

# APLICAÇÃO DO MÉTODO DA EXPANSÃO EM FUNÇÕES HIERÁRQUICAS NA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES PARA FLUIDOS INCOMPRESSÍVEIS.

Gaianê Sabundjian\* e Eduardo Lobo Lustosa Cabral\*\*

\*Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, CNEN  
[gdjian@net.ipen.br](mailto:gdjian@net.ipen.br) - Caixa Postal 11049 (Pinheiros)  
05422-970, São Paulo, Brasil

\*\*Escola Politécnica da USP – Mecânica  
[elcabral@usp.br](mailto:elcabral@usp.br) - Caixa Postal 8174  
05508, São Paulo, Brasil

## RESUMO

Este trabalho consiste na aplicação do método da expansão em funções hierárquicas, na solução das equações de Navier-Stokes em duas dimensões para fluidos incompressíveis, com escoamento em regime laminar. Este trabalho está baseado no método de elementos finitos. As funções de expansão utilizadas são baseadas nos polinômios de Legendre, ajustadas nos elementos retangulares, de forma a definir funções de canto, de lado e de área. A ordem das funções de expansão associadas aos lados e às áreas dos elementos é ajustada até o grau necessário ou desejado. Este método é denominado de Método de Expansão em Funções Hierárquicas (MEFH). A fim de validar o método numérico proposto, analisam-se três problemas conhecidos da literatura. Os resultados mostram a capacidade do método em fornecer bons resultados.

**Palavras-Chave:** elementos finitos, Petrov-Galerkin, funções de expansão hierárquicas, fluidos incompressíveis.

## I. INTRODUÇÃO

Com o advento dos super computadores nas duas últimas décadas, tornou-se possível a simulação numérica de problemas da área de Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor, conhecida como “*Computational Fluid Dynamics*” (CFD). Atualmente, o uso de técnicas numéricas para a solução de problemas da engenharia e da física é uma realidade. Este trabalho propõe a aplicação do método da expansão em funções hierárquicas, elaborado por Zienkiewicz e Morgan [1], para a solução das equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis, em duas dimensões, em escoamentos laminares. A principal vantagem da expansão em funções hierárquicas é a capacidade de adaptar o grau do polinômio de expansão até o valor necessário ou desejado, durante o cálculo do escoamento, ao invés de refinar a malha, sem que para isto haja a necessidade de reiniciar o problema, como ocorre no método dos elementos finitos convencional.

## II. OBJETIVO

O objetivo deste trabalho é aplicar o método da expansão em funções hierárquicas, proposto por Zienkiewicz e Morgan [1], na solução das equações de Navier-Stokes em duas dimensões, para fluidos

incompressíveis em regime laminar. Este trabalho está basea-se no método de elementos finitos e utiliza a formulação de Petrov-Galerkin consistente, em conjunto com a expansão das variáveis em funções quase hierárquicas, para tratar todos os termos das equações de conservação (temporais, convectivos, difusivos e viscosos).

## III. DENSENVOLVIMENTO MATEMÁTICO DAS EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO (2-D)

As equações que governam a dinâmica de fluidos são as equações da continuidade, quantidade de movimento e energia.

Um dos problemas mais complexos de se tratar em escoamento de fluidos incompressíveis é o acoplamento entre a pressão e a velocidade, que aparece nas equações de movimento. Neste trabalho o método utilizado para o tratamento do acoplamento entre a pressão e a velocidade, é o método de Chorin [2], que se aplica à solução de problemas transitórios. Neste caso, é utilizado um artifício matemático para a solução das equações da quantidade de movimento, para cada uma das direções, que está dividida em duas equações. A primeira equação relaciona as componentes da velocidade do fluido  $u$  e  $w$ , em termos das componentes de uma pseudovelocidade, denominadas  $u^*$  e

$w^*$ . A segunda equação calcula o gradiente da pressão em função das componentes da pseudovelocidade,  $u^*$  e  $w^*$ , como descrito a seguir:

$$\mathbf{r} \left( \frac{u^* - u_{t-\Delta t}}{\mathbf{D}} \right) + \mathbf{r}u \frac{\partial u^*}{\partial x} + \mathbf{r}w \frac{\partial u^*}{\partial z} - \mathbf{m} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2} \right) = 0; \quad (1)$$

$$\mathbf{r}u = \mathbf{r}u^* - \mathbf{D} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad (2)$$

$$\mathbf{r} \left( \frac{w^* - w_{t-\Delta t}}{\mathbf{D}} \right) + \mathbf{r}u \frac{\partial w^*}{\partial x} + \mathbf{r}w \frac{\partial w^*}{\partial z} - \mathbf{m} \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^2} \right) = 0; \quad (3)$$

$$\mathbf{r}w = \mathbf{r}w^* - \mathbf{D} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (4)$$

onde  $\mathbf{r}$  é a massa específica do fluido,  $t$  é o tempo,  $\Delta t$  o passo de tempo,  $u$  e  $w$  são as velocidades nas direções  $x$  e  $z$ , respectivamente,  $u_{t-\Delta t}$  é a velocidade na direção  $x$  calculada no instante de tempo anterior  $t-\Delta t$ ,  $w_{t-\Delta t}$  é a velocidade na direção  $z$  calculada no instante de tempo anterior  $t-\Delta t$ ,  $p$  é a pressão e  $\mathbf{m}$  é a viscosidade dinâmica.

Derivando-se a Eq. (2) em relação à direção  $x$  e a Eq. (4) em relação à direção  $z$ , somando-as, considerando que o fluido é incompressível ( $\mathbf{r} = \text{constante}$ ) e introduzindo a equação da continuidade dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

obtém-se a equação de Poisson para a pressão, dada por:

$$\nabla^2 p = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{D}} \left( \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial w^*}{\partial z} \right). \quad (6)$$

Conhecido o novo campo de pressão  $p$ , dado pela Eq. (6), pode-se determinar as velocidades  $u$  e  $w$  no atual instante de tempo  $t$ , a partir das equações (2) e (4) respectivamente.

Como a equação da energia encontra-se desacoplada das outras equações de conservação, a mesma pode ser resolvida separadamente. Como este trabalho trata apenas de fluidos incompressíveis a equação da energia é convenientemente escrita, em termos da temperatura, para as coordenadas cartesianas  $x$  e  $z$ , ou seja:

$$\mathbf{r} \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{r}u \frac{\partial T}{\partial x} + \mathbf{r}w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{c_p} \nabla^2 T + \frac{\mathbf{m}}{c_p} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{2\mathbf{m}}{c_p} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right], \quad (7)$$

onde  $T$  é a temperatura,  $k$  é a condutividade térmica e  $c_p$  é o calor específico a pressão constante.

#### IV. DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO DAS EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO PARA UM ELEMENTO

O primeiro passo é integrar com o auxílio de técnicas de ponderação o conjunto de equações adotado neste trabalho, que é composto das equações (1), (2), (3), (4), (6) e (7). Adicionalmente aplica-se o Teorema de Green para os termos difusivos; ou seja, para derivadas de segunda ordem que aparecem nas equações (1) e (3), e desenvolvendo matematicamente as equações (1), (2), (3) e (4), obtém-se um conjunto de equações das velocidades para cada uma das direções ( $x$  e  $z$ ).

Para facilitar a solução das equações de conservação e posteriormente permitir o uso de geometrias irregulares, sem grandes modificações nas equações, é utilizado um outro sistema de coordenadas. Neste novo sistema, as coordenadas são as variáveis  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{h}$  cuja correspondência com as coordenadas do sistema cartesiano  $x$  e  $z$ , de cada elemento, é dada por:

$$\mathbf{x} = 2 \frac{(x - x_{ij})}{\mathbf{D}_{ij}} \Rightarrow d\mathbf{x} = \frac{2 dx}{\mathbf{D}_{ij}}; \quad (8)$$

$$\mathbf{h} = 2 \frac{(z - z_{ij})}{\mathbf{D}_{ij}} \Rightarrow d\mathbf{h} = \frac{2 dz}{\mathbf{D}_{ij}}.$$

onde, tanto  $\mathbf{x}$  como  $\mathbf{h}$  variam de  $-1$  a  $1$ .

Substitui-se as novas variáveis discretizadas e introduz-se a expansão das variáveis  $u^*$ ,  $w^*$ ,  $u$ ,  $w$ ,  $p$  e  $T$ , adequadamente nas equações integradas, como mostrado a seguir:

$$u^* = \sum_{m=1}^M u_m^* N_m, \quad w^* = \sum_{m=1}^M w_m^* N_m, \quad u = \sum_{m=1}^M u_m N_m, \quad (9)$$

$$w = \sum_{m=1}^M w_m N_m, \quad p = \sum_{m=1}^M p_m N_m, \quad T = \sum_{m=1}^M T_m N_m.$$

onde  $N_m$  é a  $m$ -ésima função de expansão para o elemento  $ij$ .

Dependendo do grau da expansão, ou do número de funções de expansão utilizadas nas séries, pode-se ajustar a precisão desejada para a solução das equações de conservação.

A função peso  $P_m$  segue a formulação de Petrov-Galerkin sendo dada, segundo Hughes e Brooks [3], por:

$$P_m = N_m + \frac{\mathbf{D}}{2} \bar{u} \frac{\partial N_m}{\partial x} + \frac{\dot{A}t}{2} \bar{w} \frac{\partial N_m}{\partial z}, \quad (10)$$

onde  $\bar{u}$  é a velocidade média no elemento  $ij$ , na direção  $x$  e  $\bar{w}$  é a velocidade média no elemento  $ij$  na direção  $z$ .

Para uma melhor compreensão de como as funções de expansão hierárquicas são ajustadas nos elementos retangulares, de forma a definir funções de canto, de lado e de área, no item a seguir será feito um detalhamento qualitativo, com respeito a estas funções, a fim de se ter uma real idéia do método proposto neste trabalho, segundo Zienkiewicz e Morgan [1].

### V. FUNÇÕES DE EXPANSÃO

Nesta seção são apresentadas e comparadas as funções de expansão utilizadas no método clássico dos elementos finitos e as funções quase hierárquicas para um problema unidimensional. Com estas funções são apresentadas as principais vantagens da utilização das funções de expansão quase hierárquicas.

São também apresentadas as funções de expansão quase hierárquicas utilizadas em problemas bidimensionais com malhas retangulares. Estas funções são geradas através de associações de funções a uma dimensão, como será visto.

**Funções de Expansão Clássicas.** No método de elementos finitos clássico os coeficientes de expansão das variáveis são identificados com as mesmas em pontos específicos da malha. A Fig. 1 mostra um elemento unidimensional típico de dimensão  $\Delta x$  com funções de expansão linear, quadrática e cúbica.

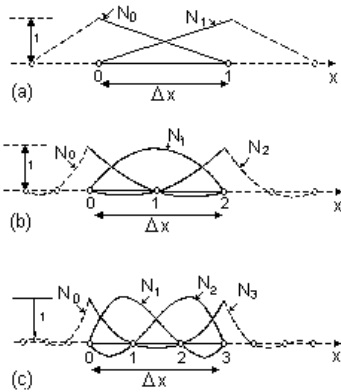


Figura.1. Elementos unidimensionais e funções de expansão (a) linear (b) quadrática, e (c) cúbica, segundo Zienkiewicz e Morgan.

Nas expansões  $x$  é a variável local, que dentro do intervalo  $\Delta x$  varia de  $-1$  a  $1$ . Observa-se que a medida que aumenta-se o grau da expansão as funções mudam completamente, ou seja, é necessário reiniciar o problema em vista da mudança total e completa de todas as funções de expansão e das variáveis envolvidas.

**Funções de Expansão Quase Hierárquicas em uma e duas Dimensões.** No caso das funções de expansão quase hierárquicas os coeficientes de expansão das variáveis não são identificados com as variáveis em pontos específicos da malha. Neste caso, os coeficientes estão associados com as funções de expansão que são ajustadas nos elementos

retangulares, definindo funções de canto, de lado e de área. Esta associação permite, iniciar a solução de um problema com uma expansão linear e se necessário durante o processo de solução, adicionar novas funções de forma a aumentar o grau da expansão e obter uma solução de maior precisão. Esta característica pode ser facilmente observada através do desenvolvimento das funções de expansão quase hierárquicas apresentado a seguir.

As funções de expansão quase hierárquicas são baseadas em polinômios de Legendre. Os polinômios de Legendre formam um conjunto de funções com propriedades de ortogonalidade dentro do intervalo de  $-1 \leq x \leq 1$ .

O comportamento destas funções, até o terceiro grau, no intervalo  $-1 \leq x \leq 1$ , pode ser visto na Fig. 2.

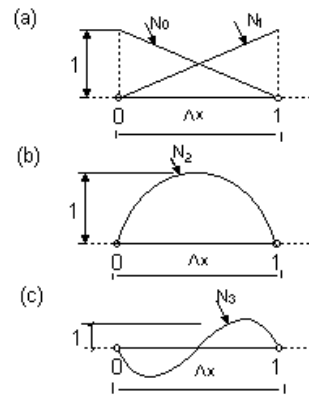


Figura 2. Elementos hierárquicos e funções de expansão quase ortogonais (a) linear, (b) quadrática, e (c) cúbica.

Neste caso as funções não se alteram quando se muda a ordem da expansão, ou seja, não há a necessidade de se recalcular os elementos das matrizes do estágio anterior.

**Processos de Agrupamento das Equações dos Elementos.** Cada uma das equações de conservação se transforma, para cada elemento, em uma equação matricial de  $M$  equações, onde  $M$  é o número de funções de expansão. A Fig. 3 apresenta um elemento e os coeficientes de expansão associados com os seus cantos, lados e área.

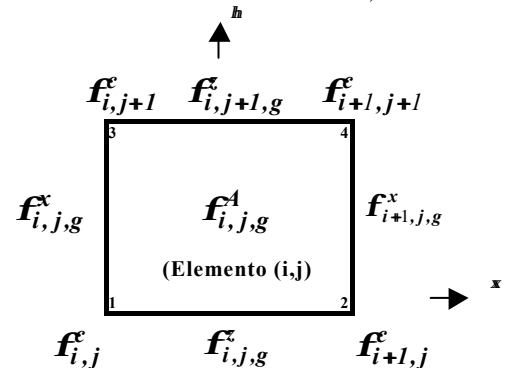


Figura 3. Elemento retangular de duas dimensões e seus parâmetros associados.

Na Fig. 3, os coeficientes  $f_{i,j}^c$  são os parâmetros de canto associados às funções de expansão lineares,  $f_{i,j,g}^c$  e  $f_{i,j,g}^l$  são os coeficientes de lado associados às funções de expansão de lado, e  $f_{i,j,g}^A$  são os coeficientes de área associados às funções de expansão de área. O subscrito  $g$  presente nos coeficientes de lado e de área representa o grau da função de expansão associada a este coeficiente.

Pode-se observar da Fig. 3 que os coeficientes de canto pertencem a quatro elementos diferentes e os coeficientes de lado pertencem a dois elementos. Dessa forma, estes coeficientes estão presentes nas equações de mais de um elemento. Para calcular os coeficientes que pertencem a mais de um elemento, deve-se usar as equações de conservação de todos os elementos nos quais o coeficiente está presente. Assim, a equação final correspondente à um dos coeficiente de expansão da malha é constituída por equações referentes a diversos elementos. O processo de obtenção das equações finais associadas a cada coeficiente de expansão da malha é chamado de processo de agrupamento.

## VI. RESULTADOS NUMÉRICOS

A fim de validar o modelo numérico proposto neste trabalho, simulam-se três problemas conhecidos da literatura: a) escoamento entre duas placas paralelas, b) degrau de temperatura e c) escoamento através de uma expansão abrupta na forma de degrau (“backward-facing step”). Esta simulação foi realizada com o programa computacional gerado neste trabalho e que é denominado de Programa do Método de Expansão em Funções Hierárquicas em 2 Dimensões (PMEFH2D).

**Problema de Escoamento entre Duas Placas Paralelas.** O primeiro problema analisado consiste no escoamento entre duas placas paralelas de um fluido incompressível em regime laminar. Através da Fig. 4 observa-se as condições de contorno adotadas para o problema de escoamento entre duas placas paralelas.

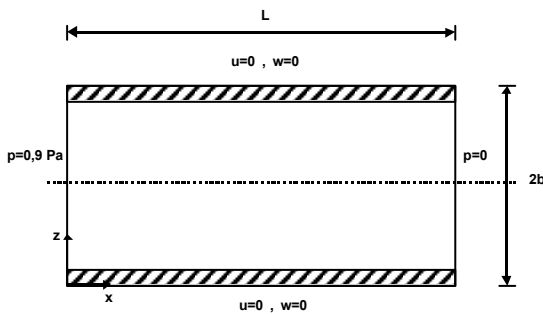


Figura 4. Geometria utilizadas para simulação do escoamento entre duas placas.

Os seguintes dados geométricos são considerados para este problema: comprimento das placas,  $L = 0,9\text{m}$  e distância entre as placas de  $2b = 0,06\text{m}$ . Adicionalmente, são assumidas as seguintes propriedades físicas para o fluido: a viscosidade dinâmica,  $\mu = 0,01 \text{ kg/sm}^2$  e massa específica,  $\rho = 1000\text{kg/m}^3$ .

A solução analítica deste problema, segundo Sampaio [4], para condição de contorno de pressão prescrita na entrada e na saída, é dada pela seguinte equação:

$$u(z) = \frac{1}{2} \frac{Dp}{\mu L} b^2 \left( 2 \frac{z}{b} - \frac{z^2}{b^2} \right), \quad (11)$$

onde  $Dp$  é a queda de pressão e  $u(z)$  é o perfil da velocidade na direção  $z$ , ao longo das placas.

São simulados três casos para este problema, sendo que no caso 1 é utilizada uma malha com  $6 \times 6$  elementos e grau de expansão 1 e nos casos 2 e 3 são utilizadas uma malha com  $6 \times 2$  elementos e graus de expansão 2 e 3, respectivamente. Os resultados apresentados a seguir são apenas relativos aos casos 1 e 3, pois nos casos 2 e 3 os resultados são semelhantes. As Figuras. 5 e 6 apresentam estes resultados.

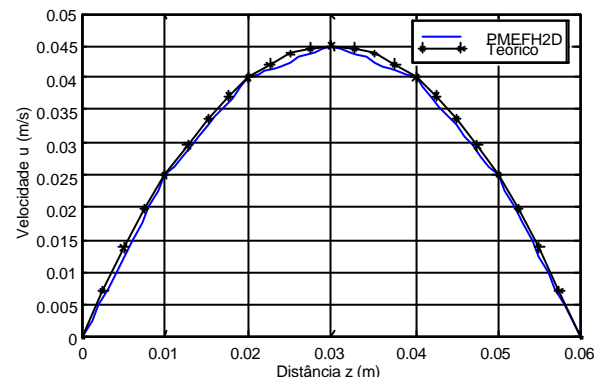


Figura 5. Comparação entre as velocidades obtidas pelo método analítico (Teórico) e com o programa PMEFH2D - Caso 1.

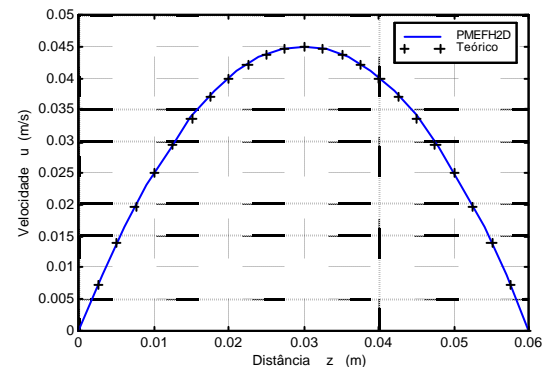


Figura 6. Comparação entre as velocidades obtidas pelo método analítico (Teórico) e o programa PMEFH2D - Caso 3.

Nos dois casos apresentados observa-se que os resultados encontrados foram muito bons quando comparados com a solução teórica. Ressalta-se que, na medida em que o grau da expansão aumenta pode-se utilizar malhas mais grosseiras, obtendo-se mesmo assim, resultados mais precisos. Portanto, pode-se concluir, a priori, que o método MEFH quando aplicado a este tipo de problema alcança bons resultados, mesmo sem uma nodalização detalhada. Deve-se ressaltar que, a escolha do grau do polinômio a ser empregado no cálculo das funções de expansão é o fator predominante para a obtenção de bons resultados.

**Problema de Degrau de Temperatura.** O segundo problema a ser analisado é a da descontinuidade na temperatura entre duas faces. A Fig. 7 mostra a geometria adotada para este problema.

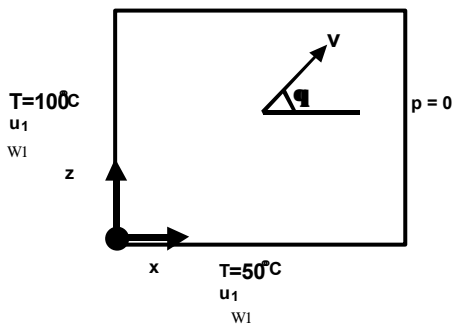


Figura 7. Geometria utilizada para simulação de um degrau de temperatura ( $\vec{v}$  é o vetor velocidade do fluido).

Adota-se os seguintes dados geométricos para a análise do problema: comprimento e largura do domínio,  $L = 0,6m$ . Assume-se também, as seguintes propriedades físicas do fluido: fluido invíscido,  $m = 0$  e sem condutividade térmica,  $K = 0$ , ou seja, os termos difusivos da equação da conservação da energia são eliminados, de forma a não existir qualquer tipo de difusão. Dois casos são analisados, um com  $q = 45^\circ C$  e outro com  $q = 60^\circ C$ . Para ambos os casos é utilizada a malha com  $6 \times 6$  elementos e graus de expansão 1, 3 e 5. No entanto, são apresentados a seguir apenas os resultados para o grau de expansão 5, por serem os mais significativos, Figuras 8 e 9.

Conclui-se que, em ambos os casos analisados, na medida em que o grau da expansão aumenta não é necessário um refinamento maior da malha para se ter resultados mais precisos. Portanto, para este tipo de problema, o MEFH é um método eficiente, que não exige uma malha com muitos elementos para a obtenção de bons resultados.

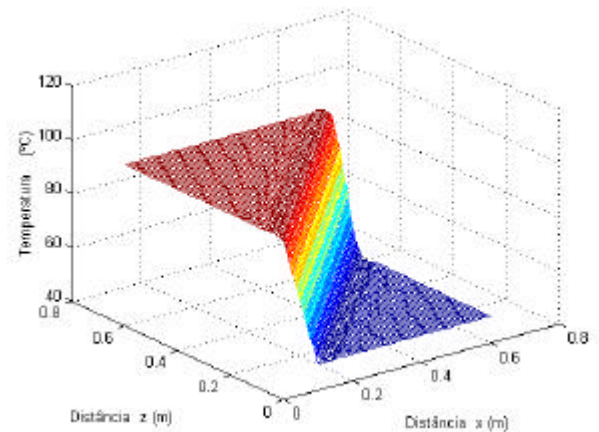


Figura 8. Perfil da temperatura ao longo do domínio, para  $\theta = 45^\circ$  e expansão de grau 5 (PMEFH2D) – Caso 1.

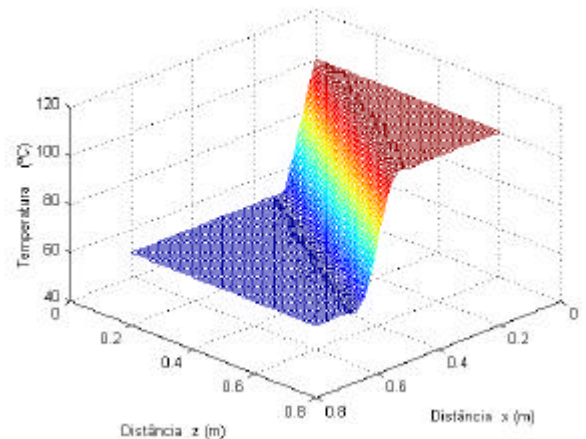


Figura 9. Perfil da temperatura ao longo do domínio, para  $q = 60^\circ$  e expansão de grau 5 (PMEFH2D) – Caso 2.

**Problema de escoamento através de uma expansão abrupta na forma de degrau - (“backward-facing step”).**

O terceiro e último problema analisado pelo programa computacional desenvolvido neste trabalho, PMEFH2D, é o de um escoamento através de uma expansão abrupta na forma de degrau (“backward-facing step”). Para realização desta análise reproduz-se o experimento feito por Denham e Patrick [5] onde o escoamento do fluido é realizado através de um duto, como mostra a Fig. 10.

Os dados geométricos utilizados são os seguintes: comprimento do canal  $L = 0,15m$  e largura da face direita,  $d = 0,045m$  (largura do degrau,  $d_1 = 0,015m$  e largura da entrada,  $d_2 = 0,030m$ ). As propriedades físicas utilizadas para a água são as seguintes: viscosidade dinâmica  $m = 0,001 \text{ kg/sm}^2$  e a massa específica,  $r = 1000 \text{ kg/m}^3$ . É utilizada uma malha com  $25 \times 12$  elementos e são utilizados os graus de expansão 1, 2 e 3. No entanto, são apresentados à seguir apenas os resultados para o grau de expansão 3, Figura 11.

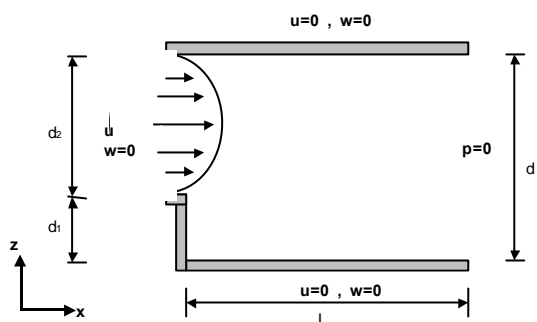


Figura 10. Geometria utilizada para simulação de escoamento através de uma expansão abrupta na forma de um degrau (“backward-facing step”).

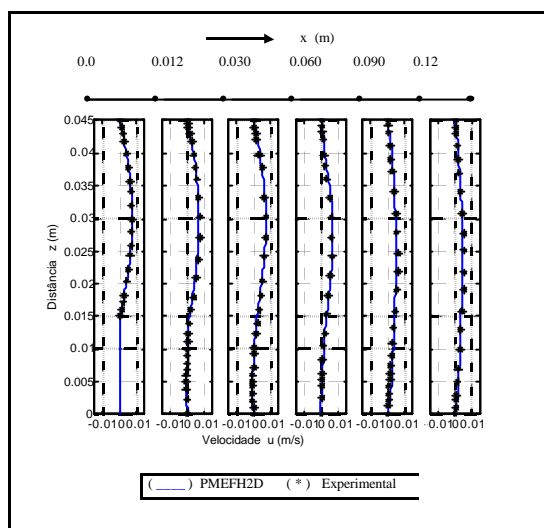


Figura 11. Comparação entre resultados obtidos com o PMEFH2D e os resultados experimentais de Denhan e Patrick [5], para  $Re = 73$  e grau = 3

Verifica-se que à medida em que se aumenta o grau da expansão os resultados obtidos pelo PMEFH2D se aproximam mais dos resultados experimentais. No entanto, observa-se que os erros entre os resultados numéricos e experimentais aumentam a medida que se afasta da entrada do duto, mas com valores inferiores aos obtidos para a expansão de grau 1.

## VII. CONCLUSÕES

Com base nos resultados obtidos da solução dos problemas propostos, pode-se concluir que o método da expansão em funções hierárquicas é adequado para a solução de problemas de fluidos incompressíveis em duas dimensões. Nos três problemas analisados observa-se que os resultados encontrados foram concisos quando comparados com a solução analítica e com os resultados experimentais. Constata-se que a grande vantagem do método da expansão em funções hierárquicas é a capacidade de adaptar o grau da expansão até o valor

necessário ou desejado durante o cálculo do escoamento, ao invés de refinar a malha, sem que para isto haja a necessidade de reiniciar o problema, como ocorre no método dos elementos finitos convencional. A grande vantagem do MEFH se deve ao fato da possibilidade de adaptar o grau da expansão ao invés do refino da malha, pois a alteração do grau da expansão é realizado facilmente e não exige o reinício do problema.

## REFERÊNCIAS

- [1] ZIENKIEWICZ, O. C.; MORGAN, K. **Finite Elements and Approximation**. University of Wales, Swansea, United Kingdom. New York, 1983.
- [2] CHORIN, A. J. **Numerical Solution of the Navier Stokes Equations**. Math. Of Computation, Vol. 22, pp. 745-762, 1971.
- [3] BROOKS, A. N.; HUGHES, T. J. R. **Streamline Upwind Petrov-Galerkin Formulation for Convection-Dominated Flows with Particular Emphasis on the compressible Navier-Stokes Equations**. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 32, pp. 199-259, 1982.
- [4] SAMPAIO, P. A. B. **A Petrov-Galerkin Formulation for the Incompressible Navier-Stokes Equations using Equal Order Interpolation for Velocity and Pressure**. Int. J. Num. Meth Engrg, Vol. 31, pp. 1135-1149, 1991.
- [5] DENHAM, M. K.; PATRICK, M. A. **Laminar Flow over a Downstream-Facing, Step in a Two-Dimensional Flow Channel**. Trans. Inst. Chem. Engrs, Vol. 52, pp. 361-367, 1974.

## ABSTRACT

This work applied of the expansion of the variables in hierarchical functions for the solution of the Navier-Stokes equations for incompressible fluids in two dimensions in laminar flow. This work is based on the finite element method.. The used expansion functions are based on Legendre polynomials, adjusted in the rectangular elements in a such a way that corner, side and area functions are defined. The order of the expansion functions associated with the sides and with the area of the elements can be adjusted to the necessary or desired degree. This method is denominated by Hierarchical Expansion Method. In order to validate the proposed numeric method three well-known problems of the literature are analyzed. The results show the method capacity in supplying precise results.