

GAIANÊ SABUNDJIAN

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DA EXPANSÃO EM FUNÇÕES
HIERÁRQUICAS NA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES
PARA FLUIDOS INCOMPRESSÍVEIS.**

Tese apresentada à Escola
Politécnica da Universidade
de São Paulo para obtenção
do título de Doutor em
Engenharia.

**São Paulo
1999**

GAIANÊ SABUNDJIAN

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DA EXPANSÃO EM FUNÇÕES
HIERÁRQUICAS NA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES
PARA FLUIDOS INCOMPRESSÍVEIS.**

Tese apresentada à Escola
Politécnica da Universidade
de São Paulo para obtenção
do título de Doutor em
Engenharia.

Área de Concentração
Engenharia Mecânica



Orientador:
Dr. Eduardo Lobo Lustosa Cabral

**São Paulo
1999**

621.039.53

S 118 a

[Handwritten signature]

99/121/MECÂNICA

fls. 121



**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA**

**TERMO DE JULGAMENTO
DE
DEFESA DE TESE DE DOUTORAMENTO**

Aos 21 dias do mês de dezembro de 1999, às 14:00 horas, no Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos Energia da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, presente a Comissão Julgadora, integrada pelos Senhores Professores Doutores Eduardo Lobo Lustosa Cabral, orientador da candidata, Marcos de Mattos Pimenta, Jurandir Itizo Yanagihara, Paulo Augusto Berquo de Sampaio e Antonio Teixeira e Silva iniciou-se a Defesa de Tese de Doutorado da Senhora GAIANÊ SABUNDJIAN.

Título da Tese: " APLICAÇÃO DO MÉTODO DA EXPANSÃO EM FUNÇÕES HIERÁRQUICAS NA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES PARA FLUIDOS INCOMPRESSÍVEIS".

Concluída a argüição, procedeu-se ao julgamento na forma regulamentar, tendo a Comissão julgadora considerado a candidata:

- Prof.Dr. Eduardo Lobo Lustosa Cabral.....(*aprovada*)
- Prof.Dr. Marcos de Mattos Pimenta.....(*aprovada*)
- Prof.Dr. Jurandir Itizo Yanagihara.....(*aprovada*)
- Prof.Dr. Paulo Augusto Berquo de Sampaio.....(*aprovada*)
- Prof.Dr. Antonio Teixeira e Silva.....(*aprovada*)

Para constar, é lavrado o presente termo, que vai assinado pela Comissão Julgadora e pela Secretária da Seção de Pós-Graduação.

São Paulo, 21 de dezembro de 1999.

A Comissão Julgadora: *Eduardo Cabral*

Marcos Pimenta

Jurandir Yanagihara

Paulo Berquo

Antonio Teixeira

Secretária: Elisabete Apª F.Silva Ramos. *Elisabete Ramos*

Obs: Resolução 4476, de 17-9-1997 Altera dispositivos do Regimento Geral da USP Art.109 - Imediatamente após o encerramento da argüição da dissertação ou da tese cada examinador expressará seu julgamento em sessão secreta, considerando o candidato aprovado ou reprovado.

Homologado pela C.P.G. em reunião realizada a 14/02/2000

PMR

Universidade de São Paulo
Biblioteca da Escola Politécnica

FT-1381

GAIANÊ SABUNDJIAN

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DA EXPANSÃO EM FUNÇÕES
HIERÁRQUICAS NA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES
PARA FLUIDOS INCOMPRESSÍVEIS.**

Tese apresentada à Escola
Politécnica da Universidade
de São Paulo para obtenção
do título de Doutor em
Engenharia.

**São Paulo
1999**

Aos meus pais: Zaven (in memoriam) e Fayrouz, que proporcionaram e me incentivaram nos estudos. Pelas constantes orações e pelos princípios de Deus transmitidos por minha mãe, que são os fundamentos da minha vida.

Aos meus irmãos: Cláudia, Ivan e Valéria, pelo apoio, incentivo e motivação.

Aos meus cunhados: Silvia e Marwal, pelo constante apoio.

As minhas sobrinhas: Ingrid, Michelle, Thatiane e Vivian, pela compreensão quanto a minha ausência.

AGRADECIMENTO ESPECIAL

Quando olhamos para uma árvore, vemos toda a sua beleza e grandeza. Podemos ver os pássaros fazerem seus ninhos nos galhos, as flores surgirem e os frutos amadurecerem. Nós, mesmos, procuramos sua sombra nos dias quentes e aguardamos suas flores e frutos. Sabemos, também, que existem raízes profundas por debaixo da terra sustentando e alimentando toda aquela grandeza, embora não as vejamos. Quando olhamos para uma grande árvore, muitas vezes, nos esquecemos de que ela, um dia, foi uma pequena semente lançada ao solo que ao seu tempo germinou e cresceu. Nunca devemos desprezar os pequenos começos porque um dia serão como árvores frondosas.

Agradeço, em primeiro lugar a Deus, pois Ele é a fonte de toda sabedoria e faço minhas as palavras do profeta Daniel que disse: *“Seja bendito o nome de Deus para todo o sempre, porque dele é a sabedoria e força; Ele muda os tempos e as horas; Ele remove os reis e estabelece os reis; Ele dá sabedoria aos sábios e ciência aos entendidos. Ele revela o profundo e o escondido e conhece o que está em trevas; e com Ele mora a luz. Ó Deus de meus pais, eu te louvo e celebro porque me deste sabedoria e força (Daniel 2:20-23, Bíblia Sagrada)”*. Foi Ele quem me deu forças, capacidade e recursos para chegar até aqui e continuará sustentando-me nos próximos desafios de minha vida.

Início esta tese honrando a Deus, pois Ele é maravilhoso e faz uma pequena semente germinar, crescer e dar seus frutos.

AGRADECIMENTOS

Foi fundamental o apoio de muitas pessoas e entidades. Gostaria de agradecer em especial:

Ao amigo e orientador Prof. Dr. Eduardo Lobo Lustosa Cabral, pela orientação, incentivo e colaboração demonstrados durante a execução deste trabalho, sem o qual não tornaria possível a realização do mesmo.

Ao Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares (IPEN-CNEN/SP) pelo apoio e incentivo à pesquisa e capacitação científica nacional.

Ao Prof. Dr. Antonio Teixeira e Silva e ao Dr. Benedito Dias Baptista Filho, pelo apoio e incentivo dado para a realização deste trabalho.

Aos pastores Carlos e Roberta pelo incentivo e apoio espiritual.

Aos amigos: Eugênia, Esther, Margarete, Rosane, Shizuca, Simone Daré, Eduardo, Hélio, Kurazumi, Leslie e Mitsuo, pela contribuição e apoio durante a realização da tese.

Aos colegas e amigos: Andrea, Belchior, Cida, Claudia Braga, Delvonei, Elza, Graciete, Iglésias, Leda, Mai, Pedro, Thadeu e Vanda, pelo apoio e incentivo.

Aos membros titulares e suplentes componentes da banca examinadora.

Finalmente a todos aqueles, que direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

	Páginas
LISTA DE FIGURAS	iii
LISTA DE TABELAS	viii
RESUMO	ix
ABSTRACT	x
CAPÍTULO 1. INTRODUÇÃO	01
1.1 Objetivo.....	03
1.2 Revisão bibliográfica.....	04
1.3 Contribuição e inovação do trabalho.....	13
1.4 Sumário Estruturado da Tese.....	15
CAPÍTULO 2. EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO	17
2.1 Equação da conservação da massa.....	18
2.2 Equação da conservação da quantidade de movimento.....	18
2.3 Equação da conservação de energia.....	22
2.4 Equações de conservação em duas dimensões.....	23
2.5 Método de Chorin.....	24
CAPÍTULO 3. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO	31
3.1 Discretização do domínio da solução.....	33
3.2 Desenvolvimento matemático das equações de conservação.....	35
3.2.1 Equação da componente da pseudovelocidade na direção x , u^*	38
3.2.2 Equação da componente da velocidade na direção x , u	43
3.2.3 Equação da componente da pseudovelocidade na direção z , w^*	44
3.2.4 Equação da componente da velocidade na direção z , w	47

3.2.5 Equação de Poisson para a pressão.....	49
3.2.6 Equação da energia.....	52
3.3 Condições de contorno.....	55
3.4 Funções de expansão.....	58
3.4.1 Funções de expansão clássicas.....	59
3.4.2 Funções de expansão quase hierárquicas em uma dimensão.....	63
3.4.3 Funções de expansão quase hierárquicas em duas dimensão.....	67
3.5 Processo de agrupamento das equações dos elementos.....	70
CAPÍTULO 4. RESULTADOS NUMÉRICOS.....	76
4.1 Problema de escoamento entre duas placas paralelas.....	77
4.2 Problema de descontinuidade na temperatura.....	87
4.3 Problema de escoamento através de uma expansão abrupta na forma de grau (“ <i>backward-facing step</i> ”).....	95
CAPÍTULO 5. CONCLUSÕES.....	122
5.1 Introdução.....	122
5.2 Conclusões.....	124
5.3 Sugestões para trabalhos futuros.....	126
APÊNDICE A. FUNÇÕES DE EXPANSÃO HIERÁRQUICAS UTILIZADAS NO PMEFH2D.....	128
APÊNDICE B. DESCRIÇÃO DO PROGRAMA COMPUTACIONAL PMEFH2D.....	136
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	140

LISTA DE FIGURAS

	Páginas
<u>Figura 2.1</u> Elemento de fluido em movimento.....	19
<u>Figura 3.1</u> Esquema da malha retangular utilizada.....	33
<u>Figura 3.2</u> Elemento retangular utilizado para a aplicação das condições de contorno.....	58
<u>Figura 3.3</u> Elementos unidimensionais e funções de expansão (a) Linear, (b) Quadrática, (c) Cúbica, segundo Zinkiewiscs e Morgan (1983).....	59
<u>Figura 3.4</u> Elementos hierárquicos e funções de expansão quase ortogonais (a) linear, (b) quadrática, (c) cúbica.....	65
<u>Figura 3.5</u> Elemento da função hierárquica no elemento retangular.....	67
<u>Figura 3.6</u> Elemento retangular em duas dimensões e seus parâmetros associados.....	70
<u>Figura 3.7</u> Quatro elementos adjacentes e seus coeficientes de expansão associados.....	72
<u>Figura 4.1</u> Geometria utilizada para simulação do escoamento entre duas Placas.....	78
<u>Figura 4.2</u> Perfil da componente da velocidade u , em duas dimensões para a expansão de grau 1 (PMEFH2D) – Caso 1.....	80

<u>Figura 4.3</u> Comparação entre as velocidades obtidas pelo método analítico (Teórico) e com o programa PMEFH2D – Caso 1.....	81
<u>Figura 4.4</u> Perfil da componente da velocidade u , em duas dimensões para a expansão de grau 2 (PMEFH2D) – Caso 2.....	83
<u>Figura 4.5</u> Comparação entre as velocidades obtidas pelo método analítico (Teórico) e com o programa PMEFH2D – Caso 2.....	84
<u>Figura 4.6</u> Perfil da componente da velocidade u , em duas dimensões para a expansão de grau 3 (PMEFH2D) – Caso 3.....	85
<u>Figura 4.7</u> Comparação entre as velocidades obtidas pelo método analítico (Teórico) e com o programa PMEFH2D – Caso 2.....	86
<u>Figura 4.8</u> Queda de pressão ao longo das duas placas paralelas (PMEFH2D) – para os três casos analisados.....	87
<u>Figura 4.9</u> Geometria utilizada para simulação de um degrau de temperatura (\vec{v} é o vetor velocidade do fluido).....	88
<u>Figura 4.10</u> Perfil da temperatura ao longo do domínio, para $\theta = 45^\circ$ e expansão de grau 1 (PMEFH2D) – Caso 1.....	90
<u>Figura 4.11</u> Perfil da temperatura ao longo do domínio, para $\theta = 45^\circ$ e expansão de grau 3 (PMEFH2D) – Caso 1.....	91
<u>Figura 4.12</u> Perfil da temperatura ao longo do domínio, para $\theta = 45^\circ$ e expansão de grau 5 (PMEFH2D) – Caso 1.....	92

<u>Figura 4.13</u> Perfil da temperatura ao longo do domínio, para $\theta = 60^\circ$ e expansão de grau 1 (PMEFH2D) – Caso 2.....	93
<u>Figura 4.14</u> Perfil da temperatura ao longo do domínio, para $\theta = 60^\circ$ e expansão de grau 3 (PMEFH2D) – Caso 2.....	94
<u>Figura 4.15</u> Perfil da temperatura ao longo do domínio, para $\theta = 60^\circ$ e expansão de grau 5 (PMEFH2D) – Caso 2.....	94
<u>Figura 4.16</u> Geometria utilizada para simulação de escoamento através de uma expansão abrupta na forma de um degrau (“backward-facing step”).....	96
<u>Figura 4.17</u> Perfil da velocidade ao longo de um escoamento através de um degrau (“backward-facing step”), obtido com PMEFH2D, grau=1 - Caso 1.....	99
<u>Figura 4.18</u> Comparação entre resultados obtidos com o PMEFH2D e os resultados experimentais de Denhan e Patrick (1974) , para $Re=73$ e grau=1 – Caso 1.....	100
<u>Figura 4.19</u> Contorno da pressão em Pa, gerado pelo programa PMEFH2D, com $Re=73$ e grau=1, Caso 1.....	101
<u>Figura 4.20</u> Perfil da velocidade ao longo de um escoamento através de um degrau (“backward-facing step”), obtido com PMEFH2D, grau=2 – Caso 1.....	102

<u>Figura 4.21</u> Perfil da velocidade ao longo de um escoamento através de um degrau (“backward-facing step”), obtido com PMEFH2D, grau=3 – Caso 1.....	103
<u>Figura 4.22</u> Comparação entre resultados obtidos com o PMEFH2D e os resultados experimentais de Denhan e Patrick (1974) , para $Re=73$ e grau=2 – Caso 1.....	104
<u>Figura 4.23</u> Comparação entre resultados obtidos com o PMEFH2D e os resultados experimentais de Denhan e Patrick (1974) , para $Re=73$ e grau=3 – Caso 1.....	105
<u>Figura 4.24</u> Contorno da pressão em Pa, gerado pelo programa PMEFH2D, com $Re=73$ e grau=2, Caso 1.....	106
<u>Figura 4.25</u> Contorno da pressão em Pa, gerado pelo programa PMEFH2D, com $Re=73$ e grau=3, Caso 1.....	106
<u>Figura 4.26</u> Perfil da velocidade calculadas pelo PMEFH2D, pela teoria e experimentalmente, para a posição de medida 0,12m e para as expansões de grau 1, 2 e 3 - Caso 1.....	109
<u>Figura 4.27</u> Perfil da velocidade ao longo de um escoamento através de um degrau (“backward-facing step”), obtido com PMEFH2D, grau=1 – Caso 2.....	112
<u>Figura 4.28</u> Perfil da velocidade ao longo de um escoamento através de um degrau (“backward-facing step”), obtido com PMEFH2D, grau=2 – Caso 2.....	113

<u>Figura 4.29</u> Perfil da velocidade ao longo de um escoamento através de um degrau (“backward-facing step”), obtido com PMEFH2D, grau=3 – Caso 2.....	114
<u>Figura 4.30</u> Comparação entre resultados obtidos com o PMEFH2D e os resultados experimentais de Denhan e Patrick (1974) , para $Re=73$ e grau=1 – Caso 2.....	115
<u>Figura 4.31</u> Comparação entre resultados obtidos com o PMEFH2D e os resultados experimentais de Denhan e Patrick (1974) , para $Re=73$ e grau=2 – Caso 2.....	116
<u>Figura 4.32</u> Comparação entre resultados obtidos com o PMEFH2D e os resultados experimentais de Denhan e Patrick (1974) , para $Re=73$ e grau=3 – Caso 2.....	117
<u>Figura 4.33</u> Contorno da pressão em Pa, gerado pelo programa PMEFH2D, com $Re=73$ e grau=1, Caso 2.....	119
<u>Figura 4.34</u> Contorno da pressão em Pa, gerado pelo programa PMEFH2D, com $Re=73$ e grau=2, Caso 2.....	120
<u>Figura 4.35</u> Contorno da pressão em Pa, gerado pelo programa PMEFH2D, com $Re=73$ e grau=3, Caso 2.....	120
<u>Figura A.1</u> Elemento retangular de duas dimensões e seus parâmetros associados.....	129
<u>Figura B.1</u> Diagrama de blocos do programa computacional PMEFH2D.....	137

LISTA DE TABELAS

<u>Tabela 4.1</u> Valores dos erros médios obtidos entre os resultados experimentais e os calculados pelo programa computacional PMEFH2D para a velocidade, para cada uma das posições de medida e graus de expansão - Caso 1.....	107
<u>Tabela 4.2</u> Diferenças médias entre os dados experimentais e calculados pelo modelo em relação aos valores teóricos do perfil de Velocidade.....	110
<u>Tabela 4.1</u> Valores dos erros médios obtidos entre os resultados experimentais e os calculados pelo programa computacional PMEFH2D para a velocidade, para cada uma das posições de medida e graus de expansão – Caso 2.....	118

RESUMO

Este trabalho apresenta um novo método numérico, baseado no método dos elementos finitos, aplicado para a solução das equações de Navier-Stokes em duas dimensões para fluidos incompressíveis, com escoamento em regime laminar.

O método baseia-se na expansão das variáveis em funções quase hierárquicas. As funções de expansão utilizadas são baseadas nos polinômios de Legendre, ajustadas nos elementos retangulares de forma a definir funções de canto, de lado e de área. A ordem das funções de expansão associadas aos lados e às áreas dos elementos é ajustada até o grau necessário ou desejado. Este novo método numérico é denominado de Método de Expansão em Funções Hierárquicas (MEFH).

A fim de validar o método numérico proposto, analisa-se três problemas conhecidos da literatura em duas dimensões. Os resultados mostram a capacidade do método em fornecer resultados precisos.

A partir dos resultados obtidos nesta tese, conclui-se que o método de expansão em funções hierárquicas pode ser aplicado com sucesso na solução de problemas de mecânica de fluidos, que envolvam fluidos incompressíveis em regime laminar.

ABSTRACT

This work presents a novel numeric method, based on the finite element method, applied for the solution of the Navier-Stokes equations for incompressible fluids in two dimensions in laminar flow.

The method is based on the expansion of the variables in almost hierarchical functions. The used expansion functions are based on Legendre polynomials, adjusted in the rectangular elements in a such a way that corner, side and area functions are defined. The order of the expansion functions associated with the sides and with the area of the elements can be adjusted to the necessary or desired degree. This novel numeric method is denominated by Hierarchical Expansion Method.

In order to validate the proposed numeric method three well-known problems of the literature in two dimensions are analyzed. The results show the method capacity in supplying precise results.

From the results obtained in this thesis it is possible to conclude that the hierarchical expansion method can be applied successfully for the solution of fluid dynamic problems that involve incompressible fluids.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Com o advento dos super computadores nas duas últimas décadas, tornou-se possível a simulação numérica de problemas na área de Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor, conhecida como “*Computational Fluid Dynamics*” (CFD). Atualmente, o uso de técnicas numéricas para a solução de problemas da engenharia e da física é uma realidade. Este trabalho propõe um novo método numérico para a solução das equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis em duas dimensões, com escoamento em regime laminar. Este método consiste no emprego do método de elementos finitos utilizando a formulação Petrov-Galerkin em conjunto com uma expansão das variáveis em funções quase hierárquicas para a solução de problemas de dinâmica dos fluidos. A utilização de funções de expansão hierárquicas permite alterar o grau do polinômio de ajuste das variáveis sem a necessidade de reiniciar o problema, como ocorre no método elementos finitos convencional. Além disso, o método numérico proposto tem a grande vantagem de adaptar o grau do polinômio até o valor necessário ou desejado, ao invés de usar malhas extremamente refinadas.

Em geral o método clássico dos resíduos ponderados (Galerkin) é utilizado para obter as equações e os coeficientes das funções de expansão. No entanto, observa-se que em problemas de transporte convectivo-difusivo, com convecção predominante, o método Galerkin é falho. Assim, normalmente, é utilizada a formulação Petrov-Galerkin, onde as

APLICAÇÃO DO MÉTODO DA EXPANSÃO EM FUNÇÕES HIERÁRQUICAS NA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES PARA FLUIDOS INCOMPRESSÍVEIS.

Gaianê Sabundjian

ERRATA

Página ix : Substituir o **Resumo** por:

Resumo

“Este trabalho consiste na aplicação do método da expansão em funções hierárquicas, na solução das equações de Navier-Stokes em duas dimensões para fluidos incompressíveis, com escoamento em regime laminar.

Este método está baseado no método de elementos finitos. As funções de expansão utilizadas são baseadas nos polinômios de Legendre, ajustadas nos elementos retangulares de forma a definir funções de canto, de lado e de área. A ordem das funções de expansão associadas aos lados e às áreas dos elementos é ajustada até o grau necessário ou desejado. Este método é denominado de Método de Expansão em Funções Hierárquicas (MEFH).

A fim de validar o método numérico proposto, analisa-se três problemas conhecidos da literatura em duas dimensões. Os resultados mostram a capacidade do método em fornecer resultados precisos.

A partir dos resultados obtidos nesta tese, conclui-se que o método de expansão em funções hierárquicas pode ser aplicado com sucesso na solução de problemas de mecânica de fluidos, que envolvam fluidos incompressíveis em regime laminar.”

Página x : Substituir o **Abstract** por:

Abstract

“This work applied of the expansion of the variables in hierarchical functions for the solution of the Navier-Stokes equations for incompressible fluids in two dimensions in laminar flow.

This method is based on the finite element method. The used expansion functions are based on Legendre polynomials, adjusted in the rectangular elements in a such a way that corner, side and area functions are defined. The order of the expansion functions associated with the sides and with the area of the elements can be adjusted to the necessary or desired degree. This method is denominated by Hierarchical Expansion Method.

In order to validate the proposed numeric method three well-known problems of the literature in two dimensions are analyzed. The results show the method capacity in supplying precise results.

From the results obtained in this thesis it is possible to conclude that the hierarchical expansion method can be applied successfully for the solution of fluid dynamic problems that involve incompressible fluids.”

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

Página 1: Substituir o primeiro parágrafo por: *“Com o advento dos super computadores nas duas últimas décadas, tornou-se possível a simulação numérica de problemas na área de Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor, conhecida como “Computational Fluid Dynamics” (CFD). Atualmente, o uso de técnicas numéricas para a solução de problemas da engenharia e da física é uma realidade. Este trabalho propõe a aplicação do método da expansão em funções hierárquicas, elaborado por Zienkiewics e Morgan (1983), para a solução das equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis em duas dimensões, com escoamento em regime laminar. Este método consiste no emprego do método de elementos finitos utilizando a formulação Petrov-Galerkin em conjunto com uma expansão das variáveis em funções quase hierárquicas para a solução de problemas de dinâmica dos fluidos. A utilização de funções de expansão hierárquicas permite alterar o grau do polinômio de ajuste das variáveis sem a necessidade de reiniciar o problema, como ocorre no método elementos finitos convencional. Além disso, o método numérico proposto tem a grande vantagem de adaptar o grau do polinômio até o valor necessário ou desejado, ao invés de usar malhas extremamente refinadas.”*

Página 3: Substituir o primeiro parágrafo por: *“O objetivo deste trabalho é aplicar o método da expansão em funções hierárquicas, proposto por Zienkiewics e Morgan (1983), na solução das equações de Navier-Stokes em duas dimensões, para fluidos incompressíveis em regime laminar. Este método está baseado no método de elementos finitos e utiliza a formulação de Petrov-Galerkin, em conjunto com a expansão das variáveis em funções quase hierárquicas. Neste trabalho os diversos termos das equações de conservação são tratados de forma distinta.”*

Substituir o terceiro parágrafo por: *“Neste método, as funções de expansão são formadas a partir dos polinômios de Legendre, os quais são ajustados nos elementos retangulares de forma a definir as funções de canto, de lado e de área. Ajusta-se a ordem (grau) das funções de expansão dos lados e das áreas dos elementos retangulares até o grau necessário ou desejado.”*

Página 6: Substituir a segunda sentença do primeiro parágrafo por: *“Um dos primeiros a aplicar este método para as equações de fluidos foi Zienkiewicz et al. (1976), com a publicação de um trabalho que aplicava o método de Galerkin, onde as funções de expansão e peso utilizadas eram funções lineares e quadráticas.”*

Página 13: No último parágrafo, na terceira linha a expressão “e conservação de energia” é redundante e deve ser suprimida do texto.

Página 14: Substituir o segundo parágrafo por: *“O método da expansão em funções hierárquicas foi elaborado por Zienkiewicz e Morgan (1983), sendo que a sua grande vantagem está em poder alterar o grau da expansão sem a necessidade de reiniciar o problema. As funções de expansão são formadas por polinômios de Legendre, os quais são ajustados nos elementos retangulares, de forma a definir funções de canto, de lado e de área. Espera-se que a aplicação do método numérico, na solução das equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis em duas dimensões, alcance o mesmo sucesso obtido por Cabral (1996).”*

Página 15: No último parágrafo, a última sentença deve ser suprimida do texto.

CAPÍTULO 2 - EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO

Substituir as equações (2-17), (2-18), (2-23), (2-24), (2-26), (2-27), (2-29), (2-33) e (2-34) por:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (2-17)$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (2-18)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2-23)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (2-24)$$

$$\rho \left(\frac{u - u^{t-\Delta t}}{\Delta t} \right) + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2-26)$$

$$\rho \left(\frac{u^* - u^{t-\Delta t}}{\Delta t} \right) + \rho u \frac{\partial u^*}{\partial x} + \rho w \frac{\partial u^*}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2} \right) \quad (2-27)$$

$$\rho \left(\frac{w^* - w^{t-\Delta t}}{\Delta t} \right) + \rho u \frac{\partial w^*}{\partial x} + \rho w \frac{\partial w^*}{\partial z} - \mu \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^2} \right) = 0, \quad (2-29)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) = \frac{\rho}{\Delta t} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial w^*}{\partial z} \right) \quad (2-33)$$

$$\nabla^2 p = \frac{\rho}{\Delta t} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial w^*}{\partial z} \right) \quad (2-34)$$

CAPÍTULO 3 - DENSENVOLVIMENTO TEÓRICO

Página 36: Substituir a segunda sentença do primeiro parágrafo por: “A função peso P_m segue a formulação de Petrov-Galerkin sendo dada, segundo Sampaio (1991), por:

$$P_m = N_m + \frac{\Delta t}{2} \bar{u} \frac{\partial N_m}{\partial x} + \frac{\Delta t}{2} \bar{w} \frac{\partial N_m}{\partial z} - \frac{\mu \Delta t}{2\rho} \left(\frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_m}{\partial z^2} \right) \quad (3-14)$$

onde \bar{u} é a velocidade média no elemento na direção x e \bar{w} é a velocidade média no elemento na direção z . Esta equação se aplica apenas quando as propriedades físicas do fluido são constantes (μ e ρ constantes).

No caso em que as propriedades físicas do fluido não serem constantes a função peso mais apropriada é a sugerida por Hughes e Brooks (1982), dada por:

$$P_m = N_m + \frac{\Delta t}{2} \bar{u} \frac{\partial N_m}{\partial x} + \frac{\Delta t}{2} \bar{w} \frac{\partial N_m}{\partial z} . ”$$

Comentários Gerais:

Esta tese trata os diversos termos das equações de conservação de forma distinta, ou seja, os termos convectivos são ponderados por funções do tipo Petrov-Galerkin, enquanto os outros termos são ponderados pelas próprias funções de expansão (Galerkin). Isto torna o método aplicado na tese uma aproximação de Petrov-Galerkin inconsistente. Em uma aproximação de Petrov-Galerkin consistente todos os termos devem ser tratados da mesma forma e, assim, melhores resultados podem ser obtidos. O método utilizado aproxima razoavelmente uma aproximação consistente apenas para ordens de interpolação baixas. Na medida em que a ordem de interpolação aumenta, a interação entre a parte não-Galerkin da função peso e os termos difusivos (que não foi considerado) passa a ser importante para garantir a consistência da aproximação. Neste aspecto, o método precisa ser corrigido, pois como está definido limita-o até interpolações quadráticas. A utilização do método para ordens da aproximação mais altas requer o tratamento consistente dos termos difusivos.

O critério adotado, neste trabalho, para a escolha do passo de tempo de integração (Δt) foi o da tentativa e erro. No entanto, o passo de tempo ideal, que deveria ser utilizado na solução dos problemas propostos, deve obedecer a seguinte equação, segundo Sampaio (1991):

$$\begin{aligned} \Delta t &= \alpha h |u|, \\ \alpha &= \coth(Re/2) - 2/Re, \\ Re &= \frac{\rho |u| h}{\mu}, \end{aligned}$$

onde h é o tamanho do elemento e as outras variáveis estão definidas na tese.

Página 68: No terceiro parágrafo e na última linha, onde esta escrito Figura 3-4 leia-se Figura 3.5.

Página 69: No terceiro parágrafo e na primeira linha, onde esta escrito equação (3.86) leia-se equação (3.85).

Página 70: Na Figura 3.6 substituir o coeficiente do lado (1-2), na figura, de $\phi_{i,j,g}^x$ por $\phi_{i,j,g}^z$.

Página 72: No último parágrafo e na primeira linha substituir $\phi_{i,j}$ por $\phi_{i,j}^c$.

Página 73: No último parágrafo a última sentença deve ser substituída por: “Assim, para o coeficiente $\phi_{i,j}^c$, utiliza-se primeira equação da equação matricial (3-86) do elemento (i,j), a segunda equação do sistema de equações (3-87) do elemento (i-1,j), a terceira equação do elemento (i,j-1), e a quarta equação do elemento (i-1,j-1), descritas a seguir:”

Página 75: No último parágrafo na última frase completar com “simulação de problemas de dinâmica de fluidos”.

Substituir as equações (3-1), (3-2), (3-5), (3-13), (3-18), (3-21), (3-23), (3-24), (3-28), (3-29), (3-33), (3-40), (3-50), (3-51), (3-54), (3-55), (3-56), (3-71) e (3-83):

$$\rho \left(\frac{u^* - u^{t-\Delta t}}{\Delta t} \right) + \rho u \frac{\partial u^*}{\partial x} + \rho w \frac{\partial u^*}{\partial z} - \mu \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2} \right) = 0 \quad ; \quad (3-1)$$

$$\rho \left(\frac{w^* - w^{t-\Delta t}}{\Delta t} \right) + \rho u \frac{\partial w^*}{\partial x} + \rho w \frac{\partial w^*}{\partial z} - \mu \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^2} \right) = 0 \quad ; \quad (3-2)$$

$$\nabla^2 p = \rho \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial w^*}{\partial z} \right) \quad (3-5)$$

$$\int_V N_m \rho u dV = \int_V N_m \rho u^* dV - \Delta t \int_V P_m \frac{\partial p}{\partial x} dV, \quad (3-13)$$

$$\int_V P_m \rho \frac{\partial T}{\partial t} dV + \int_V P_m u \rho \frac{\partial T}{\partial x} dV + \int_V P_m w \rho \frac{\partial T}{\partial z} dV - \int_V N_m \frac{K}{c_p} \nabla^2 T dV + \int_V N_m \frac{\mu}{c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dV + \int_V N_m \frac{2\mu}{c_p} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] dV = 0. \quad (3-18)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^M u_n^* \left[\rho \frac{\Delta x_{i,j} \Delta z_{i,j}}{4 \Delta t} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m N_n d\xi d\eta + \rho \sum_{k=1}^M u_k \frac{\Delta z_{i,j}}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} N_k d\xi d\eta + \right. \\ & \left. + \rho \sum_{k=1}^M w_k \frac{\Delta x_{i,j}}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_m \frac{\partial N_n}{\partial \eta} N_k d\xi d\eta - \mu \frac{\Delta z_{i,j}}{\Delta x_{i,j}} \int_{-1}^1 \left(N_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \right)_{\xi=-1}^{\xi=1} d\eta - \right. \\ & \left. - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_m}{\partial \xi} \frac{\partial N_n}{\partial \xi} d\xi d\eta \right] - \mu \frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta z_{i,j}} \left[\int_{-1}^1 \left(N_m \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \right)_{\eta=-1}^{\eta=1} d\xi - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_m}{\partial \eta} \frac{\partial N_n}{\partial \eta} d\xi d\eta \right] \Bigg] = \\ & = \rho \frac{\Delta x_{i,j} \Delta z_{i,j}}{4 \Delta t} \sum_{n=1}^M u_n^{t-\Delta t} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m N_n d\xi d\eta, \text{ para } m=1, \dots, M. \end{aligned} \quad (3-21)$$

$$\begin{aligned} A_{v,m,n}^{i,j} &= \rho \frac{1}{\Delta t} \alpha_{m,n}^{i,j} + \rho \sum_{k=1}^M u_k \frac{2}{\Delta x_{i,j}} \beta_{m,n,k}^{i,j} + \rho \sum_{k=1}^M w_k \frac{2}{\Delta z_{i,j}} \gamma_{m,n,k}^{i,j} - \\ & - \mu \frac{4}{\Delta x_{i,j}^2} (C_{zmn}^{i,j} - D_{xmn}^{i,j}) - \mu \frac{4}{\Delta z_{i,j}^2} (C_{xmn}^{i,j} - D_{zmn}^{i,j}), \end{aligned} \quad (3-23)$$

$$\delta_{v,m}^{i,j} = \frac{\rho}{\Delta t} \sum_{n=1}^M u_n^{t-\Delta t} \alpha_{m,n}^{i,j}, \quad (3-24)$$

$$C_{\Delta m \eta}^{i,j} = \int_{-1}^1 \left(N_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \right)_{\xi=-1}^{\xi=1} d\eta = fcs \int_{-1}^1 N_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} d\eta - fci \int_{-1}^1 N_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \Big|_{\xi=-1} d\eta, \quad (3-28)$$

$$C_{\Delta m \xi}^{i,j} = \int_{-1}^1 \left(N_m \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \right)_{\eta=-1}^{\eta=1} d\xi = fcd \int_{-1}^1 N_m \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} d\xi - fce \int_{-1}^1 N_m \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \Big|_{\eta=-1} d\xi, \quad (3-29)$$

$$\rho \frac{\Delta x_{i,j} \Delta z_{i,j}}{4} \sum_{n=1}^M u_n \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m N_n d\xi d\eta = \rho \frac{\Delta x_{i,j} \Delta z_{i,j}}{4} \sum_{n=1}^M u_n^* \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m N_n d\xi d\eta \quad \text{para } m = 1, \dots, M. \quad (3-33)$$

$$- \Delta t \frac{\Delta z_{i,j}}{2} \sum_{n=1}^M p_n \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} d\xi d\eta,$$

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{n=1}^M w_n^* \left\{ \rho \frac{\Delta x_{i,j} \Delta z_{i,j}}{4 \Delta t} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m N_n d\xi d\eta + \rho \sum_{k=1}^M u_k \frac{\Delta z_{i,j}}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} N_k d\xi d\eta + \right. \\ & - \rho \sum_{k=1}^M w_k \frac{\Delta x_{i,j}}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_m \frac{\partial N_n}{\partial \eta} N_k d\xi d\eta - \mu \frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta z_{i,j}} \int_{-1}^1 \left(N_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \right)_{\xi=-1}^{\xi=1} d\eta - \\ & \left. - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_m}{\partial \xi} \frac{\partial N_n}{\partial \xi} d\xi d\eta \right\} - \mu \frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta z_{i,j}} \left[\int_{-1}^1 \left(N_m \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \right)_{\eta=-1}^{\eta=1} d\xi - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_m}{\partial \eta} \frac{\partial N_n}{\partial \eta} d\xi d\eta \right] = \\ & = \rho \frac{\Delta x_{i,j} \Delta z_{i,j}}{4 \Delta t} \sum_{n=1}^M w_n^{t-\Delta t} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m N_n, \quad \text{para } m = 1, \dots, M. \end{aligned} \right\} \quad (3-40)$$

$$\left[\oint_S N_m \frac{\partial p}{\partial x} dS - \int_V \frac{\partial N_m}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} dV \right] - \mu \left[\oint_S N_m \frac{\partial p}{\partial z} dS - \int_V \frac{\partial N_m}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} dV \right] = \frac{\rho}{\Delta t} \left(\int_V P_m \frac{\partial u^*}{\partial x} dV + \int_V P_m \frac{\partial w^*}{\partial z} dV \right), \quad \text{para } m = 1, \dots, M. \quad (3-50)$$

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{n=1}^M p_n \left[\frac{\Delta z_{i,j}}{\Delta x_{i,j}} \int_{-1}^1 \left(N_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \right)_{\xi=-1}^{\xi=1} d\eta - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_m}{\partial \xi} \frac{\partial N_n}{\partial \xi} d\xi d\eta \right] - \frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta z_{i,j}} \left[\int_{-1}^1 \left(N_m \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \right)_{\eta=-1}^{\eta=1} d\xi - \right. \\ & \left. - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_m}{\partial \eta} \frac{\partial N_n}{\partial \eta} d\xi d\eta \right] = \frac{\rho \Delta z_{i,j}}{2 \Delta t} \sum_{n=1}^M u_n^* \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} d\xi d\eta - \\ & - \frac{\rho \Delta x_{i,j}}{2 \Delta t} \sum_{n=1}^M w_n^* \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} d\xi d\eta, \quad \text{para } m = 1, \dots, M, \end{aligned} \right\} \quad (3-51)$$

$$\delta_{\mu \omega \omega}^{i,j} = \sum_{n=1}^M u_n^* \left(\frac{\rho \Delta z_{i,j}}{2 \Delta t} \Omega_{m,\omega}^{i,j} + \frac{\rho \Delta x_{i,j}}{2 \Delta t} \theta_{\omega \omega}^{i,j} \right), \quad (3-54)$$

$$\begin{aligned}
& \rho c_p \int_V P_m \frac{\partial T}{\partial t} dV + \rho c_p \int_V P_m u \frac{\partial T}{\partial x} dV + \rho c_p \int_V P_m w \frac{\partial T}{\partial z} dV - \\
& - K \left[\int_S N_m \frac{\partial T}{\partial x} dS - \int_V \frac{\partial N_m}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} dV \right] - K \left[\int_S N_m \frac{\partial T}{\partial z} dS - \int_V \frac{\partial N_m}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} dV \right] - \\
& - 2\mu \int_V N_m \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] dV = 0, \text{ para } m = 1, \dots, M. \quad (3-55)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^M T_n \left\{ \frac{\Delta x_{i,j} \Delta z_{i,j}}{4 \Delta t} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m N_n d\xi d\eta + \sum_{k=1}^M u_k \frac{\Delta x_{i,j}}{2} \int_{-1}^1 P_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} N_k d\xi d\eta + \right. \\
& - \sum_{k=1}^M w_k \frac{\Delta z_{i,j}}{2} \int_{-1}^1 P_m \frac{\partial N_n}{\partial \eta} N_k d\xi d\eta - \frac{K}{\rho c_p} \left[\int_{-1}^1 \left(N_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \right)_{\xi=-1}^{\xi=1} d\eta - \right. \\
& - \left. \frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta z_{i,j}} \int_{-1}^1 \frac{\partial N_m}{\partial \xi} \frac{\partial N_n}{\partial \xi} d\xi d\eta \right] - \frac{K}{\rho c_p} \left[\int_{-1}^1 N_m \left(\frac{\partial N_n}{\partial \eta} \right)_{\eta=-1}^{\eta=1} d\xi - \right. \\
& - \left. \frac{\Delta z_{i,j}}{\Delta x_{i,j}} \int_{-1}^1 \frac{\partial N_m}{\partial \eta} \frac{\partial N_n}{\partial \eta} d\xi d\eta \right] \left. \right\} = \frac{\Delta x_{i,j} \Delta z_{i,j}}{4 \Delta t} \sum_{n=1}^M T_n \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m N_n d\xi d\eta + \\
& + \frac{2\mu}{\rho c_p} \left\{ \frac{\Delta z_{i,j}}{\Delta x_{i,j}} \sum_{n=1}^M u_n \sum_{k=1}^M u_k \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} d\xi d\eta + \right. \\
& + \frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta z_{i,j}} \sum_{n=1}^M w_n \sum_{k=1}^M w_k \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \frac{\partial N_k}{\partial \eta} d\xi d\eta + \\
& + \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta z_{i,j}} \sum_{n=1}^M w_n \sum_{k=1}^M w_k \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} d\xi d\eta + \right. \\
& + 2 \sum_{n=1}^M w_n \sum_{k=1}^M u_k \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \frac{\partial N_k}{\partial \eta} d\xi d\eta + \\
& \left. \left. + \frac{\Delta z_{i,j}}{\Delta x_{i,j}} \sum_{n=1}^M u_n \sum_{k=1}^M u_k \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \frac{\partial N_k}{\partial \eta} d\xi d\eta \right] \right\}, \text{ para } m = 1, \dots, M. \quad (3-56)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^M T_n \left\{ \frac{\Delta x_{i,j}}{2 \Delta t} \int_{-1}^1 N_m N_n d\xi + \sum_{k=1}^M u_k \int_{-1}^1 P_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} N_k d\xi - \right. \\
& - \left. \frac{K}{\rho c_p} \left[\int_{-1}^1 \left(N_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \right)_{\xi=-1}^{\xi=1} d\eta - \frac{2}{\Delta x_{i,j}} \int_{-1}^1 \frac{\partial N_m}{\partial \xi} \frac{\partial N_n}{\partial \xi} d\xi \right] \right\} = \text{ para } m = 1, \dots, M. \quad (3-71) \\
& = \frac{\Delta x_{i,j}}{2 \Delta t} \sum_{n=1}^M T_n \int_{-1}^1 N_m N_n d\xi + \frac{2\mu}{\rho c_p} \frac{1}{\Delta x_{i,j}} \sum_{n=1}^M u_n \sum_{k=1}^M u_k \int_{-1}^1 N_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} d\xi,
\end{aligned}$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\eta)(1-\xi). \quad (3-83)$$

CAPÍTULO 4 – RESULTADOS NUMÉRICOS

Por sugestão da banca examinadora é simulado um caso adicional para o terceiro problema analisado nesta tese, que é o seguinte:

4.3 Problema de escoamento através de uma expansão abrupta na forma de degrau - (“backward-facing step”)

Caso 3. Com o objetivo de verificar se os resultados obtidos nos dois casos simulados anteriormente, para o problema do escoamento através de uma expansão abrupta na forma de degrau, não sofrem influências devido às condições de contorno impostas para o problema, simula-se um terceiro caso. Neste caso utiliza-se um comprimento do domínio de escoamento bem maior do que o adotado nos Casos 1 e 2 a fim de minimizar os efeitos das condições de contorno no comportamento dos resultados.

Para realização desta análise reproduz-se o experimento feito por Denham e Patrick (1974), onde o escoamento do fluido é realizado através de um duto, como mostra a Figura 4.36. O fluido utilizado no experimento é a água, sendo que o perfil da componente da velocidade de entrada na direção x , u , é parabólico. Neste caso analisado utiliza-se o experimento de Denham e Patrick (1974) com número de Reynolds igual a 73. A geometria do canal de escoamento está apresentada na Figura 4.36.

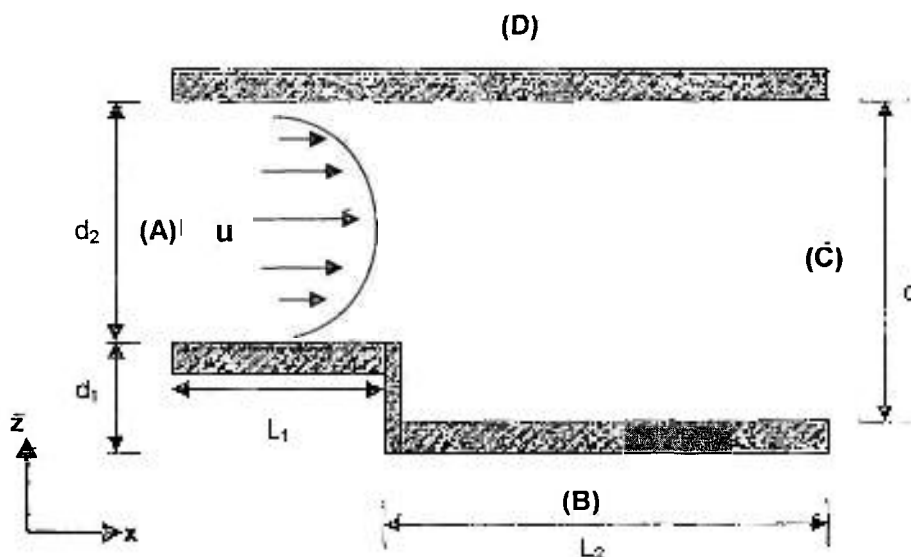


Figura 4.36 – Geometria utilizada para simulação de escoamento através de uma expansão abrupta na forma de um degrau (“backward-facing step”).

Os dados geométricos utilizados na simulação numérica deste caso são os seguintes: o comprimento total do canal de escoamento é composto por $L_1 = 0,12\text{m}$ e $L_2 = 0,24\text{m}$ e a largura da face direita é dada por $d = 0,045\text{m}$ (largura do degrau, $d_1 = 0,015\text{m}$ e largura da entrada, $d_2 = 0,030\text{m}$). As propriedades físicas utilizadas para a água são as seguintes: viscosidade dinâmica, $\mu = 0,001\text{ kg/sm}^2$ e a massa específica, $\rho = 1000\text{kg/m}^3$. Observa-se que neste caso o domínio de escoamento utilizado foi bem maior do que nos casos anteriores, justamente para minimizar a influência das condições de contorno no problema.

As condições de contorno adotadas para este problema são as seguintes: o perfil da componente da velocidade na direção x , u , prescrito na entrada, como pode ser visualizado através da Figura 4.36, e a pressão prescrita na saída. Numericamente tem-se as seguintes condições de contorno:

- (i) Entrada, face A :
 Perfil parabólico para u , como mostrado na Figura 4.36, com velocidade média,
 $\bar{u} = 0,00485\text{m/s}$ e $w = 0$;
- (ii) Parede sólida, face B:
 $u = 0, w = 0$;
- (iii) Saída, face C :
 $p_{saida} = 0$;
- (iv) Parede sólida, face D:
 $u = 0, w = 0$;

Com as propriedades físicas adotadas para a água e com a velocidade média na entrada o número de Reynolds, segundo **Denham e Patrick (1974)**, neste caso é dado pela equação (4-3) e é igualada a 73.

A fim de comparar os resultados obtidos com o modelo numérico e aqueles alcançados experimentalmente por **Denham e Patrick (1974)**, são considerados os seguintes pontos de medida ao longo da direção do domínio de escoamento, $-0,012\text{m}$; 0m ; $0,012\text{m}$; $0,030\text{m}$; $0,060\text{m}$; $0,090\text{m}$ e $0,12\text{m}$, como pontos de referência, onde a posição 0 m corresponde ao ponto onde inicia-se o degrau.

Como nos outros dois problemas anteriores utiliza-se o programa PMEFH2D desenvolvido neste trabalho para a simulação numérica, sendo que neste caso o comprimento total do domínio de escoamento é de $0,36\text{m}$. Este comprimento corresponde a mais do que duas vezes o tamanho do canal de escoamento adotado nos dois casos anteriores. No entanto, neste caso mantém-se o tamanho dos elementos igual ao do caso 2, ou seja, utiliza-se uma malha de 60×8 elementos retangulares, nas direções x e z respectivamente e novamente simula-se numericamente a expansão na forma de degrau para a expansão de grau 3. Neste caso, adota-se apenas a expansão de grau 3 por se saber das simulações anteriores que a medida que aumenta-se o grau da expansão obtém-se melhores resultados.

Dos oito elementos retangulares na direção z , quatro são distribuídos igualmente ao longo da distância d_1 e quatro ao longo de d_2 , enquanto que na direção x os 60 elementos retangulares são distribuídos igualmente ao longo de L_1 e L_2 . O intervalo de tempo utilizado na simulação deste problema é de 10^{-1} segundos.

A Figura 4.37 mostra a evolução da velocidade ao longo do domínio de escoamento, obtido pela simulação numérica para as expansões de grau 3. Sendo que o corte na figura assinalado de azul apresenta de forma ampliada o perfil da velocidade na região da entrada. Nesta região observa-se que a velocidade é a plenamente desenvolvida e apresenta um perfil parabólico, devido a condição imposta na entrada (face A), no entanto, a medida que se caminha ao longo do domínio de escoamento o perfil da velocidade varia devido a presença da expansão abrupta na forma de degrau. O corte assinalado de vermelho mostra que o perfil da velocidade próxima ao degrau é o esperado, pois para uma expansão abrupta verifica-se a existência da recirculação do fluido em torno da região do degrau.

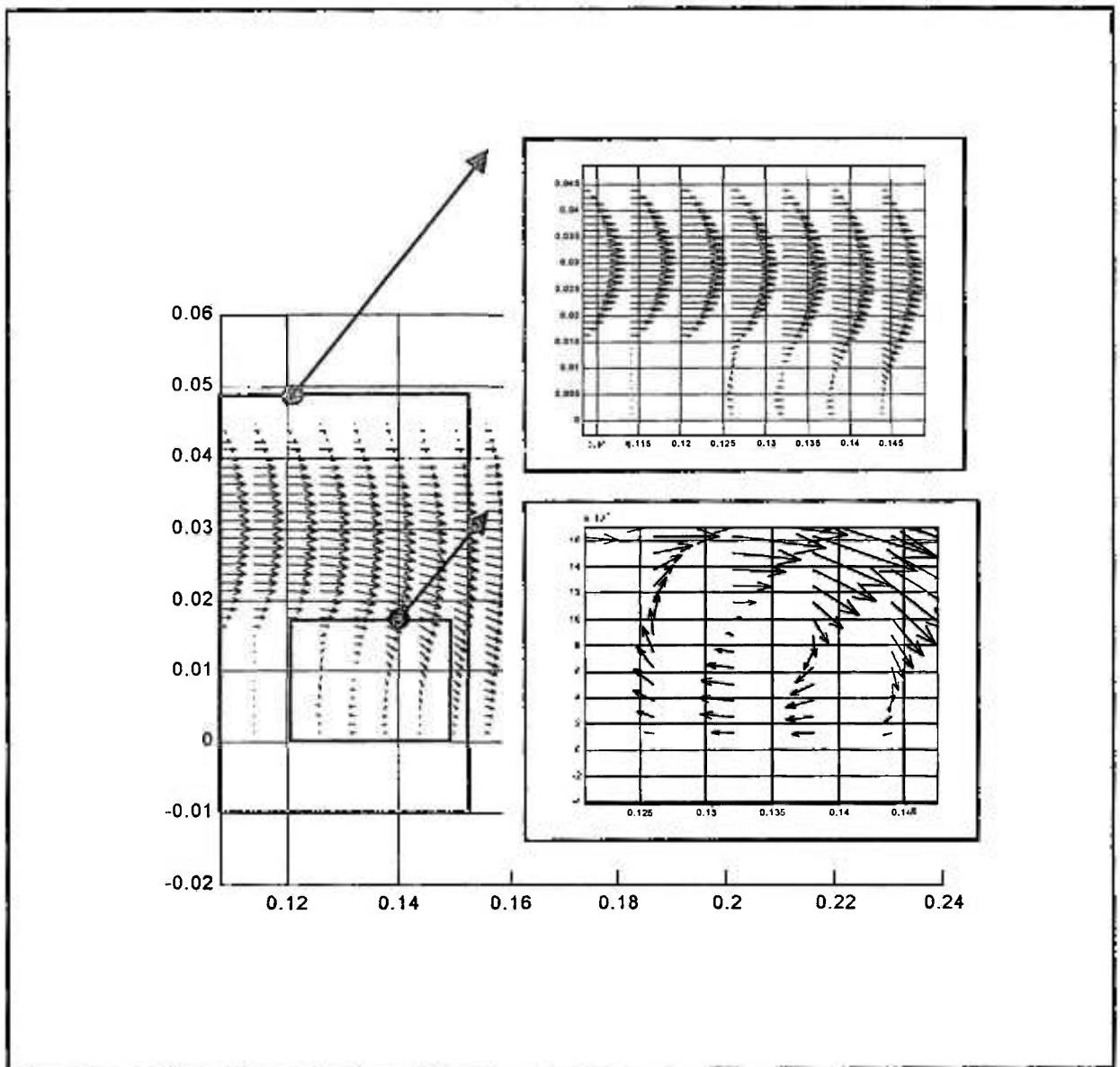


Figura 4.37. – Perfil da velocidade ao longo de um escoamento através de um degrau (“backward-facing step”), obtido com PMEFH2D, grau=3– Caso 3.

Por meio da Figura 4.38 pode-se ver a comparação entre os resultados da velocidade obtidos experimentalmente e o calculado pela simulação numérica para a expansão de grau 3. Observa-se que o perfil da velocidade se aproxima razoavelmente bem do perfil experimental para este caso. Verifica-se também, que os perfis da velocidade calculados para cada um dos pontos de medida se distanciam mais dos resultados experimentais a medida que se afasta da entrada, como ocorreu nos Casos 1 e 2.

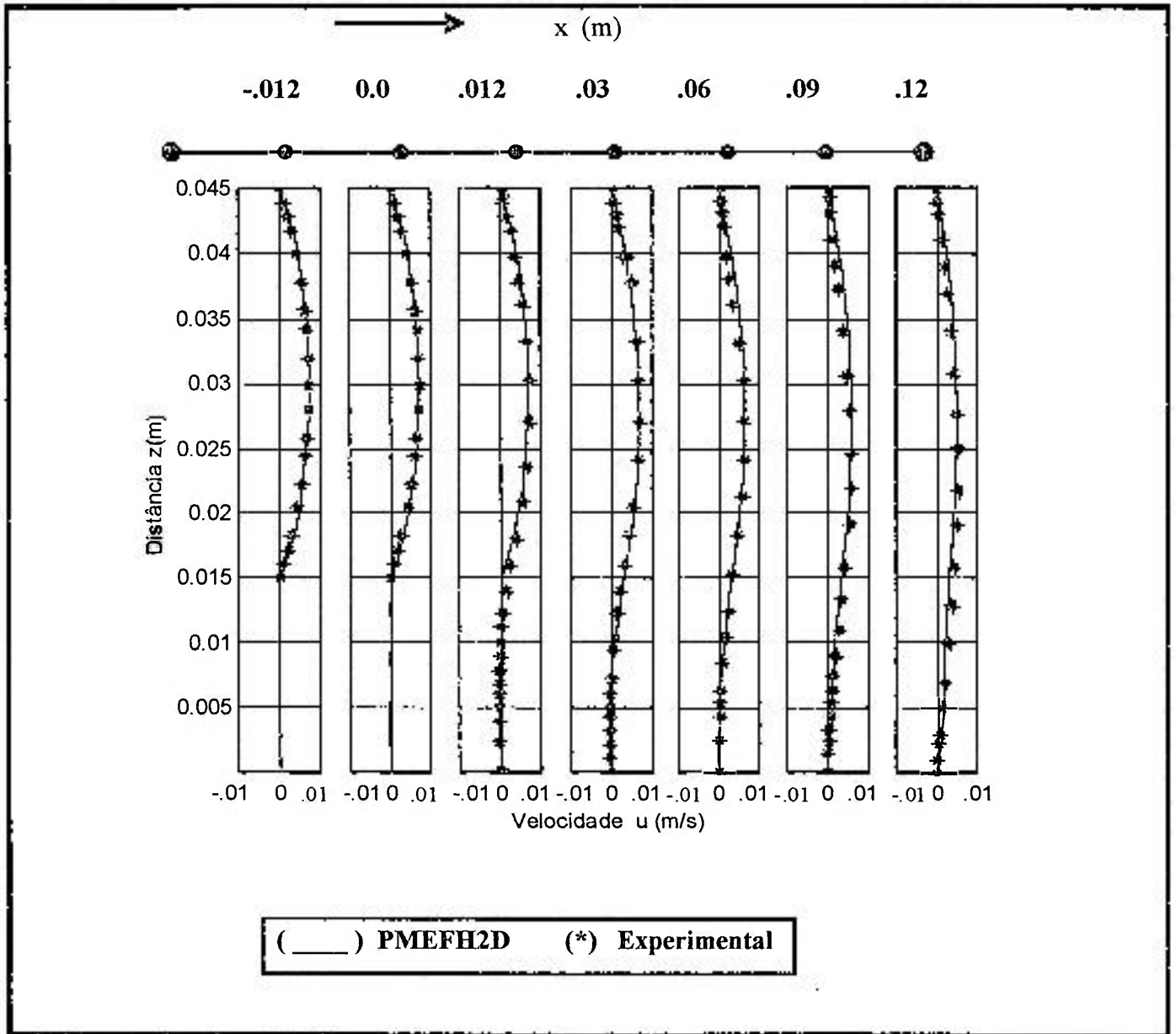


Figura 4.38 – Comparação entre resultados obtidos com o PMEFH2D e os resultados experimentais de Denhan e Patrlck (1974), para $Re = 73$ e grau=3– Caso 3.

As diferenças entre os resultados experimentais e os calculados podem ser vistas na Tabela 4.4, que apresenta os erros médios entre os resultados obtidos com PMEFH2D e os correspondentes experimentais, para a expansão de grau 3.

Tabela 4.4 – Valores dos erros médios obtidos entre os resultados experimentais e os calculados pelo programa computacional PMEFH2D, para cada uma das posições de medida e grau da expansão igual a 3 – Caso 3.

Posição na direção x (m)	Erro médio ($\epsilon_{\text{médio}}$) grau = 3 (%)
0,012	5,67
0,030	6,09
0,060	8,83
0,090	10,42
0,12	12,97

Comparando-se os resultados deste caso com os resultados do Caso 2 para expansão de grau 3, observa-se que os valores dos erros médios são ligeiramente superiores a medida que o perfil da velocidade se afasta da entrada do degrau. Este comportamento da velocidade ao longo do domínio de escoamento revela que a condição de contorno imposta na saída influencia ligeiramente o comportamento da velocidade, ou seja, observa-se que no Caso 2 os erros médios encontrados são ligeiramente menores que os obtidos no Caso 3, a medida que a posição de medida se afasta do degrau, pois no Caso 2 os resultados obtidos sofreram uma pequena influência da condição de contorno na saída. Conclui-se que, neste tipo de análise o tamanho do domínio de escoamento adotado deve ser o suficiente para que as condições de contorno impostas para o problema não interfiram no comportamento dos resultados finais.

Neste caso também, verifica-se que os erros médios apresentados para a expansão de grau 3, são inferiores aos obtidos para a expansão de grau 1 do Caso 1 e da mesma ordem de grandeza daqueles obtidos para a expansão de grau 2 do Caso 1. Isto confirma o bom desempenho do método numérico proposto neste trabalho, ou seja, o MEFH não necessita de uma malha muito refinada, pois com um aumento do grau da expansão pode-se obter bons resultados mesmo com malhas pouco refinadas. Esta é a grande vantagem do método numérico desenvolvido neste trabalho.

O contorno da pressão ao longo do domínio de escoamento, para a expansão de grau 3, podem ser visto através das Figuras 4.39. Neste caso observa-se que a pressão é constante na entrada, negativa perto da região do degrau, devido a recirculação do fluido, crescendo ao longo do escoamento e indo a zero na saída, que é condição de contorno imposta para o problema.

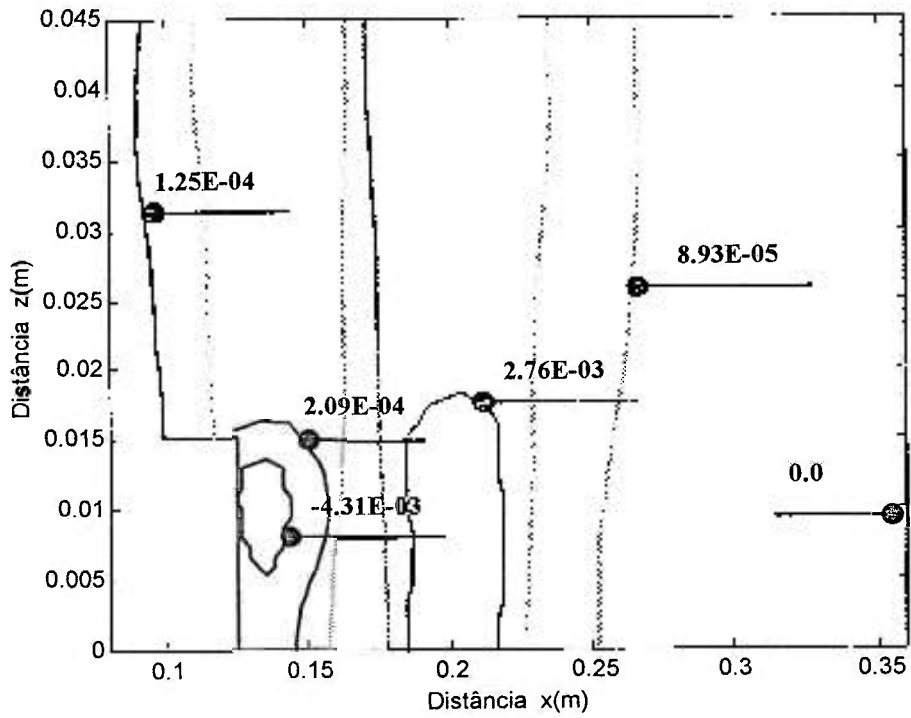


Figura 4.39 – Contorno da pressão em Pa, gerado pelo programa PMEFH2D, com $Re = 73$ e grau =3, Caso3.

CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES

Página 125: Substituir o segundo parágrafo por: *“Constata-se que a grande vantagem do método da expansão em funções hierárquicas é a capacidade de adaptar o grau da expansão até o valor necessário ou desejado para uma dada precisão durante o cálculo do escoamento, ao invés de refinar a malha, sem que para isto haja a necessidade de reiniciar o problema, como ocorre no método dos elementos finitos convencional. A grande vantagem do MEFH se deve ao fato da possibilidade de adaptar o grau da expansão ao invés do refino da malha, pois a alteração do grau da expansão é realizado facilmente e não exige o reinício do problema. Observa-se, contudo, que neste trabalho não foi implementado a adaptação do grau da expansão durante a solução do problema. Para fim de simplicidade, neste trabalho, o grau da expansão é definido no início da solução e não é posteriormente alterado. “*

Substituir o terceiro parágrafo por: “O método de Chorin é utilizado neste trabalho, devido a sua simplicidade no tratamento das equações da quantidade de movimento. Por este motivo utilizou-se o método de Chorin (transitório), para o acoplamento entre a pressão e a velocidade, ao invés da aplicação de outros métodos de tratamento de acoplamento, próprios para regime permanente, por não serem facilmente aplicados ao MEFH. Observou-se por meio deste trabalho, que para graus de expansão superiores a 2 não se tem idéia dos custos computacionais envolvidos, e quais seriam os benefícios de aumentar o grau da expansão com o objetivo de obter melhores resultados.”

Página 126: Substituir o terceiro parágrafo por: *“A motivação para o desenvolvimento de trabalhos futuros advém do fato de que, apesar da metodologia desenvolvida ter se mostrado bastante potente na resolução das equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis em duas dimensões, em regime laminar para malhas cartesianas estruturadas, poucos problemas de dinâmica de fluidos se encaixam nestas simplificações. Assim a eliminação destas limitações, ou seja, capacidade para resolver problemas de três dimensões, simulações de escoamento turbulento, tratamento de fluidos compressíveis e modelagem de geometria complexas, é de importância fundamental para o sucesso da aplicação do método de expansão em funções hierárquicas.”*

Incluir em trabalhos futuros: “Utilização da expansão das componentes da velocidade, u e w no lugar das velocidades médias \bar{u} e \bar{w} , respectivamente, as quais são utilizadas na função peso P_m , como mostra a equação (3-14). Pois a utilização das velocidades médias na definição da função peso é uma aproximação razoável apenas para ordens de interpolação baixas. Quando são assumidas as velocidades médias nos elementos de malhas mais grosseiras, estes valores poderão estar fora da realidade ocasionando erros nos cálculos.”

Testar a aproximação de Petrov-Galerkin consistente, que trata todos os termos das equações de conservação da mesma forma, ou seja, utilizar a função peso, dada pela equação (3-14), em todos os termos que aparecem nas equações de conservação.”

APLICAÇÃO DO MÉTODO DA EXPANSÃO EM FUNÇÕES HIERÁRQUICAS NA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES PARA FLUIDOS INCOMPRESSÍVEIS.

Gaianê Sabundjian

ERRATA

Página ix : Substituir o **Resumo** por:

Resumo

“Este trabalho consiste na aplicação do método da expansão em funções hierárquicas, na solução das equações de Navier-Stokes em duas dimensões para fluidos incompressíveis, com escoamento em regime laminar.

Este método está baseado no método de elementos finitos. As funções de expansão utilizadas são baseadas nos polinômios de Legendre, ajustadas nos elementos retangulares de forma a definir funções de canto, de lado e de área. A ordem das funções de expansão associadas aos lados é às áreas dos elementos é ajustada até o grau necessário ou desejado. Este método é denominado de Método de Expansão em Funções Hierárquicas (MEFH).

A fim de validar o método numérico proposto, analisa-se três problemas conhecidos da literatura em duas dimensões. Os resultados mostram a capacidade do método em fornecer resultados precisos.

A partir dos resultados obtidos nesta tese, conclui-se que o método de expansão em funções hierárquicas pode ser aplicado com sucesso na solução de problemas de mecânica de fluidos, que envolvam fluidos incompressíveis em regime laminar.”

Página x : Substituir o **Abstract** por:

Abstract

“This work applied of the expansion of the variables in hierarchical functions for the solution of the Navier-Stokes equations for incompressible fluids in two dimensions in laminar flow.

This method is based on the finite element method. The used expansion functions are based on Legendre polynomials, adjusted in the rectangular elements in a such a way that corner, side and area functions are defined. The order of the expansion functions associated with the sides and with the area of the elements can be adjusted to the necessary or desired degree. This method is denominated by Hierarchical Expansion Method.

In order to validate the proposed numeric method three well-known problems of the literature in two dimensions are analyzed. The results show the method capacity in supplying precise results.

From the results obtained in this thesis it is possible to conclude that the hierarchical expansion method can be applied successfully for the solution of fluid dynamic problems that involve incompressible fluids.”

funções peso são diferentes das funções de expansão, como utilizado na formulação Galerkin.

A formulação Petrov-Galerkin consiste no método conhecido como SUPG (*"Streamline Upwind Petrov-Galerkin"*) desenvolvido por **Brooks e Hughes (1982)**. Neste método as funções peso descontínuas são construídas adicionando-se às funções peso de Galerkin na forma de uma perturbação que atua somente na direção das linhas de corrente. Segundo **Zienkiewicz et al. (1976)**, este método apresenta estabilidade e precisão nos resultados.

Um dos problemas mais complexos de se resolver no caso de fluidos incompressíveis é o forte acoplamento entre a pressão e a velocidade, que aparece nas equações da quantidade de movimento. Existem, na literatura, diversos métodos para tratar este tipo de acoplamento. O objetivo de todos eles é criar uma equação de pressão que permita que o processo iterativo avance, observando a conservação da massa. Os precursores no desenvolvimento de métodos para tratar o acoplamento pressão-velocidade foram: **Harlow e Welch (1965)**, **Chorin (1967) e (1971)**, **Amsden e Harlow (1970)** e **Patankar e Spalding (1972)**. Os métodos de acoplamento pressão-velocidade mais difundidos são apresentados no item de Revisão Bibliográfica.

Optou-se, neste trabalho, pela utilização do método de Chorin no tratamento do acoplamento pressão-velocidade. O motivo desta escolha é a simplicidade do método no tratamento das equações de conservação da quantidade de movimento para criar uma equação de pressão (equação de Poisson), que satisfaz a conservação da massa.

1.1 Objetivo

O objetivo deste trabalho é desenvolver um novo método numérico, baseado no método de elementos finitos, utilizando-se a formulação Petrov-Galerkin, em conjunto com a expansão das variáveis em funções quase hierárquicas, para a solução das equações de Navier-Stokes em duas dimensões, para fluidos incompressíveis, com escoamento em regime laminar. Os diversos termos das equações de conservação são tratados de forma distinta. Assim, para os termos convectivos das equações de Navier-Stokes é utilizada a formulação de Petrov-Galerkin, enquanto que para os termos temporais, viscosos e difusivos é empregada a formulação de Galerkin.

Com o objetivo de demonstrar a aplicabilidade do novo método numérico proposto neste trabalho, são utilizadas apenas malhas estruturadas retangulares para a solução numérica de problemas de dinâmica de fluidos.

Neste método, as funções de expansão são polinômios formados a partir dos polinômios de Legendre, os quais são ajustados nos elementos retangulares de uma maneira inédita, de forma a definir funções de canto, de lado e de área. Ajusta-se a ordem (grau) das funções de expansão dos lados e das áreas dos elementos retangulares até o grau necessário ou desejado.

A grande vantagem da expansão em funções hierárquicas é a capacidade de adaptar o grau do polinômio de expansão até o valor necessário ou desejado durante o cálculo do escoamento, ao invés de refinar a malha, sem que para isto haja a necessidade de reiniciar o problema, como ocorre no método dos elementos finitos convencional. Além disto, a

possibilidade de adaptar o grau do polinômio de expansão é vantajoso ao invés do refino da malha pois, é realizado facilmente e não exige, novamente, o reinício do problema.

Ressalta-se que praticamente todos os problemas numéricos presentes na solução de escoamento de fluidos em três dimensões estão também presentes em escoamento duas dimensões. As equações utilizadas são facilmente modificadas para considerar três dimensões e existe a possibilidade, e principalmente a facilidade de estender este método para três dimensões.

Como mencionado anteriormente, este trabalho dá origem a um novo método numérico baseado no método de elementos finitos em conjunto com a expansão das variáveis em funções quase hierárquicas. Por conveniência, este método é denominado de Método da Expansão em Funções Hierárquicas (MEFH). A partir deste trabalho gerou-se um programa computacional que é denominado de Programa do Método da Expansão em Funções Hierárquicas em 2 Dimensões (PMEFH2D).

1.2 Revisão bibliográfica

Os métodos numéricos existentes na literatura para o tratamento das equações de Navier-Stokes na solução dos mais diversos tipos de problemas de engenharia são os seguintes, o método das diferenças finitas (MDF), o método dos volumes finitos (MVF) e o método dos elementos finitos (MEF).

Sabe-se da literatura, que o método dos elementos finitos foi durante muito tempo preterido em relação ao método de diferenças finitas, quando o problema analisado era da área de mecânica dos fluidos. A razão desta pouca utilização foi o insucesso das primeiras experiências de aplicação deste método a esta classe de problemas. Embora o MEF fosse uma boa ferramenta para o tratamento de geometrias complexas, não possuía a habilidade necessária para o tratamento dos termos convectivos presentes nas equações de movimento. Por este motivo, durante muito tempo, o método de diferenças finitas foi utilizado para o tratamento de problemas da mecânica dos fluidos em geometrias simples. Nesta época iniciou-se o aprimoramento do método dos volumes finitos (MVF), no qual as equações aproximadas são obtidas através do balanço das grandezas em questão (massa, quantidade de movimento, energia, etc.) nos volumes elementares ou volumes finitos. Este método, por sua vez, era utilizado para problemas de fluidos, mas para geometrias mais complexas. Muitos analistas envolvidos com MDF passaram a usar o MVF, visto que ambos os métodos numéricos são equivalentes para uma série de problemas, levando muitas pessoas a confundi-los.

O MDF foi durante muitos anos utilizado na solução de problemas de fluidos, mas não se tinha habilidade no tratamento de geometrias complexas, e teve todo o seu desenvolvimento baseado em coordenadas ortogonais, como a cartesiana, a cilíndrica e a esférica. Segundo **Maliska (1995)** muitas pessoas ainda vinculam o MDF com malhas cartesianas, de forma equivocada, uma vez que este método pode ser aplicado a qualquer tipo de malha, mesmo as não estruturadas usadas em elementos finitos.

O MEF clássico empregava funções peso do tipo Galerkin, que equivale ao uso das diferenças centrais no método das diferenças finitas, para resolver os problemas de

escoamento de fluidos. No entanto, observou-se que o método de Galerkin é adequado apenas para problemas puramente difusivos. Um dos primeiros a aplicar este método para equações de fluidos foi **Zienkiewicz et al. (1976)**, com a publicação de um trabalho que aplicava o método de Galerkin, onde as funções de expansão e peso utilizadas eram funções lineares, quadráticas assimétricas. O sucesso deste método, deve-se ao fato do problema ser essencialmente difusivo. Contudo, quando este método era utilizado para resolver problemas com convecção predominante, eram observados dois problemas básicos. O primeiro é o surgimento de divergências na solução numérica, provocadas pela utilização de um método de solução numérica inadequado para este tipo de problema. O segundo é a obtenção de soluções não realistas, isto é, soluções que apresentavam muitas oscilações numéricas, devido ao fato de que um esquema similar ao de diferenças centrais não possui habilidade para dissipar as perturbações inerentes ao processo de solução, segundo **Zienkiewicz et al. (1976)**.

Para resolver problemas convectivos e difusivos passou-se a empregar as funções peso do tipo Petrov-Galerkin. Este tratamento possibilitou um grande avanço na aplicação do MEF, permitindo a solução de problemas de dinâmica de fluidos, com a minimização dos efeitos de difusão numérica. Neste método, conhecido como SUPG, às funções peso descontínuas são construídas adicionando-se às funções peso da formulação de Galerkin uma perturbação que atua somente na direção das linhas de corrente. **Hughes (1987)**, apresenta um breve histórico do surgimento do método SUPG. Em sua opinião, tanto o termo "*streamline*" como "*upwind*" são palavras indevidamente empregadas neste contexto, por serem nomes utilizados de forma pejorativa em alguns círculos científicos. No entanto, estes termos são tão populares na área de métodos numéricos, que a sua utilização é inevitável. O nome Petrov provém da referência fornecida por **Mikhlin (1964)**,

embora o crédito desta técnica não se deva a Petrov, enquanto que o nome Galerkin é empregado adequadamente pelo fato do método SUPG estar baseado na formulação clássica de Galerkin. O primeiro trabalho publicado sobre este assunto foi realizado por **Hughes e Brooks (1979)**, onde o método SUPG foi aplicado às equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis. Posteriormente, os mesmos autores publicaram outros trabalhos sobre este método, **Brooks e Hughes (1980)** e **Brooks (1981)**. Observou-se, na ocasião, que nos trabalhos de **Dendy (1974)**, **Wahlbin (1974)**, **Raymond e Garter (1976)**, **Baker (1979)** e **Nakazawa, Argyris et al. (1984)**, o tratamento dos termos difusivos ou eram desprezados ou tratados de forma incorreta. Este problema foi completamente resolvido por **Hughes e Brooks (1982)**. A partir deste trabalho surgiram outros como o de **Johnson, Näver e Pitkäranta (1984)**, **Johson (1982)**, **Näver (1982)**, **Johson et al. (1984)**, **Johson e Szepessy (1985)**, **Johson (1986)**, **Johson e Saranen (1986)**, **Johson e Szepessy (1986)**, **Johson e Szepessy (1986)**, os quais desenvolveram uma análise matemática extensa do método SUPG. Nestes trabalhos esta metodologia também foi estendida para problemas transitórios e para fluidos incompressíveis. Adicionalmente, **Hughes, Franca e Mallet (1987)** aplicaram o método SUPG para a solução das equações de Navier-Stokes para fluidos compressíveis em duas dimensões.

Atualmente, observa-se que os métodos dos volumes finitos e dos elementos finitos resolvem problemas altamente convectivos em geometrias complexas, mostrando que existem semelhanças entre eles. Do ponto de vista matemático estes três métodos numéricos (MDF, MVF e MEF) podem ser derivados do método dos resíduos ponderados, empregando-se diferentes funções peso. No caso do MDF, a função peso utilizada é a função delta no ponto considerado. Para o MVF, a função peso empregada é uma constante igual a 1 no volume elementar e igual a zero em todos os outros volumes elementares. No

caso do MEF (Petrov-Galerkin) são utilizadas funções peso descontínuas. Este método é conhecido como SUPG ("*Streamline Upwind Petrov-Galerkin*"), onde as funções peso descontínuas são construídas adicionando às funções peso de Galerkin uma perturbação que atua somente na direção das linhas de corrente. Este método apresenta estabilidade e precisão nos resultados para problemas que envolvam fluidos.

Embora, os métodos numéricos mencionados neste item sejam todos derivados do mesmo princípio e diferirem apenas na função peso escolhida, na prática o que se tem são diferentes graus de experiência dos usuários com os diversos métodos na solução de variados tipos de problemas.

Na medida em que nesta tese é utilizada a formulação Petrov-Galerkin, é realizada uma revisão detalhada desta classe de método. A partir da década de 80 o método SUPG, começou a ser largamente empregado para a solução dos mais diversos tipos de problemas de dinâmica de fluidos e problemas convectivos-difusivos. Algumas das aplicações nesta área podem ser vistas nos trabalhos a seguir.

Tezduyar, Glowinski e Liou (1988), empregaram o método SUPG na solução das equações de Navier-Stokes em fluidos incompressíveis. Neste trabalho, a técnica utilizada para solucionar o problema do acoplamento pressão-velocidade foi resolver as equações da quantidade de movimento em termos de corrente e de vorticidade. Neste caso, o número de funções é reduzido de três para dois e o campo de vorticidade é calculado diretamente ao invés de ser obtido a partir da diferenciação do campo de velocidades. Embora esta técnica seja atraente, ela se aplica apenas para problemas bi-dimensionais. Além disso, os autores

observaram que o uso desta técnica tornava a convergência lenta e o processo iterativo bastante instável.

Kondo, Tosaka e Nishimura (1991) empregaram a função peso da formulação de Petrov-Galerkin, que é obtida pela soma da função peso padrão de formulação de Galerkin, com as suas segunda e terceira derivadas. Esta técnica foi aplicada com sucesso às equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis em duas e também em três dimensões.

Argyris, Laxander e Szimmat (1992) utilizaram o método de elementos finitos para problemas de escoamento de fluidos com acoplamento entre as velocidades e a temperatura. Os autores utilizaram as equações de conservação em conjunto com a formulação SUPG, para tratamento dos termos convectivos que aparecem nas equações de Navier-Stokes. A formulação proposta neste trabalho mostrou-se eficiente para várias aplicações práticas, em particular a possibilidade de calcular a troca de calor entre estruturas sólidas e o fluido e a troca de calor por radiação térmica.

Sampaio et al. (1993) apresentaram um trabalho onde foi empregado o método de Petrov-Galerkin juntamente com uma estratégia de malhas adaptativas na solução das equações de Navier-Stokes para fluidos viscosos incompressíveis, em problemas transitórios. Os autores verificaram a necessidade de utilizar a estratégia de refinamento das malhas, em problemas de mecânica de fluidos transitórios, em razão da existência de regiões que apresentam altos gradientes de velocidades ao longo do escoamento. O procedimento matemático adotado neste trabalho para o tratamento pressão-velocidade é similar ao método SIMPLER desenvolvido por **Patankar (1979)**. **Sampaio et al. (1993)**

introduziram também uma ferramenta para estimar o erro de cálculo nos gradientes de velocidade, dada por **Zienkiewicz e Zhu (1987)**, de forma a fornecer informações quanto à necessidade de se refinar a malha, com a finalidade de se alcançar melhores resultados. Eles aplicaram o método proposto com sucesso em problemas de dinâmica de fluidos.

Nigro, Stroti e Idelsohn (1994) aplicaram com sucesso o método SUPG para a análise de escoamentos bifásicos. As equações de conservação foram escritas para cada uma das fases, líquida e vapor. A fase gasosa foi tratada como fluido incompressível, pelo fato das velocidades envolvidas serem muito menores do que a velocidade do som. Na literatura este tipo de tratamento é conhecido como fluido quase incompressível.

Kakuda, Tosaka e Nakamura (1996) empregaram o método SUPG na solução de problemas de fluidos viscosos incompressíveis em três dimensões com alto número de Reynolds. A função de expansão utilizada foi uma função exponencial. Neste caso, o tratamento do acoplamento pressão-velocidade foi feito pelo método de Chorin. Os resultados numéricos obtidos neste trabalho mostraram que a metodologia aplicada é capaz de resolver problemas de escoamento em cavidades cúbicas e apresenta estabilidade nos resultados para número de Reynolds até 10^4 , que era até aquele momento um resultado difícil de ser obtido.

Rappitsch, Pektold e Pernkkopf (1997) diversificaram a aplicação do método SUPG para a área biomédica. Os autores utilizaram o esquema numérico do método SPUG para a simulação do escoamento sanguíneo e dos processos de transporte em grandes artérias. O escoamento sanguíneo foi descrito pelas equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis em três dimensões. A resistência oferecida pelas paredes das

artérias foi descrita por um modelo de permeabilidade da parede. A formulação Petrov-Galerkin foi utilizada no tratamento dos termos convectivos que aparecem nas equações de movimento. O estudo do mecanismo de transporte cardiovascular é muito importante no desenvolvimento da arteriosclerose. A influência da dinâmica de fluidos em artérias, como no caso do desenvolvimento das lesões arterioscleróticas, já foi estudada tanto teórica como experimentalmente, como descrito por **Perktold, Resch e Florian (1991)**, **Perktold e Rappitsh (1994)** e **Perktold e Rappitsh (1995)**. Por meio deste trabalho, concluiu-se que a utilização do método de SUPG no tratamento do escoamento sanguíneo pode prever quais regiões cardiovasculares poderão, ocasionalmente, sofrer lesões arterioscleróticas. Através deste estudo concluiu-se, também, que as lesões tendem a ocorrer em regiões arteriais que apresentam bifurcações ou curvaturas, conclusão esta de grande interesse da área médica.

Sheu, Tsai, Hawang e Chang (1999) realizaram um estudo empregando a formulação Petrov-Galerkin para a solução do escoamento sanguíneo em conexões cavopulmonares. Este estudo foi realizado para obter uma compreensão melhor do escoamento reverso que existe na circulação vascular. Neste trabalho foram utilizadas as equações de Navier-Stokes em duas dimensões para tratar o escoamento sanguíneo, sendo que o estudo foi feito para escoamento incompressível e laminar. As paredes dos vasos sanguíneos foram consideradas rígidas. Nas duas últimas décadas, esforços foram realizados na área experimental para compreender melhor o mecanismo do escoamento sanguíneo em sistemas vasculares. No entanto, com o avanço dos computadores, é possível utilizar técnicas computacionais para modelar o escoamento sanguíneo no sistema vascular humano. Os autores atingiram este alvo, ou seja, a partir do seu estudo foi possível uma

compreensão melhor do escoamento sanguíneo e dos efeitos da compensação e da distribuição sanguínea nas artérias pulmonares.

Como mencionado, um dos problemas mais complexos de se tratar, ou seja, para resolver numericamente o escoamento de fluidos incompressíveis é o acoplamento entre a pressão e a velocidade. No método de **Chorin (1968)**, que é um dos métodos mais conhecidos para resolver o problema do acoplamento entre pressão e velocidade, este problema é tratado através de um artifício em que as equações da quantidade de movimento são divididas em duas partes. A primeira equação contém apenas os termos convectivos e difusivos das equações de momento e relaciona as velocidades do fluido com as pseudovelocidades denominadas u_i^* . A segunda equação, que consiste em uma equação de Poisson para a pressão, relaciona o gradiente da pressão com a velocidade do fluido. Este método é um método iterativo, onde obtém-se inicialmente a pseudovelocidade, posteriormente corrige-se a velocidade do fluido e finalmente calcula-se a pressão a partir da equação de Poisson. Este ciclo é repetido até atingir a convergência desejada.

Com base no método de Chorin, foram desenvolvidos os métodos que mais causaram impacto na solução numérica de escoamentos incompressíveis. Estes métodos estão brevemente descritos a seguir.

O método SIMPLE (*"Semi IMPLICIT Linked Equation"*), desenvolvido por **Patankar e Spalding (1972)**, é baseado no método de Chorin. Neste caso, a pressão é escrita como a soma da melhor estimativa da pressão disponível, p^* , mais uma correção, p' , que é calculada de maneira a satisfazer a equação da continuidade. O método

SIMPLER (SIMPLE revisado), Patankar (1980), como o próprio nome indica é uma derivação do método SIMPLE. Este método apresenta uma nova maneira de calcular o campo de pressões em cada iteração, procurando associar o cálculo do campo de pressões com as equações de quantidade de movimento. A correção do campo de velocidades é feita de forma idêntica àquela usada no método SIMPLE. O método SIMPLEC (SIMPLE consistente), Van Doormaal e Raithby (1984), tem o mesmo procedimento utilizado pelo método SIMPLE, diferindo apenas, nas equações de correção das velocidades. No método SIMPLEC não são desprezadas as diferenças entre as velocidades (u_i^* e u_i), como ocorre no método SIMPLE. O método PRIME (*"Pressure Implicit Momentum Explicit"*), Maliska (1981), tem o objetivo de realizar dois passos de uma só vez, ou seja, é feito ao mesmo tempo a correção da velocidade e o cálculo da pressão. Neste caso as equações da quantidade de movimento são usadas também como equações de correção e o campo de pressões que corrige as velocidades é o próprio campo de pressões procurado. Assim, o passo de correção de velocidades e o de determinação de pressão são feitos em conjunto. Em todos estes métodos a seqüência de cálculo é a mesma adotada pelo método de Chorin, ou seja, as velocidades são corrigidas de maneira a satisfazer a equação da conservação da massa e posteriormente as pressões são avançadas, para completar o ciclo iterativo.

1.3 Contribuição e inovação do trabalho

Com base na revisão bibliográfica realizada, pode-se garantir a originalidade do emprego do método das funções de expansão hierárquicas na solução das equações de Navier-Stokes e de conservação de energia para fluidos incompressíveis em duas dimensões. No entanto, deve-se ressaltar que o precursor do emprego deste método foi

Cabral (1996), que utilizou com sucesso o método das funções de expansão hierárquicas para resolver a equação de difusão de nêutrons em dois grupos de energia em duas dimensões. Foi a partir deste trabalho que surgiu o desafio de aplicar o método da expansão em funções hierárquicas em dinâmica dos fluidos.

A grande contribuição do método de expansão em funções hierárquicas está na sua simplicidade, versatilidade e precisão, como pode ser visto no trabalho de **Cabral (1996)**. Para a solução de escoamento de fluidos o método consiste na aplicação da formulação Petrov-Galerkin para os termos convectivos das equações de Navier-Stokes, e da formulação Galerkin para os termos temporais, viscosos e difusivos. As funções de expansão são formadas por polinômios, os quais são ajustados nos elementos retangulares, de forma a definir funções de canto, de lado e de área. Espera-se que este novo método numérico, quando aplicado na solução das equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis em duas dimensões, alcance o mesmo sucesso obtido por **Cabral (1996)**.

A razão principal de serem utilizados neste trabalho os polinômios de Legendre como base das funções de expansão, ao invés das funções ortogonais do tipo seno, coseno ou exponencial, é porque um número menor de funções são exigidas na solução dos problemas de dinâmica de fluidos. Isto ocorre, pois um polinômio é mais complexo do que as outras funções e comparativamente tem uma maior capacidade de ajuste. Assim sendo, quanto menor for o número de funções utilizadas, mais simples se torna o método numérico.

Ressalta-se novamente que a grande vantagem deste método é possibilitar o ajuste do grau do polinômio das funções de expansão de forma a obter soluções precisas mesmo com uma malha grosseira, sem a necessidade de reiniciar o problema.

1.4 Sumário estruturado da tese

Os capítulos desta tese estão elaborados com a estrutura descrita a seguir.

O Capítulo 1 (Introdução) apresenta o objetivo do trabalho, uma pesquisa da literatura sobre os métodos Galerkin e Petrov-Galerkin aplicados em mecânica dos fluidos e sobre os métodos de acoplamento pressão-velocidade em escoamento de fluidos incompressíveis, as contribuições e inovações obtidas com este trabalho, noções gerais dos métodos numéricos existentes mais utilizados, e finalmente, a estrutura da tese.

O Capítulo 2 (Equações de Conservação) apresenta as equações que governam a dinâmica dos fluidos, ou seja, as equações da continuidade, conservação da quantidade de movimento e conservação da energia e o método de Chorin, adotado neste trabalho para a solução do acoplamento pressão-velocidade existente nas equações de movimento para fluidos incompressíveis.

O Capítulo 3 (Modelo Matemático) apresenta o desenvolvimento matemático do novo método numérico proposto neste trabalho (Método da Expansão em Funções Hierárquicas) na solução das equações de Navier-Stokes e de conservação de energia para fluidos incompressíveis em duas dimensões. Apresenta, também, o fluxograma do

programa computacional desenvolvido (Programa do Método da Expansão em Funções Hierárquicas em 2 Dimensões - PMEFH2D).

O Capítulo 4 (Resultados Numéricos) apresenta e analisa os resultados numéricos obtidos na aplicação do método da expansão em funções hierárquicas em três problemas de escoamento de fluidos incompressíveis, em duas dimensões, com escoamento laminar. Estes casos são analisados com o objetivo de validar o método numérico proposto neste trabalho.

O Capítulo 5 (Conclusões) apresenta as conclusões do trabalho desenvolvido, além de verificar se os objetivos propostos foram alcançados. Neste capítulo, propõe-se, também, alguns trabalhos futuros que tem por objetivo melhorar o método numérico desenvolvido neste trabalho, além de estender a sua aplicação em outras áreas.

CAPÍTULO 2

EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO

As equações que governam a dinâmica dos fluidos são as equações da continuidade, quantidade de movimento e energia. Estas equações são demonstrações matemáticas de três princípios físicos fundamentais nos quais toda a dinâmica de fluidos está fundamentada: a conservação de massa, a segunda lei de Newton e a conservação de energia. Este conjunto de equações é conhecido como sendo as equações de Navier-Stokes, que estão devidamente descritas neste capítulo.

É comum os problemas de dinâmica dos fluidos estarem associados à problemas de transferência de calor. Em alguns casos, os dois problemas podem estar completamente acoplados, como no caso de problemas de convecção natural, ou seja, quando as propriedades físicas variam com a temperatura. Em outros casos, podem estar totalmente desacoplados, como por exemplo no caso de convecção forçada com fluido incompressível com propriedades físicas assumidas constantes.

O problema mais difícil de ser resolvido na solução de problemas de mecânica dos fluidos, principalmente para fluidos incompressíveis, é o tratamento do acoplamento pressão-velocidade, que existe nas equações de movimento. As equações de conservação para fluidos incompressíveis em coordenadas cartesianas e o tratamento do acoplamento pressão-velocidade nas equações de movimento estão descritos nos próximos itens deste capítulo.

2.1 Equação da conservação de massa

A equação da conservação de massa, escrita para um sistema cartesiano de coordenadas em três dimensões, segundo **Bejan (1984)**, é dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0, \quad (2-1)$$

onde ρ é a massa específica do fluido, t é o tempo, u , v e w são as velocidades nas direções x , y e z , respectivamente.

Neste trabalho o estudo está delimitado a fluidos incompressíveis, com a massa específica (ρ) considerada constante, logo a equação anterior pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2-2)$$

ou simplesmente,

$$\text{div } \vec{V} = 0, \quad (2-3)$$

onde \vec{V} é o vetor velocidade.

2.2 Equação da conservação da quantidade de movimento

A partir da 2ª lei de Newton, pode-se escrever as equações da conservação da quantidade de movimento para cada uma das três direções do sistema cartesiano de

coordenadas. Para tanto, utiliza-se a Figura 2.1, na qual observa-se as forças que agem sobre um volume elementar de fluido em cada uma das direções. Estas forças são as seguintes:

- forças de campo: forças gravitacionais e eletromagnéticas (forças que agem por distância); e
- forças superficiais: forças que agem na superfície do volume elementar, forças normais ou tangenciais.

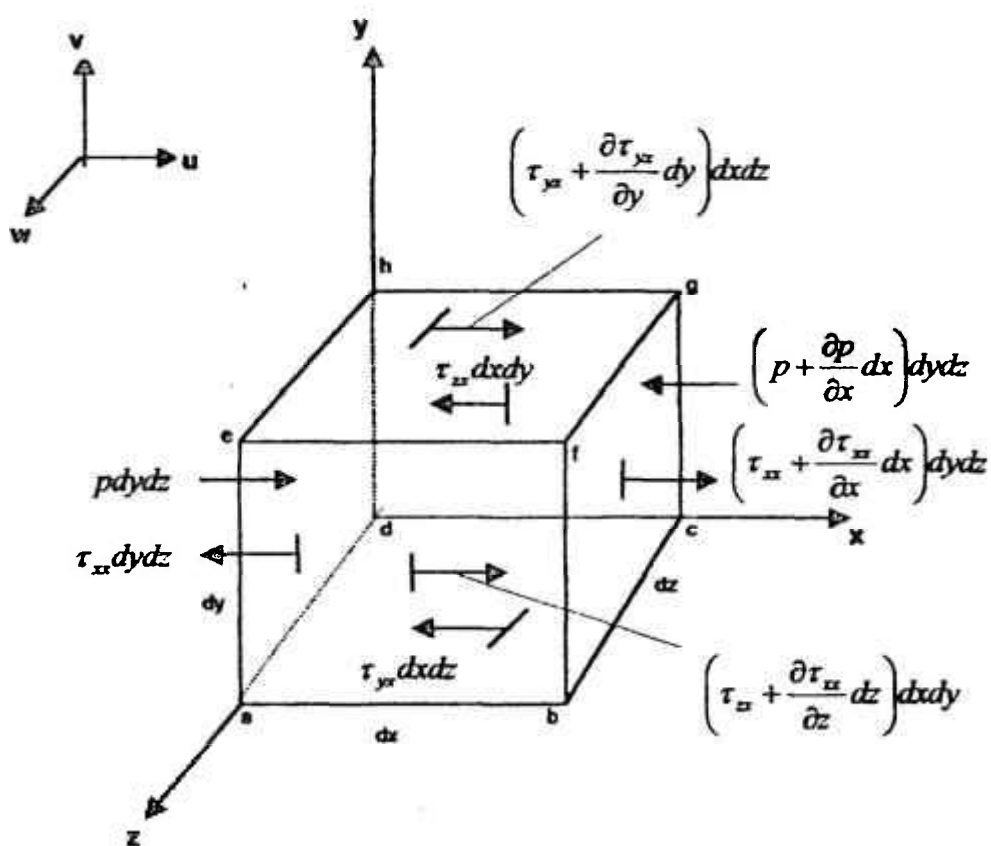


Figura 2.1 – Elemento de fluido em movimento.

A forma genérica das equações da conservação da quantidade de movimento, segundo Anderson et al. (1984), para cada uma das três direções é dada por:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = J \quad (2-4)$$

A equação (2-4) é conhecida como sendo a forma conservativa das equações de movimento, onde U, F, G, H e J , são representadas pelos seguinte vetores:

$$U = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho v \\ \rho w \end{bmatrix}; \quad (2-5)$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho wu - \tau_{xz} \end{bmatrix}; \quad (2-6)$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho uv - \tau_{yx} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ \rho vw - \tau_{yz} \end{bmatrix}; \quad (2-7)$$

$$H = \begin{bmatrix} \rho vw - \tau_{zx} \\ \rho wv - \tau_{zy} \\ \rho w^2 + p - \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

e

$$J = \begin{bmatrix} \rho f_x \\ \rho f_y \\ \rho f_z \end{bmatrix}; \quad (2-9)$$

onde p é a pressão, f_x, f_y e f_z são as forças de campo, $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ e τ_{zz} são as tensões de cisalhamento, para cada uma das direções x, y, z .

As tensões de cisalhamento que aparecem nas equações (2-6), (2-7) e (2-8) são representadas por:

$$\tau_{xx} = \frac{2}{3} \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad (2-10)$$

$$\tau_{yy} = \frac{2}{3} \mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad (2-11)$$

$$\tau_{zz} = \frac{2}{3} \mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right); \quad (2-12)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \tau_{yx}; \quad (2-13)$$

$$\tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \tau_{zx}; \quad (2-14)$$

$$\tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \tau_{zy}; \quad (2-15)$$

onde μ é a viscosidade dinâmica.

Através das condições de equilíbrio demonstra-se facilmente que as tensões de cisalhamento são iguais, no caso em que os índices são iguais, ou seja, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ e $\tau_{yz} = \tau_{zy}$.

Para fluidos incompressíveis, além da massa específica do fluido (ρ), a viscosidade dinâmica (μ) também pode ser considerada constante. Além disso, neste trabalho as forças de campo não são consideradas, portanto, o termo fonte representado pelo vetor J é nulo.

A partir da equação (2-4) considerando-se as hipóteses assumidas e lembrando que nestas condições $\text{div} \vec{V} = 0$, obtém-se as equações de conservação da quantidade de movimento para cada uma das direções x , y e z , respectivamente:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}; \quad (2-16)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}; \quad (2-17)$$

e

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}. \quad (2-18)$$

2.3 Equação de conservação da energia

Aplicando-se o 1º princípio da termodinâmica em um volume elementar de fluido obtém-se a equação de conservação da energia para um sistema de coordenadas cartesianas em três dimensões, segundo Anderson et al. (1984), que é dada por:

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial x} + v \frac{\partial e}{\partial y} + w \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial t} + k \nabla^2 T + p \text{div} \vec{V} + \Phi, \quad (2-19)$$

onde e é a energia interna, k é a condutividade térmica, T é a temperatura, Q é a geração de energia interna e Φ é a função de dissipação, que é definida como:

$$\Phi = \mu \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (2-20)$$

Para fluidos incompressíveis é conveniente reescrever a equação (2-19) em termos da temperatura, ou seja:

$$\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} + \rho w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{c_p} \nabla^2 T + \frac{\mu}{c_p} \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2-21)$$

onde c_p é o calor específico a pressão constante. Novamente, observa-se que para fluido incompressível, com propriedades constantes $\text{div } \vec{V} = 0$. Além disso, nesta equação assume-se que não há geração de energia interna, $Q=0$.

2.4 Equações de conservação em duas dimensões

O desenvolvimento matemático do método de expansão em funções hierárquicas, proposto neste trabalho, envolve as equações da conservação de massa, quantidade de movimento e energia em duas dimensões. Assim, reduzindo as equações (2-2), (2-16), (2-17), (2-18) e (2-21), para as coordenadas cartesianas x e z , obtém-se um novo conjunto de equações.

A partir da equação (2-2) obtém-se a equação da conservação de massa em duas dimensões, que é dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2-22)$$

As equações da quantidade de movimento originam-se das equações (2-16) e (2-18), e são apresentadas a seguir para as coordenadas cartesianas x e z , respectivamente:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2-23)$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (2-24)$$

Finalmente, reduzindo-se a equação (2-21) de três para duas dimensões, obtém-se então, a equação da energia nas direções x e z , dada por:

$$\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{c_p} \nabla^2 T + \frac{\mu}{c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{2\mu}{c_p} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (2-25)$$

2.5 Método de Chorin

Durante muito tempo o acoplamento pressão-velocidade era resolvido pelas funções corrente e vorticidade. No entanto, esta técnica apresenta certos inconvenientes, sendo que o maior deles é que as funções corrente e vorticidade são válidas apenas para duas dimensões, o que limita o método.

Como já foi mencionado anteriormente, em escoamentos incompressíveis ou mesmo de fluidos compressíveis a baixa velocidade, a dificuldade é determinar o campo de pressão que, quando inserido nas equações da quantidade de movimento, gera um campo de velocidades que satisfaz a equação da continuidade. Em outras palavras, em razão da massa específica não variar com a pressão, no caso de fluidos incompressíveis, é necessário gerar uma equação para a pressão que satisfaz a equação de conservação de massa, de forma a permitir a solução do escoamento.

Existem muitos métodos para o tratamento do acoplamento pressão-velocidade, como proposto por **Chorin (1967)**, **Amsden e Harlow (1970)**, **Chorin (1971)** e **Patankar e Spalding (1972)** entre outros, como visto no Capítulo 1. O objetivo de todos estes métodos é o de criar uma equação para a pressão, cuja solução ao ser introduzida nas equações de quantidade de movimento, gera um campo de velocidades que satisfaz a equação da conservação de massa. Um dos precursores neste tipo de tratamento foi **Chorin (1967 e 1971)**. Ressalta-se que o método de Chorin é utilizado neste trabalho, devido à simplicidade do mesmo no tratamento das equações da quantidade de movimento.

Chorin (1967 e 1971) desenvolveu dois métodos para resolver o problema de acoplamento entre a pressão e a velocidade para escoamento de fluidos incompressíveis. Um deles aplica-se apenas à solução de problemas em regime permanente. Neste caso utiliza-se o conceito de compressibilidade artificial, ou seja, trata-se o escoamento como compressível, sendo que a compressibilidade desaparece quando se obtém a solução do estado estacionário.

Neste trabalho foi adotado o segundo método proposto por **Chorin (1971)**, que se aplica à solução de problemas transitórios. Neste caso, é utilizado um artifício para a solução das equações da quantidade de movimento, para cada uma das direções, é dividida em duas equações. A primeira equação relaciona as componentes da velocidade do fluido u e w , em termos das componentes de uma pseudovelocidade, denominadas u^* e w^* . Estas novas equações de conservação da quantidade de movimento possuem apenas os termos temporais, convectivos e viscosos, que estão devidamente relacionadas com as componentes da pseudovelocidade. A segunda equação calcula o gradiente da pressão em função das componentes da pseudovelocidade, u^* e w^* . Obtém-se então, um novo conjunto de equações descritas em função das componentes da velocidade, das componentes da pseudovelocidade e da pressão, para cada uma das direções x e z .

Para uma melhor compreensão do método de Chorin estão descritas a seguir as equações que compõem esse método.

Inicia-se o desenvolvimento matemático do método aproximando-se a derivada temporal, que está presente na equação da quantidade de movimento na direção x , equação (2-23), por uma diferença para trás, segundo o método das diferenças finitas, como pode ser visto a seguir:

$$\rho \left(\frac{u - u^{t-\Delta t}}{\Delta t} \right) + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} + = - \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2-26)$$

onde u é a velocidade na direção x , Δt é o intervalo de tempo, $u^{t-\Delta t}$ é a velocidade na direção x calculada no instante de tempo anterior $t-\Delta t$, u e w são as componentes das

velocidade nas direções x e z , respectivamente, para o atual instante de tempo t , sendo que nesta equação este índice é suprimido a fim de facilitar a notação matemática.

Conforme **Chorin (1971)** a pseudovelocidade u^* é definida pela equação da quantidade de movimento na direção x sem o termo referente ao gradiente da pressão, da seguinte forma:

$$\rho \left(\frac{u^* - u^{t-\Delta t}}{\Delta t} \right) + \rho u \frac{\partial u^*}{\partial x} + \rho w \frac{\partial u^*}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2} \right) \quad (2-27)$$

A componente da velocidade na direção x é obtida a partir de uma correção na pseudovelocidade u^* utilizando-se o gradiente de pressão na direção x , da seguinte forma:

$$\rho u = \rho u^* - \Delta t \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2-28)$$

Adota-se o mesmo procedimento matemático, utilizado anteriormente, para a equação da quantidade de movimento na direção z , equação (2-24), que também é dividida em duas partes, como pode ser visto a seguir:

$$\rho \left(\frac{w^* - w^{t-\Delta t}}{\Delta t} \right) + \rho u \frac{\partial w^*}{\partial x} + \rho w \frac{\partial w^*}{\partial z} - \mu \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^2} \right) = 0, \quad (2-29)$$

onde w^* é a pseudovelocidade na direção z e $w^{t-\Delta t}$ é a velocidade na direção z calculada no instante de tempo anterior $t-\Delta t$.

Similarmente, a componente z da velocidade, w , é obtida através de uma correção da pseudovelocidade w^* , da seguinte forma:

$$\rho w = \rho w^* - \Delta t \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2-30)$$

Assim, as componentes da pseudovelocidade, u^* e w^* , podem ser calculadas diretamente das equações (2-27) e (2-29) respectivamente. Enquanto que por meio das equações (2-28) e (2-30) calcula-se as componentes da velocidade, u e w , para o atual instante de tempo t , uma vez conhecido o novo campo de pressão p .

Para o cálculo da pressão deriva-se uma equação que relaciona a pressão p e as componentes da pseudovelocidade, u^* e w^* . Esta equação é obtida diferenciando-se a equação (2-28) em relação à direção x e a equação (2-30) em relação à direção z , resultando nas seguintes expressões:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} = \frac{\partial \rho u^*}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\Delta t \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (2-31)$$

e

$$\frac{\partial \rho w}{\partial z} = \frac{\partial \rho w^*}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\Delta t \frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (2-32)$$

Somando-se as equações (2-31) e (2-32) e considerando que o fluido é incompressível ($\rho = \text{constante}$), obtém-se a seguinte equação:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial w^*}{\partial z} \right) \quad (2-33)$$

Fazendo uso da equação da continuidade (2-22), o primeiro termo do lado esquerdo da equação (2-33) é igual a zero, assim, obtém-se uma equação de Poisson para a pressão, dada por:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial w^*}{\partial z} \right). \quad (2-34)$$

Conhecido o novo campo de pressão p , dado pela equação (2-34), pode-se determinar as velocidades u e w no atual instante de tempo t , a partir das equações (2-28) e (2-30) respectivamente.

Salienta-se que embora a equação da continuidade não apareça explicitamente nos passos do algoritmo do método de Chorin, a mesma encontra-se embutida na equação de Poisson para a pressão.

Em cada instante de tempo a solução das equações (2-27), (2-28), (2-29), (2-30) e (2-34), para obter as componentes u e w da velocidade e a pressão, é realizada de forma iterativa, segundo os seguintes passos:

1. obter u^* e w^* das equações (2-27) e (2-29), respectivamente;
2. calcular p através da equação (2-34);
3. calcular u e w usando as equações (2-28) e (2-30), respectivamente;
4. iteragir entre os itens 1 e 3 até determinar as componentes da velocidade, u e w , e a pressão dentro da precisão desejada; e
5. avançar para o novo nível de tempo.

Observa-se que o Método da Expansão em Funções Hierárquicas (MEFH), proposto neste trabalho, utiliza o método de Chorin para a solução de problemas transitórios na solução das equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis em

duas dimensões. O desenvolvimento matemático deste método é apresentado detalhadamente no Capítulo 3.

CAPÍTULO 3

DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

O método numérico proposto neste trabalho consiste na aplicação do método da expansão em funções hierárquicas para a solução de problemas de dinâmica de fluidos em duas dimensões. São utilizados neste novo método as equações de conservação da quantidade de movimento e da pressão, obtidas da aplicação do método de Chorin, e a equação da conservação da energia, conforme descrito no Capítulo 2. Este conjunto de equações é composto das equações que calculam as componentes da pseudovelocidade, u^* e w^* , nas coordenadas cartesianas x e z , respectivamente:

$$\rho \left(\frac{u^* - u^{t-\Delta t}}{\Delta t} \right) + \rho u \frac{\partial u^*}{\partial x} + \rho w \frac{\partial u^*}{\partial z} - \mu \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2} \right) = 0 ; \quad (3-1)$$

$$\rho \left(\frac{w^* - w^{t-\Delta t}}{\Delta t} \right) + \rho u \frac{\partial w^*}{\partial x} + \rho w \frac{\partial w^*}{\partial z} - \mu \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^2} \right) = 0 ; \quad (3-2)$$

das equações das velocidades u e w , nas direções x e z , respectivamente:

$$\rho u = \rho u^* - \Delta t \frac{\partial p}{\partial x} ; \quad (3-3)$$

$$\rho w = \rho w^* - \Delta t \frac{\partial p}{\partial z} ; \quad (3-4)$$

e finalmente da equação de Poisson para a pressão, dada por:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial w^*}{\partial z} \right) \quad (3-5)$$

Ressalta-se que a solução deste conjunto de equações segue os passos do algoritmo proposto por Chorin, descrito no Capítulo 2.

Como a equação da energia encontra-se desacoplada das outras equações de conservação, a mesma pode ser resolvida separadamente. Como este trabalho trata apenas de fluidos incompressíveis a equação da energia foi convenientemente escrita, como já vista no Capítulo 2, em termos da temperatura, para as coordenadas cartesianas x e z , ou seja:

$$\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{c_p} \nabla^2 T + \frac{\mu}{c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{2\mu}{c_p} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (3-6)$$

Neste trabalho são utilizadas as formulações de Petrov-Galerkin e Galerkin na solução das equações de Navier-Stokes, sendo que as funções de expansão utilizadas são baseadas em polinômios de Legendre, ajustadas nos elementos retangulares de forma conveniente.

A seguir são apresentados todos os passos do desenvolvimento matemático aplicado ao conjunto de equações gerado pelo método de Chorin e a equação da conservação da energia, equações (3-1) a (3-6), para resolver problemas de escoamento de fluidos incompressíveis em duas dimensões. O primeiro passo é integrar e pesar este conjunto de equações em cada elemento. A função peso utilizada para os termos

convectivos segue a formulação Petrov-Galerkin e a função peso utilizada para os outros termos (temporais, viscosos e difusivos) segue a formulação Galerkin, onde as funções peso são as próprias funções de expansão. A partir desta manipulação matemática, obtém-se então, um conjunto de equações cuja solução representa o campo de velocidades, pressão e temperatura do fluido.

3.1 Discretização do domínio da solução

Como mencionado anteriormente este trabalho utiliza malhas cartesianas estruturadas para a discretização do domínio da solução. A Figura 3.1 apresenta um esquema de uma malha retangular estruturada, da forma como é utilizada nesta tese.

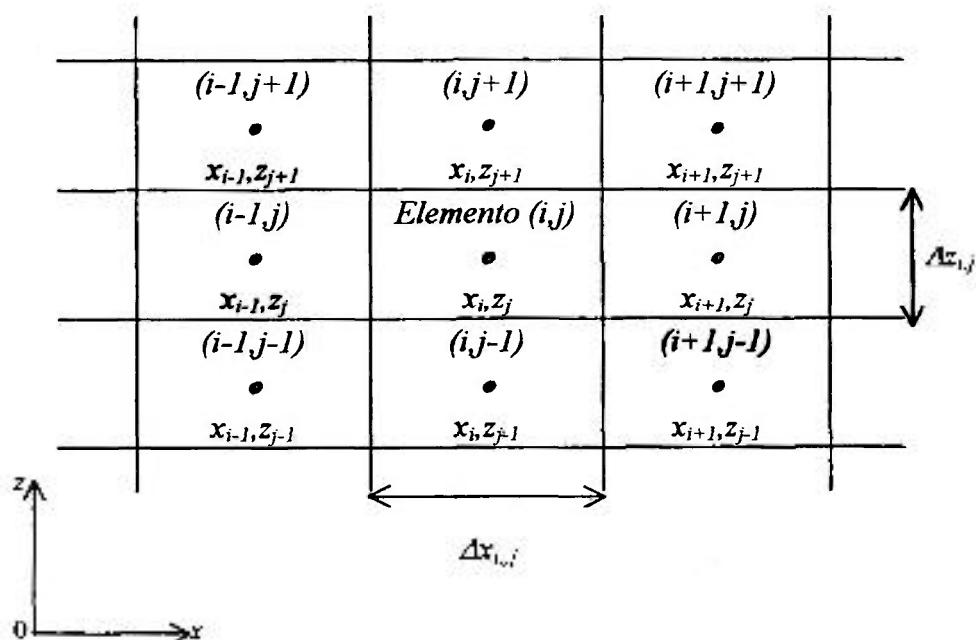


Figura 3.1 – Esquema da malha retangular utilizada.

Na malha da Figura 3.1 $\Delta x_{i,j}$ é o espaçamento na direção x do elemento i,j , $\Delta z_{i,j}$ é o espaçamento na direção z do elemento i,j e as coordenadas $x_{i,j}$ e $z_{i,j}$ representam o ponto central do elemento i,j .

Para facilitar a solução das equações de conservação e posteriormente permitir o uso de geometrias irregulares, sem grandes modificações nas equações, é utilizado um outro sistema de coordenadas. Neste novo sistema, as coordenadas são as variáveis ξ e η , cuja correspondência com as coordenadas do sistema cartesiano x e z , de cada elemento, é dada por:

$$\xi = 2 \frac{(x - x_{i,j})}{\Delta x_{i,j}} \quad (3-7)$$

$$\eta = 2 \frac{(z - z_{i,j})}{\Delta z_{i,j}} \quad (3-8)$$

Observa-se que tanto ξ e η variam de -1 a 1 dentro do elemento i,j . Nota-se que as coordenadas ξ e η são coordenadas locais de cada elemento.

As derivadas das coordenadas ξ e η em função das coordenadas cartesianas x e z , são obtidas pela derivação das equações (3-7) e (3-8) respectivamente, obtendo-se o seguinte:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{2}{\Delta x_{i,j}} \quad (3-9)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{2}{\Delta z_{i,j}} \quad (3-10)$$

As variáveis u^* , w^* , u , w , p e T , são descritas por uma série de funções dentro de cada um dos elementos i,j , do domínio de discretização, como se segue:

$$u^* = \sum_{m=1}^M u_m^* N_m, \quad w^* = \sum_{m=1}^M w_m^* N_m, \quad u = \sum_{m=1}^M u_m N_m, \quad w = \sum_{m=1}^M w_m N_m, \quad (3-11)$$

$$p = \sum_{m=1}^M p_m N_m, \quad T = \sum_{m=1}^M T_m N_m.$$

onde M é o número total de funções utilizadas na expansão das variáveis em série, N_m é a m -ésima função de expansão para o elemento i,j e u_m^* , w_m^* , u_m , w_m , p_m e T_m são respectivamente os coeficientes das variáveis u^* , w^* , u , w , p e T , correspondentes à m -ésima função de expansão. Dependendo do grau da expansão, ou do número de funções de expansão utilizadas nas séries, pode-se ajustar a precisão desejada para a solução.

As funções de expansão das variáveis são baseadas nos polinômios de Legendre e ajustadas aos elementos retangulares. Uma descrição destas funções é fornecida no item 3.4.

3.2 Desenvolvimento matemático das equações de conservação para um elemento

As equações utilizadas para calcular o escoamento desejado são obtidas pela integração ponderada das equações da conservação da quantidade de movimento, da pressão e da conservação da energia, equações (3-1) a (3-6), como é mostrado no desenvolvimento que se segue.

Pesando-se e integrando-se as equações da pseudovelocidade u^* e da velocidade u no elemento i,j , equações (3-1) e (3-3) respectivamente, obtém-se as seguintes expressões:

$$\int_V N_m \rho \frac{u^* - u^{t-\Delta t}}{\Delta t} dV + \int_V P_m \rho u \frac{\partial u^*}{\partial x} dV + \int_V P_m \rho w \frac{\partial u^*}{\partial z} dV - \int_V N_m \mu \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2} \right) dV = 0 \quad (3-12)$$

e

$$\int_V N_m \rho u dV = \int_V N_m \rho u^* dV - \Delta t \int_V P_m \rho \frac{\partial p}{\partial x} dV, \quad (3-13)$$

onde V é o volume do elemento i,j e P_m é a função peso associada à m -ésima função de expansão para o elemento i,j . A função peso P_m segue a formulação de Petrov-Galerkin sendo dada, segundo **Hughes e Brooks (1982)**, por:

$$P_m = N_m + \frac{\Delta t}{2} \bar{u} \frac{\partial N_m}{\partial x} + \frac{\Delta t}{2} \bar{w} \frac{\partial N_m}{\partial z} - \frac{\mu \Delta t}{2\rho} \left(\frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_m}{\partial z^2} \right), \quad (3-14)$$

onde \bar{u} é a velocidade média no elemento na direção x e \bar{w} é a velocidade média no elemento na direção z .

De forma análoga, pesando-se e integrando-se as equações das velocidades (3-2) e (3-4) para a direção z , no elemento i,j de volume V , obtém-se o seguinte conjunto de equações para w^* e w elemento i,j :

$$\int_V N_m \rho \frac{w^* - w^{j-\Delta t}}{\Delta t} dV + \int_V P_m \rho u \frac{\partial w^*}{\partial x} dV + \int_V P_m \rho w \frac{\partial w^*}{\partial z} dV - \int_V N_m \mu \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^2} \right) dV = 0 \quad (3-15)$$

$$\int_V N_m \rho w dV = \int_V N_m \rho w^* dV - \Delta t \int_V P_m \frac{\partial p}{\partial z} dV. \quad (3-16)$$

Pesando-se e integrando-se a equação de Poisson para pressão, equação (3-5), no elemento ij de volume V , obtém-se:

$$\int_V N_m \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} dV + \int_V N_m \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} dV = \frac{1}{\Delta t} \left(\int_V P_m \frac{\partial u^*}{\partial x} dV + \int_V P_m \frac{\partial w^*}{\partial z} dV \right) \quad (3-17)$$

Finalmente integrando-se e pesando-se a equação de conservação da energia, dada pela equação (3-6), no elemento ij obtém-se a seguinte expressão:

$$\int_V P_m \rho \frac{\partial T}{\partial t} dV + \int_V P_m \rho \frac{\partial T}{\partial x} dV + \int_V P_m \rho \frac{\partial T}{\partial z} dV - \int_V N_m \frac{K}{c_p} \nabla^2 T dV + \int_V N_m \frac{\mu}{c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dV + \int_V N_m \frac{2\mu}{c_p} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] dV = 0. \quad (3-18)$$

Observa-se que na verdade cada uma das equações (3-12), (3-13), (3-15), (3-16), (3-17) e (3-18) representam um sistema de M equações para o elemento ij . Sendo que a m -ésima equação corresponde ao m -ésimo coeficiente da expansão da correspondente variável ou da m -ésima função de expansão.

A partir destas equações obtidas pela integração das equações de conservação no elemento da malha, aplica-se o método de expansão em funções hierárquicas para a obtenção das variáveis desejadas. Na seqüência são obtidas as equações das componentes da pseudovelocidade, das componentes das velocidade, da pressão e da temperatura, nas coordenadas x e z , onde observa-se que cada equação é tratada separadamente.

3.2.1 Equação da componente da pseudovelocidade na direção x , u^*

Para a obtenção da expressão utilizada no cálculo da componente u^* da pseudovelocidade, aplica-se inicialmente o Teorema de Green na equação (3-12), chegando-se ao seguinte:

$$\rho \int_V N_m \frac{u^* - u^{i-\Delta t}}{\Delta t} dV + \rho \int_V P_m u \frac{\partial u^*}{\partial x} dV + \rho \int_V P_m w \frac{\partial u^*}{\partial z} dV -$$

$$-\mu \left[\oint_S N_m \frac{\partial u^*}{\partial x} dS - \int_V \frac{\partial N_m}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial x} dV \right] - \mu \left[\oint_S N_m \frac{\partial u^*}{\partial z} dS - \int_V \frac{\partial N_m}{\partial z} \frac{\partial u^*}{\partial z} dV \right] = 0,$$

$$\text{para } m = 1, \dots, M, \quad (3-19)$$

onde S é a área externa do elemento ij .

Abrindo as integrais da equação acima, para as direções x e z , tem-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
& \rho \iint_{xz} N_m \frac{u^* - u^{t-\Delta t}}{\Delta t} dx dz + \rho \iint_{xz} P_m u \frac{\partial u^*}{\partial x} dx dz + \rho \iint_{xz} P_m w \frac{\partial u^*}{\partial z} dx dz - \\
& - \mu \left[\int_x \left(N_m \frac{\partial u^*}{\partial x} \right)_{x=L_x} dz - \iint_{xz} \frac{\partial N_m}{\partial x} \frac{\partial u^*}{\partial x} dx dz \right] - \mu \left[\int_x \left(N_m \frac{\partial u^*}{\partial z} \right)_{z=L_z} dx - \right. \\
& \left. - \iint_{xz} \frac{\partial N_m}{\partial z} \frac{\partial u^*}{\partial z} dx dz \right] = 0, \text{ para } m = 1, \dots, M \quad (3-20)
\end{aligned}$$

onde L_x e L_z representam simbolicamente os respectivos extremos x e z de cada um dos elementos da malha. Nota-se que nesta equação assume-se largura unitária para o domínio na direção z .

A fim de facilitar o cálculo das integrais e facilitar futuramente o uso de geometrias irregulares faz-se a mudança do sistema de coordenadas de x, z para ξ, η , por meio das equações (3-7), (3-8), (3-9) e (3-10). Além disso, introduzindo-se a expansão das variáveis u^* e u , dadas por (3-11), obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^M u_n^* \left\{ \rho \frac{\Delta x_{i,j} \Delta z_{i,j}}{4\Delta t} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m N_n d\xi d\eta + \rho \sum_{k=1}^M u_k \frac{\Delta z_{i,j}}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} N_k d\xi d\eta + \right. \\
& + \rho \sum_{k=1}^M w_k \frac{\Delta x_{i,j}}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_m \frac{\partial N_n}{\partial \eta} N_k d\xi d\eta - \mu \frac{\Delta z_{i,j}}{\Delta x_{i,j}} \left[\int_{-1}^1 \left(N_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \right)_{\eta=-1}^{\eta=1} d\xi - \right. \\
& \left. - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_m}{\partial \xi} \frac{\partial N_n}{\partial \xi} d\xi d\eta \right] - \mu \frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta z_{i,j}} \left[\int_{-1}^1 \left(N_m \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \right)_{\xi=-1}^{\xi=1} d\eta - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_m}{\partial \eta} \frac{\partial N_n}{\partial \eta} d\xi d\eta \right] \left. \right\} = \\
& = \rho \frac{\Delta x_{i,j} \Delta z_{i,j}}{4\Delta t} \sum_{n=1}^M u_n^{t-\Delta t} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m N_n d\xi d\eta, \text{ para } m = 1, \dots, M \quad (3-21)
\end{aligned}$$

Dividindo a equação (3-21) por $\frac{\Delta x_{i,j} \Delta z_{i,j}}{4}$ e colocando-a na forma matricial,

tem-se:

$$\underline{\mathbf{A}}_{\underline{u}}^{i,j} \vec{u}^* = \bar{\mathbf{b}}_{\underline{u}}^{i,j}, \quad (3-22)$$

onde $\underline{\mathbf{A}}_{\underline{u}}^{i,j}$ é a matriz de expansão da variável \vec{u}^* para o elemento i,j , \vec{u}^* é o vetor dos coeficientes da variável \vec{u}^* para o elemento i,j e $\bar{\mathbf{b}}_{\underline{u}}^{i,j}$ é o vetor resultante para a variável \vec{u}^* para o elemento i,j . Nota-se que a dimensão da matriz $\underline{\mathbf{A}}_{\underline{u}}^{i,j}$ é $(M \times M)$ e a dimensão dos

vetores \vec{u}^* e $\bar{\mathbf{b}}_{\underline{u}}^{i,j}$ é $(M \times 1)$. O elemento (m,n) da matriz $\underline{\mathbf{A}}_{\underline{u}}^{i,j}$ é dado por:

$$\begin{aligned} A_{\underline{u}}^{i,j}{}_{m,n} = & \rho \frac{1}{\Delta t} \alpha_{m,n}^{i,j} + \sum_{n=1}^M u_n \left[\rho \sum_{k=1}^M u_k \frac{2}{\Delta x_{i,j}} \beta_{m,n,k}^{i,j} + \rho \sum_{k=1}^M w_k \gamma_{m,n,k}^{i,j} - \right. \\ & \left. - \mu \frac{4}{\Delta x_{i,j}^2} (C_{z,m,n}^{i,j} - D_{z,m,n}^{i,j}) - \mu \frac{4}{\Delta z_{i,j}^2} (C_{x,m,n}^{i,j} - D_{x,m,n}^{i,j}) \right], \end{aligned} \quad (3-23)$$

e o m -ésimo componente do vetor resultante, para o elemento i,j , que é dado por:

$$b_{\underline{u}}^{i,j}{}_{m} = \frac{\rho}{\Delta t} \sum_{n=1}^M u_n^{t-\Delta t} \alpha_{m,n}^{i,j}, \quad (3-24)$$

os parâmetros $\underline{\alpha}^{i,j}$, $\underline{C}_z^{i,j}$, $\underline{C}_x^{i,j}$, $\underline{D}_x^{i,j}$ e $\underline{D}_z^{i,j}$, contém as matrizes de dimensões $(M \times M)$ e os parâmetros $\underline{\beta}^{i,j}$ e $\underline{\gamma}^{i,j}$ formam matrizes com dimensões $(M \times M \times M)$, ou seja, de três dimensões. Cada um dos elementos destas matrizes são definidas por integrais das funções peso e expansão, da seguinte forma:

$$\alpha_{m,n}^{i,j} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m N_n d\xi d\eta, \quad (3-25)$$

$$\begin{aligned} \beta_{m,n,k}^{i,j} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} N_k d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} N_k d\xi d\eta + \bar{u} \frac{\Delta t}{\Delta x_{i,j}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_m}{\partial \xi} \frac{\partial N_n}{\partial \xi} N_k d\xi d\eta + \\ &+ \bar{w} \frac{\Delta t}{\Delta z_{i,j}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_m}{\partial \eta} \frac{\partial N_n}{\partial \xi} N_k d\xi d\eta - \frac{2\mu}{\rho} \frac{\Delta t}{\Delta x_{i,j}^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 N_m}{\partial \xi^2} \frac{\partial N_n}{\partial \xi} N_k d\xi d\eta - \\ &- \frac{2\mu}{\rho} \frac{\Delta t}{\Delta z_{i,j}^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 N_m}{\partial \eta^2} \frac{\partial N_n}{\partial \xi} N_k d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (3-26)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{m,n,k}^{i,j} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_m \frac{\partial N_n}{\partial \eta} N_k d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m \frac{\partial N_n}{\partial \eta} N_k d\xi d\eta + \bar{u} \frac{\Delta t}{\Delta x_{i,j}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_m}{\partial \xi} \frac{\partial N_n}{\partial \eta} N_k d\xi d\eta + \\ &+ \bar{w} \frac{\Delta t}{\Delta z_{i,j}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_m}{\partial \eta} \frac{\partial N_n}{\partial \eta} N_k d\xi d\eta - \frac{2\mu}{\rho} \frac{\Delta t}{\Delta x_{i,j}^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 N_m}{\partial \xi^2} \frac{\partial N_n}{\partial \eta} N_k d\xi d\eta - \\ &- \frac{2\mu}{\rho} \frac{\Delta t}{\Delta z_{i,j}^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 N_m}{\partial \eta^2} \frac{\partial N_n}{\partial \eta} N_k d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (3-27)$$

$$C_{xmn}^{i,j} = \int_{-1}^1 \left(N_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \right)_{\eta=-1}^{\eta=1} d\xi = fcs \int_{-1}^1 N_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} d\xi - fci \int_{-1}^1 N_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \Big|_{\eta=-1} d\xi, \quad (3-28)$$

$$C_{xmn}^{i,j} = \int_{-1}^1 \left(N_m \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \right)_{\xi=-1}^{\xi=1} d\eta = fcd \int_{-1}^1 N_m \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \Big|_{\xi=1} d\eta - fce \int_{-1}^1 N_m \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \Big|_{\xi=-1} d\eta, \quad (3-29)$$

$$D_{xmn}^{i,j} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_m}{\partial \xi} \frac{\partial N_n}{\partial \xi} d\xi d\eta \quad (3-30)$$

$$D_{x\ m,n}^{i,j} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_m}{\partial \eta} \frac{\partial N_n}{\partial \eta} d\xi d\eta \quad (3-31)$$

Observa-se que P_m é a função peso dada pela equação (3-14). Nota-se que a matriz de parâmetros $\underline{\alpha}^{i,j}$ está associada com o termo temporal, as matrizes dos parâmetros $\underline{\beta}^{i,j}$ e $\underline{\gamma}^{i,j}$ com os termos convectivos, as matrizes $\underline{D}_x^{i,j}$ e $\underline{D}_z^{i,j}$ com os termos difusivos, a matriz $\underline{C}_x^{i,j}$ com as condições de contorno nas faces x do elemento e a matriz $\underline{C}_z^{i,j}$ com as condições de contorno nas faces z do elemento.

Os termos fcd , fce , fcs e fci que aparecem nos parâmetros de contorno $C_{x\ m,n}^{i,j}$ e $C_{z\ m,n}^{i,j}$, são denominados de fatores de contorno e são definidos como se segue:

\underline{fcd} : é igual a 1 se a face direita do elemento i,j estiver no contorno do domínio da solução e igual a zero se não estiver,

\underline{fce} : é igual a 1 se a face esquerda do elemento i,j estiver no contorno do domínio da solução e igual a zero se não estiver,

\underline{fcs} : é igual a 1 se a face superior do elemento i,j estiver no contorno do domínio da solução e igual a zero se não estiver e

\underline{fci} : é igual a 1 se a face inferior do elemento i,j estiver no contorno do domínio da solução e igual a zero se não estiver.

3.2.2 Equação da componente da velocidade na direção x, u

Para o desenvolvimento da expressão utilizada para o cálculo da componente u da velocidade, as integrais da equação (3-13) são abertas em cada uma das direções x e z , obtendo-se a seguinte expressão:

$$\rho \iint_{xz} N_m u \, dx \, dz = \rho \iint_{xz} N_m u^* \, dx \, dz - \Delta t \iint_{xz} P_m \frac{\partial p}{\partial x} \, dx \, dz, \text{ para } m = 1, \dots, M. \quad (3-32)$$

O mesmo procedimento matemático adotado na obtenção da equação da pseudovelocidade u^* é empregado para desenvolver a equação da velocidade u . Inicialmente faz-se a mudança do sistema de coordenadas x, z para as variáveis locais ξ e η , de acordo com as equações (3-7), (3-8), (3-9) e (3-10), respectivamente. Introduzindo-se a expansão para as variáveis u^*, u e p , dadas por (3-11), obtém-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\Delta x_{i,j} \Delta z_{i,j}}{4} \sum_{n=1}^M u_n \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m N_n \, d\xi \, d\eta = \rho \frac{\Delta x_{i,j} \Delta z_{i,j}}{4} \sum_{n=1}^M u_n^* \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m N_n \, d\xi \, d\eta \\ - \Delta t \frac{\Delta z_{i,j}}{2} \sum_{n=1}^M p_n^{n+1} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \, d\xi \, d\eta, \end{aligned}$$

$$\text{para } m = 1, \dots, M. \quad (3-33)$$

Dividindo-se a equação (3-33) por $\frac{\Delta x_{i,j} \Delta z_{i,j}}{4}$ e reescrevendo-se na forma matricial,

obtém-se o seguinte:

$$\underline{\Delta}_u^{i,j} \bar{u}^{i,j} = \bar{b}_u^{i,j}, \quad (3-34)$$

onde $\underline{A}_u^{i,j}$ é a matriz de expansão da componente u da velocidade no elemento i,j , $\bar{u}^{i,j}$ é o vetor de coeficientes da velocidade u no elemento i,j e $\bar{b}_u^{i,j}$ é o vetor resultante para a variável u para o elemento i,j . Novamente, ressalta-se que a dimensão da matriz $\underline{A}_u^{i,j}$ é $(M \times M)$ e a dimensão dos vetores são $(M \times 1)$. O elemento (m,n) da matriz $\underline{A}_u^{i,j}$ é definido por:

$$A_{u,m,n}^{i,j} = \rho \frac{J}{\Delta t} \alpha_{m,n}^{i,j}, \quad (3-35)$$

onde $\alpha_{m,n}^{i,j}$ é definido pela equação (3-25). O m -ésimo elemento do vetor $\bar{b}_u^{i,j}$ é dado por:

$$b_{u,m}^{i,j} = \rho \sum_{n=1}^M u_n^* \alpha_{m,n}^{i,j} - \frac{2\Delta t}{\Delta x_{i,j}} \sum_{n=1}^M \rho_n \Omega_{m,n}^{i,j}, \quad (3-36)$$

onde $\Omega_{m,n}^{i,j}$ é definida por:

$$\begin{aligned} \Omega_{m,n}^{i,j} = & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_m \cdot \frac{\partial N_n}{\partial \xi} d\xi d\eta - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m \cdot \frac{\partial N_n}{\partial \xi} d\xi d\eta + \bar{u} \frac{\Delta t}{\Delta x_{i,j}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_m}{\partial \xi} \frac{\partial N_n}{\partial \xi} d\xi d\eta + \\ & + \bar{w} \frac{\Delta t}{\Delta z_{i,j}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_m}{\partial \eta} \frac{\partial N_n}{\partial \xi} d\xi d\eta - \frac{2\mu}{\rho} \frac{\Delta t}{\Delta x_{i,j}^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 N_m}{\partial \xi^2} \frac{\partial N_n}{\partial \xi} d\xi d\eta - \\ & - \frac{2\mu}{\rho} \frac{\Delta t}{\Delta z_{i,j}^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 N_m}{\partial \eta^2} \frac{\partial N_n}{\partial \xi} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (3-37)$$

3.2.3 Equação da componente da pseudovelocidade na direção z , w^*

Na obtenção da expressão utilizada para o cálculo da componente da pseudovelocidade w^* , adota-se o mesmo procedimento matemático utilizado para o cálculo

da pseudovelocidade na direção x . Isto é, aplica-se Teorema de Green na equação (3-15) e obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & \rho \int_V N_m \frac{w^* - w^{t-\Delta t}}{\Delta t} dV + \rho \int_V P_m u \frac{\partial w^*}{\partial x} dV + \rho \int_V P_m w \frac{\partial w^*}{\partial z} dV - \\ & - \mu \left[\oint_S N_m \frac{\partial w^*}{\partial x} dS - \int_V \frac{\partial N_m}{\partial x} \frac{\partial w^*}{\partial x} dV \right] - \mu \left[\oint_S N_m \frac{\partial w^*}{\partial z} dS - \int_V \frac{\partial N_m}{\partial z} \frac{\partial w^*}{\partial z} dV \right] = 0, \end{aligned}$$

para $m = 1, \dots, M$. (3-38)

Abre-se as integrais nas direções x e z e reescreve-se a equação anterior da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \rho \iint_{xz} N_m \frac{w^* - w^{t-\Delta t}}{\Delta t} dx dz + \rho \iint_{xz} P_m u \frac{\partial w^*}{\partial x} dx dz + \rho \iint_{xz} P_m w \frac{\partial w^*}{\partial z} dx dz - \\ & - \mu \left[\int_z \left(N_m \frac{\partial w^*}{\partial x} \right)_{x=L_1} dz - \iint_{xz} \frac{\partial N_m}{\partial x} \frac{\partial w^*}{\partial x} dx dz \right] - \mu \left[\int_x \left(N_m \frac{\partial w^*}{\partial z} \right)_{z=L_2} dx - \right. \\ & \left. - \iint_{xz} \frac{\partial N_m}{\partial z} \frac{\partial w^*}{\partial z} dx dz \right] = 0, \text{ para } m = 1, \dots, M. \end{aligned}$$
(3-39)

Fazendo a mudança de variáveis de x e z para ξ e η , conforme as equações (3-7), (3-8), (3-9) e (3-10) e introduzindo a expansão para as variáveis w^* , w , $w^{t-\Delta t}$, u e p , segundo a equação (3-11), a equação anterior assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^M w_n^* \left\{ \rho \frac{\Delta x_{i,j} \Delta z_{i,j}}{4 \Delta t} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m N_n d\xi d\eta + \rho \sum_{k=1}^M u_k \frac{\Delta z_{i,j}}{2} \int_{-1}^1 P_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} N_k d\xi d\eta + \right. \\
& + \rho \sum_{k=1}^M w_k \frac{\Delta x_{i,j}}{2} \int_{-1}^1 P_m \frac{\partial N_n}{\partial \eta} N_k d\xi d\eta - \mu \frac{\Delta z_{i,j}}{\Delta x_{i,j}} \left[\int_{-1}^1 \left(N_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \right)_{\eta=-1}^{\eta=1} d\xi - \right. \\
& \left. \left. - \int_{-1}^1 \frac{\partial N_m}{\partial \xi} \frac{\partial N_n}{\partial \xi} d\xi d\eta \right] - \mu \frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta z_{i,j}} \left[\int_{-1}^1 \left(N_m \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \right)_{\xi=-1}^{\xi=1} d\eta - \int_{-1}^1 \frac{\partial N_m}{\partial \eta} \frac{\partial N_n}{\partial \eta} d\xi d\eta \right] \right\} = \\
& = \rho \frac{\Delta x_{i,j} \Delta z_{i,j}}{4 \Delta t} \sum_{n=1}^M w_n^{t-\Delta t} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m N_n, \text{ para } m = 1, \dots, M. \tag{3-40}
\end{aligned}$$

Dividindo a equação (3-40) por $\frac{\Delta x_{i,j} \Delta z_{i,j}}{4}$ e substituindo adequadamente as integrais duplas pelos parâmetros $\alpha_{m,n}^{i,j}$, $\beta_{m,n,k}^{i,j}$ e $\gamma_{m,n,k}^{i,j}$, pode-se então reescrever a mesma na forma matricial, ou seja:

$$\underline{\mathbf{A}}_{w^*}^{i,j} \overset{\rightarrow}{w^*} = \overset{\rightarrow}{\mathbf{b}}_{w^*}^{i,j}, \tag{3-41}$$

onde $\underline{\mathbf{A}}_{w^*}^{i,j}$ é a matriz de expansão da variável w^* para o elemento ij , $\overset{\rightarrow}{w^*}$ é o vetor de coeficientes da variável w^* no elemento ij e $\overset{\rightarrow}{\mathbf{b}}_{w^*}^{i,j}$ é o vetor resultante para a variável w^* para o elemento ij . A dimensão da matriz $\underline{\mathbf{A}}_{w^*}^{i,j}$ é $(M \times M)$ e a dimensão dos vetores são $(M \times 1)$. O elemento (m,n) da matriz $\underline{\mathbf{A}}_{w^*}^{i,j}$ é definido por:

$$\begin{aligned}
 A_{w m, n}^{i, j} = & \rho \frac{1}{\Delta t} \alpha_{m, n}^{i, j} + \rho \sum_{k=1}^M u_k \frac{2}{\Delta x_{ij}} \beta_{m, n, k}^{i, j} + \rho \sum_{k=1}^M w_k \frac{2}{\Delta z_{ij}} \gamma_{m, n, k}^{i, j} - \\
 & - \mu \frac{4}{\Delta x_{i, j}^2} (C_{z m, n}^{i, j} - D_{x m, n}^{i, j}) - \mu \frac{4}{\Delta z_{i, j}^2} (C_{x m, n}^{i, j} - D_{z m, n}^{i, j}), \quad (3-42)
 \end{aligned}$$

O m -ésimo componente do vetor resultante para o elemento ij , é dado por:

$$b_{w m}^{i, j} = \rho \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=1}^M w_n^{t-\Delta t} \alpha_{m, n}^{i, j}, \quad (3-43)$$

onde $\alpha_{m, n}^{i, j}$, $\beta_{m, n, k}^{i, j}$, $\gamma_{m, n, k}^{i, j}$, $C_{x m, n}^{i, j}$, $C_{z m, n}^{i, j}$, $D_{x m, n}^{i, j}$ e $D_{z m, n}^{i, j}$ são as integrais já definidas anteriormente.

3.2.4 Cálculo da componente da velocidade na direção z , w

Na seqüência desenvolveu-se a expressão utilizada para o cálculo da velocidade w a partir da equação (3-16), cujas integrais são abertas nas respectivas direções x e z , resultando no seguinte:

$$\rho \iint_{xz} N_m w \, dx \, dz = \rho \iint_{xz} N_m w^* \, dx \, dz - \Delta t \iint_{xz} P_m \frac{\partial p}{\partial x} \, dx \, dz, \quad \text{para } m = 1, \dots, M. \quad (3-44)$$

Neste caso, também é realizada a mudança de variáveis de x e z para ξ e η , e é introduzida a expansão para as variáveis w , w^* e p , na equação anterior, de acordo com a equação (3-11), obtendo-se a seguinte expressão:

$$\rho \frac{\Delta x_{i,j} \Delta z_{i,j}}{4} \sum_{n=1}^M w_n^* \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m N_n d\xi d\eta = \rho \frac{\Delta x_{i,j} \Delta z_{i,j}}{4} \sum_{n=1}^M w_n^* \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m N_n d\xi d\eta - \Delta t \frac{\Delta x_{i,j}}{2} \sum_{n=1}^M p_n \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_m \frac{\partial N_n}{\partial \eta} d\xi d\eta .$$

para $m = 1, \dots, M$. (3-45)

Dividindo a equação anterior por $\frac{\Delta x_{i,j} \Delta z_{i,j}}{4}$ e reescrevendo-a na forma matricial,

tem-se:

$$\underline{A}_w^{i,j} \bar{w}^{i,j} = \bar{b}_w^{i,j} , \quad (3-46)$$

onde $\underline{A}_w^{i,j}$ é a matriz de expansão da componente w da velocidade no elemento ij , $\bar{w}^{i,j}$ é o vetor de coeficientes da velocidade w no elemento ij e $\bar{b}_w^{i,j}$ é o vetor resultante para a variável w para o elemento ij . Neste caso, a dimensão da matriz $\underline{A}_w^{i,j}$ é $(M \times M)$ e a dimensão dos vetores são $(M \times 1)$. O elemento (m,n) da matriz $\underline{A}_w^{i,j}$ é expresso por:

$$A_{w m,n}^{i,j} = \rho \frac{1}{\Delta t} \alpha_{m,n}^{i,j} \quad (3-47)$$

O m -ésimo componente do vetor resultante para o elemento ij , é dado pela expressão:

$$\bar{b}_{w m}^{i,j} = \rho \sum_{n=1}^M w_n^* \alpha_{m,n}^{i,j} - \Delta t \frac{2}{\Delta z_{ij}} \sum_{n=1}^M p_n \theta_{m,n}^{i,j} , \quad (3-48)$$

onde $\alpha_{m,n}^{i,j}$ é a integral já definidas anteriormente e o parâmetro $\theta_{m,n}^{i,j}$ é definido por:

$$\begin{aligned}
\theta_{m,n}^{i,j} = & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_m \frac{\partial N_n}{\partial \eta} d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m \frac{\partial N_n}{\partial \eta} d\xi d\eta + \bar{u} \frac{\Delta t}{\Delta x_{i,j}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_m}{\partial \xi} \frac{\partial N_n}{\partial \eta} d\xi d\eta + \\
& + \bar{w} \frac{\Delta t}{\Delta z_{i,j}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_m}{\partial \eta} \frac{\partial N_n}{\partial \eta} d\xi d\eta - \frac{2\mu}{\rho} \frac{\Delta t}{\Delta x_{i,j}^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 N_m}{\partial \xi^2} \frac{\partial N_n}{\partial \eta} d\xi d\eta - \\
& - \frac{2\mu}{\rho} \frac{\Delta t}{\Delta z_{i,j}^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 N_m}{\partial \eta^2} \frac{\partial N_n}{\partial \eta} d\xi d\eta.
\end{aligned} \tag{3-49}$$

3.2.5 Equação de Poisson para a pressão

A partir da equação integrada e pesada de Poisson para a pressão, dada por (3-17), aplica-se o teorema de Green para as derivadas de segunda ordem, resultando na seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\left[\int_S N_m \frac{\partial p}{\partial x} dS - \int_V \frac{\partial N_m}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} dV \right] - \mu \left[\int_S N_m \frac{\partial p}{\partial z} dS - \right. \\
\left. - \int_V \frac{\partial N_m}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} dV \right] = \frac{1}{\Delta t} \left(\int_V P_m \frac{\partial u^*}{\partial x} dV + \int_V P_m \frac{\partial w^*}{\partial z} dV \right), \text{ para } m = 1, \dots, M. \tag{3-50}
\end{aligned}$$

O mesmo procedimento matemático adotado para as equações da quantidade de movimento é utilizado neste caso, ou seja, abre-se as integrais, faz-se a mudança de variáveis de x e z para ξ e η , e introduz-se a expansão para as variáveis p , u^* e w^* , dadas por (3-11), obtendo-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^M p_n \left\{ \frac{\Delta z_{i,j}}{\Delta x_{i,j}} \left[\int_{-1}^1 \left(N_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \right)_{\eta=-1}^{\eta=1} d\xi - \int_{-1}^1 \frac{\partial N_m}{\partial \xi} \frac{\partial N_n}{\partial \xi} d\xi d\eta \right] - \frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta z_{i,j}} \left[\int_{-1}^1 \left(N_m \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \right)_{\xi=-1}^{\xi=1} d\eta - \right. \right. \\
& \left. \left. - \int_{-1}^1 \frac{\partial N_m}{\partial \eta} \frac{\partial N_n}{\partial \eta} d\xi d\eta \right] \right\} = \frac{\Delta z_{i,j}}{2\Delta t} \sum_{n=1}^M u_n^* \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} d\xi d\eta \\
& - \frac{\Delta x_{i,j}}{2\Delta t} \sum_{n=1}^M w_n^* \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} d\xi d\eta, \text{ para } m = 1, \dots, M. \tag{3-51}
\end{aligned}$$

Escrevendo a equação (3-51) na forma matricial tem-se:

$$\underline{A}_p^{i,j} \bar{p}^{i,j} = \bar{b}_p^{i,j}, \tag{3-52}$$

onde $\underline{A}_p^{i,j}$ é a matriz de expansão da pressão p no elemento ij , $\bar{p}^{i,j}$ é o vetor de coeficientes da pressão p no elemento ij e $\bar{b}_p^{i,j}$ é o vetor resultante para a variável p para o elemento ij . A dimensão da matriz $\underline{A}_p^{i,j}$ é $(M \times M)$ e a dimensão dos vetores são $(M \times 1)$.

O elemento (m,n) da matriz $\underline{A}_p^{i,j}$ é dado por:

$$A_{p\ m,n}^{i,j} = \frac{\Delta z_{i,j}}{\Delta x_{i,j}} (C_{z\ m,n}^{i,j} - D_{x\ m,n}^{i,j}) + \frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta z_{i,j}} (C_{x\ m,n}^{i,j} - D_{z\ m,n}^{i,j}), \tag{3-53}$$

e o m -ésimo componente do vetor resultante para o elemento ij , é o seguinte:

$$b_{p\ m,n}^{i,j} = \sum_{n=1}^M u_n^* \left(\frac{\Delta z_{i,j}}{2\Delta t} \Omega_{m,n}^{i,j} + \frac{\Delta x_{i,j}}{2\Delta t} \theta_{m,n}^{i,j} \right), \tag{3-54}$$

onde $C_{x m,n}^{i,j}$, $C_{z m,n}^{i,j}$, $D_{x m,n}^{i,j}$, $D_{z m,n}^{i,j}$, $\Omega_{m,n}^{i,j}$ e $\theta_{m,n}^{i,j}$ são as integrais já definidas anteriormente.

3.2.6 Equação da energia

Com base na equação integrada e pesada da energia, dada por (3-18), e aplicando-se o teorema de Green para os termos difusivos, a mesma pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \rho c_p \int_V P_m \frac{\partial T}{\partial t} dV + \rho c_p \int_V P_m \frac{\partial T}{\partial x} dV + \rho c_p \int_V P_m \frac{\partial T}{\partial z} dV - \\ & - K \left[\oint_S N_m \frac{\partial T}{\partial x} dS - \int_V \frac{\partial N_m}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} dV \right] - K \left[\oint_S N_m \frac{\partial T}{\partial z} dS - \int_V \frac{\partial N_m}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} dV \right] - \\ & - 2\mu \int_V N_m \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] dV = 0, \text{ para } m = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

(3-55)

Inicialmente aproxima-se a derivada temporal, presente na equação anterior, por uma diferença para trás. Posteriormente, abre-se as integrais nas direções x e z , faz-se a mudança de variáveis de x e z para ξ e η , e finalmente introduz-se a expansão para as variáveis T , u e w , conforme (3-11), resultando na seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^M T_n \left\{ \frac{\Delta x_{i,j} \Delta z_{i,j}}{4\Delta t} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m N_n d\xi d\eta + \sum_{k=1}^M u_k \frac{\Delta z_{i,j}}{2} \int_{-1}^1 P_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} N_k d\xi d\eta + \right. \\
& + \sum_{k=1}^M w_k \frac{\Delta x_{i,j}}{2} \int_{-1}^1 P_m \frac{\partial N_n}{\partial \eta} N_k d\xi d\eta - \frac{K}{\rho c_p} \left[\int_{-1}^1 \left(N_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \right)_{\eta=-1}^{\eta=1} d\xi - \right. \\
& \left. - \frac{\Delta z_{i,j}}{\Delta x_{i,j}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_m}{\partial \xi} \frac{\partial N_n}{\partial \xi} d\xi d\eta \right] - \frac{K}{\rho c_p} \left[\int_{-1}^1 N_m \left(\frac{\partial N_n}{\partial \eta} \right)_{\xi=-1}^{\xi=1} d\eta - \right. \\
& \left. - \frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta z_{i,j}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_m}{\partial \eta} \frac{\partial N_n}{\partial \eta} d\xi d\eta \right] \left. \right\} = \frac{\Delta x_{i,j} \Delta z_{i,j}}{4\Delta t} \sum_{n=1}^M T_n \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m N_n d\xi d\eta + \\
& + \frac{2\mu}{\rho c_p} \left\{ \frac{\Delta z_{i,j}}{\Delta x_{i,j}} \sum_{n=1}^M u_n \sum_{k=1}^M u_k \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} d\xi d\eta + \right. \\
& + \frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta z_{i,j}} \sum_{n=1}^M w_n \sum_{k=1}^M w_k \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \frac{\partial N_k}{\partial \eta} d\xi d\eta + \\
& + \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta z_{i,j}} \sum_{n=1}^M w_n \sum_{k=1}^M u_k \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} d\xi d\eta + \right. \\
& + 2 \sum_{n=1}^M w_n \sum_{k=1}^M u_k \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \frac{\partial N_k}{\partial \eta} d\xi d\eta + \\
& \left. + \frac{\Delta x_{i,j}}{\Delta z_{i,j}} \sum_{n=1}^M u_n \sum_{k=1}^M w_k \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \frac{\partial N_k}{\partial \eta} d\xi d\eta \right] \left. \right\}, \text{ para } m = 1, \dots, M. \quad (3-56)
\end{aligned}$$

onde $T^{t-\Delta t}$ é a temperatura no instante de tempo anterior $t-\Delta t$.

Dividindo a equação (3-56) por $\frac{\Delta x_{i,j} \Delta z_{i,j}}{4}$ e reescrevendo-a na forma matricial,

tem-se:

$$\underline{\mathbf{A}}_T^{i,j} \bar{\mathbf{T}}^{i,j} = \bar{\mathbf{b}}_T^{i,j}, \quad (3-57)$$

onde $\underline{\mathbf{A}}_T^{i,j}$ é a matriz de expansão da temperatura T no elemento ij , $\bar{\mathbf{T}}^{i,j}$ é o vetor de coeficientes da temperatura T no elemento ij e $\bar{\mathbf{b}}_T^{i,j}$ é o vetor resultante para a temperatura T para o elemento ij . Salienta-se que a dimensão da matriz $\underline{\mathbf{A}}_T^{i,j}$ é $(M \times M)$ e a dimensão dos vetores são $(M \times 1)$. O elemento (m,n) da matriz $\underline{\mathbf{A}}_T^{i,j}$ é definido por:

$$\begin{aligned} A_T^{i,j}{}_{m,n} = & \frac{J}{\Delta t} \alpha_{m,n}^{i,j} + \frac{2}{\Delta x_{i,j}} \sum_{n=1}^M u_n \beta_{m,n,k}^{i,j} + \frac{2}{\Delta z_{i,j}} \sum_{k=1}^M w_k \gamma_{m,n,k}^{i,j} - \\ & - \frac{4k}{\rho c_p} \left[\left(C_z^{i,j}{}_{m,n} - \frac{J}{\Delta x_{i,j}^2} D_{x,n,n}^y \right) + \left(C_x^{i,j}{}_{m,n} - \frac{J}{\Delta z_{i,j}^2} D_z^y{}_{m,n} \right) \right], \end{aligned} \quad (3-58)$$

e o m -ésimo componente do vetor resultante para o elemento ij , é dado por:

$$\begin{aligned} b_T^{i,j}{}_{m,n} = & \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=1}^M T_n^{t-\Delta t} \alpha_{m,n}^{i,j} + \frac{8\mu}{\rho c_p} \left\{ \frac{1}{\Delta x_{i,j}^2} \sum_{n=1}^M u_n \sum_{k=1}^M u_k \psi_{m,n,k}^{i,j} + \right. \\ & + \frac{1}{\Delta z_{i,j}^2} \sum_{n=1}^M w_n \sum_{k=1}^M w_k \varepsilon_{m,n,k}^{i,j} + \frac{J}{2} \left[\frac{1}{\Delta x_{ij}^2} \sum_{n=1}^M w_n \sum_{k=1}^M w_k \psi_{m,n,k}^{i,j} + \right. \\ & \left. \left. \frac{2}{\Delta x_{i,j} \Delta z_{i,j}} \sum_{n=1}^M w_n \sum_{k=1}^M u_k \lambda_{m,n,k}^{i,j} + \frac{1}{\Delta z_{i,j}^2} \sum_{n=1}^M u_n \sum_{k=1}^M u_k \varepsilon_{m,n,k}^{i,j} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3-59)$$

onde $\alpha_{m,n}^{i,j}$, $\beta_{m,n}^{i,j}$ e $C_{x\ m,n}^{i,j}$, $C_{z\ m,n}^{i,j}$, $D_{x\ m,n}^{i,j}$ e $D_{z\ m,n}^{i,j}$ são as integrais já definidas anteriormente e os parâmetros $\psi_{m,n,k}^{i,j}$, $\varepsilon_{m,n,k}^{i,j}$ e $\lambda_{m,n,k}^{i,j}$ são definidas pelas seguintes expressões:

$$\psi_{m,n,k}^{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} d\xi d\eta, \quad (3-60)$$

$$\varepsilon_{m,n,k}^{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \frac{\partial N_k}{\partial \eta} d\xi d\eta \quad (3-61)$$

$$e \quad \lambda_{m,n,k}^{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \frac{\partial N_k}{\partial \eta} d\xi d\eta. \quad (3-62)$$

Todas as integrais que aparecem nos parâmetros das equações para a solução de um escoamento dependem das funções de expansão, que se encontram listadas no Apêndice A. As condições de contorno utilizadas neste trabalho necessárias para a solução das equações desenvolvidas estão apresentadas no item 3.3 a seguir.

Para uma melhor compreensão de como as funções de expansão são ajustadas nos elementos retangulares, de forma a definir funções de canto, de lado e de área, no item 3.4 é apresentado um exemplo unidimensional da aplicação destas funções, a fim de se ter uma idéia real do método proposto neste trabalho.

3.3 Condições de Contorno

A fim de resolver as equações desenvolvidas no item 3.2 é necessária a especificação de condições de contorno. Todas as condições de contorno utilizadas neste trabalho são do tipo de variável especificada e portanto somente condição de contorno deste tipo são descritas. Observa-se contudo que o método não é limitado a este tipo de condição de contorno.

A seguir são definidas as condições de contorno para as seguintes variáveis: a pressão, a temperatura, as componentes da velocidade, u e w e as componentes da pseudovelocidade, u^* e w^* .

Pressão: Condição de contorno de pressão prescrita na entrada e na saída.

Observa-se que em escoamentos incompressíveis, apenas o gradiente de pressão tem influência sobre a solução, não interessando o nível de pressão existente. Por exemplo, no caso do escoamento incompressível em um duto de comprimento L e área transversal A , apenas a diferença de pressão entre a entrada e a saída é o suficiente para estabelecer a vazão mássica ao longo do escoamento. Neste caso, qualquer constante que for adicionada à pressão não alterará o escoamento. Portanto, em escoamentos incompressíveis, uma vez especificadas as pressões de entrada e saída do domínio, não se pode prescrever também a velocidade. Esta condição de contorno é denominada de condição de pressão prescrita na entrada e na saídas do escoamento. Neste trabalho são utilizadas as condições de pressão prescrita na entrada e saída, dadas por:

$$P_{entrada}(z) \text{ e } P_{saida}(z), \text{ conhecido.} \quad (3-63)$$

Observa-se que estas condições de contorno vem acompanhada de outras condições relativas a parede do canal de escoamento, que são descritas a seguir.

Velocidade: : Condição de contorno de velocidade na parede.

Considera-se neste trabalho que as componentes da velocidade são iguais a zero nas paredes. Portanto as componentes da velocidade, u e w , são dadas por:

$$u_{parede}(z) = w_{parede}(z) = 0. \quad (3-64)$$

Velocidade -Pressão: Condição de contorno de velocidade prescrita na entrada e pressão prescrita na saída.

A mistura de condições de contorno, se não forem observadas as características físicas, pode ocasionar divergência da solução numérica e consequentemente levar a resultados que não representam a realidade. Se, no entanto, a pressão e a velocidade forem prescritas na entrada, não se pode prescrever a pressão na saída pois, dois valores de vazão mássica estariam sendo especificados. Sendo que a combinação de condições de contorno mais usual é a velocidade prescrita na entrada e a pressão prescrita na saída, condições estas utilizadas neste trabalho e dadas por:

$$u_{entrada}(z) = 0 \text{ ou } u_{entrada}(z) = \text{perfil de velocidade prescrito na entrada,} \quad (3-65)$$

$$P_{saida}(z) = 0. \quad (3-66)$$

Lembrando que nos problemas analisados neste trabalho, a entrada corresponde sempre a face esquerda e por este motivo a componente da velocidade na direção z , $w_{entrada}(z)$ é igual a **zero**. Neste trabalho, esta condição de contorno é utilizada em conjunto com a condição de contorno da velocidade na parede, descrita anteriormente.

Pseudovelocidades: Condição de contorno das componentes da pseudovelocidade.

As condições de contorno assumidas para as componentes da pseudovelocidade, u^* e w^* , são da mesma forma que as condições de contorno prescritas para as componentes da velocidade, u e w .

Temperatura: Condição de contorno da temperatura prescrita na entrada e na parede.

As condições de contorno da temperatura sempre vem acompanhada de outras condições de contorno, isto é, da velocidade prescrita na entrada e da pressão prescrita na saída. Sendo que, neste trabalho especifica-se a temperatura de entrada, enquanto que na parede não é utilizada nenhuma condição de contorno, pois não foi simulado nenhum problema com fluxo de calor entre a parede e o fluido. A condição de contorno da temperatura é dado por:

$$T_{entrada}(z) = \text{temperatura especificada na direção } z. \quad (3-67)$$

Adicionalmente, neste trabalho, uma condição de contorno de valor especificado para uma variável em uma face se traduz em coeficientes de expansão conhecidos para os

parâmetros associados aos cantos da face e à própria face. Por exemplo, considere o elemento retangular apresentado na Figura 3.2.

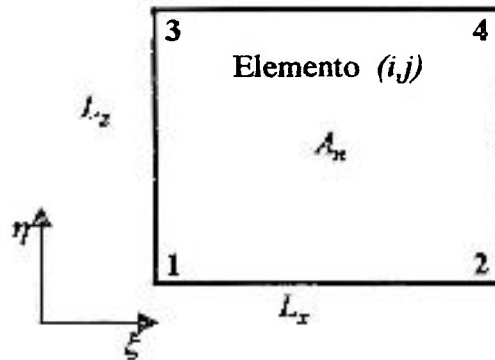


Figura 3.2 - Elemento retangular utilizado para a aplicação das condições de contorno.

Neste exemplo assume-se que a face (1-3) do elemento é parte de uma condição de contorno. Assim, os coeficientes da variável especificada associadas com as funções de expansão de canto $N_{C1}(\xi, \eta)$ e $N_{C3}(\xi, \eta)$, e com as funções de expansão de linha $N_{L(1-3)}^E(\xi, \eta)$ são conhecidas e portanto deixam de ser variáveis que devem ser calculadas.

3.4 Funções de expansão

Nesta seção são apresentadas e comparadas as funções de expansão utilizadas no método clássico dos elementos finitos e as funções quase hierárquicas para um problema unidimensional. Com estas funções são apresentadas as principais vantagens da utilização das funções de expansão quase hierárquicas.

São também apresentadas as funções de expansão quase hierárquicas utilizadas em problemas bidimensionais com malhas retangulares. Estas funções são geradas através de associações das funções de uma dimensão, como será visto.

3.4.1 Funções de expansão clássicas

No método de elementos finitos clássico os coeficientes de expansão das variáveis são identificados com as mesmas em pontos específicos da malha. Esta identificação é utilizada amplamente na literatura que trata de elementos finitos e fornece um significado físico aos coeficientes de expansão das variáveis. A desvantagem desta definição pode ser facilmente observada a partir das funções linear, quadrática e cúbica aplicadas para o caso de uma dimensão. A Figura 3.3 mostra um elemento unidimensional típico de dimensão Δx com funções de expansão linear, quadrática e cúbica.

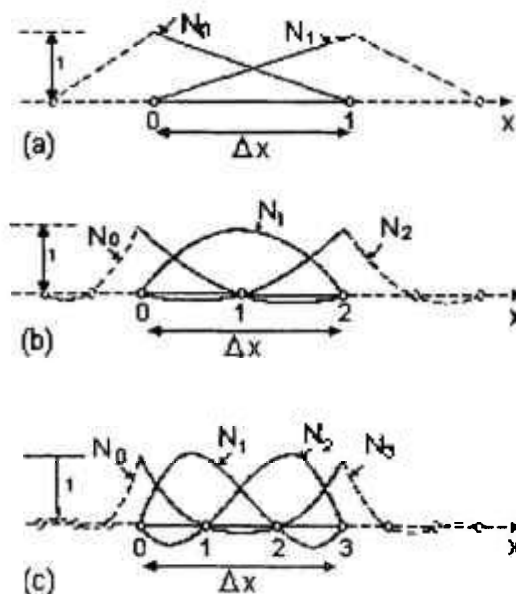


Figura 3.3 - Elementos unidimensionais e funções de expansão (a) linear (b) quadrática, e (c) cúbica, segundo Zinkiewics e Morgan (1983).

Com elementos igualmente espaçados entre si, as funções de expansão utilizadas são normalmente as seguintes:

Linear:

$$N_0 = -\frac{\xi-1}{2}; \quad N_1 = \frac{\xi+1}{2} . \quad (3-68)$$

Quadrática

$$N_0 = \frac{\xi(\xi-1)}{2}; \quad N_1 = -(\xi-1)(\xi+1); \quad N_2 = \frac{\xi(\xi+1)}{2}. \quad (3-69)$$

Cúbica:

$$N_0 = -\frac{9}{16}(\xi + \frac{1}{3})(\xi - \frac{1}{3})(\xi - 1); \quad N_1 = \frac{27}{16}(\xi + 1)(\xi - \frac{1}{3})(\xi - 1);$$

$$N_2 = -\frac{27}{16}(\xi + 1)(\xi + \frac{1}{3})(\xi - 1); \quad N_3 = \frac{9}{16}(\xi + 1)(\xi + \frac{1}{3})(\xi - \frac{1}{3}). \quad (3-70)$$

Nestes polinômios ξ é a variável local, que dentro do intervalo Δx varia de -1 a 1 . Observa-se que cada uma destas funções está associada à variável no ponto da malha onde a respectiva função de expansão tem valor unitário. Por exemplo, no caso quadrático a função $N_0(\xi)$ é igual a 1 para $\xi = -1$, ou no ponto 0 indicado na Figura 3.3, a função $N_1(\xi)$ é igual a 1 para $\xi = 0$ (ponto 1) e a função $N_2(\xi)$ é igual a 1 no ponto 2 .

A partir da Figura 3.3 e das equações (3-68), (3-69) e (3-70), pode-se observar que quanto mais se deseja refinar a solução pelo aumento do grau da expansão, é necessário

reiniciar o problema em vista da mudança total e completa de todas as funções de expansão e das variáveis envolvidas.

A fim de exemplificar como é realizada a montagem dos elementos das matrizes de expansão considera-se a equação da temperatura (energia) em uma dimensão. Para isto, reduz-se a equação da temperatura, equação (3-56), de duas para uma dimensão, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^M T_n \left\{ \frac{\Delta x_i}{2\Delta t} \int_{-1}^1 N_m N_n d\xi + \sum_{k=1}^M u_k \int_{-1}^1 P_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} N_k d\xi + \right. \\ & \left. - \frac{K}{\rho c_p} \left[\int_{-1}^1 \left(N_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \right)_{\eta=-1}^{\eta=1} d\xi - \frac{2}{\Delta x_i} \int_{-1}^1 \frac{\partial N_m}{\partial \xi} \frac{\partial N_n}{\partial \xi} d\xi \right] \right\} = \\ & = \frac{\Delta x_i}{2\Delta t} \sum_{n=1}^M T_n \int_{-1}^1 N_m N_n d\xi + \frac{2\mu}{\rho c_p} \frac{1}{\Delta x_i} \sum_{n=1}^M u_n \sum_{k=1}^M u_k \int_{-1}^1 N_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} d\xi, \end{aligned}$$

$$\text{para } m = 1, \dots, M. \quad (3-71)$$

A fim de simplificar a montagem da matriz de expansão relativa a equação anterior, os termos temporais são desprezados, o fluido é considerado invíscido ($\mu = 0$) e a velocidade do fluido é considerada constante igual a u . Assim., a equação anterior se reduz à seguinte expressão:

$$\sum_{n=1}^M T_n \left\{ \sum_{k=1}^M u_k \int_{-1}^1 P_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} N_k d\xi + \frac{K}{\rho c_p} \frac{2}{\Delta x_i} \int_{-1}^1 \frac{\partial N_m}{\partial \xi} \frac{\partial N_n}{\partial \xi} d\xi \right\} = 0,$$

$$\text{para } m = 1, \dots, M. \quad (3-72)$$

Nota-se que na medida em que a velocidade é considerada constante e igual a u , os coeficientes correspondentes as funções de expansão da velocidade são todas iguais a u .

Dividindo a equação (3-72) por $\frac{\Delta x_i}{2}$ e escrevendo a mesma na forma matricial,

tem--se:

$$\underline{\mathbf{A}}_T^i \bar{\mathbf{T}}^i = 0. \quad (3-73)$$

O elemento (m,n) da matriz de expansão é dado por:

$$A_{m,n}^i = \frac{2}{\Delta x_i} \sum_{k=1}^M u_k \int_{-1}^1 P_m \frac{\partial N_n}{\partial \xi} N_k d\xi - \frac{4K}{\rho c_p} \frac{1}{\Delta x_i^2} \int_{-1}^1 \frac{\partial N_m}{\partial \xi} \frac{\partial N_n}{\partial \xi} d\xi, \quad (3-74)$$

onde P_m é a função peso sendo que a mesma é considerada igual ao polinômio de expansão N_m , a fim de simplificar o exemplo.

Calculando os elementos da matriz $\underline{\mathbf{A}}_T^i$ conforme a equação (3-74), para as funções de expansão definidas pelas equações (3-68) e (3-69), (3-70), obtém-se as matrizes para expansão linear, quadrática e cúbica, de acordo com o seguinte:

Linear

$$\underline{\mathbf{A}}_T^i = \begin{bmatrix} \frac{2k}{\rho c_p \Delta x_i^2} & \frac{u}{\Delta x_i} & -\frac{2k}{\rho c_p \Delta x_i^2} & \frac{u}{\Delta x_i} \\ \frac{2k}{\rho c_p \Delta x_i^2} & \frac{u}{\Delta x_i} & \frac{2k}{\rho c_p \Delta x_i^2} & \frac{u}{\Delta x_i} \end{bmatrix} \quad (3-75)$$

Quadrática:

$$\underline{\Delta}_T^i = \begin{bmatrix} \frac{14k}{3\rho c_p \Delta x_i^2} + \frac{u}{\Delta x_i} & \frac{16k}{3\rho c_p \Delta x_i^2} + \frac{4u}{3\Delta x_i} & \frac{2k}{3\rho c_p \Delta x_i^2} + \frac{u}{3\Delta x_i} \\ \frac{16k}{3\rho c_p \Delta x_i^2} + \frac{4u}{3\Delta x_i} & \frac{32k}{3\rho c_p \Delta x_i^2} + \frac{4u}{3\Delta x_i} & \frac{16k}{3\rho c_p \Delta x_i^2} + \frac{4u}{3\Delta x_i} \\ \frac{2k}{3\rho c_p \Delta x_i^2} + \frac{u}{3\Delta x_i} & \frac{16k}{3\rho c_p \Delta x_i^2} + \frac{4u}{3\Delta x_i} & \frac{14k}{3\rho c_p \Delta x_i^2} + \frac{u}{\Delta x_i} \end{bmatrix} \quad (3-76)$$

Cúbica:

$$\underline{\Delta}_T^i = \begin{bmatrix} \frac{37k}{5\rho c_p \Delta x_i^2} + \frac{11u}{8\Delta x_i} & \frac{18k}{20\rho c_p \Delta x_i^2} + \frac{507u}{280\Delta x_i} & \frac{27k}{10\rho c_p \Delta x_i^2} + \frac{14u}{280\Delta x_i} & \frac{13k}{20\rho c_p \Delta x_i^2} + \frac{19u}{280\Delta x_i} \\ \frac{18k}{20\rho c_p \Delta x_i^2} + \frac{1149u}{560\Delta x_i} & \frac{108k}{5\rho c_p \Delta x_i^2} + \frac{729u}{560\Delta x_i} & \frac{297k}{20\rho c_p \Delta x_i^2} + \frac{81u}{112\Delta x_i} & \frac{27k}{10\rho c_p \Delta x_i^2} + \frac{9u}{112\Delta x_i} \\ \frac{27k}{10\rho c_p \Delta x_i^2} + \frac{3u}{27u} & \frac{108k}{5\rho c_p \Delta x_i^2} + \frac{27u}{27u} & \frac{108k}{5\rho c_p \Delta x_i^2} + \frac{27u}{27u} & \frac{18k}{20\rho c_p \Delta x_i^2} + \frac{143u}{143u} \\ \frac{10k}{20\rho c_p \Delta x_i^2} + \frac{41u}{420\Delta x_i} & \frac{20k}{10\rho c_p \Delta x_i^2} + \frac{28u}{280\Delta x_i} & \frac{5k}{20\rho c_p \Delta x_i^2} + \frac{3u}{28\Delta x_i} & \frac{20k}{5\rho c_p \Delta x_i^2} + \frac{140u}{24\Delta x_i} \end{bmatrix} \quad (3-77)$$

Como pode ser visto, as matrizes de expansão mudam completamente quando se altera a ordem da expansão. Este fato é mais um complicador pois, quando se deseja alterar o grau de expansão das variáveis deve-se, além de reiniciar o problema, calcular novamente as matrizes de expansão para todos os elementos.

3.4.2 Funções de expansão quase hierárquicas em uma dimensão

No caso das funções de expansão quase hierárquicas os coeficientes de expansão das variáveis não são identificados com as variáveis em pontos específicos da malha. Neste caso, os coeficientes estão associados com as funções de expansão que são

ajustadas nos elementos retangulares, definindo funções de canto, de lado e de área. Esta associação permite, iniciar a solução de um problema com uma expansão linear e se necessário durante o processo de solução, adicionar novas funções de forma a aumentar o grau de expansão e obter uma solução de maior precisão. Esta característica pode ser facilmente observada através do desenvolvimento das funções de expansão quase hierárquicas apresentado a seguir.

As funções de expansão quase hierárquicas são baseadas em polinômios de Legendre. Os polinômios de Legendre formam um conjunto de funções com propriedades de ortogonalidade dentro do intervalo de $-1 \leq \xi \leq 1$. O polinômio de Legendre de grau m , $L(\xi)$, pode ser gerado pela seguinte fórmula de recorrência, conforme **Zienkiewicz e Morgan (1983)**:

$$N_m(\xi) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{1}{2^{m-1}} \frac{d^m}{d\xi^m} [(\xi^2 - 1)^m]. \quad (3-78)$$

Por exemplo, integrando-se a expressão acima para $m=2,3,4,5$ obtém-se os seguintes polinômios:

$$N_2 = -(\xi^2 - 1); \quad N_4 = \frac{1}{4}(15\xi^4 - 18\xi^2 + 3);$$

$$N_3 = 2(\xi^3 - \xi); \quad N_5 = 7\xi^5 - 10\xi^3 + 3\xi. \quad (3-79)$$

Estas funções correspondem às funções de expansão de grau 2, 3, 4 e 5 para um elemento unidimensional. As funções de expansão lineares utilizadas em conjunto com estas funções de grau superior, são as mesmas utilizadas no método dos elementos finitos

clássico, ou seja, as funções presentes na equação (3-68). O comportamento destas funções, até o terceiro grau, no intervalo $-1 \leq \xi \leq 1$, pode ser visto na Figura 3.4.

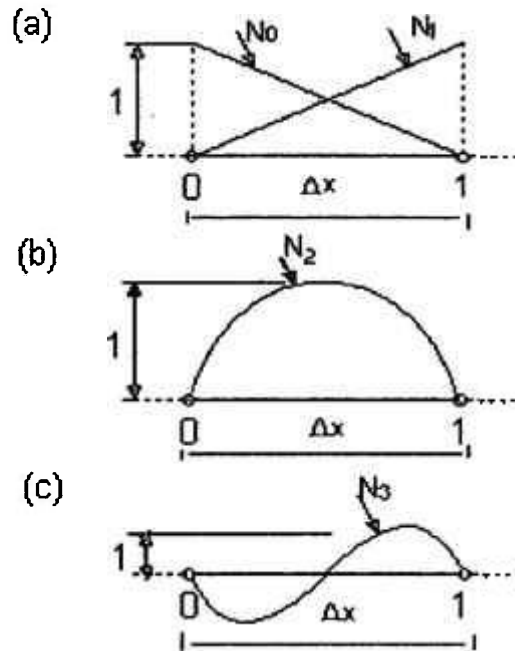


Figura 3.4 - Elementos hierárquicos e funções de expansão quase ortogonais (a) linear, (b) quadrática, e (c) cúbica.

Observa-se que as funções lineares $N_0(\xi)$ e $N_1(\xi)$ estão associadas à variável física nos pontos 0 e 1 respectivamente do elemento, da mesma forma que no caso do método dos elementos finitos clássicos. Contudo, as funções de expansão de grau 2 e superiores não estão associadas à variável física em um ponto determinado da malha. Estas funções alteram o valor da variável ao longo de todo o elemento, exceto nos pontos 0 e 1, onde assumem valor igual a zero. A utilização destas funções permite introduzir ou retirar uma função de expansão e seu respectivo coeficiente (a menos das funções lineares) durante o processo de solução de forma relativamente fácil.

Considerando-se a equação de energia em uma dimensão, cujos elementos da matriz de expansão para um elemento são dadas pela equação (3-74), pode-se obter as matrizes de expansão para expansões lineares, quadráticas e cúbicas com as funções quase hierárquicas. Nota-se que neste caso, para se ter velocidade u constante, tem-se que o coeficiente correspondente à velocidade para as funções de expansão $N_0(\xi)$ e $N_1(\xi)$ é igual a u e para as outras funções igual a zero. Assim, as matrizes de expansão resultam em:

Linear:

$$\underline{\mathbf{A}}_T^i = \begin{bmatrix} \frac{2k}{\rho c_p \Delta x_i^2} - \frac{u}{\Delta x_i} & -\frac{2k}{\rho c_p \Delta x_i^2} + \frac{u}{\Delta x_i} \\ \frac{2k}{\rho c_p \Delta x_i^2} & \frac{2k}{\rho c_p \Delta x_i^2} + \frac{u}{\Delta x_i} \end{bmatrix} \quad (3-80)$$

Quadrática:

$$\underline{\mathbf{A}}_T^i = \begin{bmatrix} \frac{2k}{\rho c_p \Delta x_i^2} - \frac{u}{\Delta x_i} & -\frac{2k}{\rho c_p \Delta x_i^2} + \frac{u}{\Delta x_i} & -\frac{4u}{3\Delta x} \\ \frac{2k}{\rho c_p \Delta x_i^2} & \frac{2k}{\rho c_p \Delta x_i^2} + \frac{u}{\Delta x_i} & \frac{4u}{3\Delta x} \\ \frac{4u}{3\Delta x} & -\frac{4u}{3\Delta x} & \frac{32k}{3\rho c_p \Delta x_i^2} \end{bmatrix} \quad (3-81)$$

Cúbica:

$$\underline{\mathbf{A}}_T^i = \begin{bmatrix} \frac{2k}{\rho c_p \Delta x_i^2} - \frac{u}{\Delta x_i} & -\frac{2k}{\rho c_p \Delta x_i^2} + \frac{u}{\Delta x_i} & -\frac{4u}{3\Delta x} & 0 \\ \frac{2k}{\rho c_p \Delta x_i^2} & \frac{2k}{\rho c_p \Delta x_i^2} + \frac{u}{\Delta x_i} & \frac{4u}{3\Delta x} & \frac{8u}{15\Delta x} \\ \frac{4u}{3\Delta x} & -\frac{4u}{3\Delta x} & \frac{32k}{3\rho c_p \Delta x_i^2} & \frac{32u}{15\Delta x} \\ 0 & 0 & -\frac{32u}{15\Delta x} & \frac{128k}{5\rho c_p \Delta x_i^2} \end{bmatrix} \quad (3-82)$$

Em cada etapa descrita anteriormente, pode-se ver que as matrizes não se alteram quando se muda a ordem da expansão, ou seja, não há a necessidade de se recalcularem os elementos das matrizes do estágio anterior. Esta é a grande vantagem de se poder alterar o grau de expansão das variáveis sem a necessidade de reiniciar o problema.

Observa-se que, embora a ortogonalidade absoluta não seja atingida, os termos das diagonais principais são predominantes sobre os outros termos.

3.4.3 Funções de expansão quase hierárquicas em duas dimensões

Com base nas funções hierárquicas em uma dimensão, a geração das funções de expansão hierárquicas em duas dimensões para elementos retangulares se torna simples. A Figura 3.5 mostra um elemento retangular, com os seus cantos numerados de 0 a 3, e o perfil de algumas funções de expansão associadas ao canto 3 e ao lado 2-3.

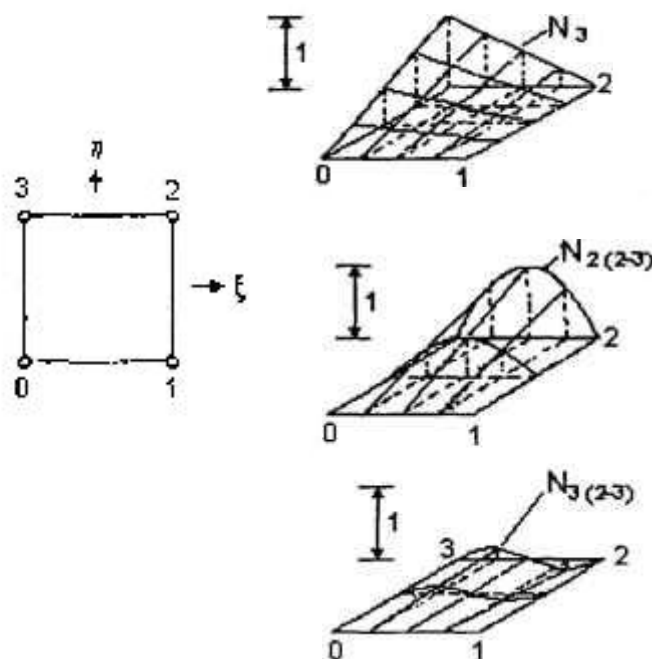


Figura 3.5 - Elemento da função de expansão hierárquica no elemento retangular.

As funções lineares associadas aos cantos dos elementos são obtidas pelo produto de duas funções lineares, da forma da equação (3-68), sendo cada uma função de uma direção. Por exemplo, a função de expansão linear associada ao canto 3 é dada por:

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \eta\xi)(1 - \xi) . \quad (3-83)$$

Nota-se que esta função é igual a 1 no canto 3 e igual a zero nos outros três cantos.

As funções associadas aos cantos dos elementos são funções lineares e o coeficiente associado a estas funções representam o valor físico da variável naquela posição. Observa-se também, que os coeficientes associados às funções de canto estão presentes e são os mesmos para quatro elementos distintos.

As funções de expansão associadas aos lados dos elementos são obtidas pelo produto de uma função linear unidimensional ao longo de uma direção, por exemplo η , com uma função de grau 2 ou superior ao longo da outra direção, para o caso ξ . Assim, por exemplo, as funções de expansão de graus 2 e 3 associadas ao lado (2-3) do elemento da Figura 3-4, são as seguintes:

$$N_{2(2-3)}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta)(\xi^2 - 1); \quad (3-84)$$

$$N_{3(2-3)}(\xi, \eta) = \frac{1}{6}(1 + \eta)(\xi^3 - \xi).$$

Observa-se que o valor destas funções é zero em todos os cantos e nos outros três lados. Os coeficientes associados às funções de lado não representam a variável física em nenhuma posição determinada, estes coeficientes estão simplesmente associados à forma geométrica da respectiva função. Ressalta-se que cada um destes coeficientes pertencem à dois elementos adjacentes.

A identificação dos coeficientes de expansão associados com qualquer um dos lados do elemento e com os cantos deste lado, com o mesmo valor no elemento adjacente, garantirá automaticamente a singularidade da aproximação da variável ao longo daquela lateral e portanto, a continuidade da mesma no domínio da solução será assegurada.

As funções de expansão associadas à área de um elemento podem ser obtidas através do produto de duas funções, uma na variável ξ e outra na variável η , de graus maiores do que 1. Por exemplo, a função de grau 2, para cada direção, é dada por:

$$N_{2(\text{area})}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1) \quad (3-85)$$

A equação (3-86) fornece uma função de expansão adequada que é associada a um parâmetro que não está conectado à mais de um elemento, isto é, um parâmetro que é interno a um único elemento. Observa-se que o valor desta função é zero nos quatro cantos e nos quatro lados do elemento.

As funções de expansão para os outros cantos e os outros lados são obtidas de forma similar. O Apêndice A apresenta com detalhes todas as funções de expansão associadas a um elemento, até o grau 6. Embora neste trabalho tenha-se limitado o grau do polinômio em até 6, nada impede que sejam acrescentados grau maiores, quando for exigido um detalhamento maior na solução do problema que estiver sendo analisado.

3.5 Processos de agrupamento das equações dos elementos

No item 3.2 foram desenvolvidas as equações de conservação utilizando o MEFH para cada elemento da malha. Cada uma das equações de conservação se transforma, para cada elemento, em uma equação matricial de M equações, onde M é o número de funções de expansão utilizadas para descrever as variáveis no elemento.

A Figura 3.6 apresenta um elemento e os coeficientes de expansão associados com os seus cantos, lados e área.

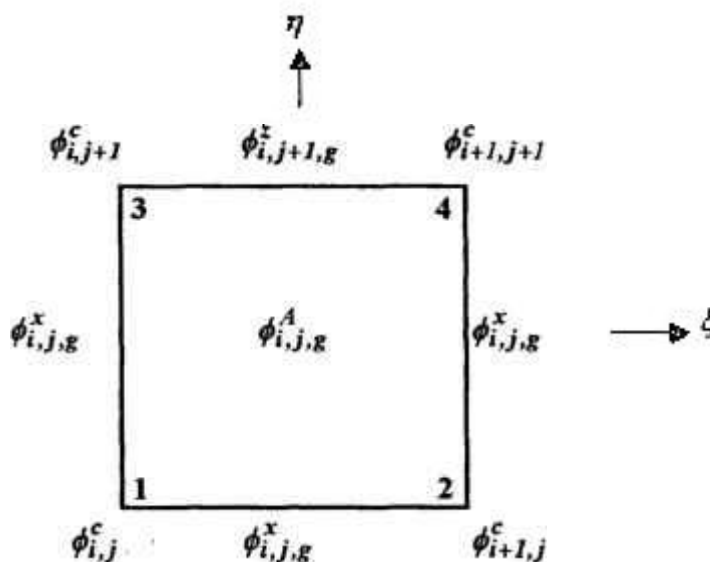


Figura 3.6 - Elemento retangular de duas dimensões e seus parâmetros associados.

Na Figura 3.6, os coeficientes ϕ^c são os parâmetros de canto associados às funções de expansão lineares, ϕ^x e ϕ^z são os coeficientes de lado associados às funções de

expansão de lado, e ϕ^A são os coeficientes de área associados às funções de expansão de área. O subscrito g presente nos coeficientes de lado e de área representa o grau da função de expansão associada a este coeficiente.

Pode-se observar da Figura 3.6 que os coeficientes de canto pertencem a quatro elementos diferentes e os coeficientes de lado pertencem a dois elementos. Dessa forma, estes coeficientes estão presentes nas equações de mais de um elemento. Para calcular os coeficientes que pertencem a mais de um elemento, deve-se usar as equações de conservação de todos os elementos nos quais o coeficiente está presente. Assim, a equação final correspondente à um coeficiente de expansão da malha é constituída por equações referentes a diversos elementos. O processo de obtenção das equações finais associadas a cada coeficiente de expansão da malha é chamado de processo de agrupamento.

A fim de explicar como é realizado o processo de agrupamento para gerar as equações finais, cuja solução fornece os coeficientes de expansão, são considerados quatro elementos adjacentes da malha, como mostra a Figura 3.7.

Observa-se que na Figura 3.7 os coeficientes de área não estão representados, pois na medida em que pertencem à um único elemento, as equações referentes à estes coeficientes não entram no processo de agrupamento.

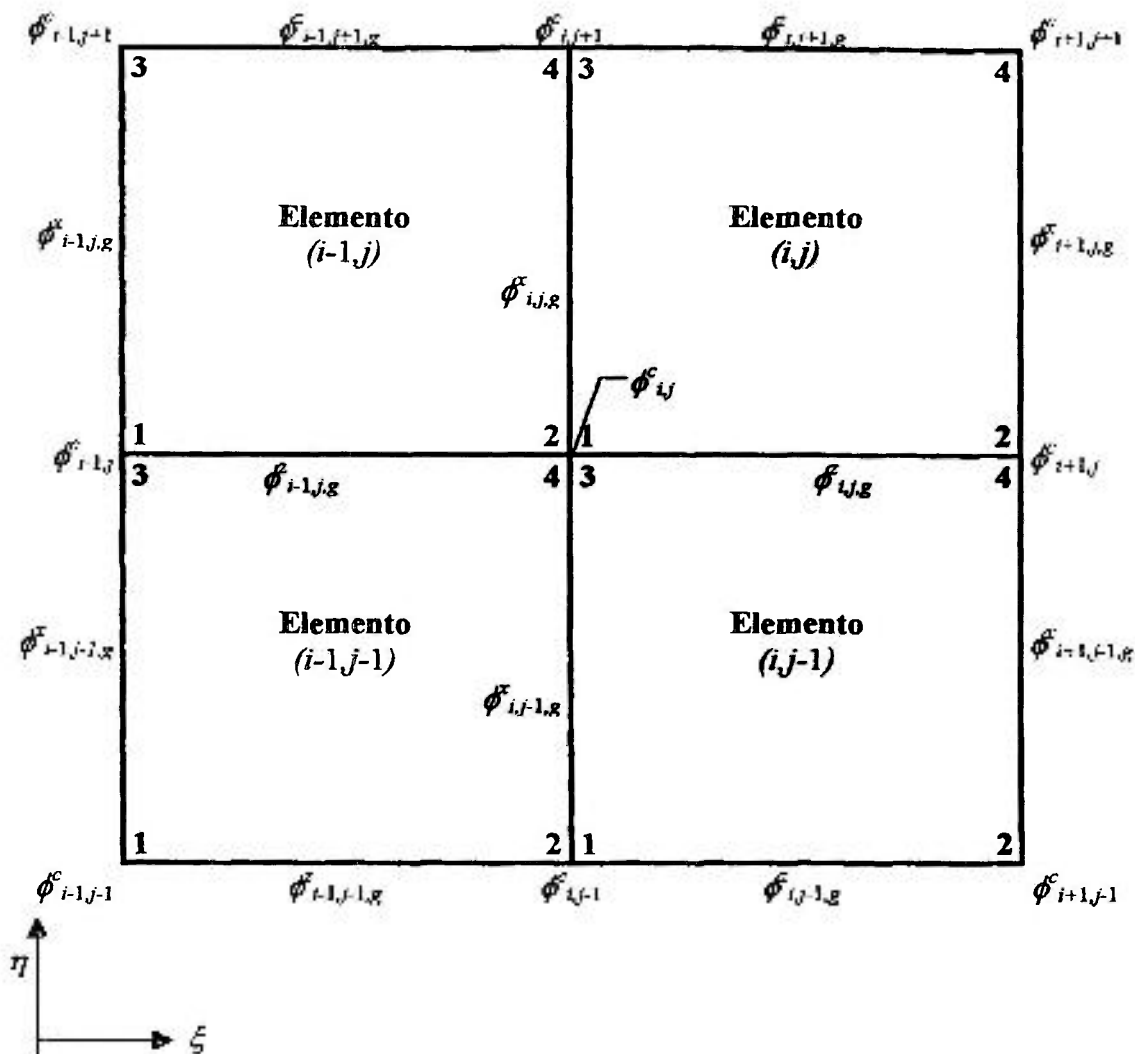


Figura 3.7 - Quatro elementos adjacentes e seus coeficientes de expansão associados.

Pela Figura 3.7 observa-se que o coeficiente $\phi_{i,j}$ está associado à função de expansão N_1 do elemento (i,j) , mas também está associada à função N_2 no elemento $(i,j-1)$, à função N_3 no elemento $(i-1,j-1)$ e à função N_4 no elemento $(i-1,j)$. Portanto, como se nota, os coeficientes de canto estão conectados a quatro diferentes elementos através de quatro diferentes funções de expansão. Os coeficientes de lado $\phi_{i,j,g}^x$ estão conectados a dois elementos, aos elemento (i,j) através da função de expansão $N_{L(1-3)}^g$, e ao elemento $(i-1,j)$,

através da função $N_{L(2-4)}^g$. Os coeficientes de lado $\phi_{i,j,g}^z$ estão associados à função de expansão $N_{L(1-2)}^g$ do elemento (i,j) e à função $N_{L(3-4)}^g$ do elemento $(i,j-1)$. Portanto, os coeficientes de lado estão conectados a dois elementos diferentes através de duas funções de expansão.

Como visto cada equação de conservação gera M equações para cada elemento e a m -ésima equação está associada à m -ésima função de expansão.

Para exemplificar o processo de agrupamento considera-se uma expansão linear. Nota-se que na expansão linear somente existem os coeficientes de canto. Assim, uma equação de conservação, escrita na forma matricial, para os elementos, (i,j) , $(i-1,j)$, $(i,j-1)$ e $(i-1,j-1)$ gera as seguintes expressões:

$$\underline{A}^{i,j} \vec{\phi} = \vec{b}^{i,j} \quad - \quad \text{elemento } (i,j), \quad (3-86)$$

$$\underline{A}^{i-1,j} \vec{\phi} = \vec{b}^{i-1,j} \quad - \quad \text{elemento } (i-1,j), \quad (3-87)$$

$$\underline{A}^{i,j-1} \vec{\phi} = \vec{b}^{i,j-1} \quad - \quad \text{elemento } (i,j-1), \quad (3-88)$$

$$\underline{A}^{i-1,j-1} \vec{\phi} = \vec{b}^{i-1,j-1} \quad - \quad \text{elemento } (i-1,j-1), \quad (3-89)$$

onde $\vec{\phi}$ é o vetor que contém os coeficientes de canto dos respectivos elementos.

Para as expansão linear, cada uma destas equações matriciais consiste de quatro equações algébricas lineares. Para obter a equação final do coeficiente $\phi_{i,j}^c$ deve-se utilizar as equações correspondentes a este coeficiente nos quatro elementos envolvidos. Assim,

para o coeficiente $\phi_{i,j}^c$ utiliza-se a equação (3-86) do elemento (i,j) , a equação (3-87) do elemento $(i-1,j)$, a equação (3-88) do elemento $(i,j-1)$ e a equação (3-89) do elemento $(i-1,j-1)$, descritas a seguir:

$$a_{11}^{i,j} \phi_{i,j}^c + a_{12}^{i,j} \phi_{i+1,j}^c + a_{13}^{i,j} \phi_{i,j+1}^c + a_{14}^{i,j} \phi_{i+1,j+1}^c = b_1^{i,j}, \quad (3-90)$$

$$a_{21}^{i-1,j} \phi_{i-1,j}^c + a_{22}^{i-1,j} \phi_{i,j}^c + a_{23}^{i-1,j} \phi_{i-1,j+1}^c + a_{24}^{i-1,j} \phi_{i,j+1}^c = b_2^{i-1,j}, \quad (3-91)$$

$$a_{31}^{i,j-1} \phi_{i,j-1}^c + a_{32}^{i,j-1} \phi_{i-1,j-1}^c + a_{33}^{i,j-1} \phi_{i,j}^c + a_{34}^{i,j-1} \phi_{i+1,j}^c = b_3^{i,j-1}, \quad (3-92)$$

$$a_{41}^{i-1,j-1} \phi_{i-1,j-1}^c + a_{42}^{i-1,j-1} \phi_{i,j-1}^c + a_{43}^{i-1,j-1} \phi_{i-1,j}^c + a_{44}^{i-1,j-1} \phi_{i,j}^c = b_4^{i-1,j-1}, \quad (3-93)$$

onde os parâmetros $a_{m,n}^{i,j}$ são os componentes das matrizes de expansão dos elementos da malha envolvidos com o coeficiente $\phi_{i,j}^c$ e $b_m^{i,j}$ são os componentes do vetor resultante. Os parâmetros $a_{m,n}^{i,j}$ e $b_m^{i,j}$ são constituídos por integrais das funções de expansão, por parâmetros geométricos dos elementos, por propriedades físicas do fluido e também por componentes da velocidade no fluido no elemento, na forma derivada no item 3.2.

As equação final do coeficiente $\phi_{i,j}^c$ é obtida simplesmente somando-se as equações (3-90), (3-91), (3-92) e (3-93), resultando em:

$$\begin{aligned}
& \phi_{i,j}^c (a_{11}^{i,j} + a_{22}^{i-1,j} + a_{33}^{i,j-1} + a_{44}^{i-1,j-1}) + \phi_{i+1,j}^c (a_{12}^{i,j} + a_{34}^{i,j-1}) + \\
& + \phi_{i,j+1}^c (a_{13}^{i,j} + a_{24}^{i-1,j}) + \phi_{i-1,j}^c (a_{21}^{i-1,j} + a_{43}^{i-1,j-1}) + \phi_{i,j-1}^c (a_{31}^{i,j-1} + a_{42}^{i-1,j-1}) + \\
& + \phi_{i+1,j+1}^c a_{14}^{i,j} + \phi_{i-1,j+1}^c a_{23}^{i-1,j} + \phi_{i+1,j-1}^c a_{32}^{i,j-1} + \phi_{i-1,j-1}^c a_{41}^{i-1,j-1} = \\
& = b_1^{i,j} + b_2^{i-1,j} + b_3^{i,j-1} + b_4^{i-1,j-1} \quad (3-94)
\end{aligned}$$

A obtenção das equações finais para os coeficientes de lado é realizada de forma semelhante, porém somente dois elementos da malha são utilizados. Assim, por exemplo, para obter a equação final correspondente ao coeficiente de expansão $\phi_{i,j}^x$, utiliza-se as equações de conservação dos elementos (i,j) e $(i-1,j)$.

A obtenção de equações similares a equação (3-94) para cada um dos coeficientes de expansão da malha consiste no processo de agrupamento. A solução desta equação, em conjunto com as equações correspondentes aos outros coeficientes de expansão, fornece a solução do problema desejado.

As equações de conservação desenvolvidas no item 3.2 e o processo de agrupamento descrito anteriormente foram implementados no programa computacional desenvolvido neste trabalho, PMEFH2D. Este programa é utilizado no Capítulo 4 para a

CAPÍTULO 4

RESULTADOS NUMÉRICOS

Este capítulo apresenta os resultados numéricos relativos a aplicação do método da expansão em funções hierárquicas na solução das equações de Navier-Stokes, para problemas de escoamento de fluidos incompressíveis em regime laminar em duas dimensões.

A fim de validar o modelo numérico proposto neste trabalho, simula-se três problemas conhecidos da literatura, que são os seguintes: a) escoamento entre duas placas paralelas, b) degrau de temperatura e c) escoamento através de uma expansão abrupta na forma de degrau (*“backward-facing step”*).

A partir da aplicação do método numérico proposto para a solução das equações de conservação, como descrito no Capítulo 3, elaborou-se um programa computacional para resolver os problemas de mecânica dos fluidos denominado de PMEFH2D. Utilizando-se este programa simula-se os problemas mencionados anteriormente, a fim de validar o método numérico desenvolvido neste trabalho.

A fim de diferenciar os resultados obtidos pelo programa proposto, PMFH2D, dos resultados existentes na literatura, adotou-se as seguintes nomenclaturas:

- **PMEFH2D**, representa os resultados obtidos com programa do método numérico desenvolvido neste trabalho;
- **Teórico**, refere-se aos resultado obtidos por meio do modelo teórico quando existente; e
- **Experimental**, representa os resultados experimentais.

Em todos os casos analisados o fluido considerado é incompressível (ρ e μ considerados constantes) e a discretização espacial do domínio da solução emprega malhas estruturadas constituídas de elementos retangulares.

A seguir são apresentados os três problemas propostos para validar o método numérico desenvolvido neste trabalho e seus respectivos resultados.

4.1 Problema de escoamento entre duas placas paralelas

O primeiro problema analisado consiste no escoamento entre duas placas paralelas de um fluido incompressível em regime laminar. Este problema consiste em um dos problemas mais simples que existe em mecânica dos fluidos e tem como objetivo simplesmente verificar a capacidade do método e principalmente verificar a implementação das equações, a medida que existe uma solução teórica que pode ser utilizada para comparação.

Através da Figura 4.1 observa-se a geometria adotada para o problema de escoamento entre duas placas paralelas. Os seguintes dados geométricos são considerados

para este problema: comprimento das placas, $L = 0,9\text{m}$ e distância entre as placas de $2b = 0,06\text{m}$. Adicionalmente, são assumidas as seguintes propriedades físicas para o fluido: a viscosidade dinâmica, $\mu = 0,01 \text{ kg/sm}^2$ e massa específica, $\rho = 1000\text{kg/m}^3$.

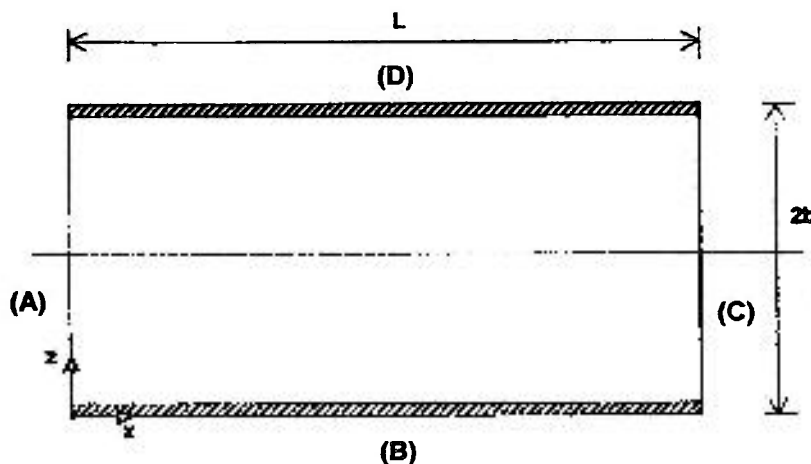


Figura 4.1 – Geometria utilizadas para simulação do escoamento entre duas placas.

As condições de contorno empregadas para a solução do problema são as seguintes: pressão prescrita na entrada e na saída, sendo que esta diferença de pressão estabelece a vazão mássica do escoamento; e velocidade igual a zero nas paredes. Estas condições de contorno podem ser escritas numericamente como:

- (i) Entrada, face A (pressão fornecida):

$$P_{entrada} = 0,9\text{Pa};$$

- (ii) Parede sólida, face B (velocidade nula):

$$u_{parede} = 0, w_{parede} = 0;$$

- (iii) Saída, face C (pressão fornecida):

$$P_{saida} = 0;$$

(iv) Parede sólida, face D (velocidade nula):

$$u_{parede} = 0, w_{parede} = 0.$$

A solução analítica deste problema, segundo **Sampaio (1991)**, para condição de contorno de pressão prescrita na entrada e na saída, é dada pela seguinte equação:

$$u(z) = \frac{1}{2} \frac{\Delta p}{\mu L} b^2 \left(2 \frac{z}{b} - \frac{z^2}{b^2} \right), \quad (4-1)$$

onde Δp é a queda de pressão e $u(z)$ é o perfil da velocidade na direção z , ao longo das placas.

A nodalização empregada para a solução deste problema é bastante rudimentar, ou seja, emprega muito menos elementos do que os utilizados em outros trabalhos, como por exemplo no de **Sampaio (1991)**, em que foram utilizados um número de 20 x 10 elementos retangulares. Comparativamente adota-se aqui um número menor de elementos. Para comprovar a eficiência do método numérico, este problema é resolvido com três malhas e graus de expansão diferentes. No primeiro caso utiliza-se uma malha de 6 x 6 elementos retangulares, com uma expansão de grau 1. No segundo e terceiro caso utiliza-se uma malha com 6 x 2 elementos retangulares, nas direções de x e z , respectivamente, com expansões de graus 2 e 3 respectivamente. Os resultados obtidos nestes três casos são comparados com a solução analítica, obtida através da equação (4-1), denominada de solução teórica. O intervalo de tempo utilizado para todos os casos foi da ordem de 10^{-3} segundos. Deve-se mencionar que na medida em que todos os problemas propostos neste trabalho são casos de regime permanente, o transiente foi simulado até ser estabelecido o estado estacionário.

- **Caso 1.** No primeiro caso utilizou-se uma nodalização composta de 6 x 6 elementos retangulares nas direções x e z . O grau da expansão utilizada é 1. Adota-se este número de elementos retangulares como valor limite, pois verifica-se que a medida em que aumenta este número, os resultados finais não são alterados.

A Figura 4.2 mostra a evolução espacial da componente da velocidade na direção x , u , ao longo do domínio de escoamento. O resultado obtido mostra que a velocidade é plenamente desenvolvida entre as duas placas desde o seu início até o final do domínio. Este comportamento da velocidade é o esperado, para as condições impostas pelo problema. No entanto, o seu perfil não é de uma parábola perfeita, isto se deve principalmente ao fato de utilizar-se uma expansão linear.

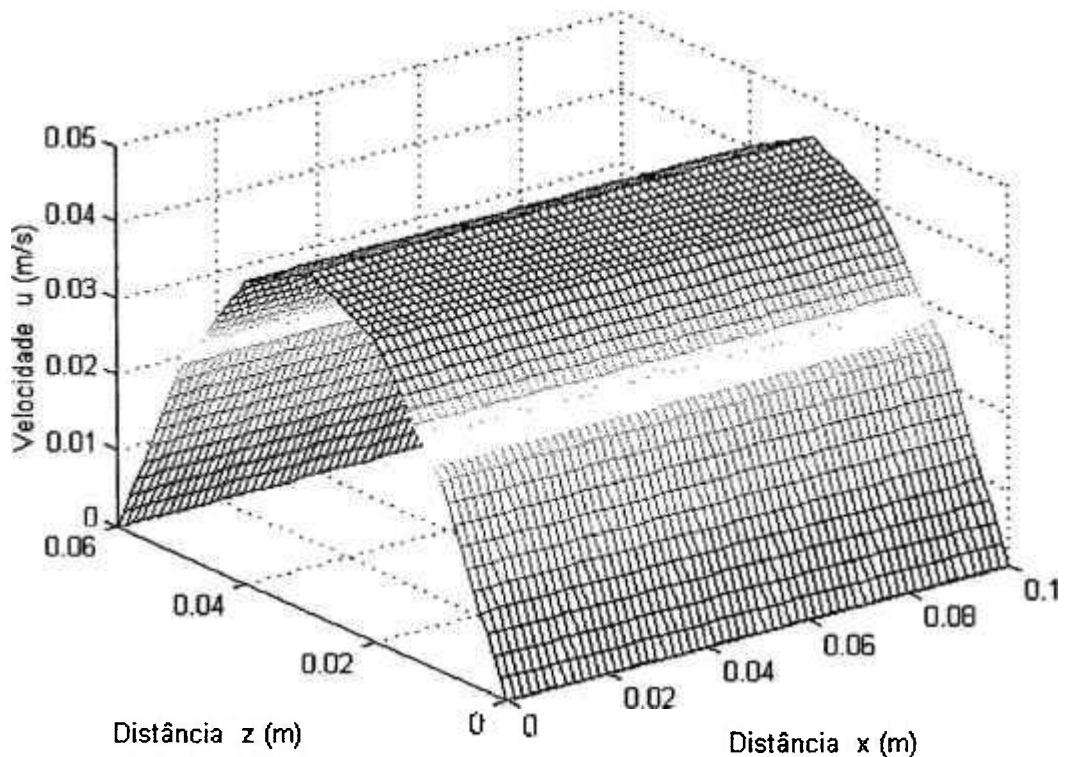


Figura 4.2 – Perfil da componente da velocidade u , em duas dimensões para a expansão de grau 1 (PMEFH2D) - Caso 1.

A Figura 4.3 apresenta a comparação entre os perfis da componente da velocidade u , obtidos através da solução analítica e do programa desenvolvido neste trabalho (PMEFH2D). Verifica-se que o perfil de velocidade não é exatamente o analítico mas está muito próximo dele. Este comportamento, como mencionado anteriormente, é devido à utilização de uma expansão linear para descrever as variáveis físicas envolvidas no problema.

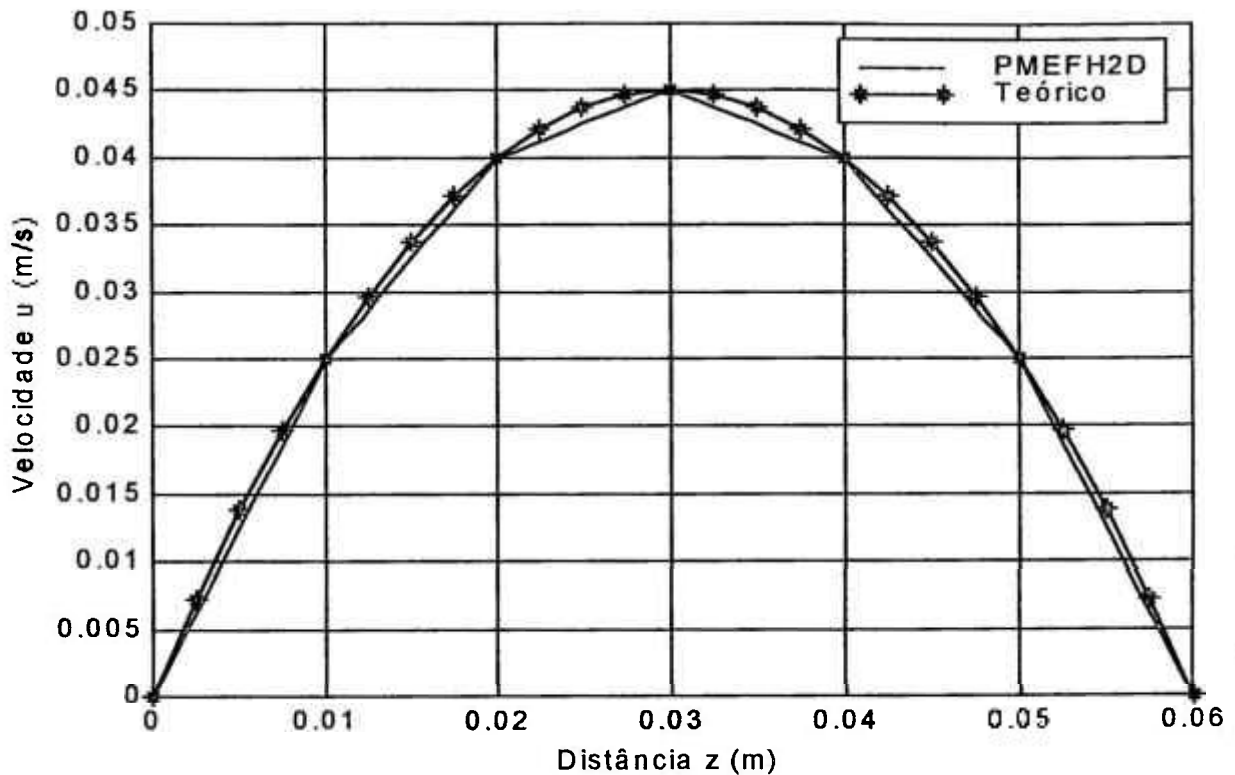


Figura 4.3 – Comparação entre as velocidades obtidas pelo método analítico (Teórico) e com o programa PME FH2D – Caso 1.

O número de Reynolds (Re) para este problema é baseado na distância entre as duas placas ($2b$), assim tem-se:

$$Re = \frac{\rho \bar{u}(2b)}{\mu}, \quad (4.2)$$

onde \bar{u} é a velocidade média na seção transversal ao escoamento. A partir do perfil de velocidade da Figura 4.3, pode-se obter $\bar{u} = 0,03\text{m/s}$, o que resulta em $Re = 180$. Verifica-se portanto que o escoamento é laminar da forma esperada pela definição do problema.

Com o objetivo de mostrar a eficiência do método numérico proposto (MEFH) é simulado um segundo caso no qual são utilizados uma expansão de grau 2 e uma malha menos refinada.

- **Caso 2.** Neste segundo caso foi utilizada uma malha com 6×2 elementos retangulares nas direções x e z , respectivamente. A expansão das variáveis utilizada é de grau 2.

A Figura 4.4 mostra o comportamento da componente da velocidade na direção x , u , entre as duas placas em duas dimensões. Este resultado revela que a velocidade é plenamente desenvolvida ao longo de todo domínio de escoamento, como observado no caso anterior. Além disso, verifica-se que o perfil da velocidade é parabólico, como era de se esperar pela teoria e pelo fato de ter sido utilizado neste caso uma expansão de grau 2.

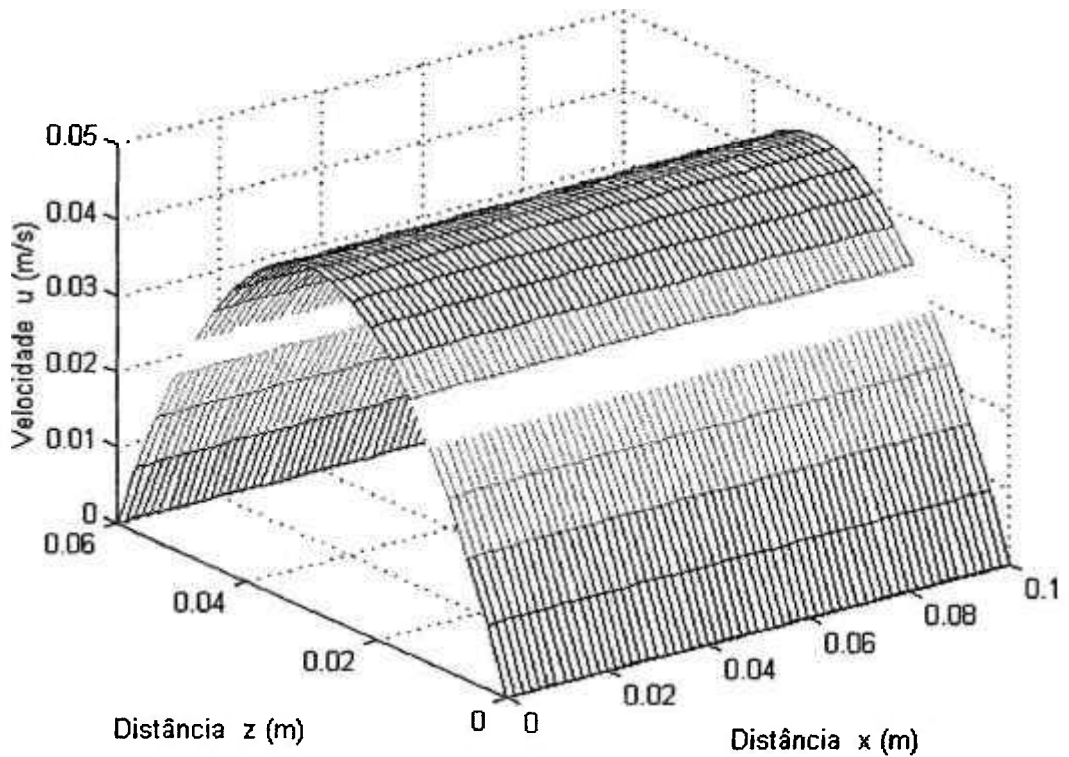


Figura 4.4 – Perfil da componente da velocidade u , em duas dimensões para a expansão de grau 2 (PMEFH2D) - Caso 2.

A eficiência do MEFH pode ser vista através da Figura 4.5, que mostra a comparação entre os resultados obtidos através da solução analítica e por meio do programa desenvolvido neste trabalho (PMEFH2D). A partir desta figura constata-se que o perfil calculado para a velocidade é praticamente igual ao perfil teórico.

A partir do resultado obtido neste caso percebe-se que o aumento do grau da expansão permite a utilização de malhas pouco refinadas para a obtenção de bons resultados.

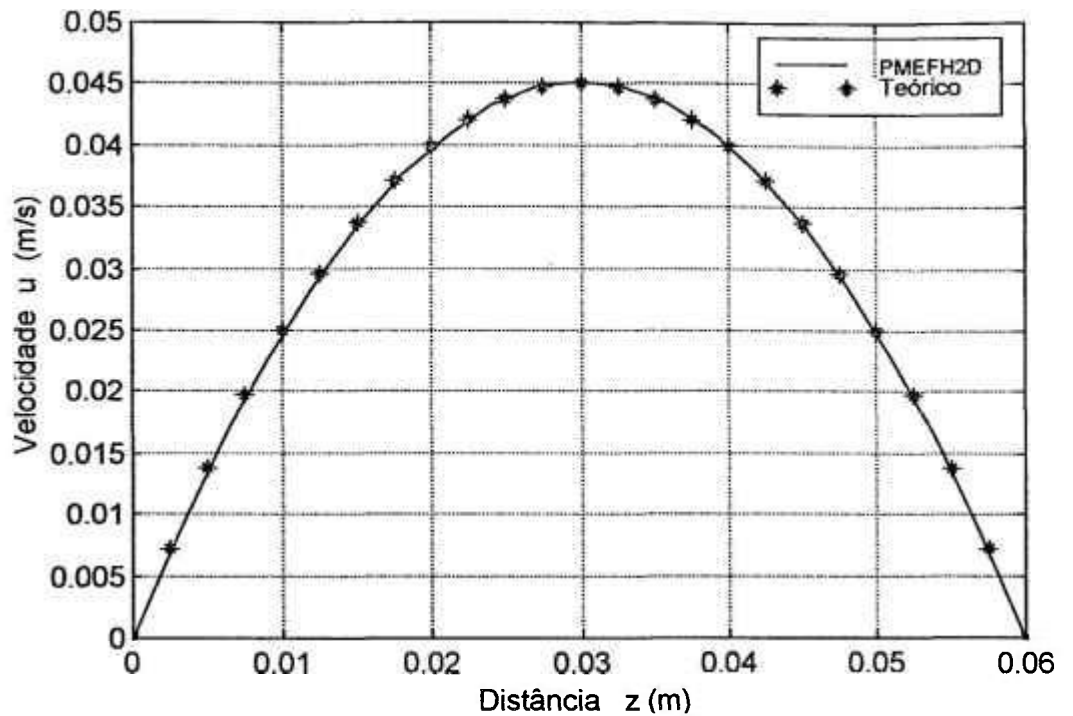


Figura 4.5 – Comparação entre as velocidades obtidas pelo método analítico (Teórico) e o programa PMEFH2D – Caso 2.

Com o intuito de confirmar os ótimos resultados obtidos neste segundo caso, simulou-se ainda um terceiro caso, onde o grau da expansão utilizado é 3.

- **Caso 3.** Neste caso novamente é utilizada uma malha de 6×2 elementos retangulares nas direções x e z , respectivamente, sendo que o grau de expansão é 3. Este caso é semelhante ao Caso 2, diferindo apenas no grau da expansão. Através da análise das Figuras 4.6 e 4.7, confirma-se os bons resultados obtidos para o Caso 2 e a capacidade do método numérico na solução deste tipo de problema, sem necessidade de refinar a malha.

A Figura 4.6 apresenta o perfil da componente da velocidade u , entre as duas placas em duas dimensões. Novamente, o resultado obtido demonstra que a velocidade é plenamente desenvolvida ao longo do domínio de escoamento e apresenta um perfil parabólico.

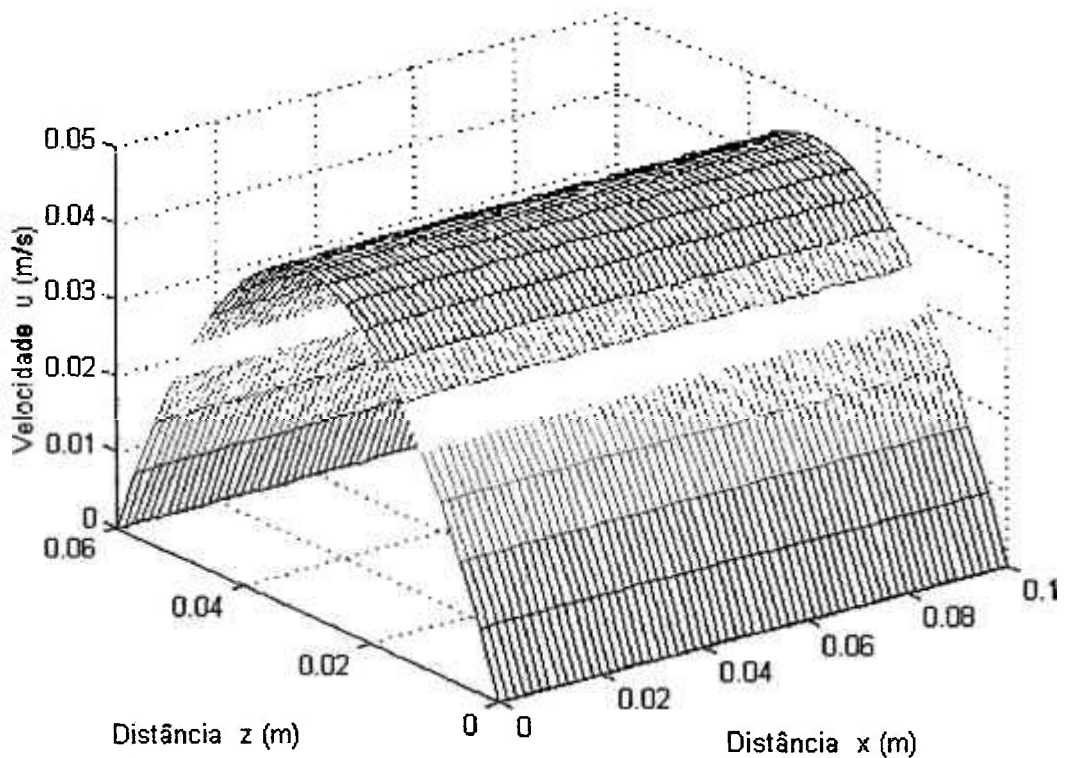


Figura 4.6– Perfil da componente da velocidade, u , em duas dimensões para a expansão de grau 3 (PMEFH2D) - Caso 3.

Observa-se através da Figura 4.7, que o resultados obtidos pelo programa PMEFH2D e a solução teórica são praticamente coincidentes. Isto confirma a eficiência do método numérico na solução deste problema, ou seja, no escoamento de fluidos incompressíveis em regime laminar entre duas placas paralelas.

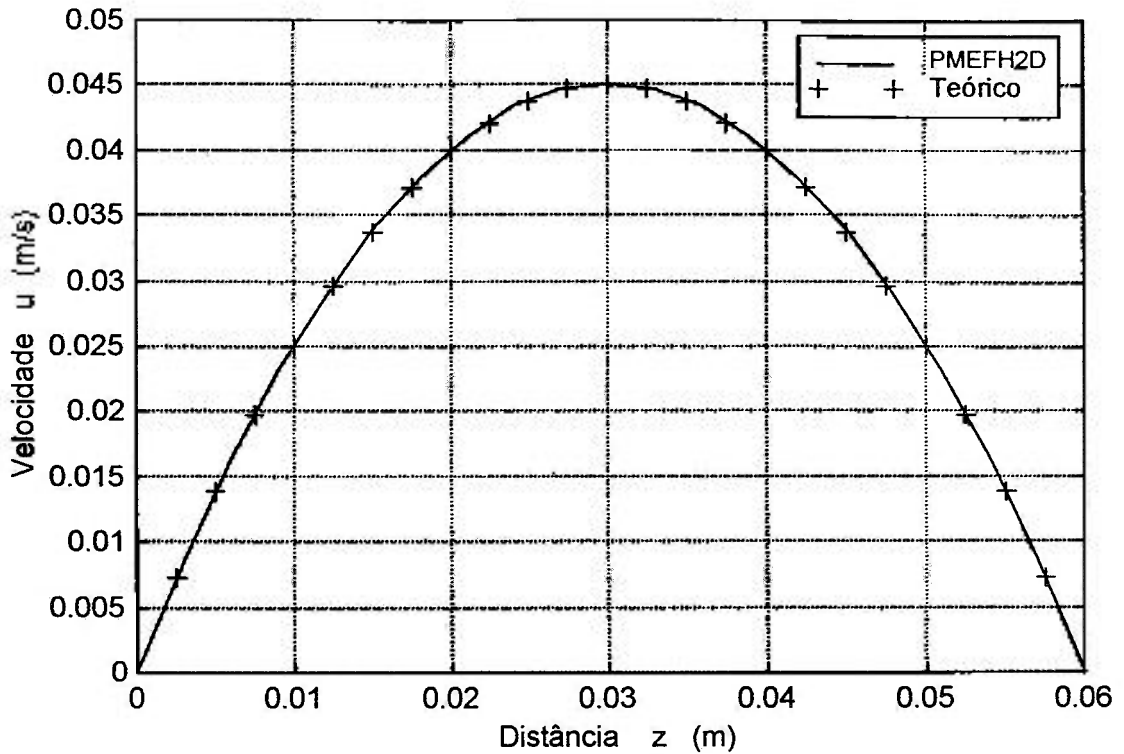


Figura 4.7 – Comparação entre as velocidades obtidas pelo método analítico (Teórico) e o programa PMEFH2D – Caso 3.

A Figura 4.8 apresenta o comportamento da pressão no fluido ao longo do escoamento para os três casos analisados. Observa-se a variação linear da pressão desde a entrada ($p = 0,9\text{Pa}$) até a saída ($p = 0\text{Pa}$), como é de se esperar para um escoamento laminar de um fluido incompressível entre placas.

Nos três casos analisados observa-se que os resultados encontrados foram muito bons quando comparados com a solução teórica. Ressalta-se que, na medida em que o grau da expansão aumenta pode-se utilizar malhas mais grosseiras, obtendo-se mesmo assim, resultados mais precisos. Portanto, pode-se concluir, a priori, que o método MEFH quando aplicado a este tipo de problema alcança bons resultados, mesmo sem uma nodalização detalhada e conseqüentemente com um menor custo computacional. Deve-se ressaltar que,

a escolha do grau do polinômio a ser empregado no cálculo das funções de expansão é o fator predominante para a obtenção de bons resultados.

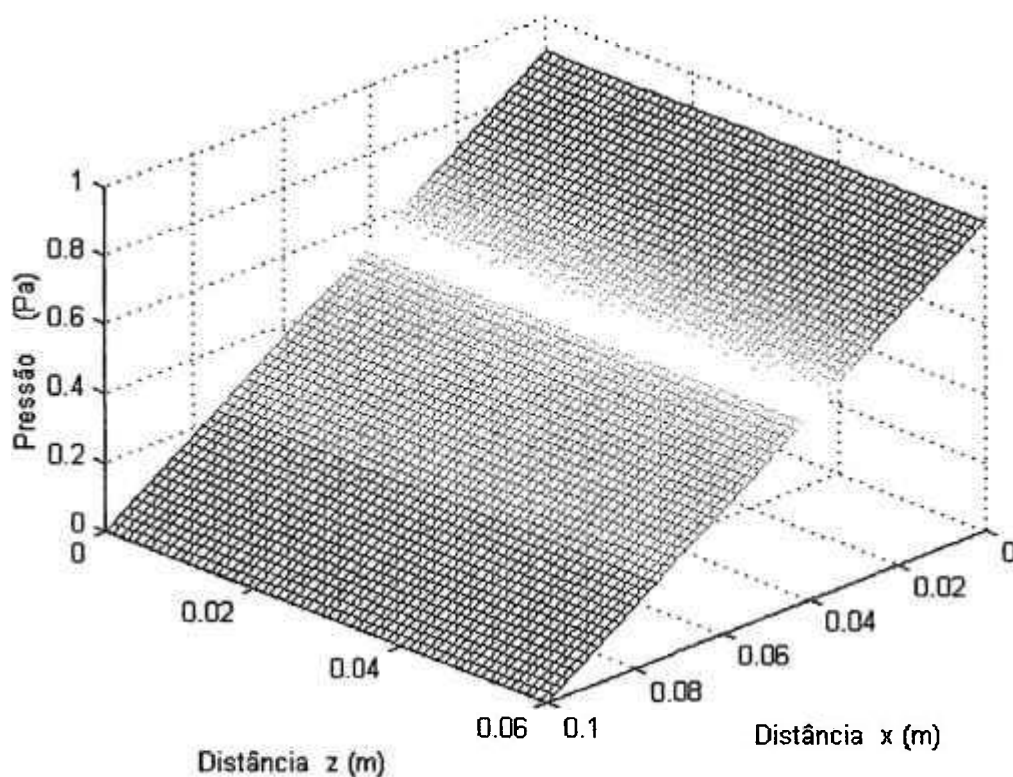


Figura 4.8 – Queda de pressão ao longo das duas placas paralelas (PMEFH2D) – para os três casos analisados.

4.2 Problema de degrau de temperatura

O segundo problema a ser analisado é a da descontinuidade na temperatura entre duas faces. Esta análise tem o objetivo de verificar problemas de difusão numérica, ou seja, difusão artificialmente criada pelo método numérico, que na realidade não existe. Observa-se que é comum nos métodos numéricos utilizados em dinâmica dos fluidos a existência de difusão numérica ou “falsa difusão”, como é comumente denominada. A Figura 4.9 mostra

a geometria adotada para este problema. A nodalização empregada neste caso é também muito simples, quando comparada a outros trabalhos, como por exemplo o de Sampaio (1990), que utilizou uma malha com 20x20 elementos retangulares, enquanto que aqui assume-se uma malha com 6x6 elementos retangulares.

As condições de contorno adotadas para o problema em questão são as seguintes: velocidades e temperaturas prescritas nas faces esquerda (entrada) e inferior (entrada) e pressão prescrita na face direita (saída). Com a finalidade de gerar o degrau de temperatura, a condição de contorno de temperatura na face esquerda é diferente da condição de contorno de temperatura na face inferior.

Adota-se os seguintes dados geométricos para a análise do problema: comprimento e largura do domínio, $L = 0,6\text{m}$. Assume-se também, as seguintes propriedades físicas do fluido: fluido invíscido, $\mu = 0$ e sem condutividade térmica, $K = 0$, ou seja, os termos difusivos da equação da conservação da energia são eliminados, de forma a não existir nem um tipo de difusão.

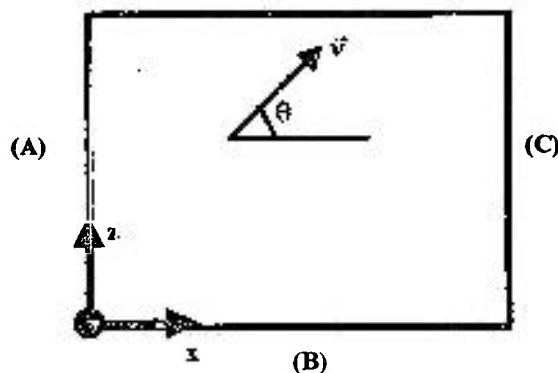


Figura 4.9 – Geometria utilizada para simulação de um degrau de temperatura (\vec{v} é o vetor velocidade do fluido).

As condições de contorno utilizadas são as seguintes:

(i) Entrada, face A:

$$T = 100^{\circ}\text{C}, u = u_1, w = w_1;$$

(ii) Parede sólida, face B:

$$T = 50^{\circ}\text{C}, u = u_1, w = w_1;$$

(iii) Saída, face C :

$$P_{saída} = 0.$$

Observa-se a diferença de 50°C nas condições de contorno da temperatura entre as faces esquerda e inferior. Nestas condições de contorno, u_1 e w_1 são as componentes do vetor velocidade do fluido na entrada e assumem valores distintos dependendo do caso analisado. A variação das componentes da velocidade tem a finalidade de alterar o ângulo com que o vetor velocidade faz com o eixo x (ângulo θ) e, portanto, a direção relativa entre a malha e a velocidade do fluido. Dois casos são analisados, um com $\theta = 45^{\circ}$ e outro com $\theta = 60^{\circ}$. Para ambos os casos é utilizada a malha com 6×6 elementos. Tanto neste problema como no anterior o intervalo de tempo utilizado é 10^{-3} segundos.

- **Caso 1.** O primeiro caso consiste em um degrau de temperatura com a velocidade fazendo um ângulo de 45° com a horizontal. Os valores das componentes da velocidade de entrada, fornecidos como condições de contorno, são $u_1 = w_1 = 0,5\text{m/s}$, para as direções x e z , respectivamente. A fim de verificar a influência do grau da expansão, simula-se este caso para expansões de graus 1, 3 e 5. A Figura 4.10 mostra o perfil de temperatura no domínio da solução para expansão de grau 1. Pode-se observar que o resultado não é muito satisfatório, pois a descontinuidade na temperatura é bastante suavizada, apresentando o problema de falsa difusão.

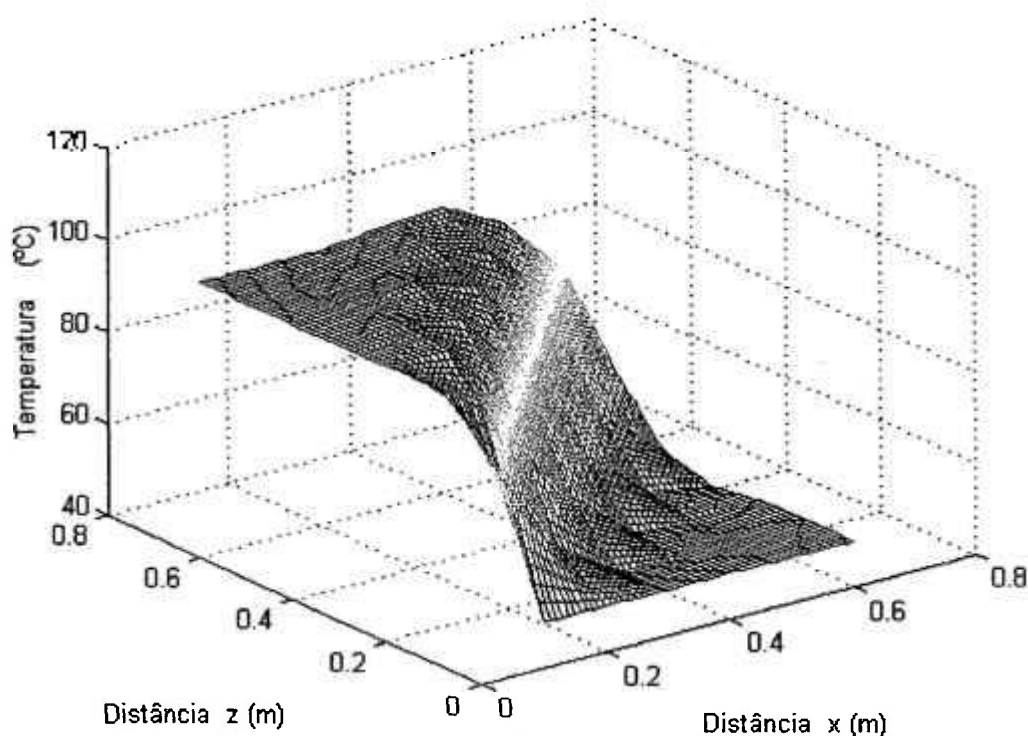


Figura 4.10 – Perfil da temperatura ao longo do domínio, para $\theta = 45^\circ$ e expansão de grau 1 (PMEFH2D) – Caso 1.

As Figuras 4.11 e 4.12 mostram o perfil da temperatura para expansões de graus 3 e 5, respectivamente. Os resultados obtidos nestes dois casos são muito melhores do que o obtido com grau 1 e mais próximos da realidade física do problema, ou seja, verifica-se uma descontinuidade abrupta na temperatura com um ângulo de 45° com a horizontal.

Concluindo, nota-se que na medida em que se utiliza uma malha grosseira, a expansão de grau 1 não é suficiente para eliminar a falsa difusão, fazendo com que este fenômeno se alastre em uma boa porção do domínio da solução. Na medida em que se aumenta o grau da expansão, observa-se que o fenômeno da falsa difusão fica restrito

somente aos elementos onde a descontinuidade de temperatura está presente. Nota-se que um aumento do número de elementos da malha melhoraria os resultados, pois na medida que a falsa difusão fica restrita ao elemento onde está a descontinuidade e quanto menor este elemento, menor será a influência da falsa difusão. Finalmente, observa-se que o problema de falsa difusão não se espalha por todo o domínio da solução quando se utiliza o método MEFH, portanto, o método proposto minimiza o problema de falsa difusão.

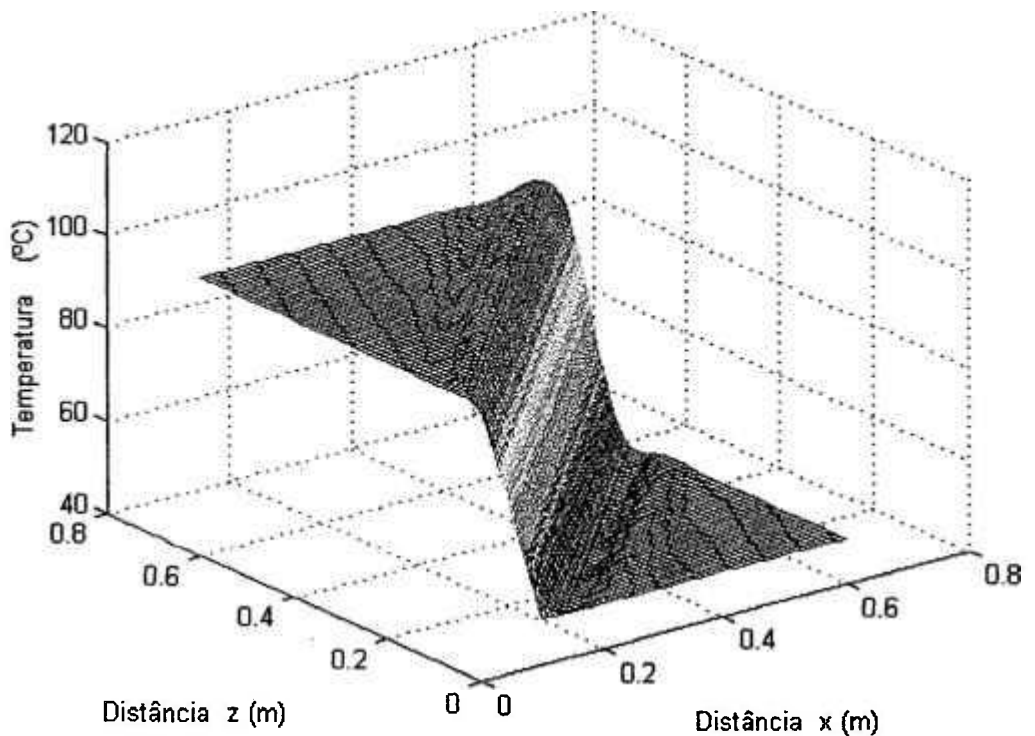


Figura 4.11 – Perfil da temperatura ao longo do domínio, para $\theta = 45^\circ$ e expansão de grau 3 (PMEFH2D) – Caso 1.

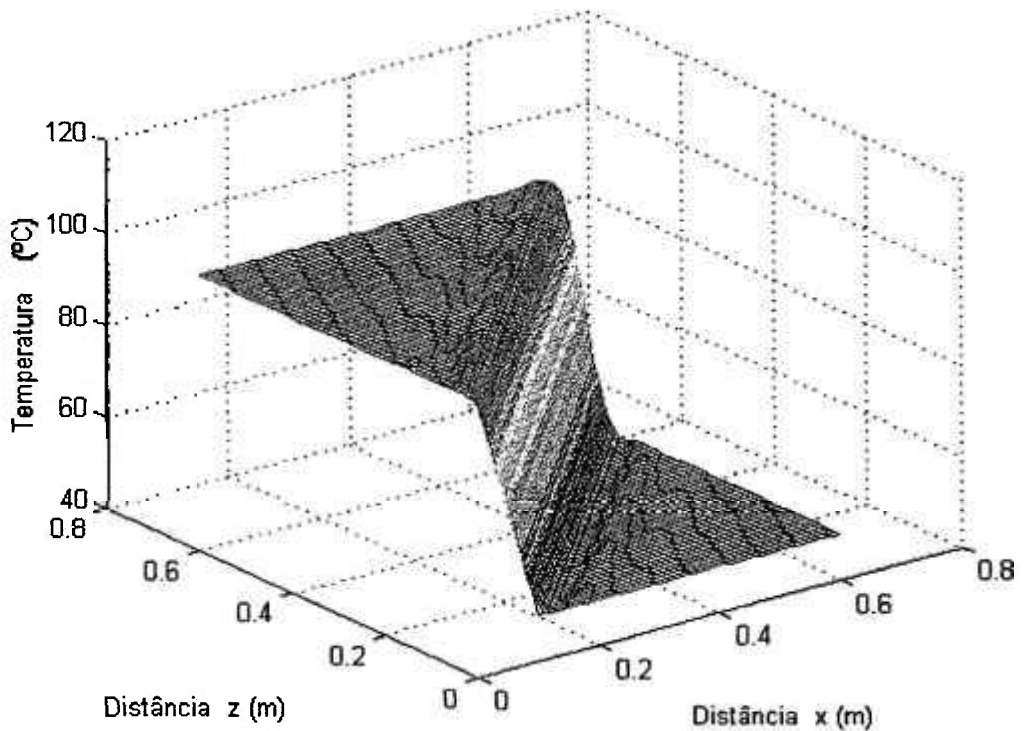


Figura 4.12 – Perfil da temperatura ao longo do domínio, para $\theta = 45^\circ$ e expansão de grau 5 (PMEFH2D) – Caso 1.

Observa-se que aumentando o grau da expansão, a partir do grau 5, não são observadas alterações significativas nos resultados.

- **Caso 2.** No segundo caso a descontinuidade na temperatura ocorre ao longo de uma reta que forma um ângulo de 60° com a horizontal. Para impor a descontinuidade com inclinação de 60° , a condição de contorno para a velocidade de entrada é $u_1 = 0,4\text{m/s}$ e $w_1 = 0,69\text{m/s}$, tanto para a face esquerda quanto para a inferior.

Novamente, a fim de verificar a influência do grau da expansão, simula-se este problema com expansões de graus 1, 3 e 5, cujos resultados podem ser vistos a seguir.

A Figura 4.13 mostra o perfil de temperatura para a expansão de grau 1, onde pode-se observar que a descontinuidade na temperatura é suavizada ao longo do domínio, apresentando a falsa difusão da mesma forma que a descontinuidade à 45°. As Figuras 4.14 e 4.15 apresentam o perfil da temperatura para expansões de graus 3 e 5, respectivamente. Os resultados obtidos nestes dois casos são satisfatórios, porém observa-se a presença de pequenas ondulações no perfil de temperatura adjacente à descontinuidade. Estas ondulações são causadas pela posição da descontinuidade no elemento, pois as funções de expansão tem dificuldades em se ajustarem ao perfil da descontinuidade quando a mesma não é simétrica no elemento. Novamente verifica-se que o aumento do grau da expansão leva a obtenção de melhores resultados e nota-se que a partir da expansão de grau 5 não ocorrem alterações nos resultados.

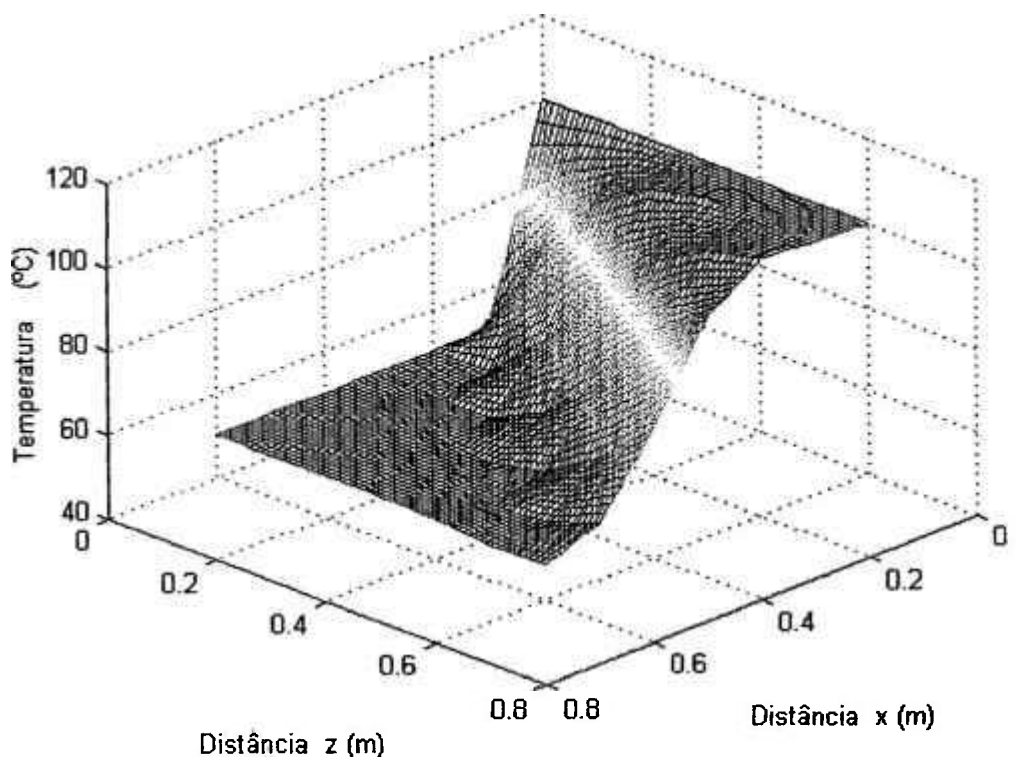


Figura 4.13 – Perfil da temperatura ao longo do domínio, para $\theta = 60^\circ$ e expansão de grau 1 (PMEFH2D) – Caso 2.

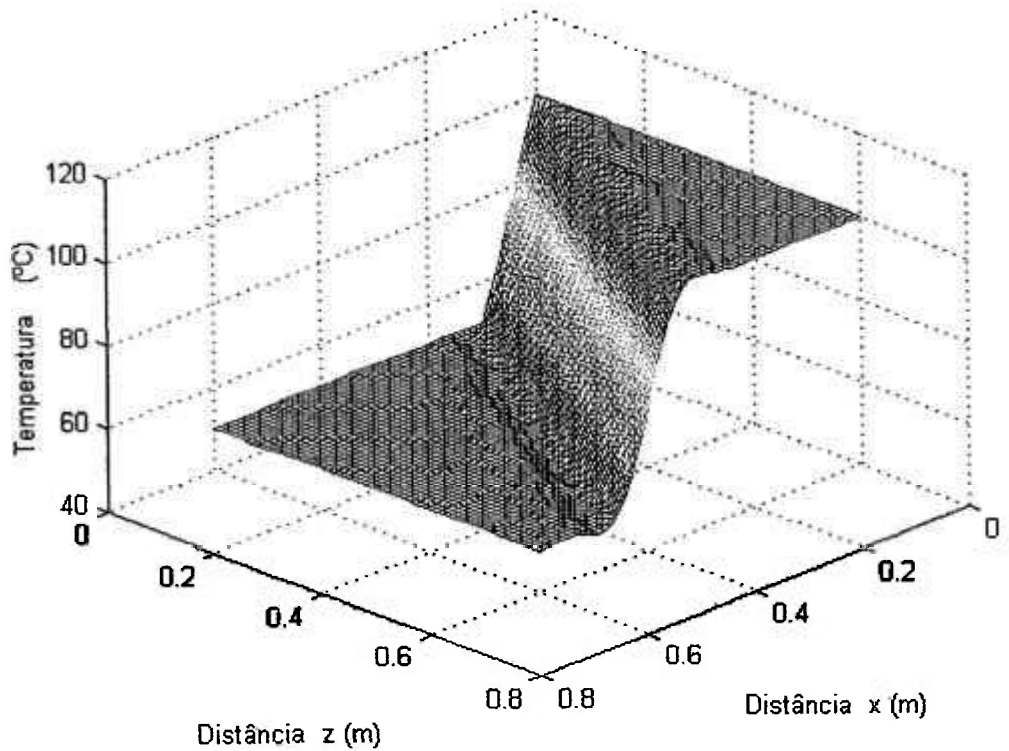


Figura 4.14 – Perfil da temperatura ao longo do domínio, para $\theta = 60^\circ$ e expansão de grau 3 (PMEFH2D) – Caso 2.

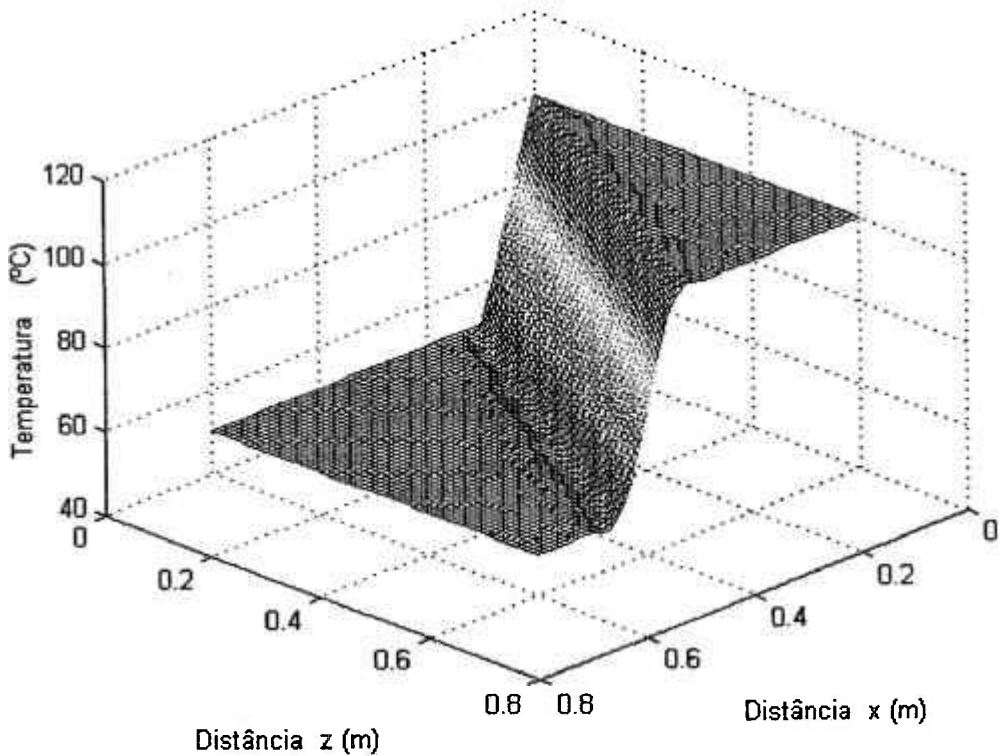


Figura 4.15 – Perfil da temperatura ao longo do domínio, para $\theta = 60^\circ$ e expansão de grau 5 (PMEFH2D) – Caso 2.

Concluindo, em ambos os casos analisados, verifica-se que na medida em que o grau da expansão aumenta não é necessário um refinamento maior da malha para se ter resultados mais precisos. Portanto, para este tipo de problema, o MEFH é um método eficiente, que não exige uma malha com muitos elementos para a obtenção de bons resultados, o que leva à uma otimização dos custos computacionais.

Deve-se ressaltar que a escolha do grau da expansão a ser empregada na solução do problema, é novamente o fator preponderante na obtenção de bons resultados. Além disto, os resultados apresentados acima confirmam a capacidade do método numérico em resolver com êxito problemas com potencialidade para apresentar falsa difusão e portanto obter uma boa aproximação do escoamento.

4.3 Problema de escoamento através de uma expansão abrupta na forma de degrau - (“backward-facing step”)

O terceiro e último problema analisado pelo programa computacional desenvolvido neste trabalho, PMEFH2D, é o de um escoamento através de uma expansão abrupta na forma de degrau (“backward-facing step”). Para realização desta análise reproduz-se o experimento feito por **Denham e Patrick (1974)**, onde o escoamento do fluido é realizado através de um duto, como mostra a Figura 4.16. O fluido utilizado no experimento é água, sendo que o perfil da componente da velocidade de entrada na direção x , u , é parabólico. A medida das componentes da velocidade realizada por **Denham e Patrick (1974)** nos seus experimentos, foi realizada com anemômetro à laser. O perfil da componente da velocidade u , na direção z foi medido em seis pontos ao longo do domínio

do escoamento. Quatro experimentos, com números de Reynolds diferentes, sendo todos em regime laminar, foram realizados por **Denham e Patrick (1974)**.

Neste trabalho utiliza-se o experimento de **Denham e Patrick (1974)** com número de Reynolds igual a 73. A geometria do canal de escoamento está apresentada na Figura 4.16.

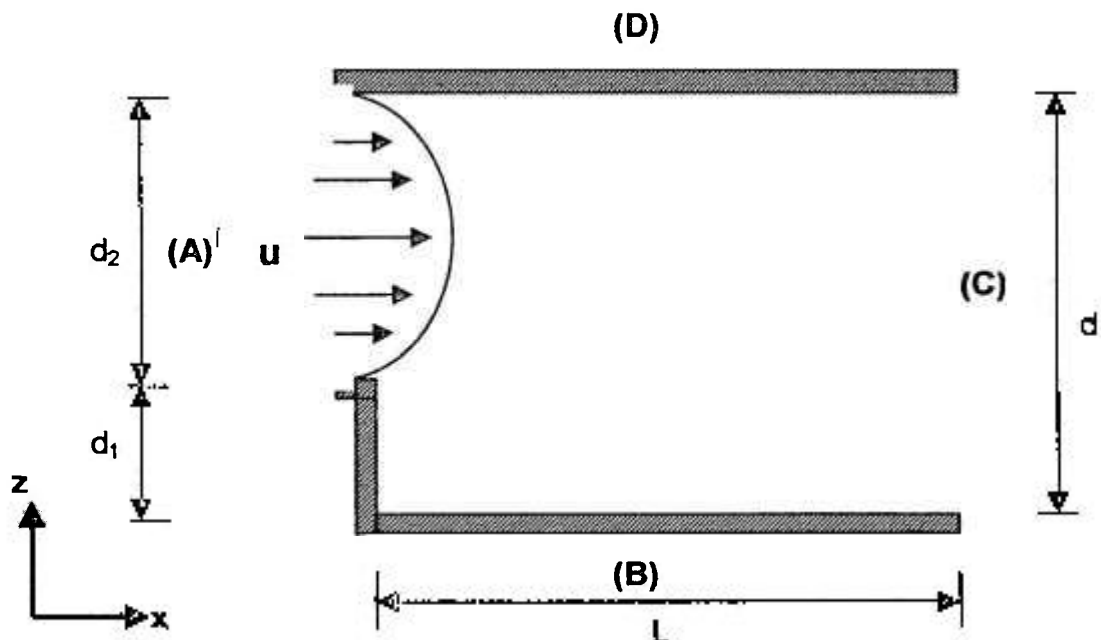


Figura 4.16 – Geometria utilizada para simulação de escoamento através de uma expansão abrupta na forma de um degrau (“*backward-facing step*”).

Os dados geométricos utilizados são os seguintes: comprimento do canal $L = 0,15\text{m}$ e largura da face direita, $d = 0,045\text{m}$ (largura do degrau, $d_1 = 0,015\text{m}$ e largura da entrada, $d_2 = 0,030\text{m}$). As propriedades físicas utilizadas para a água são as seguintes: viscosidade dinâmica, $\mu = 0,001 \text{ kg/sm}^2$ e a massa específica, $\rho = 1000\text{kg/m}^3$.

As condições de contorno adotadas para este problema são as seguintes: o perfil da componente da velocidade na direção x , u , prescrito na entrada, como pode ser visualizado através da Figura 4.16, e a pressão prescrita na saída. Numericamente tem-se as seguintes condições de contorno:

(i) Entrada, face A :

Perfil parabólico para u , como mostrado na Figura 4.16, com velocidade média, $\bar{u} = 0,00485\text{m/s}$ e $w = 0$;

(ii) Parede sólida, face B:

$$u = 0, w = 0;$$

(iii) Saída, face C :

$$P_{saída} = 0;$$

(iv) Parede sólida, face D:

$$u = 0, w = 0;$$

Com as propriedades físicas adotadas para a água e com a velocidade média na entrada o número de Reynolds, segundo Denham e Patrick (1974), neste caso é dado por:

$$Re = \frac{\bar{\rho} \bar{u} d_t}{\mu}, \quad (4-3)$$

e é igualada a 73.

A fim de comparar os resultados obtidos com o modelo numérico e aqueles alcançados experimentalmente por Denham e Patrick (1974), são considerados os seguintes pontos de medida ao longo da direção do domínio de escoamento, 0m; 0,012m; 0,030m; 0,060m; 0,090m e 0,12m, como pontos de referência.

Com o objetivo de validar o MEFH, é realizado um teste de sensibilidade para duas malhas diferentes, assim, são analisados dois casos, um com uma malha de 25×12 elementos retangulares, e um outro com uma malha de 25×8 elementos retangulares, nas direções x e z , respectivamente, para as mesmas condições operacionais e geométricas. A discretização na direção z não é uniforme, ou seja, utiliza-se elementos de tamanhos diferentes. Do número total de elementos ao longo da direção z , a metade dos elementos são igualmente distribuídos ao longo da distância d_1 e a outra metade igualmente distribuída ao longo de d_2 , distâncias estas definidas anteriormente.

Os resultados obtidos para as duas malhas propostas, com o programa PMEFH2D, estão descritos a seguir.

- **Caso 1.** Neste primeiro caso utiliza-se uma malha com 25×12 elementos retangulares, nas direções x e z respectivamente e simula-se o problema com expansões de graus 1, 2 e 3. O número de elementos retangulares na direção z foram dispostos da seguinte forma: seis elementos são distribuídos igualmente ao longo de d_1 e os outros seis são dispostos igualmente ao longo de d_2 . Portanto o tamanho dos elementos não é constante ao longo da direção z . O intervalo de tempo utilizado na simulação deste problema é o mesmo que os utilizados nos problemas anteriores, ou seja, em torno de 10^{-3} segundos.

A Figura 4.17, fundo, mostra o perfil da velocidade resultante ao longo do domínio de escoamento, obtido pela simulação numérica para a expansão de grau 1. O corte na figura assinalado de azul mostra o perfil da velocidade ampliado e o corte assinalado de vermelho mostra a recirculação do fluido em torno de d_1 . Este comportamento da

velocidade perto do degrau é esperado, pois para uma expansão brusca observa-se uma recirculação do fluido em torno da região fechada do duto.

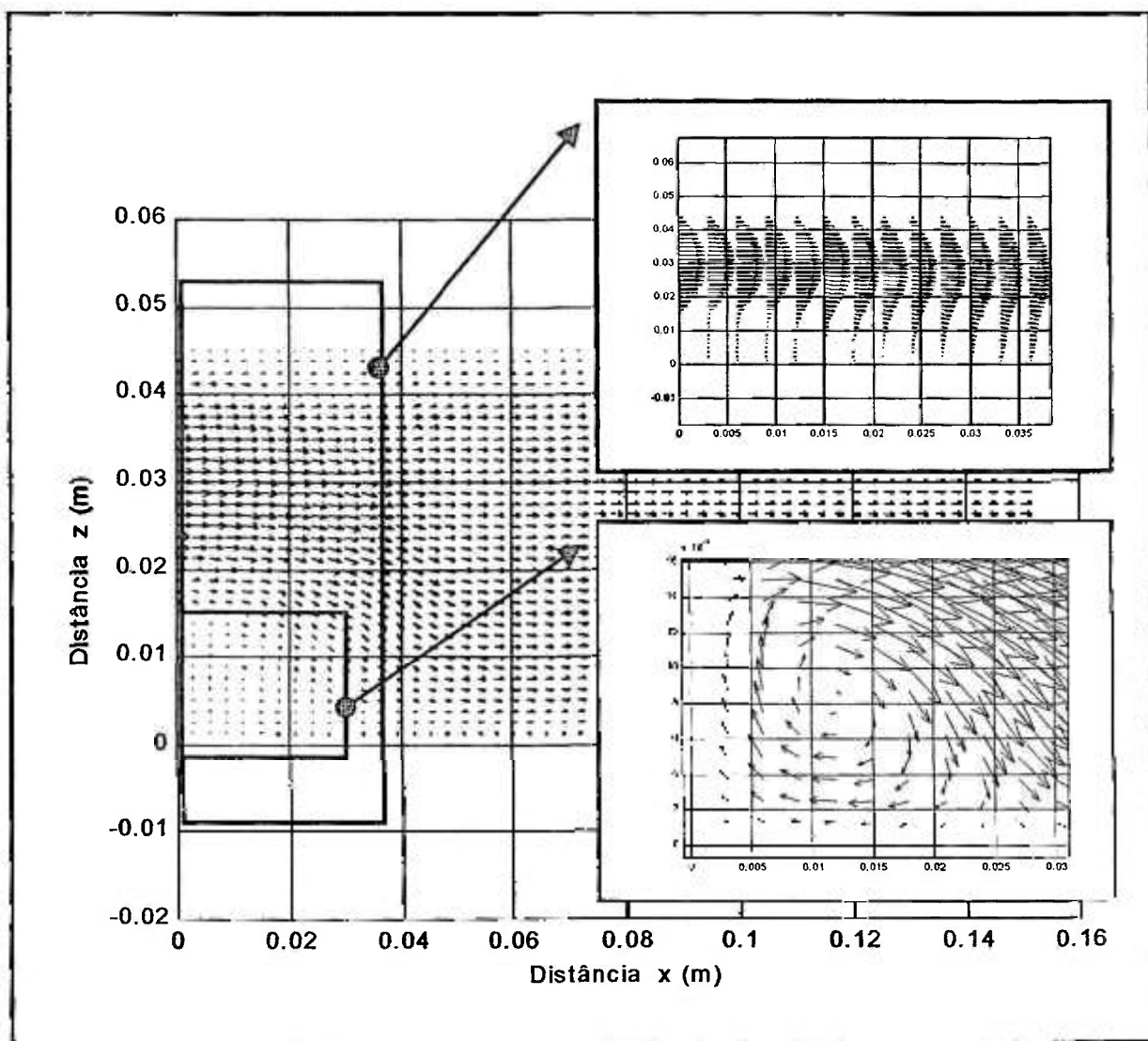


Figura 4.17 – Perfil da velocidade ao longo de um escoamento através de um degrau (“backward-facing step”), obtido com PMEFH2D, grau=1 – Caso 1.

A comparação entre os resultados obtidos experimentalmente e os alcançados pela simulação numérica para a expansão de grau 1, podem ser vistos através da Figura 4.18. Nela observa-se que o perfil calculado para a componente da velocidade na direção x , u ,

para cada um dos pontos de medida, se aproxima relativamente bem dos dados experimentais, sendo que a medida que se afasta da entrada o erro entre os dois resultados aumenta um pouco.

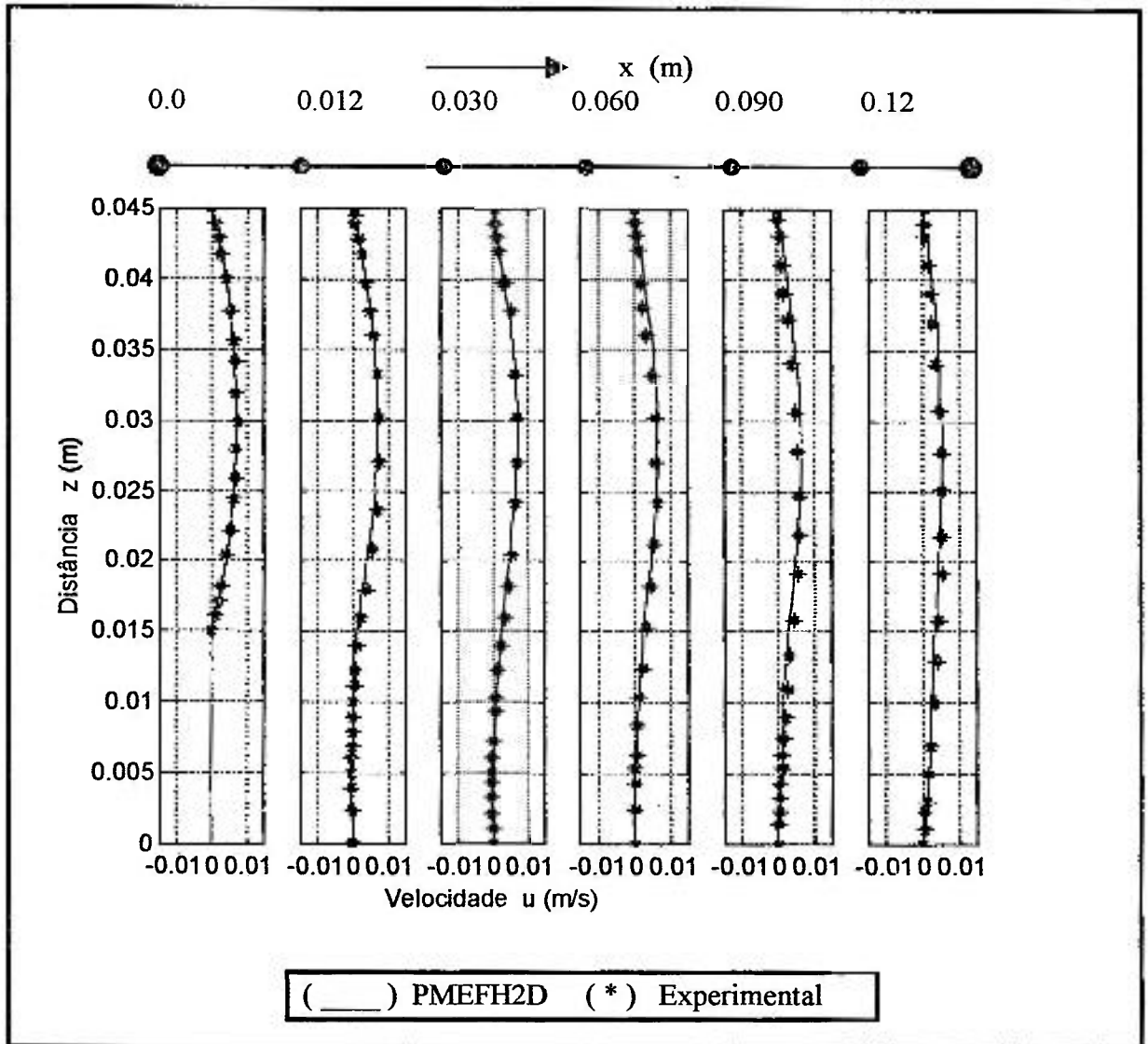


Figura 4.18 – Comparação entre resultados obtidos com o PMEFH2D e os resultados experimentais de Denhan e Patrlck (1974), para $Re = 73$ e grau = 1 – Caso 1.

A Figura 4.19 apresenta o contorno da pressão no domínio de escoamento, podendo-se observar que ela se torna negativa perto da entrada, devido a recirculação

do fluido, crescendo ao longo do escoamento e indo a zero na saída, que é condição de contorno imposta para o problema.

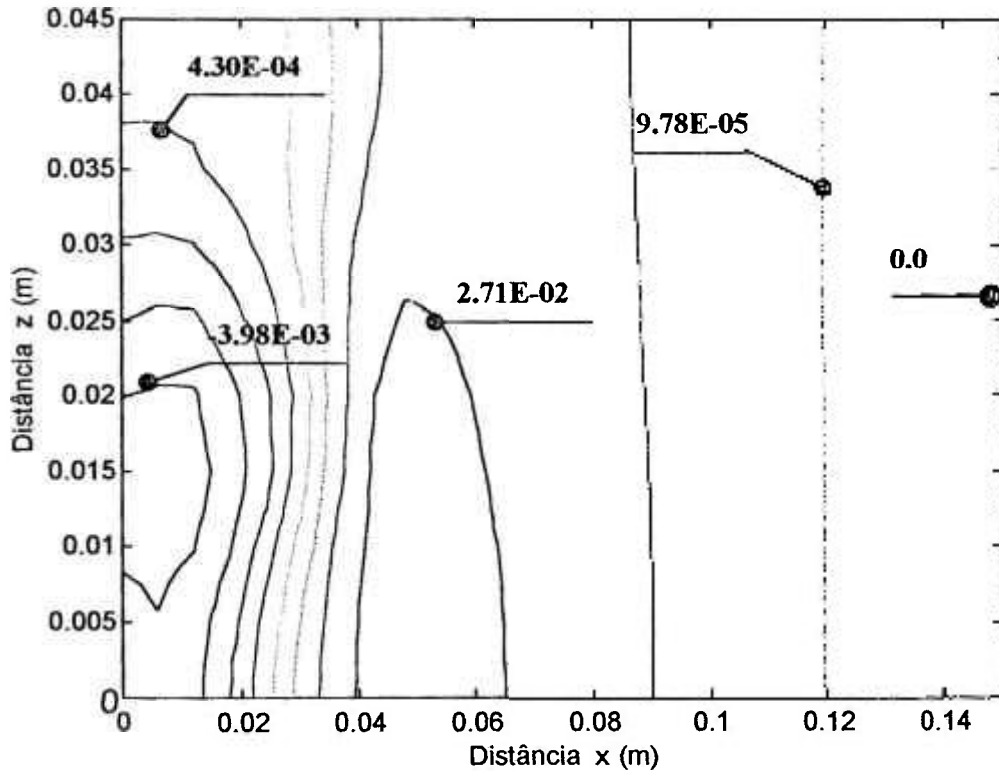


Figura 4.19 – Contorno da pressão em Pa, gerado pelo programa PMEFH2D, com $Re = 73$ e grau = 1 - Caso 1.

As figuras 4.20 e 4.21, mostram o perfil calculado para a velocidade ao longo do domínio de escoamento, para as expansões de graus 2 e 3, respectivamente. Em ambas as figuras é possível visualizar o perfil da velocidade na entrada, ampliada através do corte da figura em azul, e a recirculação do fluido em torno de d_1 , através do corte na figura em vermelho. Novamente, a recirculação do fluido é esperada nesta região, sendo que em outros trabalhos, como de Zienkiewica, Szmelter e Peraire (1990) e Sampaio (1990), este fenômeno não pode ser visualizado.

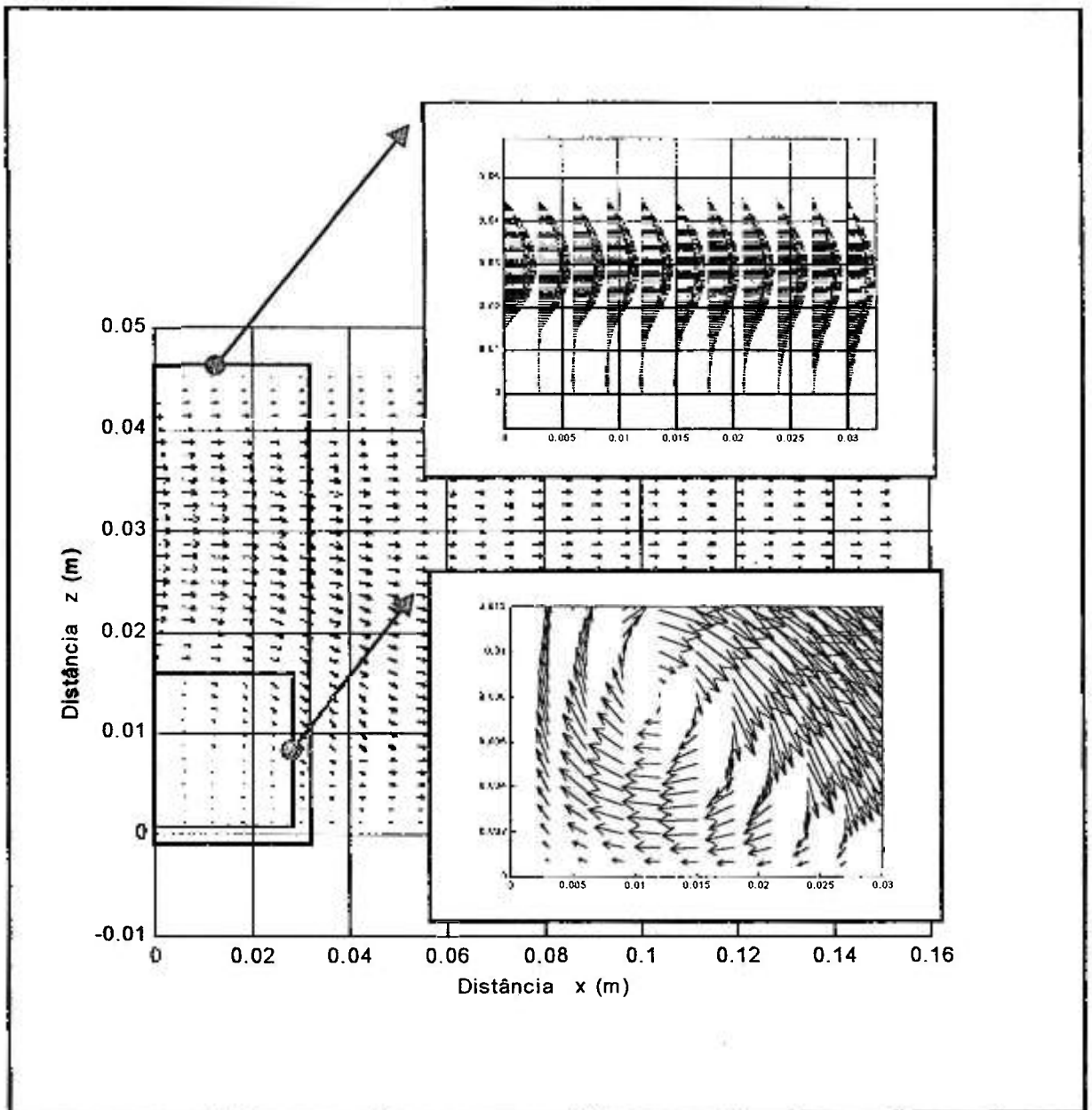


Figura 4.20 – Perfil da velocidade ao longo de um escoamento através de um degrau (“backward-facing step”), obtido com PMEFH2D, grau=2 – Caso 1.

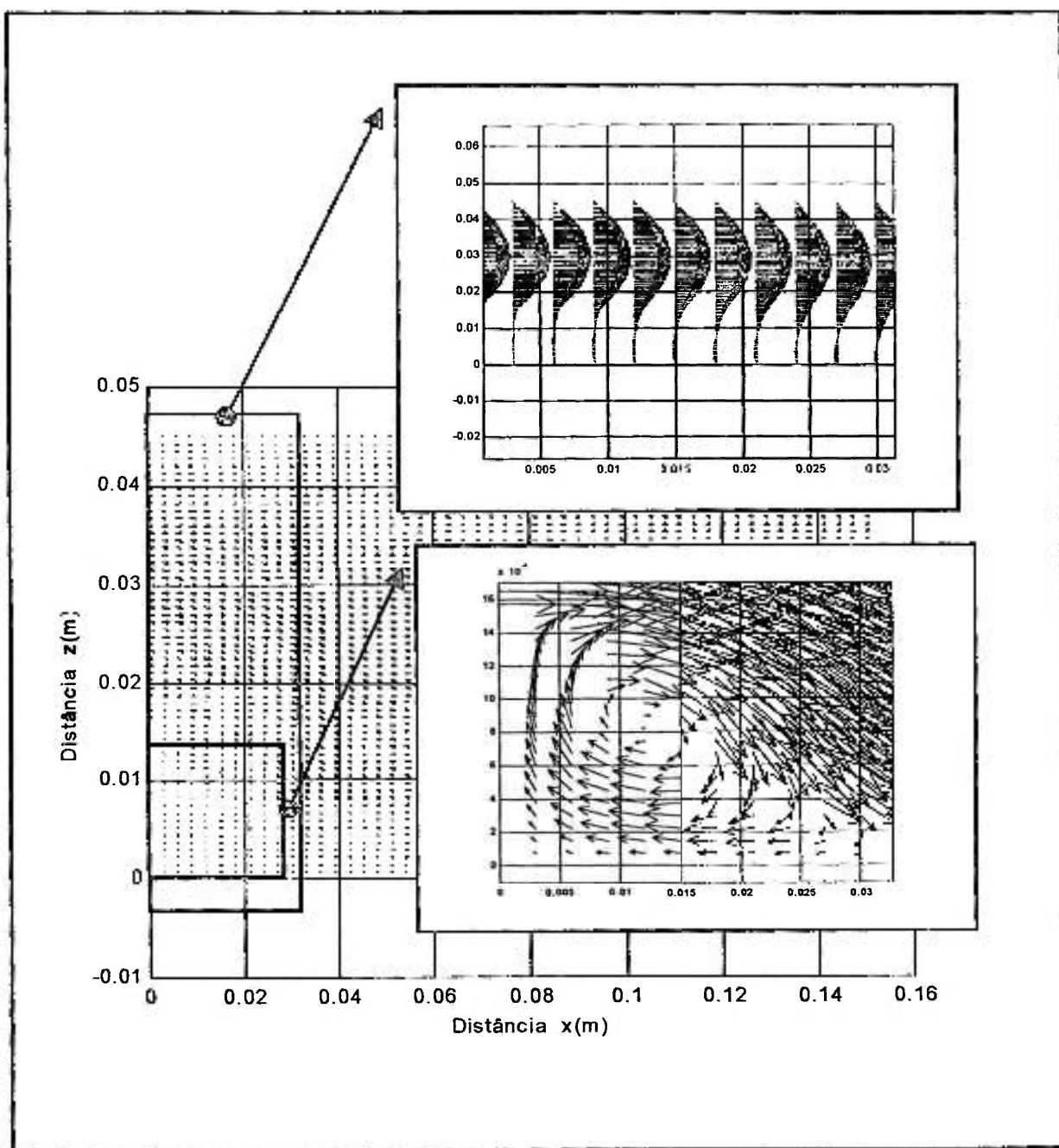


Figura 4.21 – Perfil da velocidade ao longo de um escoamento através de um degrau (“backward-facing step”), obtido com PMEFH2D, grau=3 – Caso 1.

Verifica-se por meio das Figuras 4.22 e 4.23, que na medida em que se aumenta o grau da expansão os resultados obtidos pelo PMEFH2D se aproximam mais dos

resultados experimentais. No entanto, tanto para o grau 2 como para o grau 3, os erros entre os resultados numéricos e experimentais aumentam a medida que se afasta da entrada do duto, mas com valores inferiores aos obtidos para a expansão de grau 1.

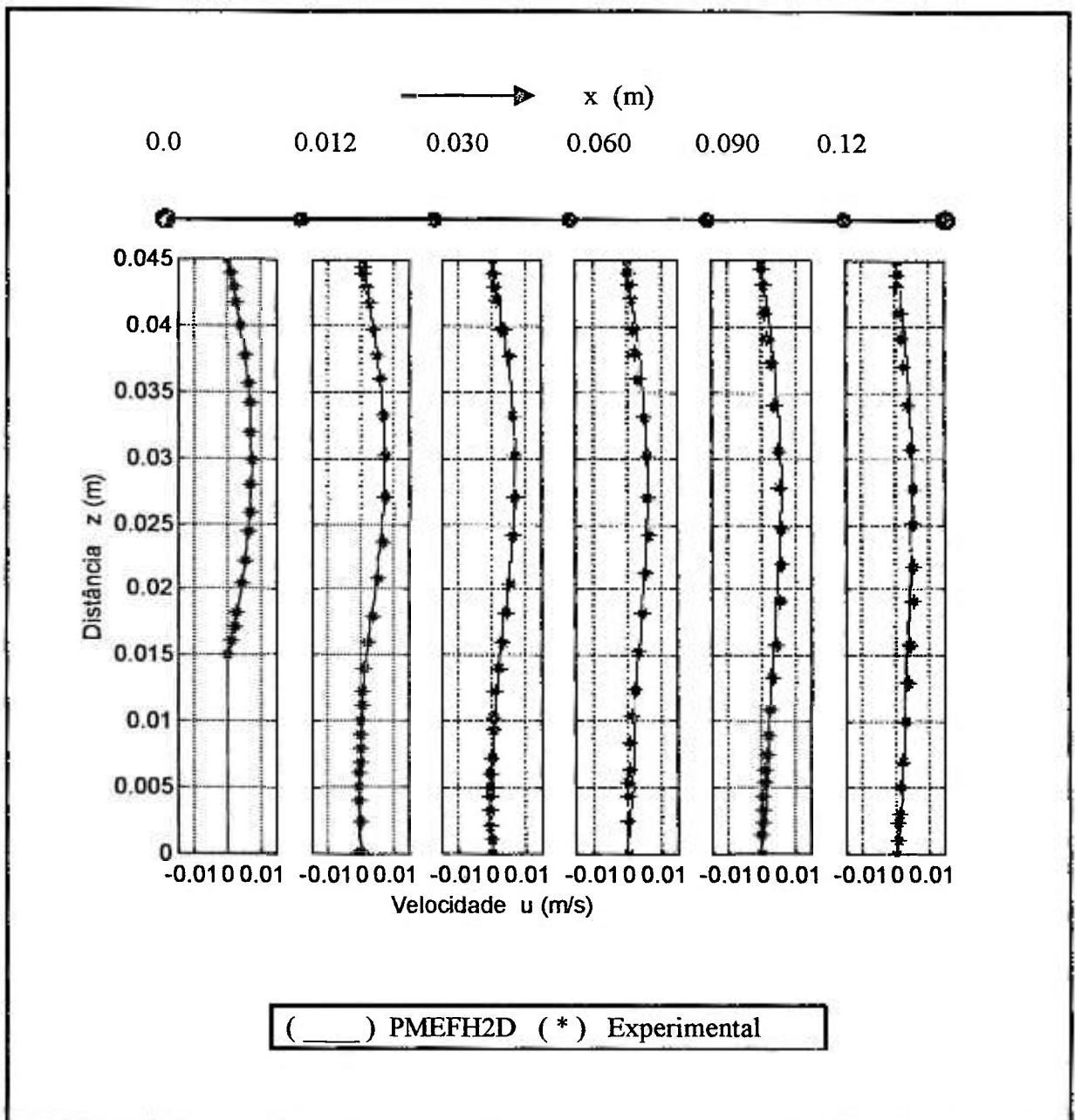


Figura 4.22 – Comparação entre resultados obtidos com o PMEFH2D e os resultados experimentais de **Denhan e Patrlck (1974)**, para $Re = 73$ e grau = 2 – Caso 1.

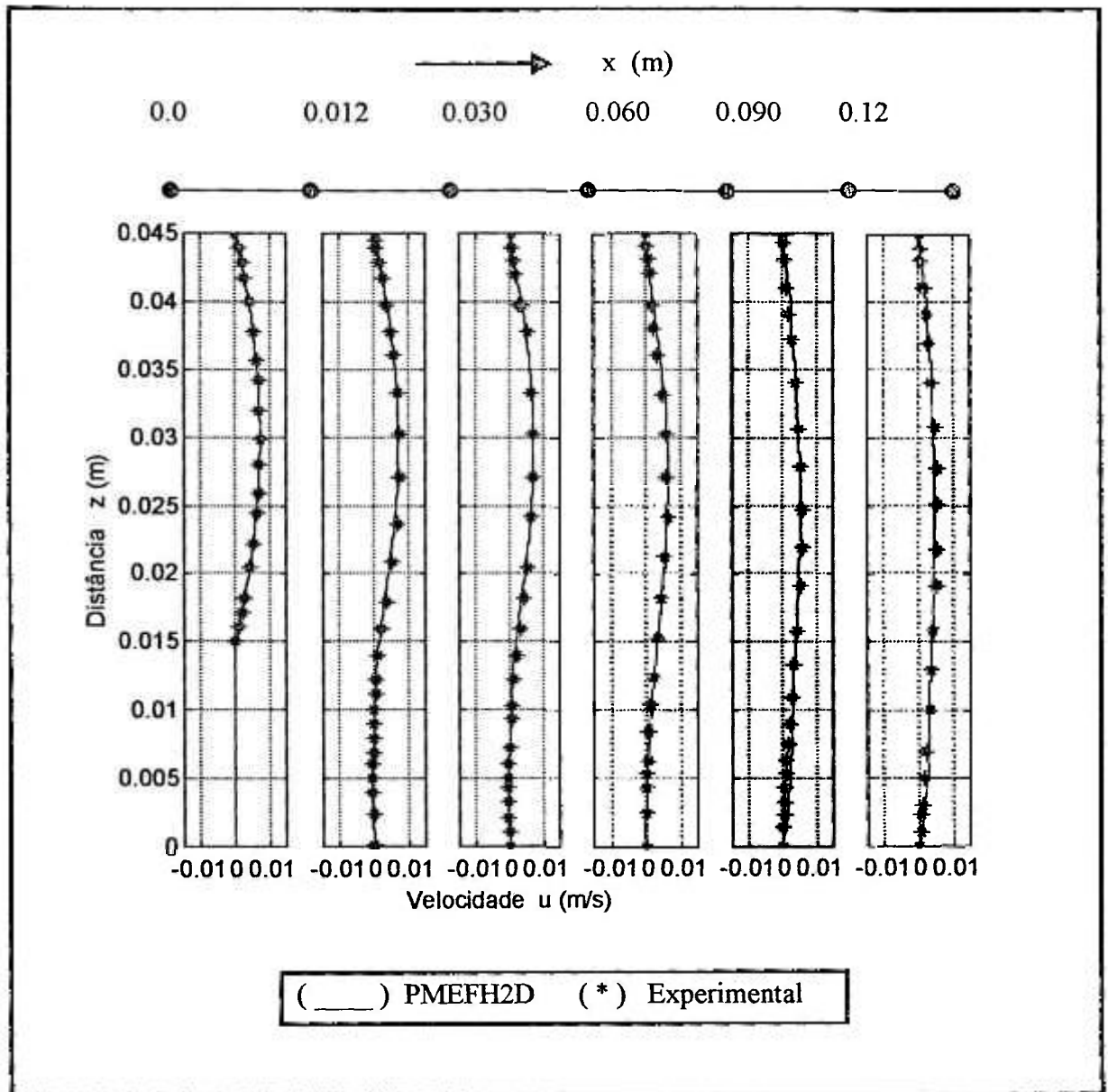


Figura 4.23 Comparação entre resultados obtidos com o PMEFH2D e os resultados experimentais de Denhan e Patrlck (1974), para $Re = 73$ e grau $= 3$ – Caso 1.

O contorno da pressão ao longo do domínio de escoamento, para as expansões de graus 2 e 3, podem ser vistos através das Figuras 4.24 e 4.25, respectivamente. Em ambos os casos observa-se que o comportamento da pressão é o esperado para este tipo de problema, ou seja, a pressão é negativa perto do degrau na entrada, devido à recirculação do fluido, cresce ao longo do domínio de escoamento e na saída é igual a zero.

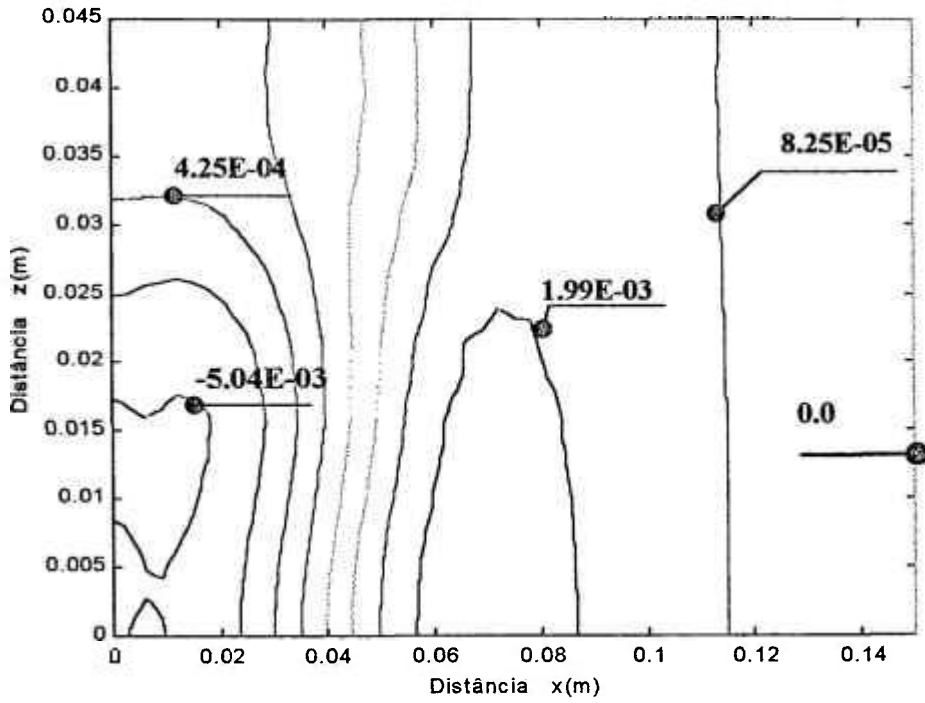


Figura 4.24 – Contorno da pressão em Pa, gerado pelo programa PMEFH2D, com $Re = 73$ e grau = 2- Caso 1.

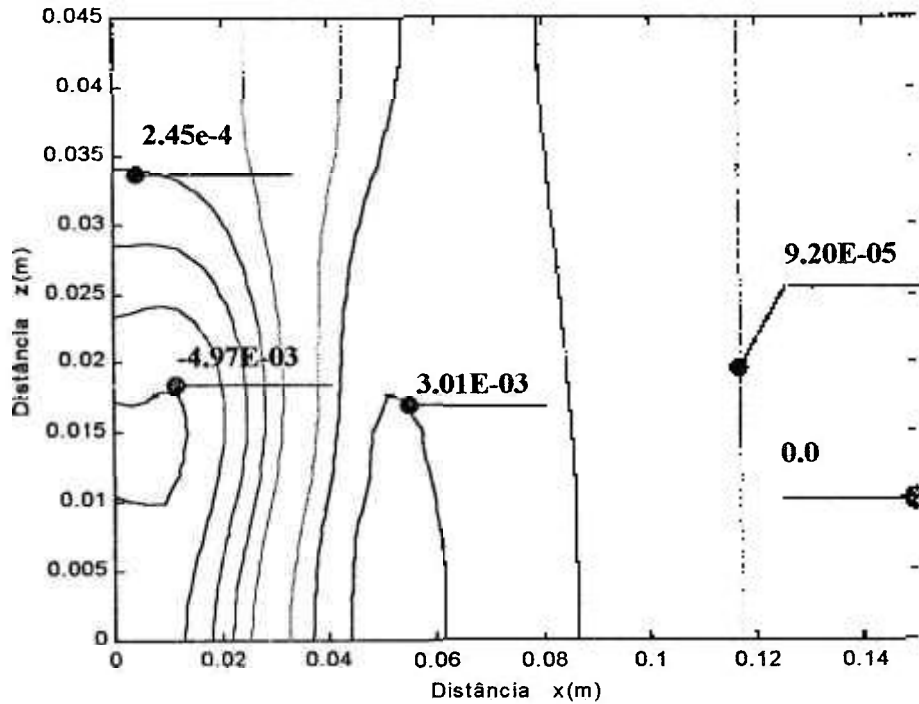


Figura 4.25 – Contorno da pressão em Pa, gerado pelo programa PMEFH2D, com $Re = 73$ e grau = 3- Caso 1.

Observa-se que o comportamento da pressão, para os três casos analisados, é muito parecido, pois como no primeiro problema analisado verifica-se que o grau da expansão não altera o perfil da pressão ao longo do domínio de escoamento.

A Tabela 4.1 mostra os erros numéricos calculados entre os resultados da velocidade obtidos com o PMEH2D e os resultados experimentais. Estes erros representam a média dos valores absolutos dos erros entre a velocidade calculada e a experimental para cada posição de medida ao longo da direção z .

Tabela 4.1 – Valores dos erros médio obtidos entre os resultados experimentais e os calculados pelo programa computacional PMEFH2D para a velocidade, para cada uma das posições de medida e graus de expansão – Caso 1.

Posição ao longo da direção x (m)	Erro médio ($\epsilon_{médio}$) grau = 1 (%)	Erro médio ($\epsilon_{médio}$) grau = 2 (%)	Erro médio ($\epsilon_{médio}$) grau = 3 (%)
0,012	8,70	4,42	3,01
0,030	10,3	8,30	4,19
0,060	13,47	11,95	7,09
0,090	13,653	12,51	8,17
0,12	15,92	13,21	10,29

Por meio da Tabela 4.1 observa-se que os valores dos erros médios para a velocidade diminuem na medida em que se aumenta o grau da expansão. Embora os valores dos erros não sejam desprezíveis, observa-se que no seu cálculo não são considerados os erros experimentais de medida, contudo, para a expansão de grau 3 o valor do erro está dentro do esperado, apresentado um valor máximo de 10 %. Deve-se

ressaltar, que na entrada o erro médio é igual a zero, pois nesta posição o perfil da velocidade calculado com o PMEFH é o mesmo que o experimental.

Com o objetivo de verificar a origem dos erros encontrados entre os resultados experimentais e os obtidos pelo método numérico proposto para a velocidade, é estabelecido um perfil teórico para a velocidade em uma posição na direção x onde o escoamento está plenamente desenvolvido.

O perfil teórico da velocidade para um escoamento entre placas paralelas plenamente desenvolvido é dado, segundo **Sampaio (1991)**, pela seguinte equação:

$$u(z) = \frac{3}{2} \bar{u} \left[2 \frac{z}{d/2} - \left(\frac{z}{d/2} \right)^2 \right], \quad (4-4)$$

onde d é a distância entre as placas e \bar{u} é a velocidade média na seção transversal do escoamento, que no caso é igual a 0,00323m/s.

A Figura 4.26 mostra a comparação entre os valores teórico, experimental e calculados pelo PMEFH2D, para as expansões de graus 1, 2 e 3, apenas para $x = 0,12\text{m}$. Esta posição de medida foi escolhida como ponto de comparação, pois **Denhan e Patrlck (1974)** observaram durante a simulação deste experimento que a partir de $x = 0,012\text{m}$ o escoamento já era plenamente desenvolvido. Por esta razão pode-se fazer esta comparação teórica-experimental neste ponto de medida. Através da Figura 4.26, observa-se que o perfil da velocidade teórica encontra-se entre os resultados obtidos experimentalmente e o perfil da velocidade calculado pelo PMEH2D, para os três graus de expansão analisados.

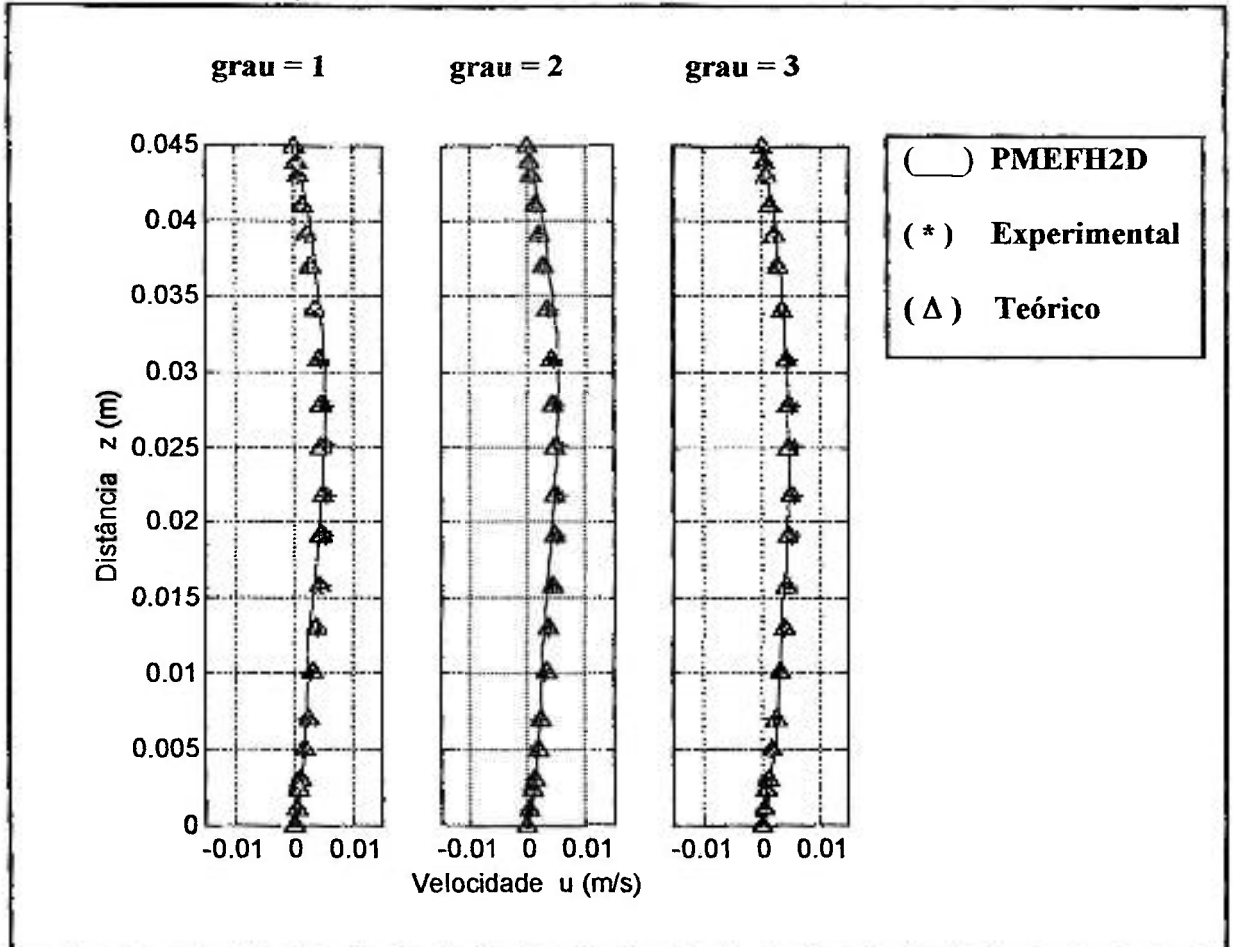


Figura 4.26 – Perfil da velocidade gerados pelo PMEFH2D, teoricamente e experimentalmente, para a posições de medida 0,12 m e para os polinômios de grau 1, 2 e 3 – Caso 1.

A Tabela 4.2 apresenta as diferenças médias entre os dados experimentais e os valores teóricos e entre os resultados do modelo e os valores teóricos. Estas diferenças representam a média dos valores absolutos das diferenças para cada posição ao longo da direção z .

Tabela 4.2 – Diferenças médias entre os dados experimentais e calculados pelo modelo em relação aos valores teóricos do perfil de velocidade.

Caso	Erro médio ($\epsilon_{médio}$) (%)
Experimentais/Teóricos	10,31
PMEFH2D (grau=1)/Teóricos	14,93
PMEFH2D (grau=2)/Teóricos	12,71
PMEFH2D (grau=3)/Teóricos	9,97

Por meio dos dados apresentados na Tabela 4.2, observa-se que a diferença média menor em relação aos resultados teóricos é aquela que corresponde a simulação numérica com grau de expansão igual a 3. De onde se conclui que a maior fonte de diferenças deve ser, provavelmente, devido aos erros de medida e não pela aproximação matemática do modelo numérico.

Deve-se ressaltar que a escolha do grau da expansão, é também, para este tipo de problema, o fator determinante para a obtenção de bons resultados.

- **Caso 2.** Como nos outros dois problemas simulados com o programa PMEFH2D, para este problema também realiza-se um teste de sensibilidade, a fim de constatar que com o aumento do grau da expansão não existe a necessidade de refinamento da malha para garantir a obtenção de bons resultados. Dessa forma utiliza-se uma malha de 25x8 elementos retangulares, nas direções x e z respectivamente e novamente simula-se numericamente a expansão na forma de degrau para expansões de graus 1, 2 e 3. Nota-se que o número de elementos na direção z desta malha (8 elementos) é 33 % menor

do que na malha utilizada na primeiro caso (12 elementos). Observa-se que, com uma malha com um menor número de elementos na direção z , não é possível visualizar a recirculação do fluido perto da região da entrada.

Dos oito elementos retangulares na direção z , quatro são distribuídos igualmente ao longo da distância d_1 e quatro ao longo de d_2 . O intervalo de tempo utilizado na simulação deste problema é da mesma ordem de grandeza daqueles utilizados nos problemas anteriores, ou seja, em torno de 10^{-3} segundos.

As Figura 4.27, 4.28 e 4.29 mostram a evolução da velocidade ao longo do domínio de escoamento, obtido pela simulação numérica para as expansões de graus 1, 2 e 3, respectivamente. Sendo que os cortes nas figuras assinalados de azul apresentam de forma ampliada o perfil da velocidade na região da entrada e os cortes assinalados de vermelho apresentam a recirculação do fluido para região do degrau.

Por meio das Figuras 4.30, 4.31 e 4.32 pode-se ver a comparação entre os resultados da velocidade obtidos experimentalmente e os calculados pela simulação numérica para as expansões de graus 1, 2 e 3, respectivamente. Observa-se que os perfis da velocidade se aproximam razoavelmente bem do perfil experimental para as expansões de graus 2 e 3. Para a expansão de grau 1 os resultados do modelo não são muito satisfatórios, se distanciando dos resultados experimentais. Verifica-se também, que os perfis da velocidade calculados para cada um dos pontos de medida se distanciam mais dos resultados experimentais a medida que se afasta da entrada, como ocorreu no Caso 1.

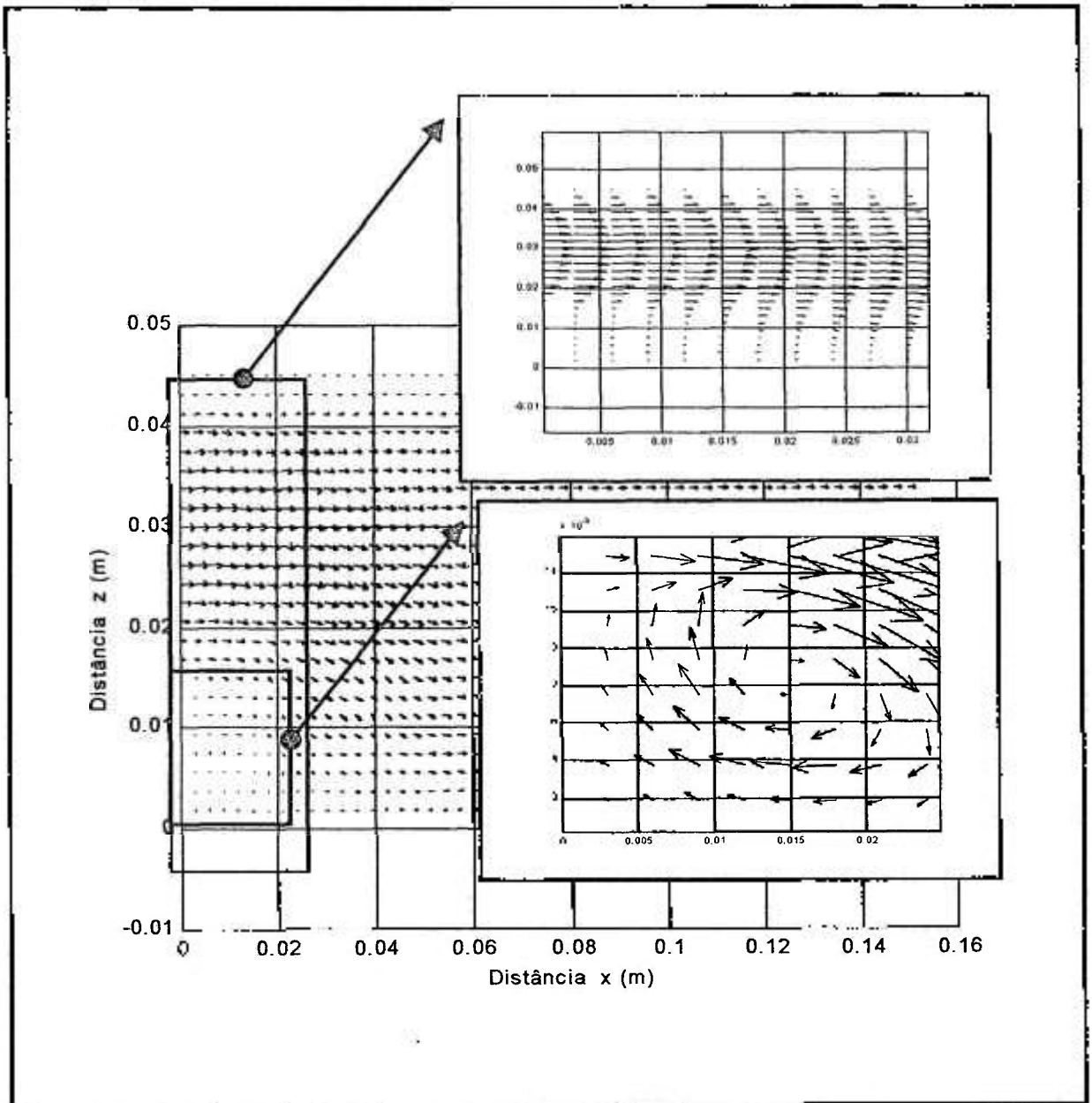


Figura 4.27 – Perfil da velocidade ao longo de um escoamento através de um degrau (“backward-facing step”), obtido com PMEFH2D, grau=1– Caso 2.

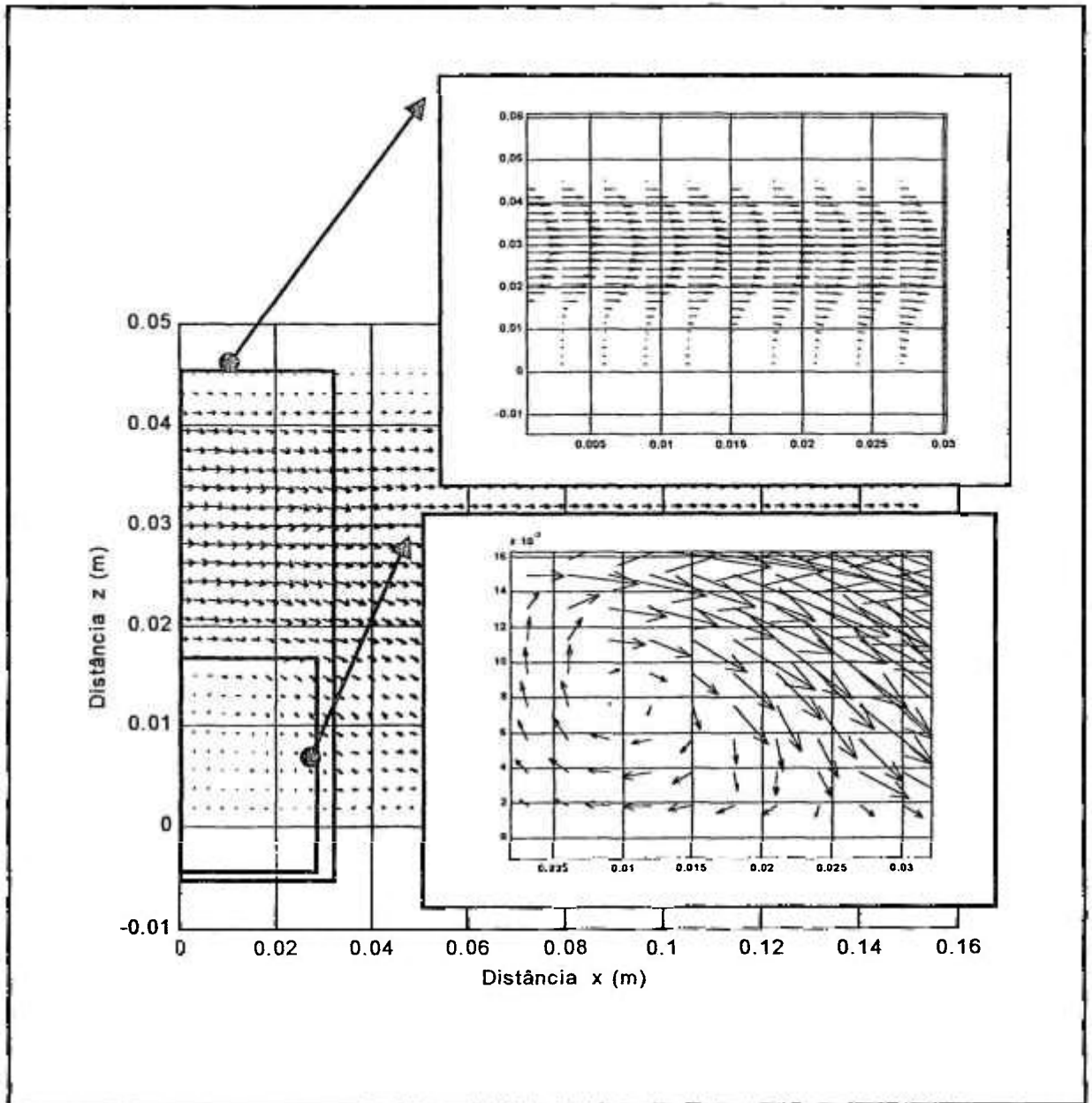


Figura 4.28. – Perfil da velocidade ao longo de um escoamento através de um degrau (“backward-facing step”), obtido com PMEFH2D, grau=2– Caso 2.

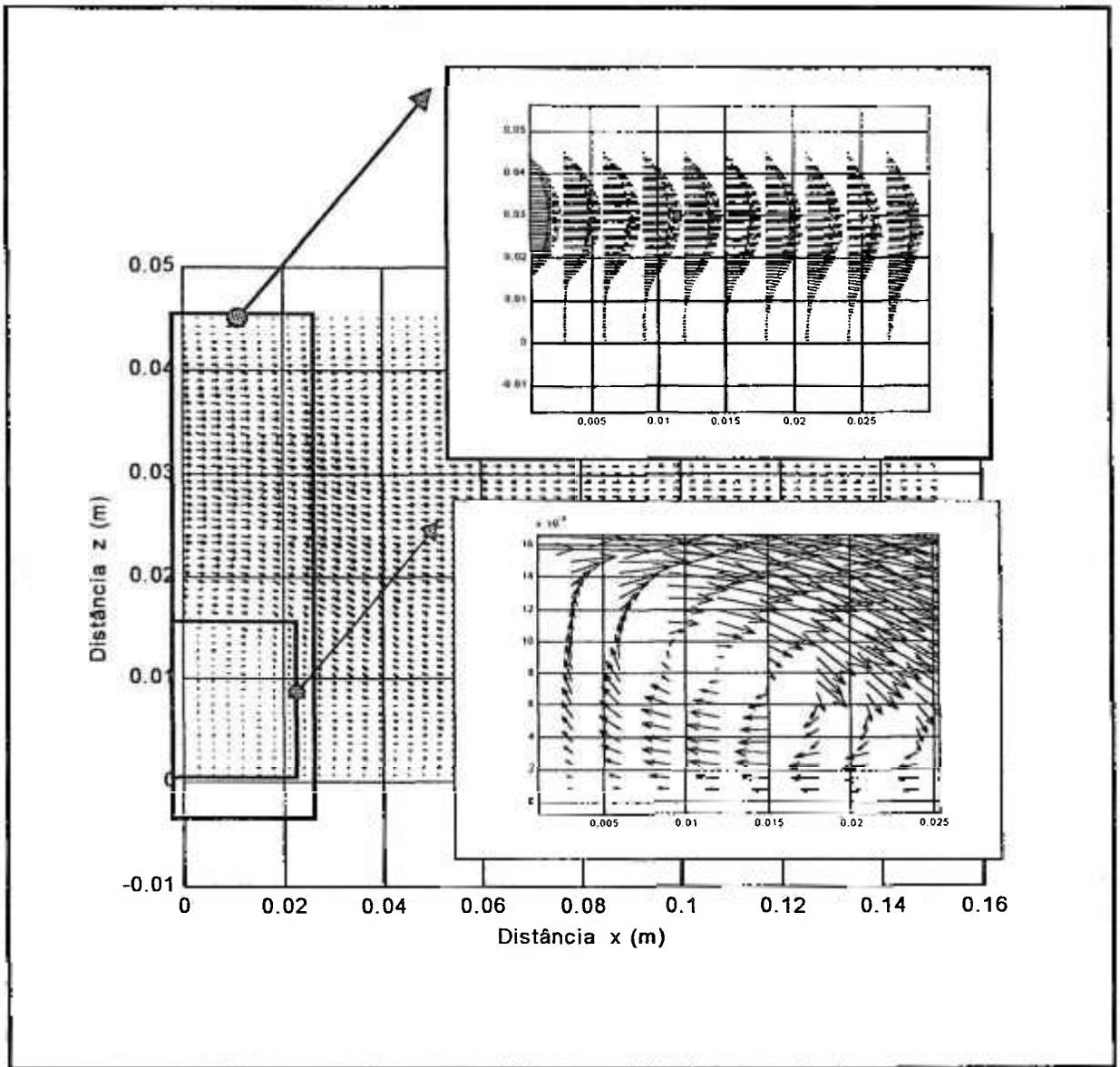


Figura 4.29. – Perfil da velocidade ao longo de um escoamento através de um degrau (“backward-facing step”), obtido com PMEFH2D, grau=3– Caso 2.

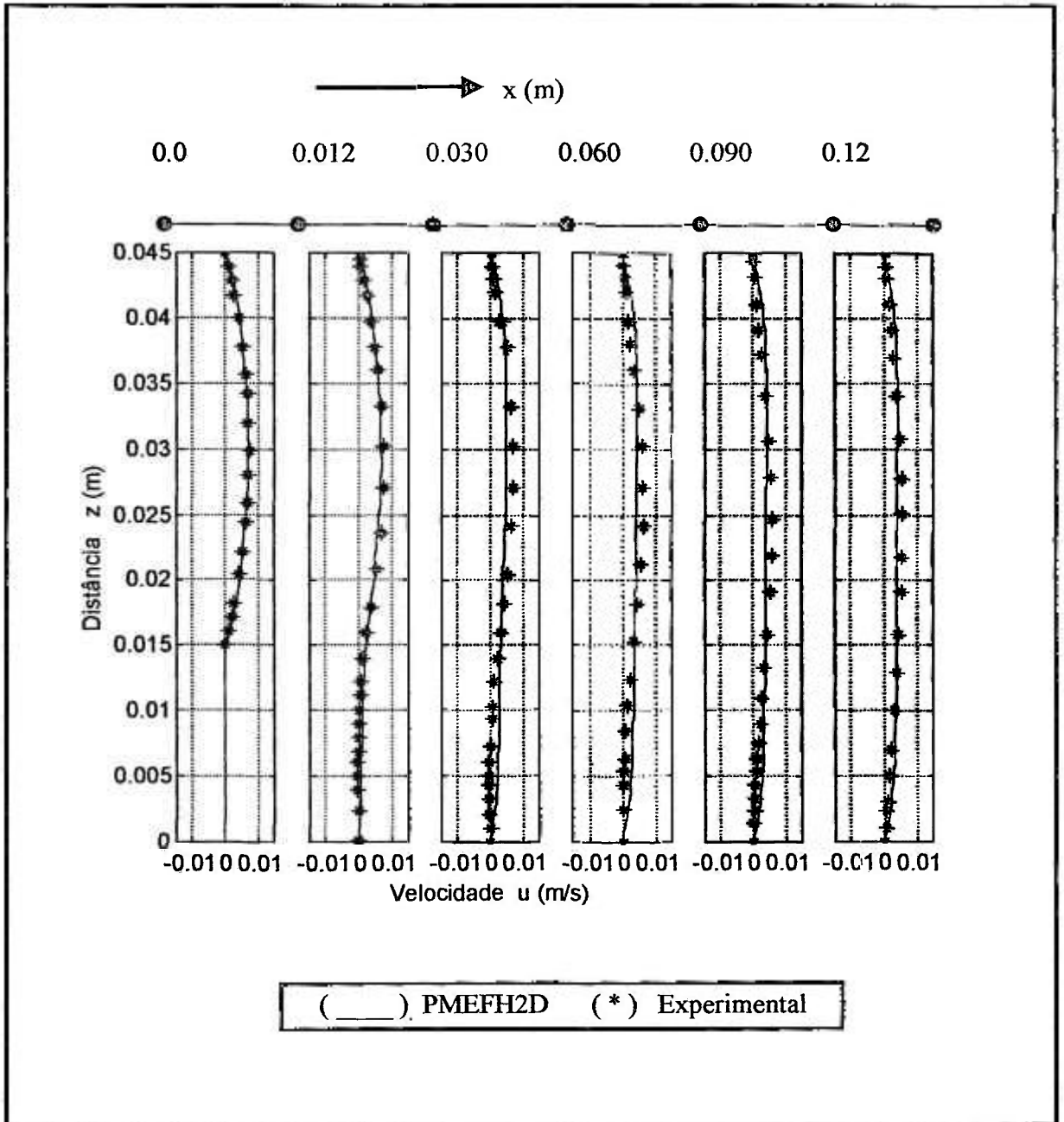


Figura 4.30 – Comparação entre resultados obtidos com o PMEFH2D e os resultados experimentais de Denhan e Patrick (1974), para $Re = 73$ e $\text{grau} = 1$ – Caso 2.

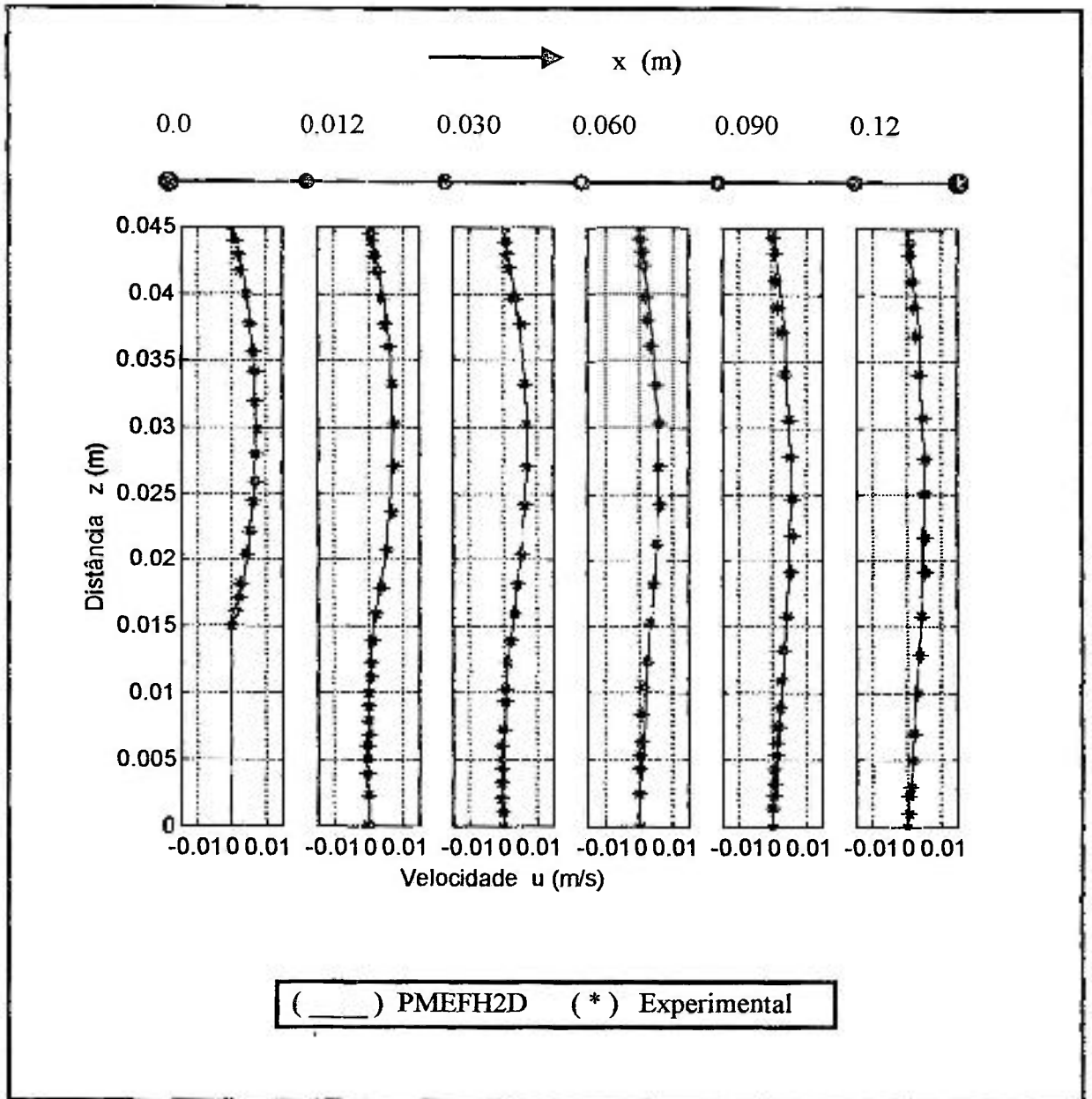


Figura 4.31 – Comparação entre resultados obtidos com o PMEFH2D e os resultados experimentais de Denhan e Patrick (1974), para $Re = 73$ e grau = 2 – Caso 2.

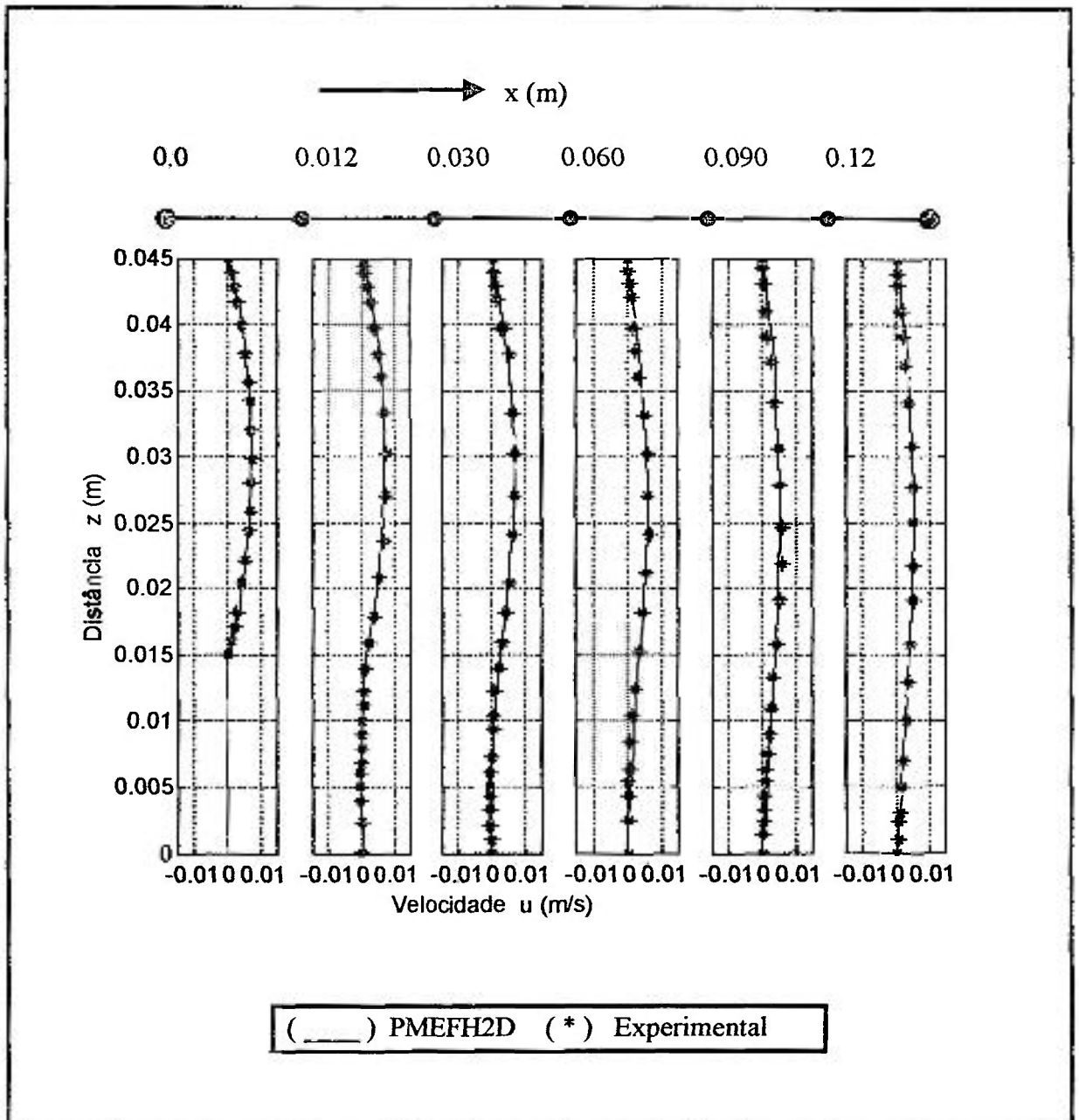


Figura 4.32 – Comparação entre resultados obtidos com o PMEFH2D e os resultados experimentais de Denhan e Patrlck (1974), para $Re = 73$ e $\text{grau}=3$ – Caso 2.

As diferenças entre os resultados experimentais e os calculados podem ser vistas na Tabela 4.3, que apresenta os erros médios entre os resultados obtidos com PME2D e os correspondentes experimentais, para cada uma das expansões analisadas.

Tabela 4.3 – Valores dos erros médio obtidos entre os resultados experimentais e os calculados pelo programa computacional PME2D, para cada uma das posições de medida e graus da expansão – Caso 2.

Posição na direção x (m)	Erro médio ($\epsilon_{\text{médio}}$) grau = 1 (%)	Erro médio ($\epsilon_{\text{médio}}$) grau = 2 (%)	Erro médio ($\epsilon_{\text{médio}}$) grau = 3 (%)
0,012	12,41	10,20	5,70
0,030	12,21	12,03	6,12
0,060	15,47	14,95	8,27
0,090	15,43	14,51	9,85
0,12	19,92	15,21	12,34

Os resultados da Tabela 4.3 comprovam novamente que na medida em que aumenta-se o grau da expansão, o erro entre os valores calculados e medidos experimentalmente diminui.

Comparando-se os resultados deste caso com os resultados do Caso 1, observa-se que os valores dos erros médios são superiores, como era de se esperar pois utiliza-se uma malha menos refinada. No entanto, verifica-se que os erros médios apresentados neste caso para a expansão de grau 3, são inferiores aos obtidos para a expansão de grau 1 do Caso 1 e da mesma ordem de grandeza daqueles obtidos para a expansão de grau 2 do Caso 1. Isto confirma o bom desempenho do método numérico proposto

neste trabalho, ou seja, o MEFH não necessita de uma da malha muito refinada, pois com um aumento do grau da expansão pode-se obter bons resultados mesmo com malhas pouco refinadas. Esta é a grande vantagem do método numérico desenvolvido neste trabalho.

O contorno da pressão ao longo do domínio de escoamento, para as expansões de graus 1, 2 e 3, podem ser vistos através das Figuras 4.33, 4.34 e 4.35, respectivamente. Em todos os casos observa-se que a pressão é negativa perto da região de entrada, devido a recirculação do fluido.

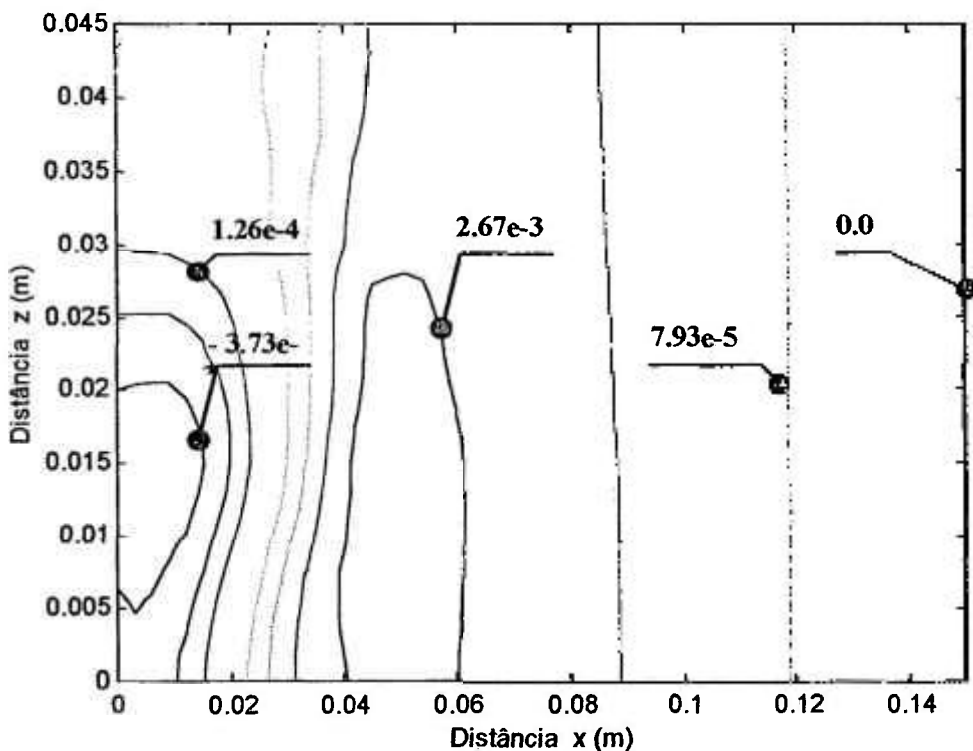


Figura 4.33 – Contorno da pressão em Pa, gerado pelo programa PMEFH2D, com $Re = 73$ e grau = 1, Caso2.

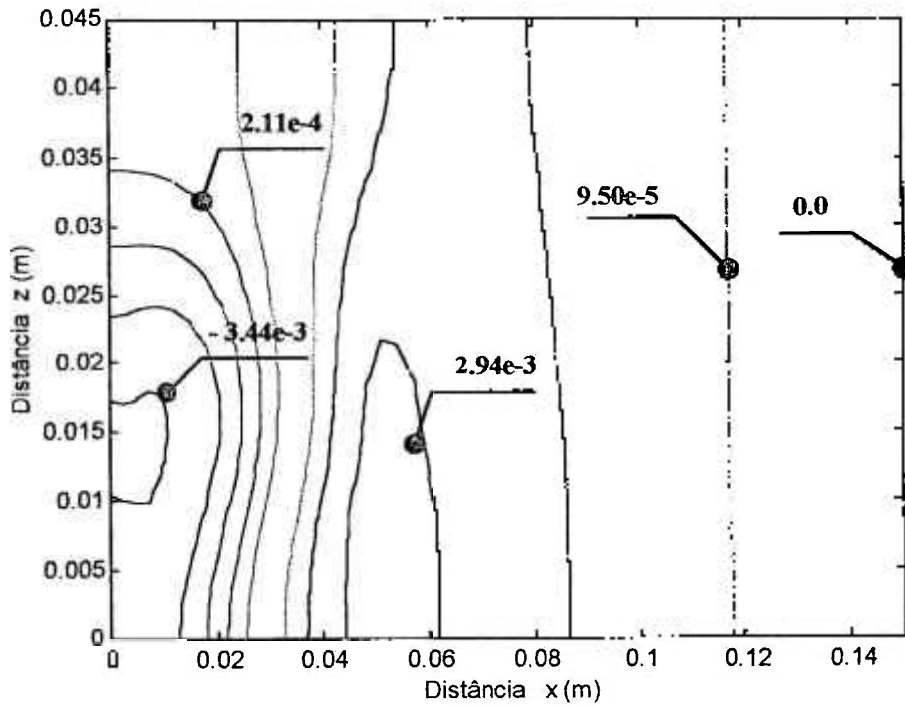


Figura 4.34 – Contorno da pressão em Pa, gerado pelo programa PMEFH2D, com $Re = 73$ e grau = 2, Caso2.

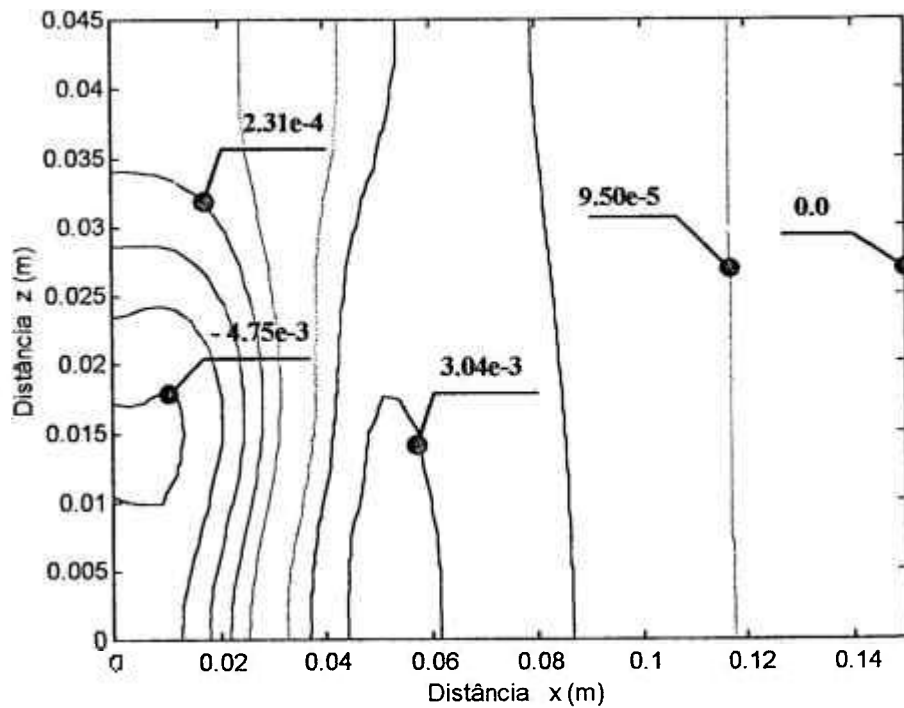


Figura 4.35 – Contorno da pressão em Pa, gerado pelo programa PMEFH2D, com $Re = 73$ e grau = 3, Caso2.

Neste caso, como no anterior, verifica-se que o perfil da pressão, para os três casos analisados, são muito próximos, pois o grau da expansão não tem influência no comportamento da pressão ao longo do domínio de escoamento.

Finalmente, observa-se que para ambos os casos analisados, a medida em que se aumenta o grau da expansão não é necessário um refino da malha para se ter resultados mais precisos. Conclui-se também que para problemas de escoamento através de uma expansão abrupta na forma de degrau o método numérico proposto é eficiente para descrever o comportamento da velocidade do fluido ao longo do domínio de escoamento, sem a necessidade de uma malha refinada.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

5.1 Introdução

O objetivo deste trabalho foi desenvolver um método numérico, baseado no emprego do método de elementos finitos utilizando a formulação Petrov-Galerkin em conjunto com a expansão das variáveis em funções quase hierárquicas, para a solução de problemas de dinâmica dos fluidos. As funções de expansão utilizadas são baseadas em polinômios de Legendre, as quais são ajustadas nos elementos retangulares de forma conveniente. A utilização destas funções para solução de problemas de dinâmica dos fluidos é inédita e apresenta diversas vantagens sobre as funções de expansão normalmente utilizadas no método dos elementos finitos.

Este trabalho consiste basicamente na aplicação do MEFH na solução das equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis em duas dimensões. Adicionalmente utilizou-se o método de Chorin para resolver o problema do acoplamento entre a pressão e a velocidade, que aparece nas equações da quantidade de movimento. Ressalta-se que, o motivo da escolha do método de Chorin, dentre outros existentes na literatura, é a simplicidade do método no tratamento das equações de conservação da quantidade de movimento para criar uma equação de pressão (equação de Poisson), que satisfaz a conservação da massa. Neste trabalho adota-se o segundo método proposto por Chorin (1971), que se aplica à solução de problemas transitórios.

A fim de verificar a aplicabilidade e a eficiência do método proposto na solução de problemas de dinâmica de fluidos, que envolvam fluidos incompressíveis em duas dimensões, foram tratados neste trabalho apenas problemas com propriedades físicas constantes, em regime laminar e com malhas estruturadas retangulares. No entanto, estas simplificações não representam limitações do método numérico proposto.

A aplicação do método numérico proposto na solução das equações de Navier-Stokes originou um programa computacional denominado PMEFH2D que foi utilizado neste trabalho, para a solução de problemas de dinâmica de fluidos, apresentando bons resultados.

A validação do MEFH foi obtida a partir da simulação de três problemas conhecidos da literatura, que são os seguintes: a) escoamento entre duas placas paralelas, b) degrau de temperatura e c) escoamento através de uma expansão abrupta na forma de degrau (*"backward-facing step"*).

O primeiro problema foi analisado com o objetivo de verificar a capacidade do método e principalmente verificar a implementação das equações, por existir uma solução teórica que pode ser utilizada para comparação. O segundo problema teve o objetivo de verificar a difusão numérica, ou seja, difusão artificialmente criada pelo método numérico, que na verdade não existe. O último problema analisado teve o objetivo de comprovar a potencialidade do método na solução de problemas de dinâmica de fluidos, com comprovação experimental. Neste caso o problema escolhido foi o de uma expansão abrupta na forma de degrau, que foi simulado experimentalmente por **Denhan e Patrick (1974)**.

Os resultados apresentados neste trabalho confirmam a capacidade do método em resolver com sucesso problemas de escoamento de fluidos entre placas paralelas, problemas de condução de calor por convecção e problemas de escoamento de fluidos através de uma expansão abrupta na forma de degrau.

Ressalta-se que, embora os problemas propostos neste trabalho são casos de regime permanente, o transitório foi simulado até ser estabelecido o estado estacionário, já que esta é uma condição imposta pelo método de Chorin.

5.2 Conclusões

Com base nos resultados obtidos na solução dos problemas propostos, pode-se concluir que o método da expansão em funções hierárquicas é adequado para a solução de problemas de fluidos incompressíveis em duas dimensões. Nos três problemas analisados observa-se que os resultados encontrados foram muito bons quando comparados com a solução analítica e com os resultados experimentais.

A principal conclusão que se chegou, a partir dos resultados obtidos da simulação dos problemas propostos, é que a medida em que se aumenta o grau da expansão se torna desnecessário um refinamento da malha para a obtenção de bons resultados. Concluindo-se, portanto, que para problemas de dinâmica de fluidos, o MEFH é um método eficiente que não necessita de uma malha extremamente detalhada para a obtenção de resultados precisos, o que leva a uma otimização dos custos computacionais.

Com base nestes resultados conclui-se também que a escolha do grau da expansão a ser empregada no cálculo, é o fator determinante para a obtenção de bons resultados.

Constata-se que a grande vantagem do método da expansão em funções hierárquicas é a capacidade de adaptar o grau da expansão até o valor necessário ou desejado durante o cálculo do escoamento, ao invés de refinar a malha, sem que para isto haja a necessidade de reiniciar o problema, como ocorre no método dos elementos finitos convencional. A grande vantagem do MEFH se deve ao fato da possibilidade de adaptar o grau da expansão ao invés do refino da malha, pois a alteração do grau da expansão é realizado facilmente e não exige o reinício do problema. Observa-se, contudo, que neste trabalho não foi implementado a adaptação do grau da expansão durante a solução do problema. Para fim de simplicidade, neste trabalho, o grau da expansão é definido no início da solução e não é posteriormente alterado.

Através deste trabalho observou-se que o MEFH é um método numérico bastante complexo, apresentando equações longas e complicadas. Por este motivo utilizou-se o método de Chorin (transitório), para o acoplamento entre a pressão e a velocidade, ao invés da aplicação de outros métodos de tratamento de acoplamento, próprios para regime permanente, por não serem facilmente aplicados ao MEFH. Observou-se por meio deste trabalho, que para graus de expansão superiores a 2 não se tem idéia dos custos computacionais envolvidos, e quais seriam os benefícios de aumentar o grau da expansão com o objetivo de obter melhores resultados.

Deve-se mencionar que neste trabalho não se teve a preocupação de desenvolver um programa computacional eficiente e por este motivo não é feito nenhum comentário a

respeito do tempo de computação utilizado na simulação dos problemas. Além disso, também não é realizado nenhum tipo de comparação do tempo de computação gasto quando da aplicação do MEFH na solução de problemas de dinâmica de fluidos em relação a outros métodos numéricos existentes.

Finalmente pode-se concluir que a grande contribuição deste trabalho na solução de problemas de dinâmica de fluidos, mais precisamente na solução das equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis em duas dimensões e em regime laminar, é obter resultados precisos com malhas extremamente simples.

5.1 Sugestões para trabalhos futuros

A motivação para o desenvolvimento de trabalhos futuros advém do fato de que, apesar da metodologia desenvolvida ter se mostrado bastante potente na resolução das equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis em duas dimensões, em regime laminar para malhas cartesianas estruturadas, poucos problemas de dinâmica de fluidos se encaixam nestas simplificações. Assim a eliminação destas limitações, ou seja, capacidade para resolver problemas de três dimensões, simulações de escoamento turbulento, tratamento de fluidos compressíveis e modelagem de geometrias complexas, é de importância fundamental para o sucesso deste novo método numérico proposto nesta tese.

Como praticamente todos os problemas numéricos presentes na solução de escoamento de fluidos em três dimensões estão também presentes em escoamento de duas dimensões, as mesmas podem ser modificadas facilmente para considerar três dimensões e existe a possibilidade, e a facilidade de estender este método para três dimensões.

Outra possibilidade seria a de estender o modelo numérico proposto também para fluidos compressíveis.

Adicionalmente, o modelo numérico poderá ser aplicado em escoamentos de fluidos em regime turbulento, onde os modelos apropriados de turbulência devem ser acoplados às equações originais, introduzindo novos complicadores numéricos.

A fim de que este método numérico possa ser utilizado para problemas com geometrias complexas, poderão ser utilizadas malhas deformadas e malhas não estruturadas no modelo numérico proposto neste trabalho.

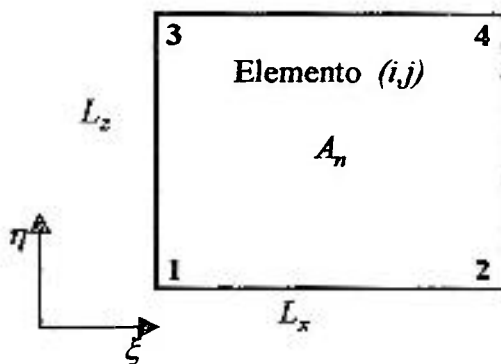
Além das sugestões dadas anteriormente, uma das implementações mais imediatas é a introdução da adaptação do grau da expansão durante o processo da solução, por ser esta a grande vantagem do MEFH, pois pode ser realizado facilmente sem a necessidade de reiniciar o problema. Esta adaptação do grau da expansão deve ser local, ou seja, deve-se aumentar o grau da expansão somente nas regiões da malha onde for necessário. Esta adaptação do grau da expansão pode ser baseada no cálculo dos resíduos das equações de conservação.

APÊNDICE A

FUNÇÕES DE EXPANSÃO HIERÁRQUICAS UTILIZADAS NO PMEHD

Como já mencionado no Capítulo 3, as funções de expansão hierárquicas utilizadas neste trabalho, para a solução das equações de Navier-Stokes, são baseados em polinômios de Legendre, ajustados nos elementos retangulares de forma conveniente. A associação das funções de expansão aos elementos é feito de forma a definir funções de canto, de lado e de área. A ordem das funções associadas aos lados e às áreas dos elementos é definida de forma a ter o grau necessário ou desejado. Neste trabalho são adotadas funções de expansão de grau 1 a 6. O método de quadratura de Gauss, segundo **Press et al. (1986)**, é utilizado para o cálculo das integrais envolvidas na solução das equações de conservação, descritas no Capítulo 3. Ressalta-se que, embora o grau das funções de expansão adotadas neste trabalho esteja limitado até 6, nada impede que sejam acrescentados graus maiores, para a solução de problemas que exijam um maior detalhamento.

A Figura (A.1) apresenta um elemento típico e os parâmetros hierárquicos associados com o seus cantos, lados e áreas.



† Figura A.1 Elemento retangular de duas dimensões e seus parâmetros associados.

Como visto no item 3.4 os polinômios de Legendre, de grau 2 a 6, utilizados neste trabalho, indicados por $L_g(\xi)$ onde o índice g indica o grau do polinômio e ξ é a variável local do elemento que varia de -1 a 1 , são os seguintes:

$$L_2(\xi) = -(\xi^2 - 1); \quad (\text{A-1})$$

$$L_3(\xi) = 2(\xi^3 - \xi); \quad (\text{A-2})$$

$$L_4(\xi) = \frac{1}{4}(15\xi^4 - 18\xi^2 + 3); \quad (\text{A-3})$$

$$L_5(\xi) = (7\xi^5 - 10\xi^3 + 3\xi); \quad (\text{A-4})$$

$$L_6(\xi) = \frac{1}{4}(105\xi^6 - 175\xi^4 + 75\xi^2 - 5). \quad (\text{A-5})$$

Para direção η os polinômios adotados são idênticos aos da direção ξ , substituindo-se simplesmente ξ por η nas equações anteriores e indicadas por $L_g(\eta)$.

Para formar as funções de expansão são utilizadas além dos polinômios de Legendre, funções lineares de acordo com o apresentado no item 3.4. Estas funções lineares formam as funções de expansão associadas aos cantos da seguinte forma:

Cantos:

$$(1) \quad N_{C1} = \frac{1}{4}(\xi - 1)(\eta - 1); \quad (A-6)$$

$$(2) \quad N_{C2} = -\frac{1}{4}(\xi + 1)(\eta - 1); \quad (A-7)$$

$$(3) \quad N_{C3} = -\frac{1}{4}(\xi - 1)(\eta + 1); \quad (A-8)$$

$$(4) \quad N_{C4} = \frac{1}{4}(\xi + 1)(\eta + 1). \quad (A-9)$$

Nestas funções o subscrito c indica canto e o número após o subscrito indica o canto ao qual a função está associada.

As funções de expansão associadas aos lados do elemento são definidas por uma função linear multiplicada por um dos polinômios de Legendre dados pela equações (A-1) a (A-5). Estas funções são indicadas por $N_{L(i-j)}^g$, onde o subscrito índice $L(i-j)$ representa o lado associado à função e o subscrito g o grau do polinômio. Estas funções são as seguintes:

Lado $L(1-2)$:

$$N_{L(1-2)}^1 = -\frac{1}{2}(\eta - 1)L_2(\xi); \quad (\text{A-10})$$

$$N_{L(1-2)}^3 = -\frac{1}{2}(\eta - 1)L_3(\xi); \quad (\text{A-11})$$

$$N_{L(1-2)}^4 = -\frac{1}{2}(\eta - 1)L_4(\xi); \quad (\text{A-12})$$

$$L_{L(1-2)}^5 = -\frac{1}{2}(\eta - 1)L_5(\xi); \quad (\text{A-13})$$

$$L_{L(1-2)}^6 = -\frac{1}{2}(\eta - 1)L_6(\xi). \quad (\text{A-14})$$

Lado $L(3-4)$:

$$N_{L(3-4)}^2 = \frac{1}{2}(\eta + 1)L_2(\xi); \quad (\text{A-15})$$

$$N_{L(3-4)}^3 = \frac{1}{2}(\eta + 1)L_3(\xi); \quad (\text{A-16})$$

$$N_{L(3-4)}^4 = \frac{1}{2}(\eta + 1)L_4(\xi); \quad (\text{A-17})$$

$$N_{L(3-4)}^5 = \frac{1}{2}(\eta + 1)L_5(\xi); \quad (\text{A-18})$$

$$N_{L(3-4)}^6 = \frac{1}{2}(\eta + 1)L_6(\xi). \quad (\text{A-19})$$

Lado $L(1-3)$:

$$N_{L(1-3)}^2 = -\frac{1}{2}(\xi - 1) L_2(\eta); \quad (\text{A-20})$$

$$N_{L(1-3)}^3 = -\frac{1}{2}(\xi - 1) L_3(\eta), \quad (\text{A-21})$$

$$N_{L(1-3)}^4 = -\frac{1}{2}(\xi - 1) L_5(\eta); \quad (\text{A-22})$$

$$N_{L(1-3)}^5 = -\frac{1}{2}(\xi - 1) L_5(\eta); \quad (\text{A-23})$$

$$N_{L(1-3)}^6 = -\frac{1}{2}(\xi - 1) L_6(\eta). \quad (\text{A-24})$$

Lado $L(2-4)$:

$$N_{L(2-4)}^2 = -\frac{1}{2}(\xi - 1) L_2(\eta); \quad (\text{A-25})$$

$$N_{L(2-4)}^3 = -\frac{1}{2}(\xi - 1) L_3(\eta); \quad (\text{A-26})$$

$$N_{L(2-4)}^4 = -\frac{1}{2}(\xi - 1) L_5(\eta); \quad (\text{A-27})$$

$$N_{L(2-4)}^5 = -\frac{1}{2}(\xi - 1) L_5(\eta); \quad (\text{A-28})$$

$$N_{L(2-4)}^6 = -\frac{1}{2}(\xi - 1) L_6(\eta). \quad (\text{A-29})$$

As funções de expansão associadas com a área do elemento são formadas pelo produto de dois de polinômios de Legendre $L_g(\xi)$ e $L_g(\eta)$. Estas funções são indicadas por P_A^{gg} , onde o subscrito A representa a área e o subscrito gg os graus dos polinômios de Legendre. Estas funções são as seguintes:

Área A(1-2-3-4) :

$$N_A^{22} = L_2(\xi) L_2(\eta) ; \quad (\text{A-30})$$

$$N_A^{32} = L_3(\xi) L_2(\eta) ; \quad (\text{A-31})$$

$$N_A^{23} = L_2(\xi) L_3(\eta) ; \quad (\text{A-32})$$

$$N_A^{33} = L_3(\xi) L_3(\eta) ; \quad (\text{A-33})$$

$$N_A^{42} = L_4(\xi) L_2(\eta) ; \quad (\text{A-34})$$

$$N_A^{24} = L_2(\xi) L_4(\eta) ; \quad (\text{A-35})$$

$$N_A^{52} = L_5(\xi) L_2(\eta) ; \quad (\text{A-36})$$

$$N_A^{25} = L_2(\xi) L_5(\eta) ; \quad (\text{A-37})$$

$$N_A^{43} = L_4(\xi) L_3(\eta) ; \quad (\text{A-38})$$

$$N_A^{34} = L_3(\xi) L_4(\eta) ; \quad (\text{A-39})$$

$$N_A^{44} = L_4(\xi) \cdot L_4(\eta) ; \quad (\text{A-40})$$

$$N_A^{53} = L_5(\xi) L_3(\eta); \quad (\text{A-41})$$

$$N_A^{62} = L_6(\xi) L_2(\eta); \quad (\text{A-42})$$

$$N_A^{26} = L_2(\xi) L_6(\eta); \quad (\text{A-43})$$

$$N_A^{35} = L_3(\xi) L_5(\eta). \quad (\text{A-44})$$

Uma vez definidas as funções de expansão, para os cantos, lados e áreas, associa-se determinadas funções para cada grau de expansão solicitado ou desejado. Assim, para expansões de grau 1 a 6 tem-se as seguintes funções associadas:

Grau 1: Somente as funções de canto, equações (A-6) a (A-9).

Grau 2: Funções de canto, equações (A-6) a (A-9);

Funções de Lado $L(1-2)$, equação (A-10);

Funções de Lado $L(3-4)$, equação (A-15);

Funções de Lado $L(1-3)$, equação (A-20);

Funções de Lado $L(2-4)$, equação (A-25);

Funções de Área $A(1-2-3-4)$, equação (A-30).

Grau 3: Funções de canto, equações (A-6) a (A-9);

Funções de Lado $L(1-2)$, equação (A-10) e (A-11);

Funções de Lado $L(3-4)$, equação (A-15) e (A-16);

Funções de Lado $L(1-3)$, equação (A-20) e (A-21);

Funções de Lado $L(2-4)$, equação (A-25) e (A-26);

Funções de Área $A(1-2-3-4)$, equação (A-30), (A-31) e (A-32).

Grau 4: Funções de canto, equações (A-6) a (A-9);

Funções de Lado $L(1-2)$, equação (A-10) a (A-12);

Funções de Lado $L(3-4)$, equação (A-15) a (A-17);
Funções de Lado $L(1-3)$, equação (A-20) a (A-22);
Funções de Lado $L(2-4)$, equação (A-25) a (A-27);
Funções de Área $A(1-2-3-4)$, equação (A-30) a (A-35).

Grau 5: Funções de canto, equações (A-6) a (A-9);
Funções de Lado $L(1-2)$, equação (A-10) a (A-13);
Funções de Lado $L(3-4)$, equação (A-15) a (A-18);
Funções de Lado $L(1-3)$, equação (A-20) a (A-23);
Funções de Lado $L(2-4)$, equação (A-25) a (A-28);
Funções de Área $A(1-2-3-4)$, equação (A-30) a (A-39).

Grau 6: Funções de canto, equações (A-6) a (A-9);
Funções de Lado $L(1-2)$, equação (A-10) a (A-14);
Funções de Lado $L(3-4)$, equação (A-15) a (A-19);
Funções de Lado $L(1-3)$, equação (A-20) a (A-24);
Funções de Lado $L(2-4)$, equação (A-25) a (A-29);
Funções de Área $A(1-2-3-4)$, equação (A-30) a (A-44).

APÊNDICE B

DESCRIÇÃO DO PROGRAMA COMPUTACIONAL PMEFH2D

O programa computacional PMEFH2D segue o ciclo iterativo proposto pelo método de Chorin, conforme descrito no Capítulo 2 deste trabalho, além de conter a solução da equação da temperatura. O programa computacional foi escrito na linguagem FORTRAN-99 e executado em um microcomputador Pentium II-266 com 64 MB de RAM.

O PMEFH2D é composto das rotinas computacionais descritas a seguir. A Figura B.1 apresenta um diagrama de blocos do programa, mostrando a ordem de execução das diversas etapas (subrotinas).

Programa Principal – MAIN: O programa principal é a parte central do PMEFH2D onde são chamadas as subrotinas de leitura de dados, impressão de resultados e as subrotinas que calculam as velocidades, pressão e temperatura na seqüência indicada pelo diagrama de bloco fornecido pela Figura B.1.

Subrotina INPUT: A subrotina *INPUT* realiza a alocação das variáveis na memória do computador, através do endereçamento feito por ponteiros, além da leitura dos dados necessários para a modelagem do problema a ser resolvido.

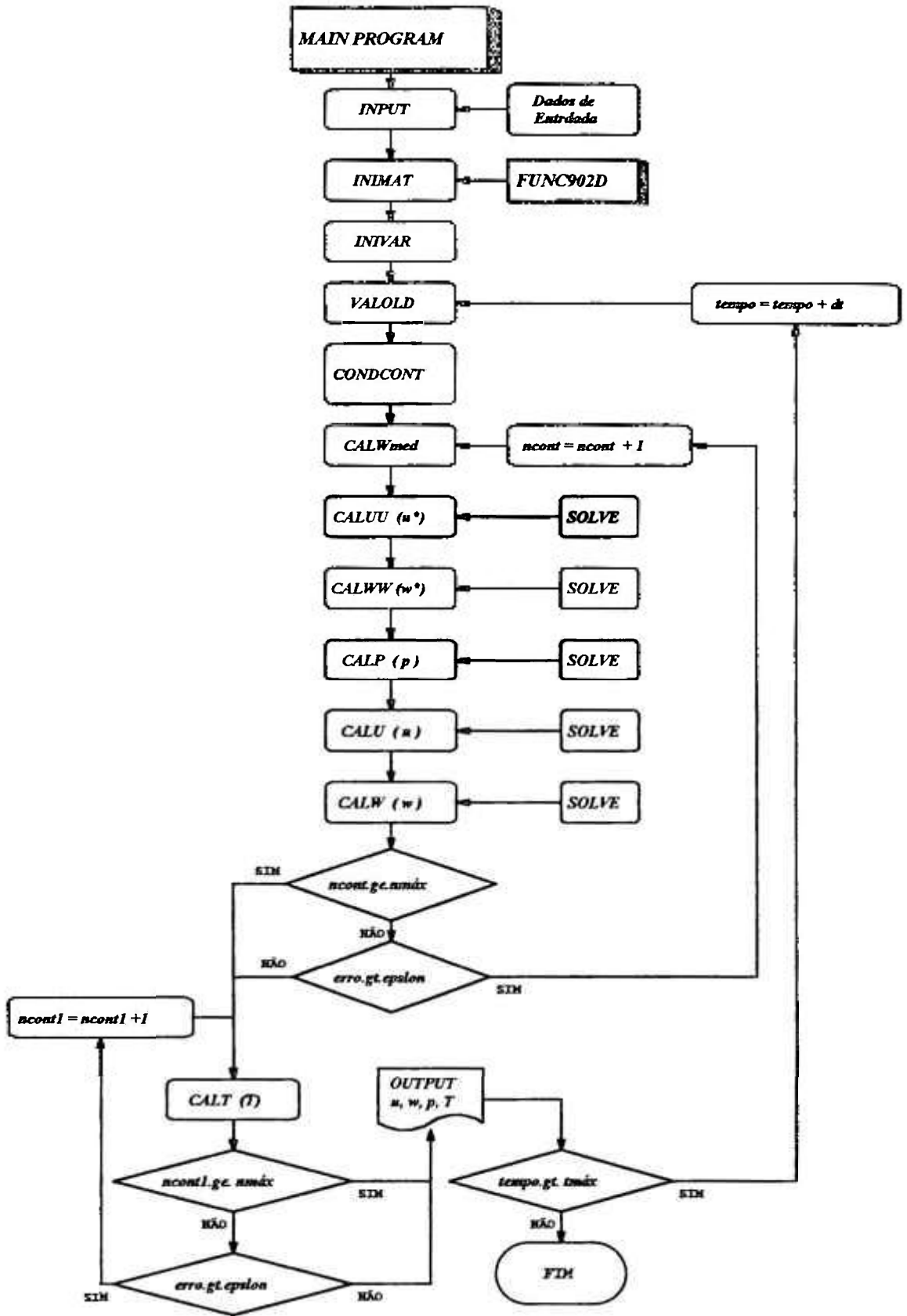


Figura B.1: Diagrama de blocos do programa computacional PMEFH2D.

Subrotina INIMAT : Esta subrotina calcula as integrais das funções de expansão envolvidas na solução numérica das equações. Ela utiliza um banco de funções polinomiais denominado de FUNC902D.

Subrotina INIVAR : A inicialização das variáveis vetoriais e matriciais utilizadas no programa PMEFH2D é realizada nesta subrotina.

Subrotina VALOLD : Esta subrotina é utilizada para salvar as variáveis do tempo anterior com relação ao tempo da iteração corrente.

Subrotina CONDCONT : Todas as condições de contorno especificadas para o problema a ser analisado são fornecidas e tratadas por esta rotina.

Subrotina CALWMED : Nesta subrotina são calculadas as velocidades médias \bar{u} e \bar{w} , para as direções x e z respectivamente. Estes valores são utilizados no cálculo da função peso P_m , segundo a equação (3-14).

Subrotina CALUU : Calcula a componente da pseudovelocidade na direção x , u^* , que é utilizada para resolver o acoplamento pressão-velocidade que aparece nas equações de movimento, conforme ciclo iterativo descrito no Capítulo 2 deste trabalho. Esta subrotina calcula os coeficientes de expansão de u^* em todo o domínio da solução.

Subrotina CALWW : Calcula a componente da pseudovelocidade na direção z , w^* , definida pelo método de Chorin. Esta rotina calcula os coeficientes de expansão de w^* em todo o domínio da solução.

Subrotina CALU : Calcula os coeficientes de expansão da componente da velocidade na direção x , u , no domínio da solução.

Subrotina CALW : Calcula os coeficientes de expansão da componente da velocidade na direção z , w , no domínio da solução.

Subrotina CALP : Calcula os coeficientes de expansão da pressão p , que são obtidos através da solução da equação de Poisson para a pressão.

Subrotina CALT : Calcula os coeficientes de expansão da temperatura T , que são obtidos pela solução da equação da energia no domínio de escoamento.

Subrotina SOLVE : Esta rotina resolve um sistema de equações lineares por dois métodos diferentes: diretamente pela inversão da matriz, ou de forma iterativa. A rotina de inversão de matrizes utilizada é da biblioteca de rotinas IMSL e utiliza o método de eliminação de Gauss. A forma iterativa utiliza o método de relaxação linear.

Subrotina OUTPUT : Esta subrotina realiza a impressão das variáveis de saída do programa, as quais são: as componentes da velocidade u e w , a pressão p e a temperatura T , para cada instante de tempo, em todo o domínio do escoamento. Além disso, imprime os coeficientes de expansão destas variáveis correspondentes aos cantos, lados e áreas para cada elemento da malha.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AMSDEN, A. A.; HARLOW, F. H. **The SMAC Method: A Numerical Technique for Calculating Incompressible Fluid Flows.** Los Alamos Scientific laboratory – LA – 4370, Los Alamos, EUA, 1970.
- ANDERSON, D. A.; TANNEHILL, J. C. and PLETECHER, R. H. **Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer.** Hemisphere Pub. Corp, Washington, USA. 1984.
- ARGYRIS, J. H.; DOLTSNIS, J. S. T.; PIMENTA, P. M.; WÜSTENBERG, H. **Natural Finite Techniques for Viscous Fluid Motion.** Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 45, pp. 3-55, 1984.
- ARGYRIS, J.; LAXANDER, A.; SZIMMAT, J. **Petrov-Galerkin Finite Element Approach to Coupled Heat and Fluid Flow.** Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 94, pp. 181-200, 1992.
- BAKER, A. J. **Finite Elements in Nonlinear Fluid Dynamics.** 2nd Int. Conf. On Computational Methods in Nonlinear Mechanics, The University of Texas, Austin, Texas, pp. 26-30, March, 1979.
- BROOKS, A.; HUGHES, T. J. **Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Methods for Advection Dominated Flows.** 3rd Int. Conf. On Finite Element Methods in Fluid Flows, Banff, Canada, pp. 283-292, 1980.
- BROOKS, A. **Ph.D. Thesis,** California Institute of Technology, Pasadena, California, 1981.
- BEJAN, A. **Convection Heat Transfer,** John Wiley & Sons, 1984.

- BROOKS, A. N.; HUGHES, T. J. R. **Streamline Upwind Petrov-Galerkin Formulation for Convection-Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations.** *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 32, pp. 199-259, 1982.
- CABRAL, E. L. L. **Hierarchical Expansion Method in the Solution of the Two Group Two-Dimensional Neutron Diffusion Equation.** *Revista Brasileira de Pesquisa e Desenvolvimento*, Vol. 1, nº 2, pp. 50-59, 1996.
- CHORIN, A. J. **A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems.** *Journal of Computational Physics*, Vol. 2, pp. 12-26, 1967.
- CHORIN, A. J. **Numerical Solution of the Navier Stokes Equations.** *Math. Of Computation*, Vol. 22, pp. 745-762, 1971.
- CHRISTIE, I.; GRIFFITS, D. F.; MITCHEL, A. R.; ZIENKIEWISZ, O. C. **Finite Element Methods for Second Order Differential Equations with Significant First Derivatives.** *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 10, pp. 1389-1396, 1976.
- DENDY, J. E. **Two Methods of Galerkin Type Achieving Optimum L_2 Rates of Convergence for First-Order Hyperbolics.** *SIAM J. Numer. Anal.*, 11, pp. 637-653, 1974.
- DENHAM, M. K.; PATRICK, M. A. **Laminar Flow over a Downstream-Facing, Step in a Two-Dimensional Flow Channel.** *Trans. Inst. Chem. Engrs*, Vol. 52, pp. 361-367, 1974
- DESPOTIS, G. K.; TSANGARIS, S. **Fractional Step Method for Solution of Incompressible Navier-Stokes Equations on Unstructured Triangular Meshes.** *Int. J. Num Meth. Fluids*, Vol. 10, pp. 1273-1288, 1995.

- HEINRICH, J. C.; HUYAKORN, P. S.; ZIENKIEWICZ, O. C.; MITCHELL, A. R. **An Upwind Finite Scheme for Two-Dimensional Convective Transport Equation.** *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 11, pp. 131-143, 1977.
- HUGHES, T. J. T.; BROOKS, A. **A Multidimensional Upwind Scheme with no Crosswind Diffusion.** *Finite Element Methods for Convection Dominated Flows*, ASME, New York, 1979.
- HUGHES, T. J. R.; BROOKS, A.N. **A Theoretical Framework for Petrov-Galerkin Methods with Discontinuous Weighting Functions: Application to the Streamline Upwind Procedure.** *Finite Elements in Fluids*, Vol. IV, Wiley, Chichester, 1982.
- HUGHES, T. J. R. **Recent Progress in the Development and Understanding of SUPG Methods with Special Reference to the Compressible Euler and Navier-Stokes Equations.** *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol. 7, pp. 1261-1275, 1987.
- JOHSON, C. **Finite Element Methods for Convection-Diffusion Problems.** *Computer Methods in Engineering and Applied Sciences V*, North-Holland, Amsterdam, 1982.
- JOHSON, C.; NÄVER, U.; PITKÄRANTA, J. **Finite Element Methods for Linear Hyperbolic Problem.** *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 45, pp. 285-312, 1984.
- JOHSON, C.; SZEPESSY, A. **Convergence of a Finite Element Method for a Nonlinear Hyperbolic CONSERVATION Law.** *Technical Report 1985-25*, Mathematics Department, Chalmers University of Technology, Göteborg, 1985.
- JOHSON, C. **Streamline Diffusion Methods for Problems in Fluid Mechanics.** *Finite Elements in Fluids*, Vol. VI, Wiley, London, pp. 251-261, 1986.
- JOHSON, C.; SARANEN, J. **Streamline Diffusion Methods for Incompressible Euler and Navier-Stokes Equation.** *Math. Comput.* 47, pp. 1-18, 1986.

- JOHSON, C.; SZEPESSY, A. **A Shock-Capturing Streamline Diffusion Finite Element Method for a Nonlinear Hyperbolic Conservation Law.** TECHNICAL REPORT 1986-09, Mathematics Department, Chalmers University of Technology, Göteborg, 1986.
- JOHSON, C.; SZEPESSY, A. **The Convergence of Streamline Diffusion Finite Methods for Hyperbolic Conservation Laws.** Numerical Methods for Compressible Flows – Finite Difference, Element and Volume Techniques, AMD Vol. 78, ASME, New York pp. 75-91, 1986.
- KAKUDA, K.; TOSAKA, N.; NAKAMURA, T. **Finite Element Analysis for 3-D High Reynolds Number Flow.** Comp. Fluid Dyn., Vol. 7, pp. 163-178, 1996.
- KONDO, N.; TOSAKA, N.; NISHIMURA, T. **Third-order Upwind Finite Element Formulations for Compressible Viscous Flow Problems.** Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 93, pp. 169-187, 1991.
- MALISKA, C. R. **Solution Method for Three-Dimensional Parabolic Fluid Flow Problems in Nonorthogonal Coordinate.** Ph.D. Thesis, University of Waterloo, Waterloo, Canada, 1981.
- MALISKA, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional.** Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, Brasil, 1995.
- MIKHLIN, S. G. **Variational Methods in Mathematical Physics.** Pergamon, Oxford, 1964.
- NÄVER, U. **A Finite Element Method for Convection-Diffusion Problems.** Ph.D. Thesis. Department of Computer Science, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 1982.
- NIGRO, N.; STORTI, M.; IDELSOHN, S. **Two-Phase Flow Modeling in Gas-Stirred Liquid Vessels with SUPG-Stabilized Equal-order Interpolations.** Internat. J. Numer. Methods. Fluids, Vol. 19, pp. 1-22, 1994.

- PATANKAR, S. V.; SPALDING, D. B. **A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows.** *Int. Journal of Heat and mass Transfer*, Vol. 15, pp. 1787-1806, 1972.
- PATANKAR, S. V. **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow.** Hemisphere Publishing Corporation, 1980.
- PERKTOLD, K.; RESCH, M.; FLORIAN, H. **Pulsatile Non-Newtonian Flow Characteristics in a Three-Dimensional Human Carotid Bifurcation Model.** *Trans. ASMR, J. Biomech. Eng.*, 113, pp. 464-475, 1991.
- PERKTOLD, K.; RAPPITSH, G. **Mathematical Modeling of Arterial Flow and Vessel Mechanics.** *Computational Methods for Fluid-Structure Interaction, PRNM Vol. 306*, Longman, London, pp. 230-245. 1994.
- PERKTOLD, K.; RAPPITSH, G. **Computer Simulation of Local Blood Flow and Vessel Mechanics in a Complaint Carotid Artery Bifurcation Model.** *J. Biomech.*, 28, pp. 845-856, 1995.
- PRESS, W. H.; FLANNELY, B. P, TEUKOLSHY, S. A. and VETTERLING, W. T. **Numerical Recipes the art of Scientific Computing.** Cambridge University Press, N.Y., USA, 1986.
- RAPPITSCH, G.; PERKTOLD, K.; PERNKOPF, E. **Numerical Modeling of Shear-Dependent Mass Transfer in Large Arteries.** *Internat. J. Numer. Methods. Fluids*, Vol. 25, pp. 847-857, 1997.
- RAYMOND, W. H.; GARDER, A. **Selective Damping in a Galerking Method for Solving Wave Problems with Variable Grids.** *Mon. Weather Ver.*, 104, pp. 1583-1590, 1976.
- SAMPAIO, P. A. B. **A Petrov-Galerkin Modified Operator Formulation for Convection-Diffusion Problems.** *Int. J. Num. Meth Engng*, Vol. 30, pp. 331-347, 1990.

- SAMPAIO, P. A. B. **A Petrov-Galerkin Formulation for the Incompressible Navier-Stokes Equations using Equal Order Interpolation for Velocity and Pressure.** *Int. J. Num. Meth Engng*, Vol. 31, pp. 1135-1149, 1991.
- SAMPAIO, P. A. B.; LYRA, P. R. M.; MORGAN, K.; WEATHERILL, N. P. **Petrov-Galerkin Solutions of the Incompressible Navier-Stokes Equations in Primitive Variables with Adaptive Remeshing.** *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 106, pp. 143-178, 1993.
- SHEU, T. W. H., TSAI, S. F.; HWANG, W. S.; CHANG, T. M. **A Finite Element Study of the Blood Flow in Total Cavopulmonary Connection.** *Computer & Fluids*, 28, pp. 19-39, 1999.
- TEZDUYAR, T. E.; GLOWINSKI, R.; LIOU, J. **Petrov-Galerkin Methods on Multiply Connected Domains for the Vorticity-Stream Function Formulation of the Incompressible Navier-Stokes Equations.** *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol. 8, pp. 1269-1290, 1988.
- VAN DOORMAAL, J. P.; RATHBY, G. D. **Enhancements of the SIMPLE Method for predicting Incompressible Fluid Flow.** *Numerical Heat Transfer*, Vol. 7, pp. 147-163, 1984.
- WAHLBIN, L. B. **A Dissipative Galerkin Methods for the Numerical Solution of First Order Hyperbolic Equations.** *Mathematical Aspect of Finite Elements in Partial Differential Equations*, Academic Press, New York, pp. 147-169, 1974.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; CHRISTIE, I.; GRIFFITHS, D. F.; MITCHELL, A. R. **Finite Element Methods for Second Order Differential Equations with Significant First Derivatives.** *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 10, pp. 1389-1396, 1976.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; MORGAN, K. **Finite Elements and Approximation.** University of Wales, Swansea, United Kingdom. New York, 1983.

ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J.Z. **A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis.** *Internat. J. Numer. Methods. Engrg.*, 24, pp. 337-357, 1987.