

## UMA ANÁLISE DO TRAVAMENTO DE MODOS ATIVO NO DOMÍNIO ESPECTRAL

Niklaus U. Wetter\*, Nilson D. Vieira Jr.  
 Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares IPEN-CNEN/SP  
 C.P. 11049 - CEP05433-970-São Paulo- SP-BRASIL

*Os modelos teóricos que analisam o regime de travamento de modos ativo se baseiam predominantemente em análises no domínio temporal. O nosso modelo se aplica exclusivamente ao domínio espectral, inclui todos os parâmetros relevantes do sistema laser e se difere das teorias no domínio temporal em que inclui a dispersão e permite soluções de pulsos com varredura em frequência. Neste trabalho daremos enfoque ao modelamento teórico da ação de um modulador acústico-ótico dentro do escopo da nossa teoria.*

### INTRODUÇÃO

Lasers com travamento de modos ativo representam uma ferramenta comum e de grande importância na produção de pulsos ultra curtos. Por exemplo, o laser c.w., "mode-locked", de Nd:YAG, um laser de estado sólido, é utilizado amplamente para estudar efeitos não lineares em fibras óticas e para bombear outros laser do tipo "dye" e centro de cor. Para descrever a operação de travamento de modos ativo de um laser de estado sólido com um meio homoganeamente alargado, Siegman e Kuizenga desenvolveram uma teoria no domínio temporal que experimenta grande aceitação até hoje [1]. Eles estabeleceram a dependência dos parâmetros do pulso em função de profundidade de modulação, frequência de modulação, largura de linha do meio ativo e perdas da cavidade ressonante. Essa teoria analítica se aplica ao estado estacionário e demonstra que a forma temporal do pulso é gaussiano com largura temporal definida pelos parâmetros acima citados. O propósito deste trabalho é demonstrar que é possível fazer uma teoria equivalente no domínio espectral cujas soluções são comparáveis aos de Siegman e Kuizenga. A teoria é capaz de dar um aspeto completamente novo ao regime de travamento de modos ativo e facilita o entendimento em que as ações do meio de ganho e do modulador em cima do pulso podem ser compreendidos intuitivamente nesta representação.

### TEORIA DO ESTADO ESTACIONÁRIO DO REGIME DE TRAVAMENTO DE MODOS ATRAVÉS DO ACHATAMENTO DO GANHO LÍQUIDO

Considere, com referência á figura 1, um pulso circulando dentro do ressonador.

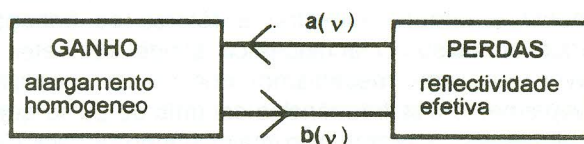


Fig. 1. Ressonador laser esquematizado com pulso circulando.

O envelope gaussiano,  $a(v)$ , da amplitude espectral do pulso propaga pelo meio de ganho, onde experimenta o ganho de amplitude de duplo passo,  $g(v)$ . O envelope alterado emerge como  $b(v)$  e propaga em seguida duas vezes pelo modulador ativo do tipo acústico-ótico (AM). Além desta modulação de perdas o pulso também experimenta perdas passivas devido ao espelho de saída, perdas nas superfícies óticas e perdas por absorção e espalhamento no bastão laser. Este conjunto de perdas modula espectralmente o perfil de amplitude  $a(v)$  e o reflete com uma *reflectividade efetiva*,  $r_{\text{eff}}(v)$ . Após uma volta completa dentro do ressonador o novo envelope  $a(v)$  tem a forma:

$$a + \Delta a = r_{\text{eff}} g a \quad (1)$$

Quando o regime de operação laser atinge o estado estacionário, o envelope  $a(v)$  do pulso, medido na saída do laser, não altera mais a sua forma. Portanto,  $\Delta a$  deve ser igual a zero. Conforme veremos no próximo item, a reflectividade efetiva do modulador é fortemente dependente de  $a(v)$ , enquanto o ganho independe da forma do pulso. Assim, colocando  $\Delta a = 0$  em (1), as equações auto-consistentes são:

$$\arg[r_{\text{eff}}(a) g] = 0 \quad (2)$$

$$|r_{\text{eff}}(a)| = |g^{-1}| \quad \text{ou} \quad G(v) = |r_{\text{eff}}(a)|^2 |g|^2 = 1 \quad (3)$$

A primeira equação trata da fase líquida do pulso enquanto a segunda trata do ganho líquido,  $G(\nu)$ . A equação (2) representa o comportamento da duração temporal do pulso em função da fase espectral. Quanto mais frequências do espectro do pulso tem fase igual a zero, mais curto o pulso mode-locked [2]. Este comportamento é conhecido nas análises temporais como compensação da dispersão. Como o modulador ativo não introduz nenhuma variação significativa na fase e o nosso enfoque é travamento ativo de modos, trataremos de agora em diante exclusivamente da equação (3).

Equação (3) descreve o balanço entre ganho e perdas. Todas as frequências que oscilam dentro do pulso e estão com a fase travado (mode-locked) devem apresentar um ganho líquido igual a um. Este feito se dá da seguinte maneira: Enquanto o ganho tenta a diminuir a largura espectral do pulso (nos meios de banda estreita) a ação do modulador aumenta a largura espectral e reforça as bandas laterais do pulso. O acústico-ótico atinge este efeito através de um mecanismo que retira energia principalmente das frequências centrais do pulso que são aqueles que recebem o maior ganho. É fácil de imaginar como este mecanismo de ganho e perdas consegue manter um ganho líquido unitário (ver figura 2).

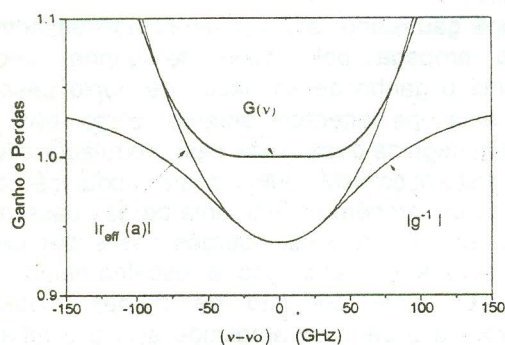


Fig. 2. Diagrama teórico do estado estacionário de operação laser. Linha de baixo: ganho duplo passo invertido de um laser de Nd:YAG. Linha sólida: reflectividade efetiva da cavidade devido a ação do modulador ativo sobre o pulso, das perdas passivas e do espelho de saída de  $R=88\%$ . Linha tracejada: Ganho líquido do sistema.

Nota-se na figura 2 que a reflectividade efetiva é igual ao ganho invertido durante um extenso intervalo espectral de aproximadamente 60 GHz. A forma do ganho líquido é determinada pela reflectividade efetiva do modulador que será tratada no próximo item. Os cálculos da figura 2 foram feitos para um pulso de 76 ps de duração temporal. Utilizando o produto "time-bandwidth" de um pulso gaussiano (0.44), calcula-se, que a largura espectral a meia altura (FWHM) deste pulso é apenas 6 GHz. Como a FWHM é muito menor do que 60 GHz, podemos afirmar que todas as frequências contidas neste pulso têm ganho líquido unitário. Assim, o pulso de 76 ps obedece a equação

(3) e, portanto, representa uma solução do regime estacionário simulado na figura 2.

Para entender melhor a forma da reflectividade efetiva, analisaremos agora a função do modulador ativo no domínio espectral.

### A REFLECTIVIDADE EFETIVA DO MODULADOR ACÚSTO-ÓTICO

A transmissão do modulador acústico-ótico é uma função do envelope espectral do pulso, dado por (no caso de uma gaussiana) [3]:

$$E(\omega) = (E_0/2)\sqrt{\pi/\gamma} \exp\left[-(\omega - \omega_0)^2/4\gamma\right] \quad (4)$$

com:

$$\gamma = \alpha - i\beta \quad (5)$$

$$\alpha = 2 \ln 2 / \tau_p^2 \quad (6)$$

onde  $E_0$  é a amplitude de pico do pulso,  $\omega_0$  é a frequência central do pulso, coincidindo com o centro de linha do meio,  $\alpha$  é o parâmetro gaussiano,  $\beta$  é o parâmetro de varredura em frequência (frequency chirp) e  $\tau_p$  é a largura temporal a meia altura do pulso. Ao propagar pelo AM, o campo óptico sofre uma modulação temporal dada por:

$$\cos(\delta_m \sin(\omega_m t)) \quad (7)$$

onde  $\delta_m$  representa a profundidade de modulação em radianos e  $\omega_m$  a frequência de modulação do AM. A transformada de Fourier da função (4) para uma única frequência é obtida utilizando as funções de Bessel,  $J_n(x)$ :

$$F(\omega) = J_0(\delta_m)\delta(\omega) + J_2(\delta_m)[\delta(\omega + 2\omega_m) + \delta(\omega - 2\omega_m)] \\ + J_4(\delta_m)[\delta(\omega + 4\omega_m) + \delta(\omega - 4\omega_m)] \\ + J_6 \dots \quad (8)$$

onde  $\delta(\omega)$  representa a função delta. Pela notação acima fica claro o mecanismo de transferência de energia pelo modulador. O primeiro termo da soma é a própria transmissão da frequência  $\omega$  pelo AM. A transmissão é 100% se  $\delta_m$  for igual a zero. Se  $\delta_m$  for maior de 0, então uma parte da energia é desviada para outros termos da equação. Por exemplo, se o dobro da frequência de modulação ( $2\omega_m$ ) estiver casada com o  $c/2L$  ("free spectral range"), onde  $L$  é o comprimento da cavidade, então a frequência adjacente a  $\omega$  poderá receber energia. Quanto maior a amplitude do campo na frequência  $\omega$ , maior a contribuição das funções de Bessel de ordem mais alta. Desta maneira o pulso tende a alargar (ver figura 3).

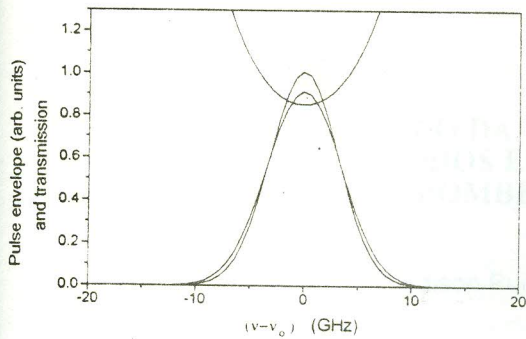


Fig. 3. Diagrama teórico do envelope espectral do pulso antes (linha sólida) e depois (linha tracejada) do modulador ativo. A curva no topo representa a transmissão do modulador. Para melhor visualização foi aplicado um  $\delta_m$  de 10 radianos a um pulso de 60 ps.

Comparando o gráfico acima com a figura 2, nota-se, que a transmissão do modulador acústico-óptico é a responsável pelo comportamento da refletividade efetiva da cavidade na figura 2.

### COMPARAÇÃO COM A TEORIA DE SIEGMAN E KUIZENGA (K-Z)

A análise espectral não permite uma solução analítica para a duração temporal do pulso, devido à dependência complicada da transmissão do acústico-óptico como função do envelope espectral do pulso. A nossa maneira de resolver este problema foi através de uma iteração numérica, que ajusta a refletividade efetiva em função da forma de pulso ao ganho invertido. Começa-se o ajuste no centro da largura de linha, calculando o ganho saturado por duplo passo em função das perdas:

$$g_0 = \frac{\ln(1/R_{out}) + \text{perdas}}{2} \quad (9)$$

onde  $R_{out}$  é a refletividade do espelho de saída. Após cada volta completa dentro do ressonador o pulso se alarga espectralmente, aumentando desta forma a largura espectral da refletividade efetiva,  $r_{eff}(a)$ . A curva da refletividade efetiva atinge a máxima largura espectral quando existe o maior número de modos que obedecem a equação (3). Neste caso o estado estacionário é atingido. A refletividade efetiva não pode alargar além da largura do ganho porque não podem oscilar modos para os quais o ganho é menor do que a refletividade efetiva. No caso em que o pulso não contém varredura em frequência (chirp), o máximo alargamento de  $r_{eff}(a)$  corresponde ao caso de um pulso limitado pela transformada de Fourier.

Na figura abaixo são comparados os resultados das duas teorias, K-Z e nossa, para pulsos sem "chirp".

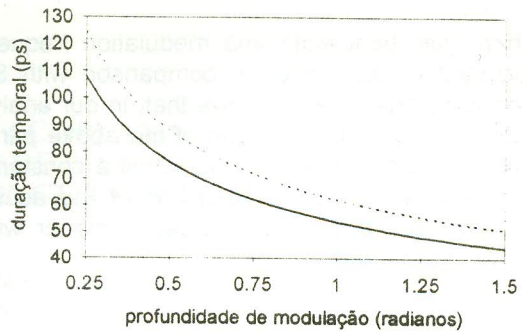


Fig. 4. Linha sólida: Duração temporal dos pulsos em função da profundidade de modulação. Os parâmetros são: refletividade do espelho de saída: 88%, perdas passivas da cavidade: 10%, largura de linha do meio ativo: 120 GHz, espaçamento dos modos: 100 MHz. Linha tracejada: teoria de K-Z para os mesmos parâmetros.

Observa-se que as duas curvas se diferenciam apenas por um fator constante (10% do valor absoluto).

Incluindo uma varredura de frequência na equação (5) resulta num pulso espectralmente mais largo e, portanto, numa refletividade mais larga. Deste modo, o máximo alargamento da refletividade é atingido para pulsos com duração temporal maior do que no caso sem varredura.

### CONCLUSÕES

Apresentamos uma nova análise para travamento de modos ativo com modulação por acústico-óptico. A análise explica a ação do modulador ativo de maneira clara e didática no domínio espectral. Os resultados do nosso modelo, obtidos para a duração temporal dos pulsos, seguem a mesma função e estão de acordo com a teoria de Siegman e Kuizenga.

### REFERÊNCIAS

- [1] D.J. Kuizenga, A.E. Siegman, "FM and AM Mode Locking of the Homogeneous Laser-Part 1: Theory", IEEE J. of Quant. Electr. 6, 694 (1970).
- [2] Niklaus U. Wetter and Nilson D. Vieira Jr., "A spectral analysis of pulse shortening in a mode-locked Nd: YAG Laser with an empty coupled cavity", submitted to Appl. Opt.

### SUMMARY

We develop a frequency analysis of active mode-locking utilising the concept of effective reflectivity. Therefore, the mode-locker action corresponds, in our model, to a reflectivity response which depends upon the propagating spectral envelope of the pulse. When this response is included to the other intracavity loss mechanisms one obtains the effective reflectivity. The central point of our analysis is that this reflectivity, as a function of frequency, must have the same shape as the inverse gain. All necessary parameters as modulation depth,

chirp gain bandwidth and modulation frequency are included in our model. A comparison with Siegman and Kuizengas theory shows that, in our analysis, the pulse duration as a function of the above parameters obeys the same behaviour to within a constant factor. The analysis explains the action of the acusto-optic modulator in a clear and didactic manor within the frequency domain.

\*Bolsista RHA/E/D\*