foi transformada para  $x^* = 10^{-4}x$ . Na TABELA 7-3 são apresentadas as estimativas dos parâmetros ( $A$ ,  $\omega$  e  $\sigma$ ) e os limites de confiança aproximados para o nível de confiança de 95%. Na TABELA 7-4 é apresentada a matriz de variância-covariância dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros.

TABELA 7-3: Resultados das estimativas de máxima verossimilhança

Parâmetro	Estimativa	Limites de Confiança – 95%	
		Inferior	Superior
A	634,82	480,31	789,33
$\omega$	4,0977	3,2315	4,9639
$\sigma$	0,23798	0,18181	0,29415

TABELA 7-4: Matriz de covariância assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança

	A	$\omega$	$\sigma$
A	6214,04	-34,7402	0,132531
$\omega$	-34,7402	0,195293	-0,000627078
$\sigma$	0,132531	-0,000627078	0,000821348

Do mesmo modo como foi feita observação relativa aos valores apresentados na TABELA 7-1, também na TABELA 7-3 os valores dos parâmetros não são conhecidos com a precisão que o número de algarismos significativos parece sugerir, como pode ser evidenciado pelos limites de confiança.

## 7.2 Verificação da Adequação dos Modelos por Meio dos Resíduos

Os resíduos foram calculados, para cada um dos modelos (tanto o baseado na distribuição de Weibull quanto o baseado na distribuição lognormal), utilizando-se a expressão (5.39).

Como visto na seção 5.5, se o modelo baseado na distribuição de Weibull “explicar” bem os resultados experimentais, então é de se esperar que os  $e_{ij}$  se comportem como uma amostra censurada oriunda de uma distribuição de valor extremo padrão ( $\mu = 0$  e  $\sigma = 1$ ) e portanto  $e_{ij}^* = \exp(e_{ij})$  tem distribuição de Weibull. Caso a suposição de distribuição lognormal fosse razoável para os dados experimentais, os resíduos  $e_{ij}$  deveriam comportar-se como uma amostra

censurada oriunda de uma população normal padrão ( $\mu = 0$  e  $\sigma = 1$ ) e portanto  $e_{ij}^* = \exp(e_{ij})$  tem distribuição lognormal.

As análises dos resíduos relativos aos modelos serão feitas usando o método gráfico de linearização da função de distribuição (FREITAS e COLOSIMO, 1997; NELSON, 1990). Este método consiste em:

- (1) obter a estimativa de Kaplan-Meier (KM)<sup>5</sup> para a função de distribuição,  $[1 - \hat{R}_{KM}(e_{ij}^*)]$ , para cada nível de tensão;
- (2) construir os gráficos de linearização, isto é  $\ln\{-\ln[1 - \hat{R}_{KM}(e_{ij}^*)]\}$  vs  $\ln(e_{ij}^*)$  para o caso do modelo baseado na distribuição de Weibull e  $\Phi^{-1}[1 - \hat{R}_{KM}(e_{ij}^*)]$  vs  $\ln(e_{ij}^*)$  para o caso do modelo lognormal;
- (3) o “melhor” modelo será aquele cujo gráfico apresentar pontos aproximadamente alinhados em torno de uma linha reta.

### **7.2.1 Modelo potência inversa-Weibull**

Na TABELA 7-5 são apresentados os resíduos calculados utilizando-se a expressão (5.39).

---

<sup>5</sup> Estimador de Kaplan-Meier é um estimador não-paramétrico para a função de confiabilidade.

TABELA 7-5: Resultados dos resíduos

<b>Resíduo</b>	<b>Censura</b>	<b>Resíduo</b>	<b>Censura</b>
115,968	1	-16,609	1
-112,915	1	-58,339	1
-66,578	1	-186,978	1
-110,317	1	-206,098	1
100,837	1	-160,193	1
-76,976	1	-201,659	1
-182,768	1	-191,595	1
-201,027	1	197,940	1
-74,146	1	187,358	1
32,447	1	98,379	1
-63,263	1	200,642	1
98,466	1	279,902	1
-98,370	1	-254,813	1
-75,800	1	-400,809	0
-17,589	1	-396,747	0
-9,175	1	-396,817	0
-34,198	1	-2,251	0
-273,279	1	-1,913	0
-162,351	1	-2,134	0
-37,216	1	-2,258	0
-55,894	1	-1,949	0
-13,366	1	-2,037	0

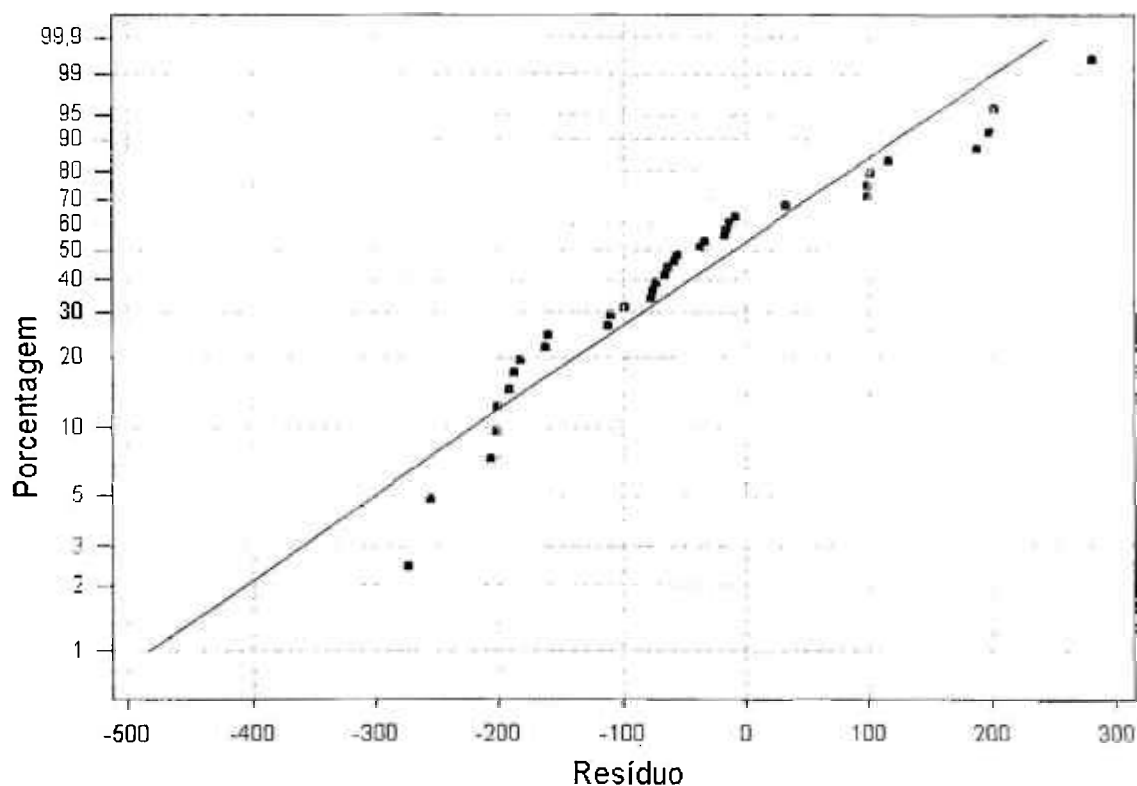


FIGURA 7-1: Gráfico da distribuição do valor extremo para os resíduos.

Os valores dos resíduos foram lançados em um papel de probabilidade da distribuição do valor extremo resultando no gráfico apresentado na FIGURA 7-1. Este gráfico foi construído representando no eixo das ordenadas a probabilidade acumulada estimada e no eixo das abscissas os resíduos. A estimativa da probabilidade acumulada foi calculada pelo método não-paramétrico de Kaplan-Meier (NELSON, 1980).

Pela análise do gráfico da FIGURA 7-1 percebe-se que os pontos não estão alinhados, indicando que o modelo potência inversa-Weibull parece ser inadequado para descrever os resultados do teste de fadiga em questão.

### 7.2.2 Modelo potência inversa-lognormal

Na TABELA 7-6 são apresentados os resíduos calculados utilizando-se expressão (5.39).

TABELA 7-6: Resultados dos resíduos

Resíduo	Censura	Resíduo	Censura
114,362	1	7,984	1
-77,262	1	-40,127	1
-38,956	1	-147,501	1
-75,114	1	-163,307	1
99,446	1	-125,360	1
-47,552	1	-159,645	1
-135,006	1	-151,326	1
-150,105	1	145,033	1
-45,215	1	169,605	1
42,904	1	62,760	1
-36,212	1	147,903	1
102,600	1	212,802	1
-66,461	1	-203,595	1
-47,801	1	-323,872	0
0,321	1	-320,918	0
7,334	1	-320,970	0
-13,411	1	-20,414	0
-211,039	1	-20,172	0
-119,354	1	-20,331	0
-15,890	1	-20,417	0
-31,351	1	-20,199	0
3,807	1	-20,260	0

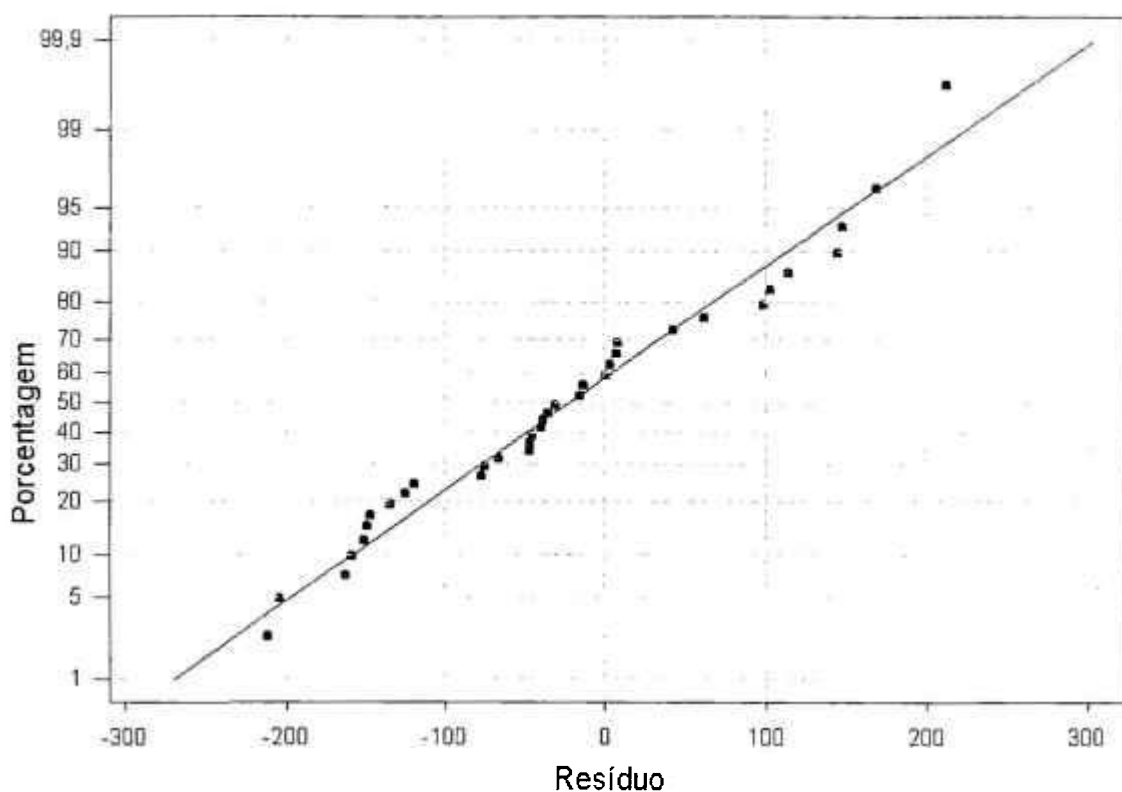


FIGURA 7-2: Gráfico da distribuição normal para os resíduos.

Os valores dos resíduos foram lançados em um papel de probabilidade da distribuição normal resultando no gráfico apresentado na FIGURA 7-2. Este gráfico foi construído representando no eixo das ordenadas a probabilidade acumulada estimada e no eixo das abscissas os resíduos. A estimativa da probabilidade acumulada foi calculada pelo método não-paramétrico de Kaplan-Meier (NELSON, 1980).

Pela análise do gráfico da FIGURA 7-2, conclui-se que não há razão para duvidar da adequação do modelo potência inversa-lognormal, uma vez que os pontos mostram uma tendência linear.

### 7.3 Aplicação do Modelo Ajustado: Estimação por Intervalo dos Percentis

#### 7.3.1 Modelo potência inversa-lognormal

O modelo ajustado, que corresponde às estimativas de máxima verossimilhança (TABELA 7-3) para corpos-de-prova de aço SAE 8620 que falham após o número de ciclos  $x^* = 10^{-4} \cdot x$ , é:

$$\hat{R}(S, x^*) = \Phi \left[ \frac{1}{0,23798} \ln \left[ x^* \left( \frac{S}{634,82} \right)^{4,0977} \right] \right]$$

onde  $\Phi(\cdot)$  é a função de distribuição acumulada de uma normal padrão, ou seja, de uma normal com média igual a zero e desvio-padrão igual a um.

A expressão do percentil 100p% relativo ao modelo ajustado é:

$$\hat{x}_p^* = \exp \left[ 0,23798 z_p + 4,0977 (\ln 634,82 - \ln S) \right]$$

Nestas expressões,  $\hat{\sigma} = 0,23798$  é a estimativa do desvio padrão da distribuição lognormal, e  $\hat{\omega} = 4,0977$  e  $\hat{A} = 634,82$  são as estimativas da potência e da constante de proporcionalidade, respectivamente, da relação potência inversa. Os valores destes parâmetros não são conhecidos com tanta precisão quanto o número de algarismos significativos parecem sugerir.

Como aplicação do modelo ajustado, serão construídos os intervalos de confiança dos percentis ( $\hat{x}_p^*$ ) para diversos valores da amplitude da tensão alternada. Para tanto, é necessário obter uma estimativa para a variância de  $\hat{x}_p^*$ . Aplicando-se o método *delta*, como descrito por FREITAS e COLOSIMO (1997), obtém-se:

$$\begin{aligned} Var(\hat{x}_p^*) = & Var(\hat{A}) \left( \frac{\partial \hat{x}_p^*}{\partial A} \right)^2 + Var(\hat{\omega}) \left( \frac{\partial \hat{x}_p^*}{\partial \omega} \right)^2 + Var(\hat{\sigma}) \left( \frac{\partial \hat{x}_p^*}{\partial \sigma} \right)^2 + 2Cov(\hat{A}, \hat{\omega}) \frac{\partial \hat{x}_p^*}{\partial A} \frac{\partial \hat{x}_p^*}{\partial \omega} + \\ & + 2Cov(\hat{A}, \hat{\sigma}) \frac{\partial \hat{x}_p^*}{\partial A} \frac{\partial \hat{x}_p^*}{\partial \sigma} + 2Cov(\hat{\omega}, \hat{\sigma}) \frac{\partial \hat{x}_p^*}{\partial \omega} \frac{\partial \hat{x}_p^*}{\partial \sigma}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Sendo  $x_p^* = \exp[\omega(\ln A - \ln S) + \sigma * z_p]$ , as derivadas parciais são:

$$\frac{\partial x_p^*}{\partial A} = \frac{\omega}{A} \exp[\omega(\ln A - \ln S) + \sigma * z_p], \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial x_p^*}{\partial \omega} = (\ln A - \ln S) \exp[\omega(\ln A - \ln S) + \sigma * z_p] \quad (7.3)$$

e

$$\frac{\partial x_p^*}{\partial \sigma} = z_p * \exp[\omega(\ln A - \ln S) + \sigma * z_p] \quad (7.4)$$

Substituindo-se as expressões (7.2), (7.3) e (7.4) em (7.1), obtém-se a expressão da variância de  $\hat{x}_p^*$ , ou seja:

$$\begin{aligned}
Var(\hat{x}_p^*) = & Var(\hat{A}) \left( \frac{\hat{\omega}}{\hat{A}} \exp[\hat{\omega}(\ln \hat{A} - \ln S) + \hat{\sigma} * z_p] \right)^2 + \\
& + Var(\hat{\omega}) \left( (\ln \hat{A} - \ln S) \exp[\hat{\omega}(\ln \hat{A} - \ln S) + \hat{\sigma} * z_p] \right)^2 + \\
& + Var(\hat{\sigma}) \left( z_p * \exp[\hat{\omega}(\ln \hat{A} - \ln S) + \hat{\sigma} * z_p] \right)^2 + \\
& + 2Cov(\hat{A}, \hat{\omega}) \left( \frac{\hat{\omega}}{\hat{A}} \exp[\hat{\omega}(\ln \hat{A} - \ln S) + \hat{\sigma} * z_p] \right) * \\
& * \left( (\ln \hat{A} - \ln S) \exp[\hat{\omega}(\ln \hat{A} - \ln S) + \hat{\sigma} * z_p] \right) + \\
& + 2Cov(\hat{A}, \hat{\sigma}) \left( \frac{\hat{\omega}}{\hat{A}} \exp[\hat{\omega}(\ln \hat{A} - \ln S) + \hat{\sigma} * z_p] \right) * \\
& * \left( z_p * \exp[\hat{\omega}(\ln \hat{A} - \ln S) + \hat{\sigma} * z_p] \right) + \\
& + 2Cov(\hat{\omega}, \hat{\sigma}) \left( (\ln \hat{A} - \ln S) \exp[\hat{\omega}(\ln \hat{A} - \ln S) + \hat{\sigma} * z_p] \right) * \\
& * \left( z_p * \exp[\hat{\omega}(\ln \hat{A} - \ln S) + \hat{\sigma} * z_p] \right).
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Substituindo em (7.5) as estimativas dos parâmetros do modelo, assim como, de suas variâncias e covariâncias dados, respectivamente, pelas TABELA 7-3 e TABELA 7-4, obtém-se:

$$\begin{aligned}
Var(\hat{x}_p^*) = & 6214,04 \left( \frac{4,0977}{634,82} \exp[4,0977(\ln 634,82 - \ln S) + 0,23798 * z_p] \right)^2 + \\
& + 0,195293 \left( (\ln 634,82 - \ln S) \exp[4,0977(\ln 634,82 - \ln S) + 0,23798 * z_p] \right)^2 + \\
& + 8,21348 * 10^{-4} \left( z_p * \exp[4,0977(\ln 634,82 - \ln S) + 0,23798 * z_p] \right)^2 + \\
& + 2 * (-34,7402) \left( \frac{4,0977}{634,82} \exp[4,0977(\ln 634,82 - \ln S) + 0,23798 * z_p] \right) * \\
& * \left( (\ln 634,82 - \ln S) \exp[4,0977(\ln 634,82 - \ln S) + 0,23798 * z_p] \right) + \\
& + 2 * 0,132531 \left( \frac{4,0977}{634,82} \exp[4,0977(\ln 634,82 - \ln S) + 0,23798 * z_p] \right) * \\
& * \left( z_p * \exp[4,0977(\ln 634,82 - \ln S) + 0,23798 * z_p] \right) + \\
& + 2 \left( -6,27078 * 10^{-4} \right) \left( (\ln 634,82 - \ln S) \exp[4,0977(\ln 634,82 - \ln S) + 0,23798 * z_p] \right) * \\
& * \left( z_p * \exp[4,0977(\ln 634,82 - \ln S) + 0,23798 * z_p] \right).
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Os resultados dos intervalos de confiança dos percentis são apresentados na TABELA 7-7.

TABELA 7-7: Estimativa por intervalo dos percentis

S (MPa)	p (percentil)	$\hat{x}_p$	$\widehat{EP}(x_p)$	Intervalo de 95% de Confiança para $\hat{x}_p$	
				Limite Inferior	Limite Superior
260	0,01	222920	29279	165386	280453
260	0,5	387780	46180	297036	478523
260	0,99	674561	95404	487092	862030
250	0,01	261786	30698	201465	322107
250	0,5	455389	46812	363403	547375
250	0,99	792171	101055	593597	990744
240	0,01	309452	32078	246419	372485
240	0,5	538307	46440	447052	629561
240	0,99	936410	106890	726370	1146449
230	0,01	368411	33574	302438	434385
230	0,5	640869	44761	552913	728825
230	0,99	1114822	113370	892051	1337593
220	0,01	442018	35669	371928	512108
220	0,5	768911	41800	686774	851047
220	0,99	1337556	121775	1098269	1576844
210	0,01	534844	39526	457175	612513
210	0,5	930386	39134	853488	1007285
210	0,99	1618451	135090	1352999	1883903
200	0,01	653213	47412	560049	746377
200	0,5	1136294	43022	1051756	1220832
200	0,99	1976637	159226	1663758	2289516
190	0,01	806003	62783	682635	929371
190	0,5	1402080	63992	1276335	1527825
190	0,99	2438984	203898	2038325	2839643
180	0,01	1005901	90097	828861	1182940
180	0,5	1749811	109000	1535627	1963996
180	0,99	3043879	282743	2488290	3599468
170	0,01	1271378	135333	1005448	1537307
170	0,5	2211622	185327	1847455	2575788
170	0,99	3847220	414414	3032896	4661544
160	0,01	1629907	207672	1221831	2037982
160	0,5	2835299	307319	2231418	3439181
160	0,99	4932137	626844	3700389	6163884
150	0,01	2123323	322240	1490121	2756524
150	0,5	3693620	500451	2710234	4677006
150	0,99	6425226	965363	4528288	8322163

Onde  $\widehat{EP}(x_p) = \sqrt{\widehat{Var}(x_p)}$ , dada pela expressão (7.6).

A seguir serão apresentados os gráficos correspondentes a TABELA

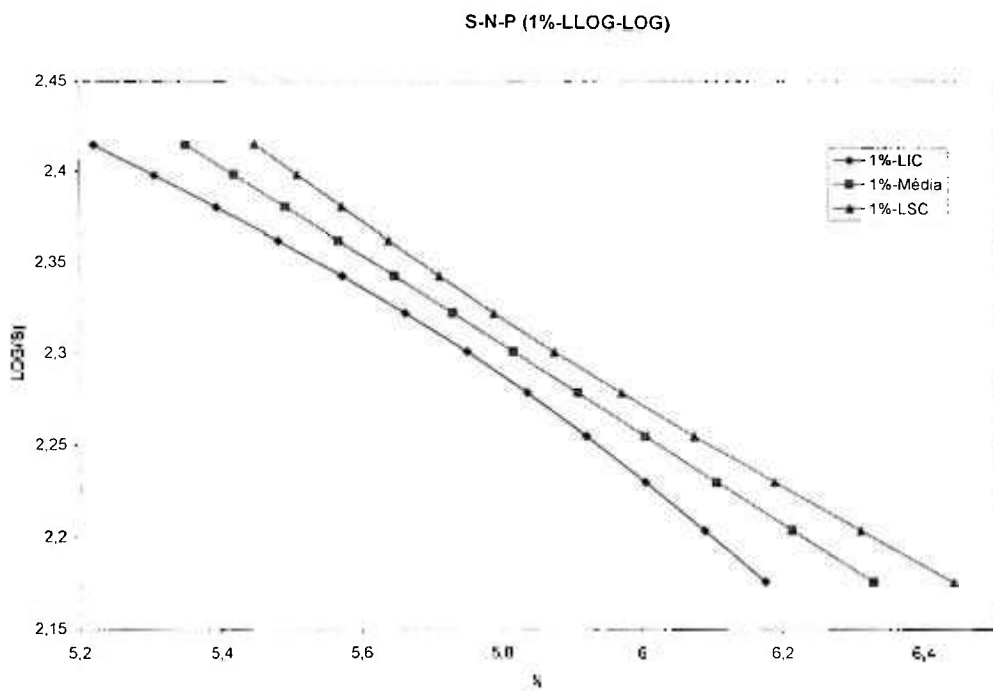


FIGURA 7-3: Limites de 95% de confiança para o percentil 1%. Gráfico do  $\log(S)$  vs.  $\log(N)$ , onde  $S$  é dado em MPa e  $N$  em número de ciclos.

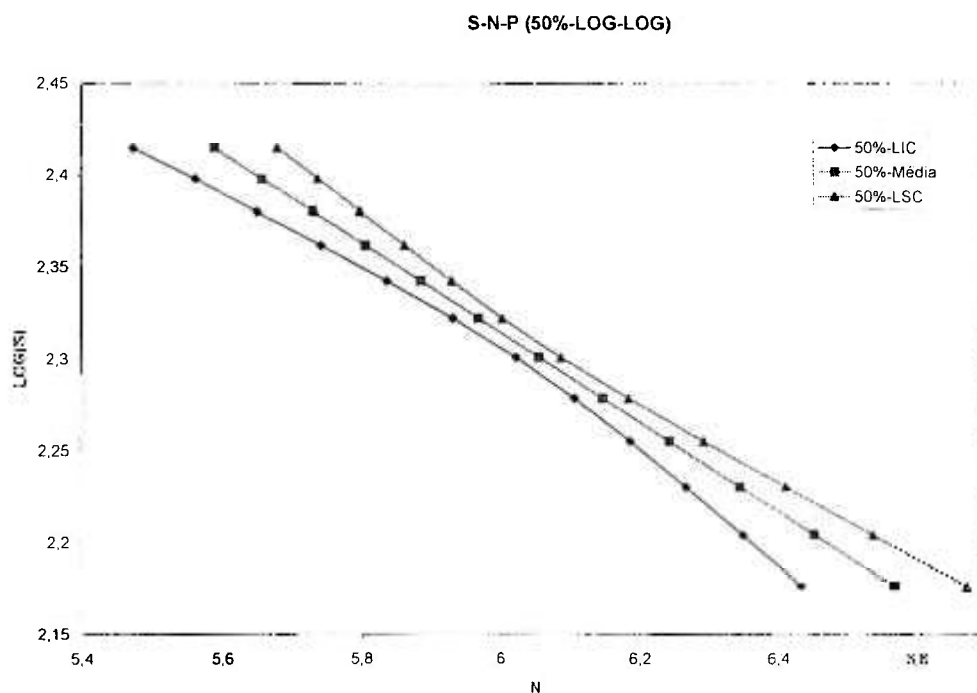


FIGURA 7-4: Limites de 95% de confiança para o percentil 50%. Gráfico do  $\log(S)$  vs.  $\log(N)$ , onde  $S$  é dado em MPa e  $N$  em número de ciclos.

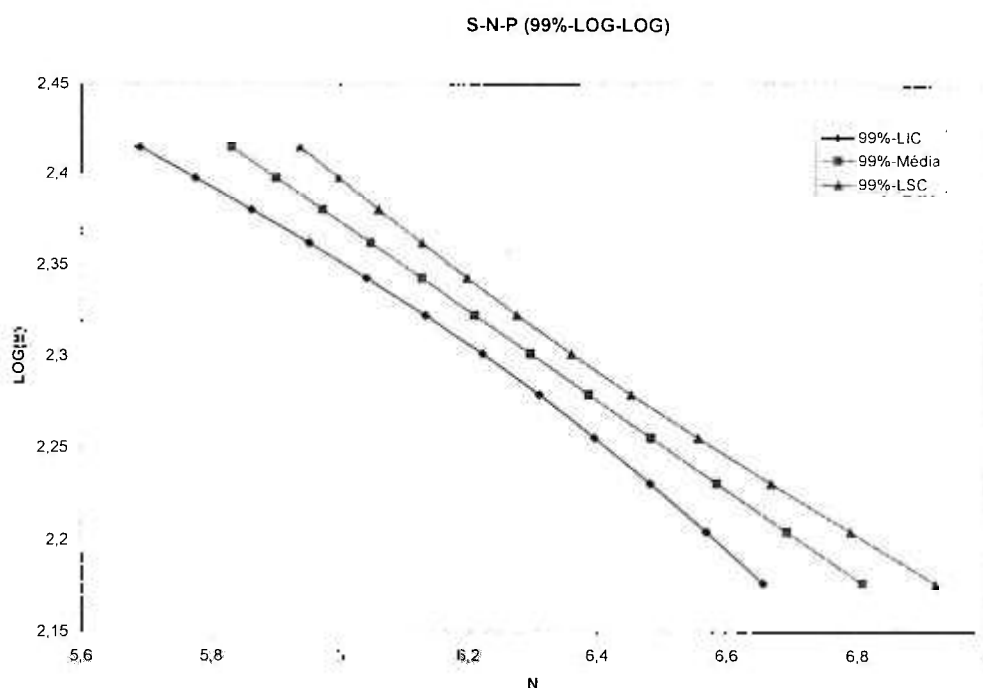


FIGURA 7-5: Limites de 95% de confiança para o percentil 99%. Gráfico do log (S) vs. Log (N), onde S é dado em MPa e N em número de ciclos.

As curvas apresentadas nas FIGURA 7-3, FIGURA 7-4 e FIGURA 7-5 são denominadas S-N-P e relacionam o nível aplicado da amplitude da tensão versus número de ciclos até a falha, para uma dada probabilidade de falha, como mostrado no Cap. 3. Em vista da dispersão apresentada pelos ensaios de fadiga cada uma das curvas é apresentada com uma faixa de 95% de confiança e é mostrado como os limites do tempo de vida mudam em função do nível da amplitude da tensão alternada.

## 8 CONCLUSÕES, CONTRIBUIÇÕES E PERSPECTIVAS DE TRABALHO FUTURO.

Este capítulo apresenta as considerações finais sobre o trabalho, suas principais contribuições e sugestões para trabalhos que podem dar continuidade a esta pesquisa.

### 8.1 Conclusão

Este trabalho contemplou a modelagem numérica de vida de fadiga em corpos-de-prova de aço, submetidos a esforços cíclicos aplicados em níveis. Utilizou-se, para o desenvolvimento do modelo, tanto a distribuição de Weibull quanto a lognormal. Supõe-se que uma relação potência inversa exista entre o parâmetro de escala da distribuição de Weibull e o nível de tensão, assim como entre a média ( $\mu$ ) do logaritmo do tempo de falha da distribuição lognormal e o nível de tensão. Além disso, consideram-se independentes do nível de tensão os respectivos parâmetros de forma e desvio padrão destas distribuições. É suposto ainda que exista um modelo de exposição cumulativa linear, para o efeito de mudança de nível de tensão. No desenvolvimento do modelo utilizaram-se ensaios flexo-rotativos em corpos de prova do aço SAE 8620 sob a censura tipo I para gerar os dados experimentais, necessários para estimar os parâmetros do modelo.

O método de estimação dos parâmetros do modelo desenvolvido neste trabalho foi o da máxima verossimilhança, já que este método permite a incorporação das censuras no processo de estimação, além de possuir propriedades que possibilitam a construção de intervalos de confiança para as grandezas de interesse. No entanto, a função de verossimilhança, obtida neste trabalho é uma função mal comportada, possuindo vários máximos, pontos de singularidades, exponenciais com grandes expoentes, etc, tornando-se inviável a aplicação de algoritmos clássicos para obtenção do máximo da função. Para contornar este problema foram utilizados algoritmos genéticos (AG) pela sua capacidade de pesquisar espaços grandes e complexos e que exigem as menores restrições possíveis para a função de verossimilhança. Foi utilizado o

método delta para estimar o erro padrão das estimativas dos parâmetros e com isto construir seus intervalos de confiança.

Após feito o ajuste dos modelos aos dados experimentais foram definidos, calculados e analisados os resíduos, com o propósito de avaliar a adequação do modelo ajustado a tais dados. Assim os resíduos foram lançados no papel de probabilidade da normal e a conclusão é que não há razão para duvidar da adequação do modelo potência inversa-lognormal para descrever os resultados do teste de fadiga em questão, uma vez que os pontos estão fortemente alinhados. Os mesmos resíduos foram lançados no papel de probabilidade do valor extremo. A curvatura do gráfico sugere que o modelo potência inversa-Weibull é inapropriado para descrever tais dados.

Com base no resultado da verificação da adequação dos modelos ajustados aos dados experimentais, foi aplicado o modelo desenvolvido da potência inversa-lognormal para estabelecer as curvas SNP e suas respectivas faixas de confiança no nível de significância de 5%.

É importante destacar que as abordagens e metodologias desenvolvidas nesse trabalho podem ser aplicadas à avaliação de outras situações de caracterização de vida em fadiga com esforços aplicados em níveis, desde que se enquadrem nas hipóteses utilizadas.

## **8.2 Contribuições**

As principais contribuições deste trabalho foram:

- (1) Definir uma metodologia para modelar a vida de fadiga com carregamento em diferentes níveis de amplitude da tensão alternada, utilizando tanto a distribuição de Weibull como a lognormal;
- (2) Definir e analisar resíduos para resultados de fadiga com carregamento em diferentes níveis da tensão.

## **8.3 Perspectivas de Trabalho Futuro**

Para o desenvolvimento do modelo, de acordo com os objetivos estabelecidos em epígrafe, foram feitas as seguintes suposições:

- (1) são constantes, em relação a amplitude da tensão alternada, os seguintes parâmetros:
  - i  $\gamma$  - parâmetro de forma da distribuição de Weibull;
  - ii  $\sigma = \frac{1}{\gamma}$  - parâmetro de escala da distribuição do valor extremo;
  - iii  $\sigma$  - desvio-padrão da distribuição lognormal;
- (2) os outros parâmetros das distribuições de Weibull, valor extremo e lognormal dependem do valor da amplitude da tensão alternada segundo a lei da potência inversa;
- (3) o modelo de dano cumulativo, desenvolvido neste trabalho, é uma extensão probabilística da regra de Palmgren-Miner (NELSON, 1990 e TANG et al 1996).

O modelo de Palmgren-Miner foi a primeira teoria proposta para o estudo de acúmulo de danos. É uma teoria linear e que, por sua simplicidade é amplamente utilizada. A teoria prevê (MINER, 1945; COLLINS, 1993) que a fração de danos para um determinado nível da tensão é

$$D_i = \frac{n_i}{N_i} \quad (8.1)$$

onde,  $n_i$  é o número de ciclos aplicados ao componente sob uma tensão  $s_i$  e  $N_i$  é o número de ciclos obtidos da curva S-N-P, sob a tensão  $s_i$ .

A teoria de Palmgren-Miner prevê que a falha do componente ocorre quando a soma dos danos é igual ou maior que 1, ou seja,

$$D_i \geq 1 \quad (8.2)$$

Esta teoria se mostra deficiente principalmente por admitir a independência do nível da tensão e da seqüência do carregamento e pelo fato de não levar em consideração a interação dos danos [MINER, 1945; COLLINS, 1993; FATEMI e YANG, 1998].

As perspectivas de desenvolvimentos futuros são:

- (1) supor que os parâmetros  $\gamma$  e  $\sigma$  dependam do valor da amplitude da tensão alternada. A implicação desta suposição é a introdução de, pelo menos, mais um parâmetro no modelo;

- (2) formular um modelo de exposição cumulativa não linear a fim de superar as deficiências apresentadas pela regra de Palmgren-Miner;
- (3) comprovar, experimentalmente, a aplicação destes modelos desenvolvidos para o caso de fadiga controlada pela deformação;
- (4) estudar o comportamento do limite de resistência a fadiga em função do esforço aplicado.

## ANEXO A: ALGORITMOS GENÉTICOS

### 1 Introdução

Para a estimação dos parâmetros do modelo probabilístico desenvolvido neste trabalho, foi utilizado o método da máxima verossimilhança, já que este método permite a incorporação das censuras no processo de estimação, além de possuir propriedades que possibilitam a construção de intervalos de confiança para as grandezas de interesse. No entanto, a função de verossimilhança, obtida neste trabalho, é uma função mal comportada, possuindo vários máximos, pontos de singularidades (pontos onde a função não é definida como logaritmos de zero e de números negativos), exponenciais com expoente muito grande etc. Assim, algoritmos clássicos para obtenção do máximo da função não são aplicáveis. Necessita-se então de um método de busca do máximo global que exija as menores restrições possíveis para a função de verossimilhança.

Uma solução possível do problema pode ser obtida com aplicação de algoritmos evolucionários (AE) tendo em vista sua capacidade de pesquisar espaços grandes e complexos, como tem sido demonstrado em uma grande variedade de tarefas (BÄCK et al., 1997 e MITCHELL, 2001). Os AE se referem como o nome indica, a uma classe de técnicas de otimização global, inspiradas na biologia. Estes algoritmos mimetizam o processo de evolução natural, aplicando operadores evolucionários (tais como *seleção e reprodução*) a indivíduos de uma população. Estes operadores são estocasticamente aplicados, de modo a favorecer os indivíduos mais aptos, ou seja, aqueles que mostram melhor desempenho na execução de uma dada tarefa. Aplicando-se repetidamente os operadores evolucionários na população de cada geração, é criada uma nova população de indivíduos com melhor desempenho, visando a se realizar uma busca no espaço de soluções potenciais. Idealmente, este processo converge para uma solução do problema em questão.

O desempenho de um indivíduo na execução de uma determinada tarefa é medido pelo denominado *valor de aptidão*<sup>6</sup> do indivíduo, que corresponde à sua capacidade de sobrevivência e reprodução. A probabilidade de indivíduos se combinarem com outros da população é maior para aqueles com maiores valores de aptidão, gerando novos indivíduos que herdam algumas características de cada um dos progenitores. A combinação de boas características dos progenitores permite a geração de indivíduos melhores.

Inicialmente, uma população é aleatoriamente criada. Por meio de seleção são definidos quais indivíduos (progenitores) gerarão os descendentes. Os descendentes gerados são avaliados quanto a sua aptidão, e então a população atual é substituída pela nova geração ou, em alguns casos, os descendentes competem com a população atual para formar a próxima geração. A idéia básica é de que o valor de aptidão de um indivíduo representa uma avaliação pontual do espaço de busca. Algoritmos evolucionários usam a informação coletada de diferentes pontos para mover a população para uma região melhor do espaço de busca, favorecendo os melhores indivíduos no processo de reprodução.

Os algoritmos evolucionários são estocásticos e iterativos, não garantindo a convergência para a melhor solução. A conclusão do processo iterativo pode ser obtida ao se atingir um número máximo de gerações predefinido, ou ao se obter uma solução aceitável. Estes algoritmos operam sobre um conjunto de indivíduos (população). Cada indivíduo representa uma solução potencial para o problema considerado. Esta solução é obtida por meio de um mecanismo de codificação e decodificação. Inicialmente, a população é gerada aleatoriamente e, a cada indivíduo da população, é atribuído um valor, por meio de uma função objetivo ou função de aptidão. Este valor, chamado de valor de aptidão, é uma medida da qualidade do indivíduo quanto ao problema considerado e é usado para orientar a busca do ótimo.

A aplicação de um algoritmo evolucionário compreende três etapas principais: seleção, reprodução e substituição. Durante a etapa de seleção, é criada uma população provisória com alguns dos indivíduos da população

---

<sup>6</sup> Valor de aptidão corresponde ao termo inglês "fitness".

principal. Os indivíduos mais aptos conseguem estar presente com maior frequência na população provisória do que os menos aptos, tal como acontece no mecanismo da seleção natural. Aos indivíduos da população provisória são aplicados os operadores reprodutivos, de forma a gerar uma nova população. Em seguida, os indivíduos da população principal são substituídos pelos novos indivíduos. Geralmente, esta substituição tende a manter os melhores indivíduos e a remover os menos aptos. O processo inteiro é repetido até que uma determinada condição de finalização se torne verdadeira.

O valor de aptidão corresponde ao valor da medida do desempenho de um indivíduo na realização de uma determinada tarefa. A função que fornece o valor de aptidão é denominada *função de aptidão, ou objetivo, ou de adequação*. No caso em questão, como o problema consiste na pesquisa do máximo global da função de verossimilhança, esta função é a função objetivo.

Uma das técnicas da computação evolucionária é a dos algoritmos genéticos (AG). Neste Anexo pretende-se dar uma visão global dos AG, quando aplicados a problemas de otimização. Uma descrição mais completa, incluindo os fundamentos teóricos, pode ser encontrada em muitos outros textos, como, por exemplo, BÄCK e al (1997), KOZA (2000), MITCHELL (2001).

## **2 O que são algoritmos genéticos (AG)?**

Os princípios básicos dos AG foram estabelecidos com rigor pela primeira vez por HOLLAND (1975), que introduziu também os fundamentos teóricos capazes de justificar que os AG realizam de forma efetiva processos de pesquisa e otimização de soluções.

AG são então métodos computacionais de busca que imitam os mecanismos de evolução natural e da genética. Em AG, uma população de possíveis soluções para o problema em questão evolui de acordo com operadores probabilísticos concebidos a partir de metáforas biológicas, de modo que há uma tendência de que, na média, os indivíduos representem soluções cada vez melhores, à medida que o processo evolutivo continua.

Como visto, é gerada, inicialmente, uma população formada por um conjunto aleatório de indivíduos que podem ser encarados como possíveis soluções do problema. Usando operadores de *seleção, cruzamento, mutação e substituição*, conforme mostrado no fluxograma representado na FIGURA A-1, os

AG criam gerações sucessivas de indivíduos cada vez mais aptos. Durante o processo evolutivo, esta população é avaliada: para cada indivíduo é determinado seu valor de aptidão, refletindo sua habilidade de adaptação a determinado ambiente. Uma porcentagem dos mais adaptados é mantida, enquanto os outros são descartados (que é conhecido como “darwinismo”). Os membros mantidos pela seleção podem sofrer modificações em suas características fundamentais por meio de mutações e cruzamento, gerando descendentes para a próxima geração. Este processo, chamado de reprodução, é repetido até que uma solução satisfatória seja encontrada.

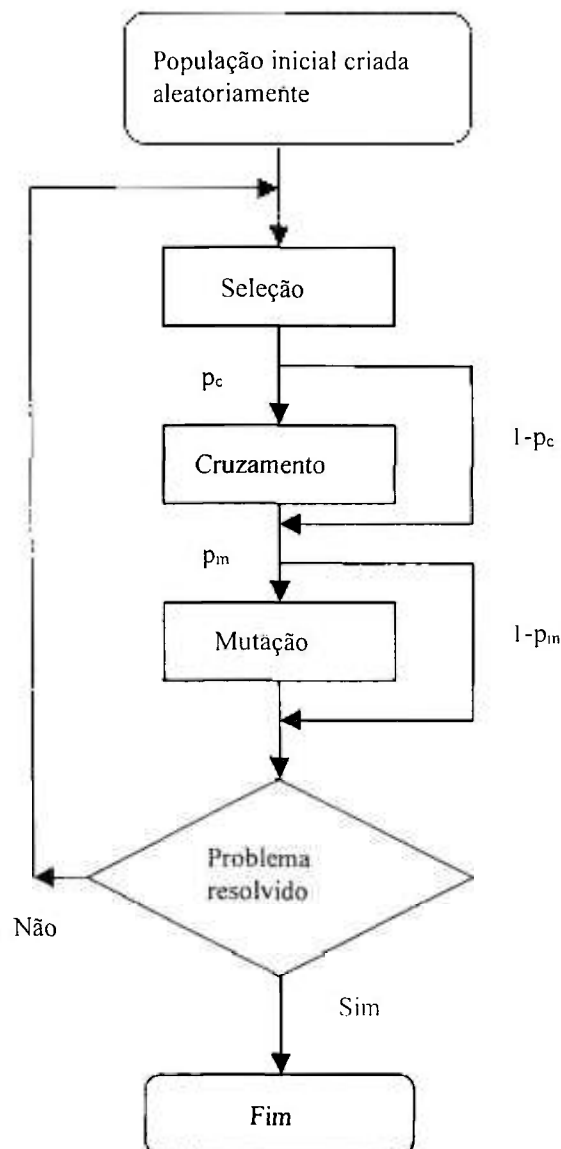


FIGURA A-1: Fluxograma do algoritmo genético convencional (adaptado de KOZA, 2000).

No fluxograma:

- (1)  $p_c$  é a *probabilidade de cruzamento*; e
- (2)  $p_m$  é a *probabilidade de mutação*.

### 3 Justificativa para uso de algoritmo genético

A pergunta que se coloca é: para um problema de otimização particular, quais características ele deve apresentar para que a utilização de um AG se torne interessante? Segundo MITCHELL, 2001, não há uma resposta rigorosa para esta pergunta. No entanto, muitos pesquisadores concordam que, se o problema a ser resolvido apresentar as características descritas a seguir, a aplicação dos AG se torna interessante:

- (1) O espaço a ser pesquisado é grande, o que inviabiliza a aplicação dos métodos de pesquisa exaustiva, devido ao grande tempo de processamento.
- (2) O espaço a ser pesquisado não é derivável em todo o domínio e nem unimodal; se o espaço de pesquisa for derivável em todo o domínio com um único ponto de máximo, outros métodos que envolvem o cálculo de derivadas são mais eficientes que um AG, tal como método de Newton Raphson (GARTHWAITE et al, 1995), desde que o ponto inicial de pesquisa esteja próximo da solução procurada.
- (3) O espaço a ser pesquisado não é bem entendido (complexo).
- (4) O problema não requer que se encontre um ótimo global; se a obtenção de uma solução suficientemente boa já satisfaz, seja por não haver um método que garanta a obtenção do ótimo global (em vista das características da função que se deseja otimizar), seja pela rapidez de processamento, já que os AGs podem ou não encontrar um ótimo global. Aliás, tanto quanto se sabe, não existe método geral para o qual se possa demonstrar que a solução encontrada corresponde efetivamente ao máximo global.

### 4 Implementação de um AG

Segundo KOZA, 1992, os principais passos prévios para usar AGs na solução de um problema são:

- (1) Definição da representação das possíveis soluções, ou codificação do cromossomo;

- (2) Estabelecimento da função de aptidão (algumas vezes chamada de função objetivo, função de adequação) a ser utilizada. No caso presente, a função objetivo é a função que se deseja maximizar, ou seja, a função de verossimilhança;
- (3) Definição dos operadores genéticos que serão usados;
- (4) Escolha conveniente dos valores dos parâmetros do AG (tamanho da população, número máximo de gerações, probabilidade de aplicação dos operadores genéticos, etc.)

#### 4.1 Codificação

A codificação significa encontrar uma representação para as possíveis soluções do problema, ao nível do material genético de cada indivíduo. Estas soluções são representadas, no caso deste trabalho, por um conjunto de três parâmetros. Estes são agrupados para formar uma cadeia de valores, freqüentemente referidos como cromossomos. Cada parâmetro codificado num cromossomo é designado por *gene*. A codificação dos parâmetros será feita utilizando-se um alfabeto binário. Assim, no caso particular, em que o objetivo do problema é maximizar uma função de três variáveis, a representação de cada uma das variáveis pode ser efetuada usando valores binários de 20 *bits*. O cromossomo teria assim três genes e um total de 60 dígitos binários.

Fazendo um paralelo com a ciência genética, ao conjunto de parâmetros representados nos cromossomos é dado o nome de *genótipo*, que é a estrutura genética explícita de um cromossomo (PUJOL et al, 1995). O genótipo possui a informação necessária para construir um organismo, o qual é referido como *fenótipo*. Um fenótipo caracteriza os atributos de um indivíduo, conhecidos que são os valores dos seus genes e o ambiente que o rodeia. Os mesmos termos são usados pelos AG. Por exemplo, numa tarefa de projeto de um vaso de um reator, o conjunto de parâmetros que especificam um projeto em particular constitui um genótipo, enquanto a construção final é o fenótipo. Outro exemplo: no contexto dos AG, um cromossomo pode ter um genótipo 00001001 que, decodificado de binário para decimal, representa o número 9 (fenótipo) (PUJOL et al, 1995). O valor de aptidão de um indivíduo depende do desempenho do fenótipo. Este valor pode ser inferido do genótipo, ou seja, pode ser calculado a partir do cromossomo, usando a função de avaliação. Os cromossomos estão

organizados por seqüências lineares de genes. A cada um dos valores possíveis de um dado gene é dado o nome de *alelo*. O conjunto de alelos para um dado gene define o domínio dos valores possíveis para o correspondente parâmetro.

#### 4.2 Medida de aptidão

O valor de aptidão de cada indivíduo (ou solução) é calculado mediante uma função de avaliação. Esta função, que efetua a avaliação dos indivíduos com vistas a atribuir um valor de aptidão às potenciais soluções via função de aptidão, precisa ser definida para cada problema que se pretende solucionar. No caso do presente trabalho, a função de avaliação é a função de verossimilhança.

As noções de avaliação e de aptidão são por vezes intercambiáveis. No entanto, deve-se distinguir a noção de função de avaliação e função de aptidão usadas nos AG. A função de avaliação proporciona uma medida do desempenho em relação a um conjunto particular de parâmetros, sendo que, a avaliação de um dado indivíduo é independente da avaliação dos outros indivíduos. A função de aptidão transforma essa medida de desempenho na atribuição de oportunidades de reprodução, sendo, portanto, definida em relação aos outros indivíduos da população.

#### 4.3 Operadores genéticos

Como foi anteriormente mencionado, os AG são processos iterativos e estocásticos que, durante uma dada iteração, geralmente designada por *geração*, mantêm constante uma população de soluções potenciais, representadas pelos seus cromossomos. Cada solução é avaliada para fornecer uma medida da sua aptidão. Em seguida, uma nova população é produzida, pela seleção de indivíduos de acordo com uma probabilidade de seleção proporcional à sua aptidão. Alguns membros da nova população sofrem alterações por meio das operações de cruzamento e mutação. A estrutura básica de um algoritmo genético, expressa por meio da representação em pseudocódigo, pode ser descrita como segue (SPEARS et al apud PUJOL, 1999):

```

t ← 0
Pt ← inicialização da população (s);
avaliação (Pt);
REPETIR até que a solução seja encontrada
{
    t ← t+1;
    Bt ← seleção Pt;
    Rt ← cruzamento Bt;
    Mt ← mutação Rt;
    avaliação Mt;
    Pt ← sobreviventes (Mt, Pt-1);
}
FIM REPETIR

```

onde:

- (1)  $s$  é uma semente do gerador aleatório;
- (2)  $t$  representa a geração;
- (3)  $P_t$  é a população da geração  $t$ ;
- (4)  $B_t$  é a memória temporária de progenitores da geração  $t$ ;
- (5)  $R_t$  são os descendentes gerados pelo cruzamento  $B_t$ ;
- (6)  $M_t$  são os descendentes criados por mutação  $R_t$ .

Estes algoritmos, apesar de serem computacionalmente muito simples, são bastante poderosos. Além disso, eles não são limitados por suposições sobre o espaço de busca, suposições relativas a continuidade a existência de derivadas, etc.

Buscas em problemas reais são repletas de discontinuidades, ruídos e outros problemas. Métodos que dependam fortemente de restrições de continuidade e existência de derivadas podem ser adequados apenas para problemas em um domínio limitado.

A seleção, em conformidade com a aptidão combinada com o cruzamento, dá ao AG o poder de evoluir. A suposição que se faz é a de que a

recombinação de pequenas seqüências de material genético dos pais conduzirá a filhos com maior aptidão.

Assim, os AG são muito eficientes para busca de soluções ótimas, ou aproximadamente ótimas em níveis globais em uma grande variedade de problemas, pois não impõem muitas das limitações encontradas nos métodos de busca tradicionais.

Os pesquisadores referem-se a "algoritmos genéticos" ou a "um algoritmo genético" e não "ao algoritmo genético", pois AG são uma classe de procedimentos com muitos passos separados, e cada um destes passos possui muitas variações possíveis.

#### 4.3.1 Seleção

A idéia principal do operador de seleção em um algoritmo genético é a de oferecer, aos melhores indivíduos da população atual, preferência para o processo de reprodução, permitindo que estes indivíduos possam passar as suas características às próximas gerações. Isto funciona como na natureza, onde os indivíduos altamente adaptados ao seu ambiente possuem naturalmente mais oportunidades para reproduzir do que aqueles indivíduos considerados mais fracos. Assim, procedimentos de seleção são projetados para favorecer os indivíduos com melhor desempenho. Durante a etapa de seleção, é criada uma população provisória com alguns dos indivíduos da população principal. Os indivíduos mais aptos estão presentes com maior probabilidade na população provisória do que os menos aptos, tal como acontece no mecanismo da seleção natural. Posteriormente, pares de indivíduos da população provisória são aleatoriamente escolhidos para aplicação dos operadores reprodutivos, de forma a gerar uma nova população (MITCHELL, 2001).

Um bom método de seleção deve exercer suficiente pressão de seleção<sup>7</sup> para favorecer a evolução. Por exemplo, uma forma simples de seleção é a *proporcional ao valor de aptidão*. Neste procedimento de seleção, indivíduos são selecionados com uma probabilidade proporcional ao seu valor de aptidão

---

<sup>7</sup> Denomina-se pressão de seleção, no vocabulário dos Algoritmos Genéticos, ao poder que faz com que os indivíduos com maior valor de aptidão tenham mais descendentes

dividido pela média dos valores da aptidão da população. É uma técnica computacionalmente fácil para implementar, mas, segundo MITCHELL (2001), provoca convergência prematura, visto que é dada muita ênfase, desde as primeiras iterações, na exploração de indivíduos de valor de aptidão mais altos, dispensando outras regiões do espaço de busca. Posteriormente, quando a variância da população relativa ao valor de aptidão é pequena, pode levar a estagnação do processo evolucionário.

Uma técnica de seleção utilizada para contornar esses problemas é a seleção por ordenação. Esta técnica consiste em classificar a população de acordo com o valor de aptidão dos indivíduos. Esta classificação é então usada para aplicar um plano reprodutivo em vez dos valores de aptidão. Segundo PUJOL (1999), o método evita a convergência prematura e o problema de estagnação. Entretanto, o método requer que se faça a ordenação da população inteira em cada geração.

Para evitar estes problemas, a método de seleção por torneio pode ser usado. Este método pode ser implementado extraindo-se uma pequena amostra aleatória (o tamanho da amostra é o *tamanho do torneio*) de indivíduos da população. O indivíduo da amostra com maior valor de aptidão é selecionado e inserido em uma área de armazenamento temporário, onde os progenitores são mantidos, e a amostra é retornada à população. O processo é repetido até que o se completa o tamanho da população (PUJOL, 1999). Este método de seleção foi adotado neste trabalho.

Para melhorar a convergência dos AG, foi adotado o *elitismo*. Ele foi primeiramente introduzido por Kenneth De Jong em 1975 e é uma adição aos métodos de seleção. O elitismo força os AG a reterem um certo número de “melhores” indivíduos em cada geração. Tais indivíduos podem ser perdidos se eles forem selecionados para reprodução ou se eles forem destruídos por cruzamento ou mutação. Muitos pesquisadores têm encontrado no elitismo vantagens significativas para o desempenho dos AG (MITCHELL, 2001).

O elitismo consiste basicamente em realizar a etapa de seleção em duas partes:

- (1) seleciona-se uma elite de E membros (em geral de 2% a 4% da população) entre os melhores da população inicial, os quais serão

incorporados diretamente à população final, sem passar pela população auxiliar;

- (2) a população auxiliar é selecionada entre os  $N - E$  membros restantes da população inicial.

Neste trabalho, o programa desenvolvido permite fazer opção em utilizar ou não o elitismo. Isto porque, dependendo do problema, o elitismo não melhora a convergência dos AG. Por meio de experimentação, decidiu-se utilizar o elitismo, no caso do modelo potência inversa-Weibull e, no caso do modelo potência inversa-lognormal, não foi usado.

#### 4.3.2 Cruzamento (“CROSSOVER”)

O operador de cruzamento é o operador responsável pela recombinação de características dos progenitores durante a reprodução, permitindo que as próximas gerações herdem essas características. É considerado o operador genético predominante nos AG. Dois indivíduos progenitores são escolhidos da população atual, por um método de seleção bem definido, para produzir dois novos indivíduos, denominados descendentes, onde um descendente herda genes de ambos os progenitores. A idéia central do cruzamento é a propagação das características dos indivíduos mais aptos da população por meio de troca de material genético entre os mesmos, o que dará origem a novos indivíduos.

Este operador pode ser utilizado de várias maneiras; as mais utilizadas são:

- (1) **cruzamento de um ponto:** um ponto de cruzamento é escolhido aleatoriamente em cada progenitor, criando quatro seqüências. Estas seqüências são cruzadas para formar os descendentes, ou seja, um descendente recebe uma seqüência de cada um dos progenitores, conforme é mostrado na FIGURA A-2.
- (2) **cruzamento de dois pontos:** dois pontos de corte são selecionados aleatoriamente, criando seis seqüências que aparecerão cruzadas nos descendentes. Neste caso, os descendentes recebem uma seqüência de um dos progenitores e duas do outro, conforme é mostrado na FIGURA A-3.

- (3) **cruzamento uniforme:** não utiliza pontos de cruzamento e sim uma máscara binária, gerada aleatoriamente, de comprimento igual ao dos cromossomos. Os genes herdados por cada um dos descendentes dependem desta máscara, conforme é mostrado na FIGURA A-4. No exemplo dessa figura, os dígitos 1 da máscara correspondem aos elementos do Progenitor-1 e os dígitos 0 da máscara correspondem aos elementos do Progenitor-2.

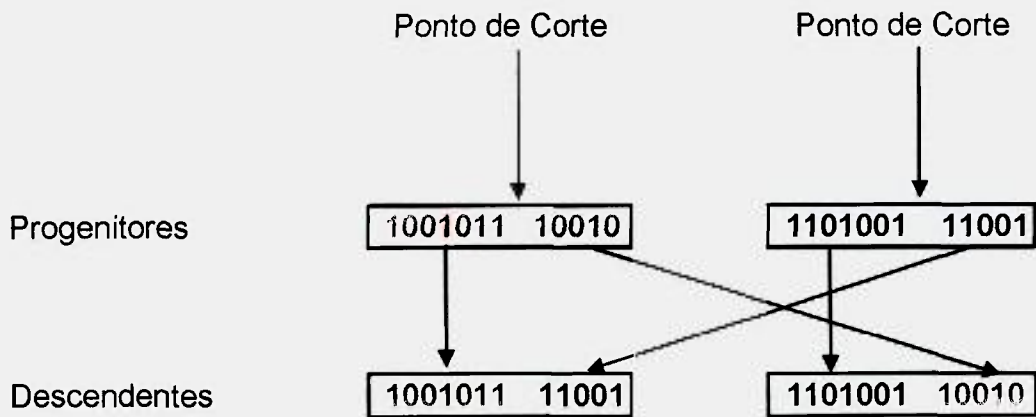


FIGURA A-2: Cruzamento de um ponto.

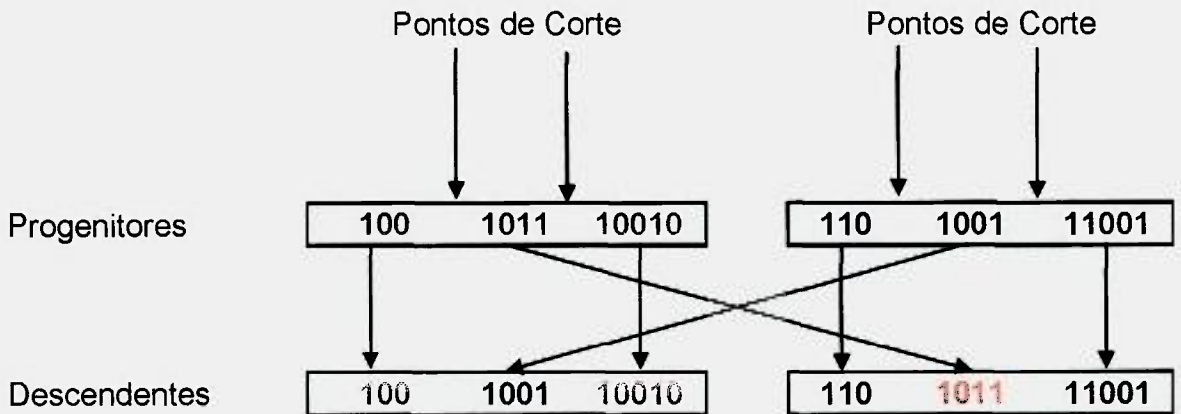


FIGURA A-3: Cruzamento de dois pontos.

Máscara	1 1 1 0 1 0 0 0 1 0 0 1
Progenitor-1	1 0 0 1 0 1 1 1 0 0 1 0
Progenitor-2	1 1 0 1 0 0 1 1 1 0 0 1
Descendente	1 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0

FIGURA A-4: Cruzamento uniforme.

### 4.3.3 Mutação

O operador de mutação é necessário para a introdução e manutenção da diversidade genética da população, alterando arbitrariamente um ou mais componentes de uma estrutura escolhida, como é ilustrado na FIGURA A-5. Desse modo, o operador de mutação traz de volta para a população os genes perdidos durante o processo de seleção, de modo a que possam ser testados num novo contexto, ou ainda, introduz novos genes que não estavam originalmente presentes na população inicial. Assim, a mutação assegura que a probabilidade de se chegar a qualquer ponto do espaço de busca nunca será zero, além de contornar o problema de máximos locais, pois com este mecanismo, altera-se levemente a direção da busca. O operador de mutação é aplicado aos indivíduos com uma probabilidade dada pela taxa de mutação  $P_m$ ; geralmente se utiliza uma taxa de mutação pequena, pois é um operador genético secundário (MITCHELL, 2001).

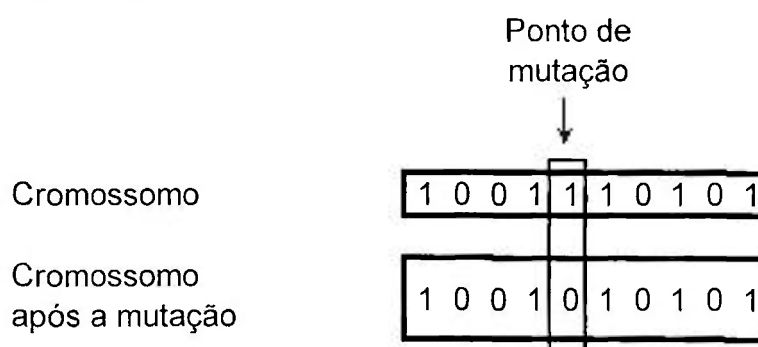


FIGURA A-5: Exemplo de mutação "flip over".

## 4.4 Parâmetros genéticos

É importante analisar de que maneira alguns parâmetros influem no comportamento dos AG, para que se possa estabelecê-los conforme as necessidades do problema e dos recursos disponíveis. A definição dos parâmetros foi feita com base nas influências, a seguir descritas, que cada um exerce no desempenho dos AG e com base em testes nas configurações dos parâmetros para verificar qual apresenta um melhor resultado.

**Tamanho da população** – é um parâmetro de grande importância para qualquer AG. O seu valor afeta o desempenho global e a eficiência dos AG. Com uma população pequena, o desempenho pode cair, pois, deste modo, a população fornece uma pequena cobertura do espaço de busca do problema. Por

outro lado, com o aumento do tamanho da população, obtém-se um aumento da probabilidade de produzir melhores soluções, por meio de uma maior cobertura do espaço de busca do problema e prevenindo a convergência prematura, embora à custa de um maior esforço computacional. Para a definição do tamanho da população dos AG aplicados a este trabalho, iniciou-se com o tamanho 500 e foi-se aumentando até conseguir uma convergência com suficiente precisão. Para o modelo potência inversa-Weibull, adotou-se o tamanho de 1000, e de 5000 para o modelo potência inversa-lognormal.

**Probabilidade de Cruzamento** – é definida como a probabilidade de aplicação do operador cruzamento a um dado par de indivíduos. Quanto maior for esta probabilidade, mais rapidamente novos indivíduos serão introduzidos na população. Sendo o tamanho da população normalmente fixo, mais indivíduos tenderão a ser substituídos, e, com isto pode haver tendência para a perda de indivíduos com alta aptidão. Para valores baixos desta probabilidade, gerar-se-á menos indivíduos em cada geração, o que pode implicar um aumento do número de gerações para obter os mesmos resultados.

**Probabilidade de Mutação** – é a probabilidade de aplicar a operação mutação sobre o genótipo de um dado indivíduo. Considerando que a adoção de um valor de probabilidade de mutação muito alto torna a busca essencialmente aleatória, é comum utilizar-se de valores relativamente baixos para esta probabilidade que, tipicamente, estão no intervalo de 0,001 a 0,1.

**Critério de paragem** – o critério para a paragem do AG depende do problema em causa e do esforço computacional que é exigido. Em face do tempo e dos recursos disponíveis, é necessário definir qual a qualidade da solução que se pretende. Um critério usado com frequência passa por definir o número máximo de gerações em que a evolução deve ocorrer. Um segundo critério possível passa pela definição de um valor mínimo para o desvio padrão do valor de aptidão dos indivíduos na população. Uma vez atingido esse valor mínimo, o algoritmo pára. Ainda um outro critério bastante comum de paragem consiste em fazer evoluir o algoritmo até se verificar que não se regista melhorias significativas das soluções ao longo de um dado número de gerações; este foi o critério adotado neste trabalho.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 ALVARENGA JUNIOR, A. **Acúmulo de danos por fadiga no aço SAE 8620**. 2001. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte.
- 2 AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **Standart practice for conducting force controlled constant amplitude axial fatigue test of metallic materials**. Baltimore: Anual Book of ASTM Standarts, Vol 03.01, 2001. (ASTM E 466-96)
- 3 AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **Standard terminology relating to fatigue and fracture testing**. Baltimore: Anual Book of ASTM Standarts, Vol 03.01, 2001. (ASTM E 1823-96).
- 4 BÄCK, T., FOGEL, D., MICHALEWICZ, Z., editors, **Handbook of Evolutionary Computation**. Oxford University Press, 1997.
- 5 BAI, D.S.; KIM, M.S.; LEE, S.H. **Optimum simple step-stress accelerated life test with censoring**. IEEE Transactions on Reliability, Vol 38, pp 528-532, 1989.
- 6 BAI, D.S.; CHUN, Y.R. **Optimum simple step-stress accelerated life-tests with competing causes of failure**. IEEE Transactions on Reliability, Vol 40, pp 622-627, 1991.
- 7 BAI, D. S.; LEE, N. Y. **Nonparametric estimation for accelerated life tests under intermittent inspection**. Reliability Engineering and System Safety, pp 53-58, 1996
- 8 BARROSO, S.P. **Análise de tensão no circuito primário do reator**. 1996. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Engenharia Nuclear, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.
- 9 BARSOM, J.M.; ROLFE, S.T. **Fracture and fatigue control in structures: applications of fracture mechanics**. 3ª edição. ASTM, Philadelphia, 1999.
- 10 BHATTACHARYYA G. K., SOEJOETI Z.; **A tampered failure rate model for step-stress accelerated life test**. Communications in Statistics-Theory and Methods, Vol 18, Iss 5, pp 1627-1643, 1989.
- 11 BUCH, A. **Fatigue strength calculation**. Aedermannsdorf, Switserkand: Trans Tech 1988.

- 12 BUENO, D. P. ***Estudo do comportamento em fadiga do aço inoxidável AISI 316L através da análise dos parâmetros geométricos das bandas de deslizamento persistentes.*** Dissertação de mestrado, UFRGS, 1996.
- 13 CAZAUD, R. ***La Fadiga de los Metales.*** Tradução da 3ª edição francesa. Madrid, Espanha: Aguilar, 1957.
- 14 CHEN, C. K. ***Temperature-dependent standard deviation of log (failure time) distributions.*** IEEE Transactions on Reliability, Vol. 40, no. 2, pp 157-160, 1991.
- 15 COLLET, D. ***Modelling survival data in medical research.*** London, England: Chapman & Hall, 1994.
- 16 COLLINS, J. A. ***Failure of materials in mechanical design.*** 2<sup>nd</sup> ed. New York, N.Y.: J. Wiley, 1993.
- 17 CORDEIRO, G. M. ***Introdução à teoria de verossimilhança.*** Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Estatística, 1992. Curso oferecido durante a realização do 10<sup>o</sup> Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística.
- 18 DEGROOT, M. and GOEL, P.K. (1979). ***Bayesian estimation and optimal designs in partially accelerated life testing.*** Naval Res. Logistic Quart, Vol 26, 223-235, 1979.
- 19 DRAPER, N.R., SMITH, H.; ***Applied regression analysis.*** 2<sup>nd</sup> ed. New York: J. Wiley, 1981.
- 20 DOKSUM K. A., HOYLAND A.; ***Models for variable-stress accelerated life testing experiments based on wiener-processes and the inverse gaussian distribution.*** Technometrics, Vol 34, Iss 1, pp 74-82, 1992.
- 21 FEINBERG, A. A.; ***Accelerated reliability growth models.*** Journal of the Ies, Vol 37, Iss 1, pp 17-23, 1994.
- 22 FREITAS, M. A. COLOSIMO, E. A. ***Confiabilidade: análise de tempo de falha e testes de vida acelerados.*** Belo Horizonte: Fundação Christiano Ottoni, Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, 1997. (Série Ferramentas da qualidade, 12).
- 23 GARTHWAITE, P. H., JOLLIFFE, I. T., JONES, B. ***Statistical inference.*** London: Prentice Hall, 1995.
- 24 GOPE, P.C.; ***Determination of sample size for estimation of fatigue life by using Weibull or lognormal distribution.*** International Journal of Fatigue, Vol 21, pp 745-752, 1999.
- 25 GREEN, A. E., BOURNE, A. J. ***Reliability technology.*** London: Wiley-Interscience, 1972.

- 26 GROEBEL, D.J., METTAS, A.; **Determination and interpretation of activation energy using accelerated-test data**. PROCEEDINGS Annual RELIABILITY AND MAINTAINABILITY SYMPOSIUM, 2001, IEEE.
- 27 IUCULANO G.; ZANINI A.; **Statistical behavior of functional models suitable for controlling step-stress life tests**. Alta Frequenza, Vol 53, Iss 3, pp 159-163, 1984
- 28 IUCULANO G.; ZANINI A.; **Evaluation of failure models through step-stress tests**. IEEE Transactions on Reliability, Vol 35, Iss 4, pp 409-413, 1986.
- 29 JAMES, BARRY R.; **Probabilidade: um curso em nível intermediário**. 2.ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2002.
- 30 JOYCE, W. B.; LIOU, K. Y.; BOSSARD, F. R., HARTMAN, R. L. **Methodology of accelerated aging**. AT&T Technical J., vol. 64, pp 717-764, 1985.
- 31 KHAMIS, I. H., HIGGINS, J. J.; **A new model for step-stress testing**. IEEE Transactions on Reliability, Vol 47, Iss 2, pp 131-134, 1998.
- 32 KHAMIS, I. H., HIGGINS, J. J.; **Optimum 3-step step-stress tests**. IEEE Transactions on Reliability, Vol 45, NO 2, pp 341-345, 1996.
- 33 KOZA, J.R. **Genetic programming: on the programming of computers by means of natural selection**. Massachusetts: Bradford, 2000.
- 34 LAGHARI, JR; CYGAN, P; KHECHEN, W.; **A short method of estimating lifetime of polypropylene film using step-stress tests**. IEEE Transactions on Electrical Insulation, vol 25, No. 6, pp 1180-1182, 1990.
- 35 LAWLESS, J. F. **Statistical models and methods for lifetime data**. New York: J. Wiley, 1982.
- 36 LIDE, D. R. (Ed.) **CRC handbook of chemistry and physics**. 77. Ed. Boca Raton: CRC, 1996.
- 37 MADI M. T. **Multiple step-stress accelerated life test-the tampered failure rate model**. Communications in Statistics-theory and Methods, Vol 22, Iss 9, pp 2631-2639, 1993.
- 38 MADI, M.; **Bayesian inference for partially accelerated life tests using Gibbs sampling**. Microelectronic Reliability, Vol. 37, No. 8, 1165-1168, 1997.
- 39 MANESCHY, E.; SUANNO, R. **Fatigue evaluation in piping caused by thermal stratification**. Proceedings of the International Conference on Fatigue of Reactor Components, Napa, USA: 2000.
- 40 MANESCHY, E. **Fadiga em componentes de plantas nucleares**. Curso ministrado no CDTN/CNEN, 10 a 14 dezembro 2001.

- 41 MANSUR, T.R., ***Acúmulo de Danos sob Fadiga em Aço ASTM 8620***. 2003. Tese (doutorado) Departamento de Engenharia Mecânica UFMG, Belo Horizonte, M.G.
- 42 MCLINN, J. A.; ***Ways to improve the analysis of multi-level accelerated life testing***. Quality and Reliability Engineering International, Vol 14, Iss 6, pp 393-401, 1998.
- 43 MEETER, C. A. MEEKER JR. W. Q. ***Optimum accelerated life tests with a no constant scale parameter***, vol. 36, no. 1, pp. 71-83, 1994.
- 44 METTAS, A.; ***Reliability allocation and optimization for complex systems***. Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium, IEEE: 2000.
- 45 METTAS, A.; ***Modeling & analysis for multiple stress-type accelerated life data***. Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium IEEE, 2000.
- 46 METTAS, A.; SAVVA, M.; ***System reliability analysis: the advantages of using analytical methods to analyze non-repairable systems***. Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium IEEE, 2000.
- 47 METTAS, A.; SAVVA, M.; ***Modeling and analysis of time-dependent stress accelerated life data***. Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium IEEE, 2002.
- 48 MEYERS, M. A; CHAWLA, K. K. ***Princípios de metalurgia mecânica***. Edgar Blücher Ltda, Brasil, 1982.
- 49 MILITARY STANDARD-781C. ***Reliability design qualification and production acceptance tests: exponential distribution***. Department of Defense, Washington, DC: 1977.
- 50 MITCHELL, M., ***An Introduction to Genetic Algorithms***. Massachusetts: MIT Press, 2001.
- 51 MOOD, A. M., GRAYBILL, F. A., BOES, D. C. ***Introduction to the theory of statistics***. 3 ed. Singapore: McGraw-Hill, 1974.
- 52 NAMENSON A. I. ***Statistical-analysis of step stress measurements in hardness assurance***. IEEE Transactions on Nuclear Science, Vol 31, Iss 6, pp 1398-1401, 1984.
- 53 NAMENSON, A.; MYERS, D. ***One hundred percent abrupt failure between two radiation levels in step-stress testing of electronic parts***. IEEE Transactions on Nuclear Science, Vol 40, NO. 6, pp 1709-1713, 1993.
- 54 NELSON, W. ***Accelerated life testing – step-stress models and data analysis***. IEEE Transactions on Reliability, v. R-29, n. 2, p. 103-108, 1980.

- 55 NELSON, W. **Accelerated life testing, statistical models, test plans and data analysis**. New York: J. Wiley, 1990.
- 56 NELSON, W. e-mail enviado pelo Prof. Wayne Nelson ao Prof. Enrico Colosimo, 02/2000.
- 57 NELSON, W. e-mail enviado pelo Prof. Wayne Nelson ao Prof. Enrico Colosimo, 04/2002.
- 58 PALMA, E.S., MANSUR, T.R. **Fatigue cumulative damage of a sintered steel alloy**. In: International Conference on Powder Metallurgy & Particulated Materials, 1-5 June 1998, Las Vegas. *Proceedings...* Princeton: MPIF, 1998. p. 25-29.
- 59 PINTO, J.M.A., **Métodos estatísticos para testes acelerados com esforço aplicado em escada em um estudo de fadiga mecânica**. 2000. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Estatística, Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG.
- 60 PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., FLANNERY, B. P. **Numerical recipes in FORTRAN – the art of scientific computing**. 2.ed. New York: Cambridge University Press, 1994.
- 61 PROSCHAN, F. and SIGPURWALLA, N. D. **A new approach to inference from accelerated life tests**. IEEE Trans. Reliability 20, 98-102, 1980
- 62 PUJOL, J. C. F., PINTO, L. C. M., CONSIGLIO, R. V., **Algoritmos genéticos**. Belo Horizonte: CDTN/CNEN, julho 1995. (NI – CT2 – 002/95).
- 63 PUJOL, J. C. F., **Evolution of artificial neural networks using a two-dimensional representation**. PhD thesis, School of Computer Science, University of Birmingham, Birmingham, England, 1999.
- 64 RAJA RAO, B. **Equivalence of the tampered random variable and the tampered failure rate models in accelerated life testing for a class of life distributions having the setting the clock back to zero property**. Communications in Statistics-Theory and Methods, Vol 21, Iss 3, pp 647-664, 1992.
- 65 RAYMOND, M. **Accelerated test techniques**. Journal of the IEST, Vol 43, Iss 2, pp 21-25, 2000.
- 66 RHO, H., HECHT, N. L. GRAVES, G. A. **Effect of water vapor on the mechanical behaviors of hot isostatically pressed silicon nitride containing Y2O3**. Journal Of Materials Science, Vol 35, Iss 13, pp 3415-3423, 2000.
- 67 SCHWARZ, J. A. **Effect of temperature on the variance of the lognormal distribution of failure times due to electro migration damage**. J. Applied Physics, vol. 61, pp801-803, 1987.

- 68 SETHURAMAN, J. and SINGPURWALLA, N. D. **Testing of hypotheses for distributions in accelerated life tests**. J. Amer. Statist. Assoc. 77, 204-208, 1982.
- 69 SHÄBE, H., VIERTL, R. **An axiomatic approach to models of accelerated life testing**. *Engineering Fracture Mechanics*. Vol 50, Iss 2, pp 203-217, 1995.
- 70 SHAKED, M., ZIMMER, W. J. and BALL, C. A. **A nonparametric approach to accelerated life testing**. J. Amer. Statist. Assoc. 74, 694-699, 1979
- 71 SHADED M.; SINGPURWALLA N. D. **Inference for estep-stress accelerated life tests**. *Journal of Statistical Planning and Inference*. Vol 7, Iss 4, pp 295-306, 1983.
- 72 SOBCZYK, K., SPENCER, Jr. B. F. **Random fatigue: from data to theory**. Boston: Academic Press, 1992.
- 73 SPEARS, W., JONG, K., BÄCK, T., FOGEL, D., GARIS, H. **An overview of evolutionary computation**. In: Proceedings of the European Conference on Machine Learning, 1993
- 74 SUN, F.B.; CHANG, W.C. **Reliability evaluation of a flash RAM using step-stress test results**. In: Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium IEEE, 2000.
- 75 SURESH, S. **Fatigue of materials**. 2<sup>nd</sup> ed. Cambridge: University Press, 2001.
- 76 TANG, L. C., SUN, Y. S., GOH, T. N., ONG, H. L. **Analysis of step-stress accelerated-life-test data: a new approach**. IEEE Transactions on Reliability, v. 45, n. 1, p. 69-74, 1996.
- 77 TAYLOR, JAMES L. **Dicionário metalúrgico: inglês – português, português – ingles**. 2<sup>a</sup> edição – São Paulo: Associação Brasileira de Metalurgia e Materiais, 2000
- 78 TIAN, X.; PRINCE, J.L. **Electronic packaging adhesive fatigue life prediction using thermal cycling step-stress testing**. Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium IEEE, 2002.
- 79 TOVO, R. **On the fatigue reliability evaluation of structural components under service loading**. International Journal Of Fatigue, Vol 23, pp 587-598, 2001.
- 80 TRUJILLO, H., BONAT, E. **Step stress tests – Monte-Carlo simulation and evaluation**. Microelectronics And ReliabilityX, Vol 29, Iss 2, pp 281-282, 2000.
- 81 TSENG, S. T., WEN, Z. C. **Step-stress accelerated degradation analysis for highly reliable products**. Journal Of Quality Tchnology, Vol 32, Iss 3, pp 209-216, 2000.

- 82 TYOSKIN, O.I., KRIVOLAPOV, S. Y. ***Nomparametric model for step-stress accelerated life testing.*** IEEE Transactions On Reliability, Vol 45, Iss 2, pp 346-350, 1996.
- 83 VAN DORP, R.; MAZZUCHI, T.A.; FORNELL, G.E.; POLLOCK, L.R. ***A Bayes approach to step-stress accelerated life testing.*** IEEE Transactions On Reliability, Vol 45, NO. 3, pp 491-498, 1996.
- 84 WANG, W., KECECIOGLU, D.B. ***Fitting the Weibull log-linear model to accelerated life-test data.*** IEEE Transactions On Reliability, Vol 49, NO. 2, pp 217-223, 2000.
- 85 WATKINS, A. J. ***Commentary: Inference in simple step-stress models.*** IEEE Transactions On Reliability, Vol 50, Iss 1, pp 36-37, 2001.
- 86 WORTMANN, F. J., SCHULZ, K. V. ***Non-linear viscoelastic performance of nomex, kevlar and polypropylene fibers in a single-step stress relaxation test: 1. experimental data and principles of analysis.*** Polimer, Vol 35, Iss 10, pp 2108-2116, 1994.
- 87 XIE, L. ***Equivalent life distribution and fatigue failure probability prediction.*** International Journal Of Pressure Vessels And Piping, Vol 76, pp 267-273, 1999.
- 88 XIONG, C. J. ***Inferences on a simple step-stress model with type-ii censored exponential data.*** IEEE Transactions On Reliability, Vol 47, NO. 2, pp 142-146, 1998.
- 89 XIONG, C. ***Step stress model with threshold parameter.*** Journal Of Statistical Computation And Simulation, Vol 63, Iss 4, pp 349-360, 1999.
- 90 XIONG, C. J., MILLIKEN, G. A. ***Step-stress life testing with random stress-change times for exponential data.*** IEEE Transactions On Reliability, Vol 48, Iss 2, pp 141-148, 1999.
- 91 YEO, K.P.; TANG, L.C. ***Planning step-stress life-test with a target acceleration-factor.*** IEEE Transactions On Reliability, Vol 48, NO 1, pp 61-67, 1999.
- 92 ZAHAVI, E. ***Fatigue design: life expectancy of machine parts.*** New York: CRC Press, 1996