

UNICA

ANÁLISE VISCOELÁSTICA LINEAR UTILIZANDO A TRANSFORMADA
DE LAPLACE E O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

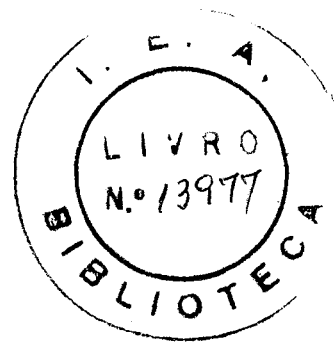
Roberto Katumi Nakaguma

Dissertação de Mestrado apresentada
à Escola Politécnica da Universidade
de São Paulo, para obtenção do
título de Mestre em Engenharia.

ANÁLISE VISCOELÁSTICA LINEAR UTILIZANDO A TRANSFORMADA
DE LAPLACE E O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Roberto Katumi Nakaguma

Dissertação de Mestrado apresentada
à Escola Politécnica da Universidade
de São Paulo, para obtenção do
título de Mestre em Engenharia.



Orientador: Prof. Dr. Décio Leal de Zagottis

1975

RESUMO

Descreve-se o método numérico apresentado por Adey e Brebbia em "*Efficient method for solution of viscoelastic problems*"¹ *, capaz de resolver um grande número de problemas viscoelásticos lineares isotrópicos. O método consiste em eliminar a variável tempo do problema, utilizando-se a transformada de Laplace. Desta forma, o problema real dependente da variável tempo é reduzido a um problema *elástico associado* no plano transformado, ou seja, as transformadas de Laplace em relação ao tempo das equações viscoelásticas de campo e condições de contorno são formalmente idênticas às equações para um corpo elástico de mesma geometria. As soluções transformadas são calculadas pelo método dos elementos finitos e invertidas numericamente, para a obtenção das respostas dependentes do tempo, pela aplicação do método dos mínimos quadrados.

O método apresentado permite que as propriedades viscoelásticas dos materiais possam ser descritas diretamente através de dados obtidos dos ensaios de relaxação ou de fluência, sem necessidade portanto, da montagem de modelos reológicos correspondentes.

* Números referentes aos trabalhos relacionados no Apêndice E.

ABSTRACT

The numerical method presented by Adey and Brebbia in "*Efficient method for solution of viscoelastic problems*"¹ *, capable of solving a large range of linear isotropic viscoelastic problems, is described here. The method consists in removing the time dependence of the problem, by applying the Laplace transform. The real time dependent problem is thus reduced to an *associated elastic problem* in the transformed plane, that is, the Laplace time-transformed viscoelastic field equations and boundary conditions are formally identical to the equations for an elastic body of the same geometry. The transformed solutions are calculated by the finite element method and inverted to obtain the time-dependent response, by applying the method of least squares.

The method presented allows to the viscoelastic data of materials to be described directly by the experimental creep or relaxation data, without the use of the correspondent rheological models.

* Numbers refer to works listed in Appendix E.

AGRADECIMENTOS

Sinceros agradecimentos a:

- Prof. Dr. Décio Leal de Zagottis, da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, orientador deste trabalho
- Instituto de Pesquisas Tecnológicas nas pessoas de:
 - Eng^o Luiz Emílio Soares de Gouvêa Horta
 - Eng^o James Campanhã Alvim
- Dr. Carlos Alberto Brebbia, da Universidade de Southampton

ÍNDICE

iv

| | |
|---|-----|
| RESUMO | i |
| ABSTRACT | ii |
| AGRADECIMENTOS | iii |
| ÍNDICE | iv |
| NOTAÇÃO | 1 |
| 1. INTRODUÇÃO | 4 |
| 2. VISCOELASTICIDADE LINEAR | 5 |
| 2.1 Corpos elásticos e viscosos lineares | 5 |
| 2.2 Corpos viscoelásticos lineares básicos | 6 |
| 2.2.1 Corpo de Maxwell | 8 |
| 2.2.2 Corpo de Kelvin | 9 |
| 2.2.3 Corpo de Maxwell-Kelvin | 10 |
| 2.3 Corpos viscoelásticos lineares generalizados | 10 |
| 2.3.1 Corpo de Kelvin generalizado | 11 |
| 2.3.2 Corpo de Maxwell generalizado | 12 |
| 2.4 Linearidade dos operadores viscoelásticos | 13 |
| 2.5 Integral Hereditária | 14 |
| 2.6 Conclusão | 15 |
| 3. RELAÇÕES TENSÃO-DEFORMAÇÃO DA VISCOELASTICIDADE LINEAR | 16 |
| 3.1 Estado de tensão em um ponto | 17 |
| 3.2 Estado de deformação em um ponto | 18 |
| 3.3 Relações tensão-deformação viscoelásticas | 20 |
| 4. ANÁLISE VISCOELÁSTICA | 24 |
| 4.1 Formulação no plano real do tempo | 24 |
| 4.2 Formulação no plano transformado de Laplace: problema elástico associado | 26 |
| 4.3 Inversão da solução viscoelástica transformada para o plano real do tempo | 29 |
| 5. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO DO MÉTODO | 39 |
| 5.1 Função teste típica em viscoelasticidade linear ... | 39 |
| 5.2 Teste de relaxação | 45 |
| 5.2.1 Solução analítica exata | 46 |

- 5.2.2 Solução numérica aproximada 48
- 5.3 Cilindro viscoelástico com reforço externo 54
 - 5.3.1 Solução analítica exata 54
 - 5.3.2 Solução numérica aproximada 60
- 6. UTILIZAÇÃO DAS CURVAS DE RELAXAÇÃO OU DE FLUÊNCIA PARA A CARACTERIZAÇÃO DE MATERIAIS VISCOELÁSTICOS LINEARES 67
 - 6.1 Exemplo de aplicação: fundação 71
 - 6.1.1 Determinação dos módulos de elasticidade para o problema elástico associado 72
 - 6.1.2 Inversão das soluções transformadas 75
- 7. CONCLUSÕES 77

APÊNDICES

A. TRANSFORMADA DE LAPLACE

- A.1 Introdução a1
 - A.1.1 Transformadas integrais a1
 - A.1.1.1 Definição a1
 - A.1.1.2 Linearidade a1
 - A.1.2 Convolução a2
- A.2 Transformada de Laplace a2
 - A.2.1 Definição a2
 - A.2.2 Existência a2
 - A.2.2.1 Definição: função seccionalmente contínua a2
 - A.2.2.2 Definição: função de ordem exponencial a3
 - A.2.2.3 Existência da transformada de Laplace a3
 - A.2.3 Exemplo a3
 - A.2.4 Transformada de Laplace das derivadas $\frac{d^n f(t)}{dt^n}$ a5

| | | |
|--|--|-----|
| A.2.5 | Teorema da convolução | a6 |
| A.2.6 | Função degrau unitário e função impulso unitário | a7 |
| A.2.6.1 | Definição: função degrau unitário $\Delta(t)$ | a7 |
| A.2.6.2 | Definição: função impulso unitário $\delta(t)$ | a8 |
| A.2.6.3 | Utilização das funções $\Delta(t)$ e $\delta(t)$. | a9 |
| A.2.7 | Transformada inversa | a10 |
| A.2.7.1 | Definição | a10 |
| A.2.7.2 | Unicidade | a10 |
| A.2.7.3 | Transformada inversa exata | a11 |
| A.2.7.4 | Transformada inversa aproximada .. | a12 |
| A.2.8 | Exemplo de aplicação em viscoelasticidade linear | a12 |
| B. PROCESSOS NUMÉRICOS DE INVERSÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE | | |
| B.1 | Introdução | b1 |
| B.2 | Processo da <i>colocação</i> | b1 |
| B.3 | Processo <i>multidata</i> | b4 |
| B.4 | Exemplo de aplicação - Comparação dos processos da <i>colocação</i> e <i>multidata</i> | b5 |
| B.4.1 | Função teste estudada | b5 |
| B.4.2 | Cálculo dos erros introduzidos nos valores dados | b7 |
| B.4.3 | Estudo dos parâmetros | b7 |
| B.4.4 | Avaliação dos erros | b8 |
| B.4.5 | Escolha dos valores de α_i | b8 |
| B.4.6 | Resultados..... | b10 |
| B.4.6.1 | Processo da <i>colocação</i> | b11 |
| B.4.6.2 | Processo <i>multidata</i> | b12 |
| B.4.6.3 | Comparação dos processos <i>multidata</i> e <i>colocação</i> | b13 |
| B.4.7 | Conclusão | b14 |
| C. PROGRAMA - PROCESSO MULTIDATA DE INVERSÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE | | |

D. PROGRAMA - CÁLCULO DO MÓDULO DE ELASTICIDADE PARA O PROBLEMA ELÁSTICO ASSOCIADO

E. BIBLIOGRAFIA

NOTAÇÃO

Os símbolos mais utilizados neste trabalho têm os significados abaixo relacionados, salvo observações em contrário no texto.

Na viscoelasticidade linear, sendo P e Q os operadores lineares que relacionam o tensor isotrópico das tensões e o tensor das dilatações, e P' e Q' os operadores lineares que relacionam o tensor tangencial das tensões e o tensor das distorções, por extensão da teoria da elasticidade linear, define-se

$$K = Q/P$$

$$G = Q'/P'$$

$$E = \frac{9(Q/P)(Q'/P')}{3(Q/P) + (Q'/P')}$$

$$\nu = \frac{3(Q/P) - 2(Q'/P')}{6(Q/P) + 2(Q'/P')}$$

Em particular, para a teoria da elasticidade linear, tem-se:

$$P = 1$$

$$Q = K \text{ (módulo de elasticidade volúmico)}$$

$$P' = 1$$

$$Q' = G \text{ (módulo de elasticidade transversal)}$$

$$E = \frac{9KG}{3K + G} : \text{módulo de elasticidade}$$

$$\nu = \frac{3K - 2G}{6K + 2G} : \text{coeficiente de Poisson}$$

η : coeficiente de viscosidade

t : variável tempo (plano real)

$Y(t)$: função de relaxação

$J(t)$: função de fluência

p : variável transformada (plano de Laplace)

$\tilde{f}(p) = L \{f(t)\}$: função transformada de Laplace de $f(t)$

$\bar{E}(p)$
 $\bar{G}(p)$
 $\bar{K}(p)$
 $\bar{v}(p)$

símbolos correspondentes às constantes elásticas referentes ao problema elástico associado

σ_{ij} : componentes do tensor das tensões

s : tensão normal média

s_{ij} : componentes do tensor tangencial das tensões

ϵ_{ij} : componentes do tensor das deformações

e : deformação volúmica específica

e_{ij} : componentes do tensor das distorsões

u_j : componentes do vetor deslocamento

\underline{U} : vetor deslocamento nodal

\underline{F} : vetor dos esforços nodais

\underline{K} : matriz de rigidez

S_j : constantes de ajuste

α_j, γ_j : constantes de ajuste

$\Delta(t)$: função degrau unitário

$\delta(t)$: função impulso unitário

x_1, x_2, x_3 : coordenadas cartesianas

$$f_{ii} = f_{11} + f_{22} + f_{33}$$

$$f_{ij,k} = \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k}$$

$$\dot{f}_{ij} = \frac{\partial f_{ij}}{\partial t}$$

$$D^k = \frac{d^k}{dt^k}$$

onde $f_{ij} = f_{ij}(x_1, x_2, x_3, t)$

$$P = \sum_{k=0}^m a_k D^k$$

$$Q = \sum_{k=0}^n b_k D^k$$

onde a_k e b_k são constantes

$$\log \beta = \log_{10} \beta$$

O símbolo ~ impresso sob um símbolo qualquer indica matriz.

1. INTRODUÇÃO

A utilização recente de materiais, tais como plásticos em máquinas, concreto em reatores nucleares, combustíveis sólidos em foguetes, bem como a mecânica dos solos e rochas, tem estimulado pesquisas em viscoelasticidade. Mais recentemente, Zienckiewicz, Watson e King ² desenvolveram métodos do tipo *passo a passo* tomando intervalos de tempo durante os quais assumiram as tensões constantes. A variação da deformação de fluência, durante um intervalo de tempo, leva a uma incompatibilidade que é corrigida elasticamente no fim de cada intervalo, através do método dos elementos finitos. Porém, este processo leva a dificuldades computacionais, pois, um grande número de intervalos de tempo é exigido para se obter uma solução precisa ¹.

Um outro procedimento, baseado nas *transformadas integrais*, também tem sido utilizado. Desta maneira, Lee ³ propôs um processo desenvolvido como uma extensão dos estudos de Alfrey e Tsien. Alfrey ⁴ mostrou que para um meio viscoelástico incompressível e isotrópico, sob a ação de esforços prescritos, a tensão é a mesma que aquela para um corpo elástico. Tsien ⁵ estendeu a conclusão de Alfrey para um meio viscoelástico compressível sob a ação de carregamento proporcional, mas assumiu uma restrita relação tensão-deformação, de forma que o equivalente ao coeficiente de Poisson se mantivesse constante, em vez de depender de operadores diferenciais.

Lee ³ considerou uma relação tensão-deformação geral e removeu a variável tempo das equações viscoelásticas lineares pela aplicação da transformada de Laplace. Mostrou como a solução poderia ser obtida de um *problema elástico associado*. Porém, somente resolveu problemas cujos correspondentes elásticos associados tinham soluções analíticas e obteve a solução real aplicando a inversão exata. Contudo, além da dificuldade natural de se aplicar a inversão exata, mesmo para problemas simples, frequentemente o *problema elástico associado* tem solução conhecida somente para valores reais positivos discretos do parâmetro transformado, pois, na maioria dos casos práticos utilizam-se técnicas numéricas para a obtenção da solução transformada.

Neste trabalho descreve-se o método apresentado por Adey e Brebbia ¹ para análise de corpos viscoelásticos lineares sujeitos a *cargas estáticas*, baseado no *método da transformada integral*, utilizando-se a *transformada de Laplace*. O problema

elástico associado é resolvido pelo método dos elementos finitos e a inversão das tensões, deformações e deslocamentos transformados para o plano real do tempo é feita numericamente por um processo do tipo *multidata*, proposto por Cost⁶.

As soluções dos exemplos de aplicação do método apresentado são comparadas com as soluções exatas quando possível. Estes exemplos são apenas amostras das possibilidades de sua utilização em análise viscoelástica linear, pois, o método é geral para qualquer estado de tensão, desde que se possa aplicar a transformada de Laplace; além disso, os autores Adey e Brebbia¹ afirmam que o método pode ser utilizado para vários tipos de problemas dependentes da variável tempo.

2. VISCOELASTICIDADE LINEAR

A teoria da viscoelasticidade linear, descrita por diversos autores^{7 8 9 10 11}, basicamente pode ser entendida como o estudo das combinações das propriedades dos corpos elásticos e corpos viscosos lineares. Estas propriedades e suas combinações são resumidas a seguir, com o objetivo principal de conceituar o fenômeno viscoelástico linear. Não se discute em detalhes os modelos reológicos e as soluções das respectivas equações diferenciais, desnecessários para a aplicação do método em análise. Contudo, essas equações diferenciais podem ser resolvidas, mais facilmente, utilizando-se a transformada de Laplace (veja apêndice A).

2.1 Corpos elásticos e viscosos lineares

A relação tensão-deformação unidimensional referente a um sólido elástico linear é descrita pela lei de Hooke:

$$\sigma = E\epsilon \quad (1)$$

onde σ é uma componente qualquer de tensão, ϵ é a componente de deformação correspondente e E , no caso, é uma das constantes elásticas que depende da natureza de σ e ϵ . Estes significados⁸ para σ , ϵ e E serão válidos neste item 2.

Um líquido viscoso linear é definido pela lei de

Newton da viscosidade,

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon} \quad (2)$$

onde a constante η é o *coeficiente de viscosidade* e o ponto sobre a variável indica a derivada da variável em relação ao tempo.

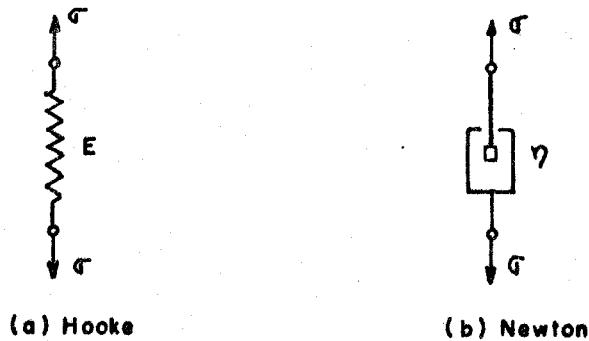


FIGURA 1 — MODELOS REOLÓGICOS BÁSICOS

Modelos figurativos, chamados *modelos reológicos*¹², são frequentemente convenientes para se visualizar as respostas dos materiais. Assim, os corpos de Hooke e de Newton são representados respectivamente por uma mola e um amortecedor (fig. 1). Ainda que não acrescentem nada às leis expressas por (1) e (2) estes modelos são muito úteis, pois, convenientemente associados são cômodos para uma descrição de corpos complexos ideais.

2.2 Corpos viscoelásticos lineares básicos

As propriedades da elasticidade e da viscosidade podem, portanto, ser combinadas de várias maneiras para a construção de numerosos meios hipotéticos, ditos viscoelásticos, correspondentes a materiais de comportamentos intermediários entre o elástico e o viscoso.

Um exemplo⁸ desse comportamento pode ser visto no gráfico da fig. 2, representando um teste de *fluência*. A fig. 2a mostra o gráfico de uma componente qualquer de tensão σ , constante e igual a σ_0 até o instante T, quando se anula. A fig. 2b representando a componente de deformação $\epsilon(t)$ é a resposta viscoelástica, associada à tensão σ , composta de uma deformação *instantâ-*

nea elástica OA seguida de uma resposta elástica atrasada e escoamento viscoso AB, continuando com um escoamento viscoso BC. Anulando-se a tensão σ no instante T, a resposta elástica instantânea é recuperada imediatamente, CD, e a elástica atrasada é recuperada gradualmente, DE. Há uma deformação permanente EF associada ao escoamento viscoso.

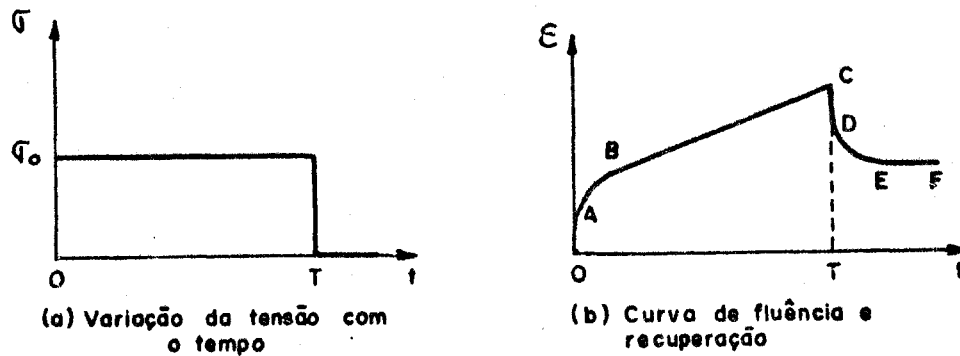


FIGURA 2 — CORPO VISCOELÁSTICO

Esta complicada resposta à tensão constante está em acentuado contraste com a de um material elástico linear, onde a variação da deformação reproduz simplesmente a variação da tensão numa escala apropriada.

Para sistemas simples, como o descrito na fig.2, representados por uma só componente de tensão $\sigma = \sigma(t)$ e pela correspondente componente de deformação $\epsilon = \epsilon(t)$, a viscoelasticidade é expressa por uma relação do tipo:

$$P\{\sigma(t)\} = Q\{\epsilon(t)\} \quad (3)$$

onde P e Q são operadores que envolvem diferenciação ou integração em relação ao tempo.

O mais simples grupo dessas relações é obtido quando se toma os operadores P e Q lineares; o material é então dito viscoelástico linear, objeto de estudo deste trabalho. *

Para ilustrar os componentes básicos da resposta viscoelástica linear é conveniente tomar os operadores diferenciais P e Q de ordem mais baixa, estudados a seguir.

* No que se segue, sempre se tratará de viscoelasticidade linear, embora, às vezes, se omitirá o termo linear, por simplicidade.

2.2.1 Corpo de Maxwell

O corpo de *Maxwell* é definido pela equação diferencial:

$$\frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} = \dot{\epsilon} \quad (4)$$

As constantes são descritas com a notação acima porque há conveniência em representar esta relação por modelo composto por uma mola e um amortecedor associados em série, como mostra a fig.3a.

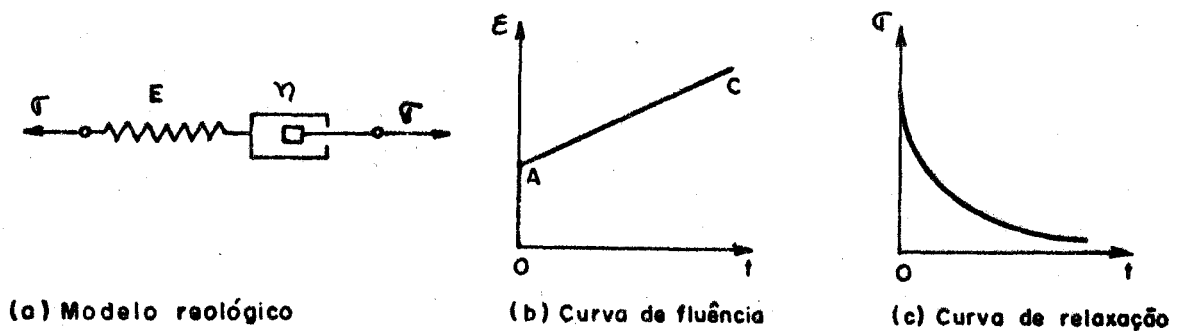


FIGURA 3 - CORPO DE MAXWELL

A curva de *fluência* para o corpo de Maxwell, isto é, a variação da deformação associada a uma tensão σ_0 , aplicada repentinamente e depois mantida constante, é mostrada na fig.(3b). Do modelo (fig.3a) decorre que há uma deformação *instantânea* OA, de magnitude σ_0/E , associada à extensão da mola, seguida por um *escoamento viscoso* com velocidade de deformação constante σ_0/η . Para o material de Maxwell não há componente de *elasticidade atrasada* de deformação.

De outra forma a curva de fluência poderia ser deduzida de (4) pela substituição de $\sigma = \sigma_0 \Delta(t)$, onde $\Delta(t)$ é a função degrau unitário (veja apêndice A2.6). A descontinuidade da tensão no instante zero fornece a resposta inicial instantânea e depois a substituição da tensão constante σ_0 em (4) determina a velocidade de deformação constante.

O fenômeno da viscoelasticidade também é exibido no teste da *relaxação*, onde se mede a variação de tensão correspondente a uma aplicação repentina de deformação ϵ_0 , mantida constante. A curva de relaxação (fig.3c) para o material de Maxwell é

obtida pela substituição de $\epsilon = \epsilon_0 \Delta(t)$ em (4) determinando-se a solução:

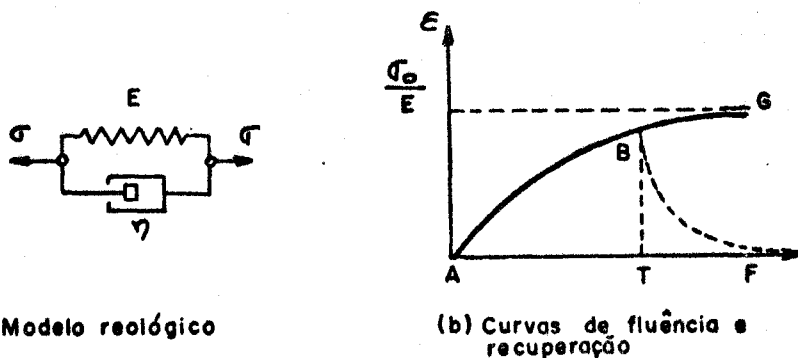
$$\sigma = E\epsilon_0 e^{-t/\tau} \Delta(t) \quad (5)$$

onde $\tau = \eta/E$ é denominado *tempo de relaxação*. Da mesma forma que a curva de fluência, a curva de relaxação expressa as propriedades viscoelásticas do material, e se verá mais adiante como as equações dessas duas curvas podem ser relacionadas.

2.2.2 Corpo de Kelvin

O mais simples corpo que exhibe *elasticidade atrasada* é o corpo de Kelvin ou Voigt (fig.4), definido por:

$$\sigma = E\epsilon + \eta \dot{\epsilon} \quad (6)$$



(a) Modelo reológico

(b) Curvas de fluência e recuperação

FIGURA 4 — CORPO DE KELVIN

É evidente da fig.4a que as deformações da mola e do amortecedor são as mesmas em todos os instantes e que a deformação inicial é zero, pois, para tensão finita, portanto para velocidade de deformação finita, o amortecedor não pode desenvolver componente de deformação instantânea; com estas condições e $\sigma = \sigma_0 \Delta(t)$, (6) fornece a solução:

$$\epsilon = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-t/\tau}) \Delta(t) \quad (7)$$

onde $\tau = \eta/E$ denomina-se *tempo de atraso*. A curva de fluência ABG fig.4b ilustra esta solução.

Se a tensão é removida no instante T, obtém-se a curva de recuperação BF, fig.4b, cuja equação é obtida de (6) igualando-se a tensão a zero.

Para tempos longos, a curva de fluência e recuperação, fig.4b, exibe um comportamento elástico com módulo E ; esta resposta elástica é atingida gradualmente dependendo de τ . Este comportamento é conhecido como *elasticidade atrasada*.

2.2.3 Corpo de Maxwell-Kelvin

O mais simples dos corpos que exibe todos os três tipos de respostas viscoelásticas (*elasticidade instantânea, elasticidade atrasada e escoamento viscoso*) é representado pelo modelo de Maxwell-Kelvin fig.5.

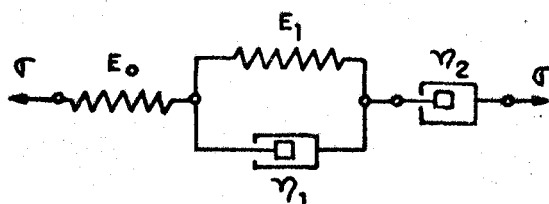


FIGURA 5 — CORPO DE MAXWELL-KELVIN

A relação tensão-deformação correspondente é da forma:

$$(p_2 D^2 + p_1 D + p_0) \sigma = (D^2 + q_1 D) \epsilon \quad (8)$$

onde D^k é o operador $\frac{d^k}{dt^k}$ e p_0 , p_1 , p_2 e q_1 são constantes do material e podem ser expressas em termos das constantes que caracterizam os elementos do modelo.

A curva de fluência e de recuperação é do tipo ilustrado na fig.2b.

2.3 Corpos viscoelásticos lineares generalizados

Uma generalização direta das leis viscoelásticas particulares (4), (6) e (8) é a relação (3), tomando-se para P e Q as expressões:

$$P = \sum_{k=0}^m a_k D^k, \quad Q = \sum_{k=0}^n b_k D^k \quad (9)$$

onde m , a_k , n e b_k são constantes do material e D^k é o operador $\frac{d^k}{dt^k}$. Corpos definidos pela lei geral (3) - (9) podem ser representados pelos chamados *corpos generalizados*, descritos a seguir.

2.3.1 Corpo de Kelvin generalizado

O corpo de *Kelvin generalizado* é o corpo representado pelo modelo reológico mostrado na fig.6. Somando-se as deformações dos elementos individuais deste modelo e utilizando-se (1), (2) e (6), a relação viscoelástica correspondente é dada formalmente por:

$$\epsilon = \left(\frac{1}{E_0} + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{E_k + \eta_k D} + \frac{1}{\eta_r D} \right) \sigma \quad (10)$$

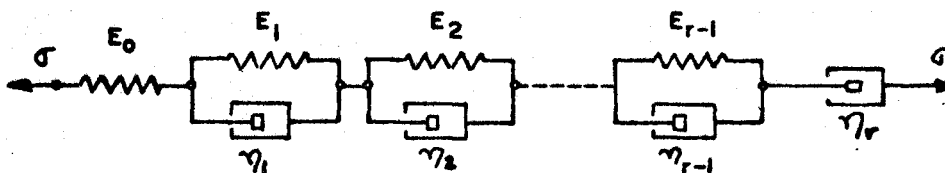


FIGURA 6 - CORPO DE KELVIN GENERALIZADO

Eliminando-se D dos denominadores de (10) multiplicando-se ambos os membros por:

$$\eta_r D \prod_{k=1}^{r-1} (E_k + \eta_k D) \quad (11)$$

obtêm-se uma relação do tipo expresso por (3) - (9), com as ordens m e n dos operadores P e Q iguais a r .

Para a curva de fluência correspondente a tensão constante σ_0 , cada elemento de *Kelvin* da fig.6 fornece uma contribuição de deformação com variação exponencial, com diferentes *tempos de atraso* se $\tau_k = \eta_k / E_k$ é escolhido diferentemente para cada elemento. Isto oferece a possibilidade de se ajustar uma curva

de fluência do tipo mostrado na fig.2b através de uma soma de termos exponenciais e um termo linear, em lugar de um único termo exponencial mais um termo linear, correspondentes ao corpo de *Maxwell-Kelvin* [fig.5 e (8)]. Desta forma, qualquer curva de fluência, com a forma da fig.2b, pode ser ajustada com um razoável grau de precisão; uma maior precisão de ajuste, em geral, requer mais termos exponenciais, portanto, um modelo de *Kelvin generalizado* com mais elementos e assim, operadores diferenciais de ordem mais alta.

Em particular, o corpo de *Maxwell* expresso por (4) corresponde a tomar no corpo de Kelvin generalizado $r = 1$; o modelo de *Maxwell-Kelvin* expresso por (8), $r = 2$ (veja fig.6).

2.3.2 Corpo de Maxwell generalizado

O corpo considerado em 2.3.1 pode igualmente ser representado pelo corpo de *Maxwell generalizado*, cujo modelo reológico é mostrado na fig.7. Neste modelo a deformação é igual em todos os elementos ligados em paralelo e a tensão resultante é a soma das contribuições individuais.

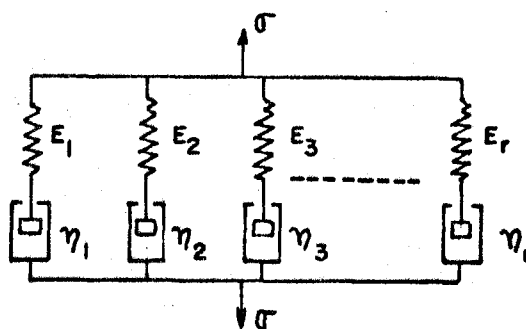


FIGURA 7 — CORPO DE MAXWELL GENERALIZADO

Os correspondentes operadores são deduzidos de:

$$\sigma = \left(\sum_{k=1}^r \frac{D}{D/E_k + 1/\eta_k} \right) \epsilon \quad (12)$$

Elimina-se D dos denominadores multiplicando-se ambos os membros de (12) por:

$$\prod_1^r (D/E_k + 1/\eta_k) \quad (13)$$

Assim, (12) toma a forma da relação expressa por (3) - (9), onde as ordens de P e Q são iguais a r.

Em resumo, um par de operadores particulares, do tipo dado por (3) - (9), pode ser, igualmente, representado por *modelos generalizados de Kelvin* fig.6 ou de *Maxwell* fig.7. A determinação do modelo consiste em dividir formalmente ambos os membros de (3) por um dos operadores: dividindo por Q obtêm-se (10), modelo de *Kelvin generalizado*; dividindo por P obtêm-se (12), modelo de *Maxwell generalizado*.

2.4 Linearidade dos operadores viscoelásticos

A linearidade dos operadores viscoelásticos^o implica na validade do princípio da superposição de efeitos, ou seja, se a variação de deformação $\epsilon_1(t)$ é associada à variação de tensão $\sigma_1(t)$, isto é, simbolicamente:

$$\sigma_1(t) \rightarrow \epsilon_1(t) \quad (14)$$

e

$$\sigma_2(t) \rightarrow \epsilon_2(t) \quad (15)$$

então, para constantes arbitrárias β_1 e β_2 , tem-se:

$$\sigma_3(t) = \beta_1 \sigma_1(t) + \beta_2 \sigma_2(t) \rightarrow \epsilon_3(t) = \beta_1 \epsilon_1(t) + \beta_2 \epsilon_2(t) \quad (16)$$

Esta relação é utilizada para testar a linearidade de um material viscoelástico e obter as respostas para situações arbitrárias de tensões, a partir de uma variação particular de tensão, por exemplo, fluência.

A linearidade é verificada de modo mais simples tomando-se $\beta_2 = 0$ e gerando-se as variações de tensão

$$\sigma_3(t) = \beta_1 \sigma_1(t) \quad (17)$$

para um intervalo de valores de β_1 e um particular valor de $\sigma_1(t)$. Para que se tenha linearidade,

$$\epsilon_3(t)/\beta_1 = \epsilon_1(t) \quad (18)$$

deve ser independente de β_1 . Desta forma, se $\bar{\epsilon}$ é medida uma série de valores de $\epsilon_3(t)$ para certos valores de β_1 , a repetição da mesma curva $[\epsilon_3(t)/\beta_1, t]$ indicará a linearidade ⁸.

2.5 Integral hereditária

Considere-se a variação de tensão mostrada na fig.8. Esta curva pode ser aproximada pela soma de uma série de tensões constantes com o tempo, correspondente a solicitações de fluência ^{8 10}. Definindo-se $J(t)$, *função de fluência*, como sendo a variação de deformação correspondente a uma tensão unitária aplicada no instante $t = 0$ e mantida constante, a resposta à variação de tensão mostrada na fig.8, fazendo uso do *princípio da superposição*, pode ser representada pela integral:

$$\epsilon(t_1) = \int_{-\infty}^{t_1} \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} J(t_1 - \tau) d\tau \quad (19)$$

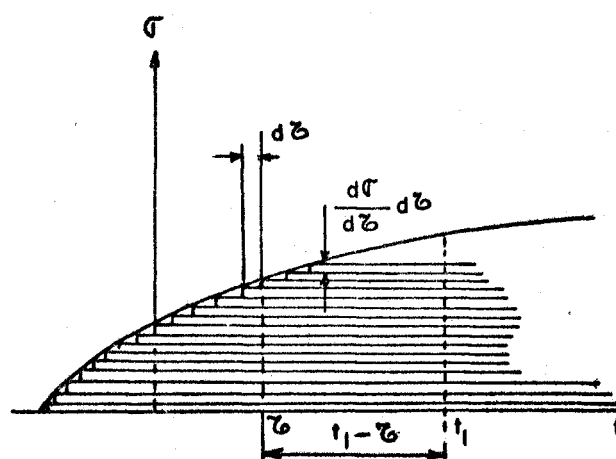


FIGURA 8 -- SUPERPOSIÇÃO DAS RESPOSTAS DE FLUÊNCIA

O extremo inferior da integral é tomado como sendo $-\infty$ para permitir o início da aplicação de cargas em qualquer instante, mas se a origem de t apenas indicar o início do carregamento, com o corpo inicialmente descarregado, o extremo inferior

pode ser substituído por zero.

A representação da viscoelasticidade linear pela relação (19), *Integral de Duhamel*, foi introduzida por Volterra sob a terminologia de *Integral Hereditária*, pois o núcleo da integral, $J(t_1 - \tau)$, pode ser considerado como uma *função memória*, transformando a influência da tensão aplicada no instante $t = \tau$ para o instante $t = t_1$. A relação (19) é equivalente à relação contendo o operador diferencial expressa por (3) - (9), pois $J(t)$ é uma solução particular da equação diferencial (3) - (9) para $\epsilon(t)$, correspondente a uma tensão unitária constante aplicada ⁸.

Uma relação similar a (19) pode ser obtida em termos da *função de relaxação* $\gamma(t)$ ¹⁰, que é a variação de tensão por unidade de deformação constante aplicada no instante $t = 0$, ou seja,

$$\sigma(t_1) = \int_{-\infty}^{t_1} \frac{d\epsilon(\tau)}{d\tau} \gamma(t_1 - \tau) d\tau \quad (20)$$

2.6 Conclusão

Os vários métodos de expressar as propriedades viscoelásticas (3) - (9), (19) e (20) podem ser considerados como variações de (3), com P e Q tomando a forma de *operadores diferenciais* ou *integrais*. Para um material viscoelástico particular, estes operadores são todos equivalentes, pois, cada um deles pode ser deduzido de outro qualquer por manipulações puramente matemáticas. Na prática, deve-se saber mudar de uma forma de operador para outra, pois, pode ser conveniente medir as propriedades viscoelásticas numa forma e ser mais conveniente uma outra forma para a análise de tensões ⁸.

A influência das derivadas em relação ao tempo, que comparecem nas relações tensão-deformação (3), (4), (6), (8), (10), (12) e em outras relações viscoelásticas, determina distribuições de tensões em acentuados contrastes com as da análise elástica. Assim, em *análise estática*, sob ação de esforços constantes prescritos, as tensões internas podem variar acentuadamente com diferentes distribuições em diferentes instantes, após a aplicação da carga. A correspondente solução elástica fornece tensões que não variam com o tempo. Em projetos viscoelásticos pode ser possível a utilização deste efeito no tempo, escolhendo-se materiais cujas características impeçam o desenvolvimento de certas componentes

de tensões, antes que sejam aliviadas pela remoção do carregamento (veja item 5.3.1).

3. RELAÇÕES TENSÃO-DEFORMAÇÃO DA VISCOELASTICIDADE LINEAR

Como em problemas práticos normalmente surgem esta dos triplos de tensão, serão necessárias leis viscoelásticas lineares que relacionem as componentes dos tensores das tensões e das deformações.

A situação é inteiramente análoga à discutida em e lasticidade linear, com a diferença de que razões entre operadores do tipo discutido na secção anterior substituirão as constantes elásticas. Desta forma, materiais viscoelásticos lineares isó tropos poderão ser representados por dois pares independentes de operadores, por analogia às duas constantes independentes necessá rias para representar um material elástico isótropo. Este fato se demonstra exigindo-se que a resposta a uma solicitação não se al tere quando o corpo é girado arbitrariamente, antes de atuar a so licitação.

É particularmente significativo, em viscoelasticidade, separarem-se os efeitos *distorsionais* e *dilatacionais*, pois, as influências viscoelásticas são mais acentuadas nas respostas às tensões tangenciais ^o.

No que se segue, adota-se um sistema de eixos cartesianos (x_1, x_2, x_3) designados por x_i ($i = 1, 2, 3$) ^o. Neste sistema de referência, σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), ϵ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) e u_i ($i = 1, 2, 3$) denotam respectivamente as componentes dos ten sores das tensões, deformações e as componentes do vetor deslocamento. Utilizam-se também as convenções de derivação e soma do cálculo tensorial:

$$u_{i,k} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k},$$

ou seja, um índice após a vírgula indica derivação em relação à coordenada correspondente;

$$\sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33},$$

ou seja, quando um índice aparece duas vezes no mesmo monômio, de ve-se dar a este índice os valores 1, 2, 3 e somar-se os resultados.

3.1 Estado de tensão em um ponto

Quando um tetraedro infinitesimal é retirado de um corpo constituído de um material qualquer, sob a hipótese de pequenos deslocamentos e pequenas deformações, as grandezas σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), mostradas na fig. 9, definem o estado de tensão num ponto P¹³.

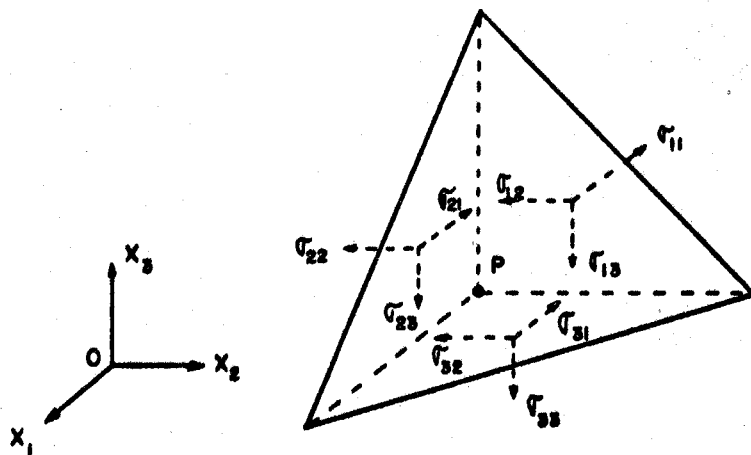


FIGURA 9 - ELEMENTO INFINITÉSIMAL DE UM CORPO SÓLIDO

Estas grandezas são *componentes das tensões* nas facetas que passam por um ponto e são paralelas aos planos coordenados, e formam uma entidade física denominada *tensor das tensões*, representado pelo primeiro membro de (21). Por razões de equilíbrio $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ e, portanto, o tensor das tensões é simétrico. Esse tensor pode ser decomposto em dois outros tensores denominados *esférico* e *antisférico*:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Sendo \underline{s} a *tensão normal média*, ou seja,

$$s = \frac{1}{3} \sigma_{ii} \quad (22)$$

tem-se:

$$s_{ii} = 0 \quad (23)$$

Desta forma, o primeiro tensor do segundo membro de (21) representa um estado isotrópico de tensões, por isso chamado de *tensor isotrópico das tensões*; o segundo tensor, com a propriedade (23), é o denominado *tensor tangencial das tensões* e pode ser decomposto em cinco outros tensores ¹⁰:

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & s_{12} & 0 \\ s_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{23} \\ 0 & s_{32} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & s_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ s_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -s_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_{33} & 0 \\ 0 & 0 & s_{33} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Os três primeiros tensores do segundo membro de (24) representam estados *tangenciais simples* de tensão, com $s_{ij} = \sigma_{ij}$. O quarto tensor representa um estado de tensão no plano (x_1, x_2) , fig. 10a, sendo equivalente ao estado *tangencial simples* de tensão mostrado na fig. 10b.

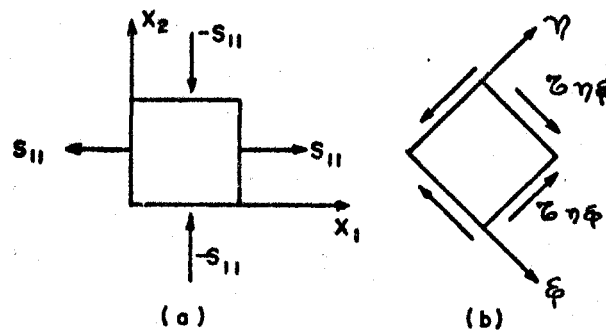


FIGURA 10 - ESTADOS TANGENCIAIS SIMPLES DE TENSÃO EM SISTEMAS DIFERENTES DE REFERÊNCIA.

Uma interpretação análoga para o quinto tensor do segundo membro de (24) pode ser feita.

3.2 Estado de deformação em um ponto

Uma análise análoga para o estado de deformação, ainda considerando a hipótese de pequenos deslocamentos e pequenas deformações, pode ser feita considerando-se que as grandezas ϵ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) definem o estado de deformação num ponto P ¹⁴. Estas grandezas, denominadas *componentes de deformação*, são alon-

gamentos e distorções relativos a três segmentos elementares considerados num ponto e paralelos a três eixos ortogonais de referência, e compõem o *tensor das deformações* representado pelo primeiro membro da expressão (25). O tensor das deformações é simétrico, pois $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$, e pode ser decomposto em dois outros tensores denominados *esférico* e *antiesférico*:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Sendo \underline{e} a deformação *volúmica específica*, ou seja,

$$e = \epsilon_{ij} \quad (26)$$

tem-se:

$$e_{ij} = 0 \quad (27)$$

Desta forma, o primeiro tensor do segundo membro de (25) representa uma dilatação uniforme, e é denominado *tensor das dilatações*; o segundo tensor, com a propriedade (27), é o denominado *tensor das distorções* e pode ser decomposto em cinco outros tensores ¹⁰:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & e_{12} & 0 \\ e_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{23} \\ 0 & e_{32} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -e_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e_{33} & 0 \\ 0 & 0 & e_{33} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Os três primeiros tensores do segundo membro de (28) representam *distorções simples*, com $e_{ij} = \epsilon_{ij}$. O quarto tensor representa uma deformação no plano (x_1, x_2) equivalente à *distorção simples* mostrada na fig. 11.

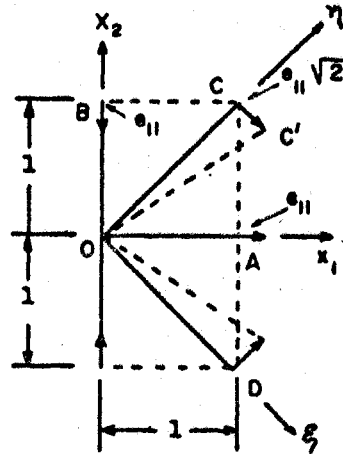


FIGURA 11 - DISTORSÃO SIMPLES EM UM SISTEMA DE REFERÊNCIA (ξ, η) DIFERENTE DE (x_1, x_2)

Para se produzir este estado de deformação, mantém-se fixo o ponto O e deixa-se o ponto A mover para a direita de uma distância e_{11} , enquanto o ponto B se move de igual quantidade para baixo. O ponto C tem por deslocamento a soma vetorial dos deslocamentos de A e B, portanto, $CC' = e_{11}\sqrt{2}$. A diagonal OC gira de um ângulo de e_{11} e, portanto, o ângulo reto COD varia de $2e_{11}$. No sistema (ξ, η) da fig. 10b, isto corresponde a um estado de distorção simples com

$$\epsilon_{\xi\eta} = e_{11} \quad (29)$$

Uma interpretação análoga para o quinto tensor do segundo membro de (28) pode ser feita.

3.3 Relações tensão-deformação viscoelásticas

Se o material é isotrópico, o tensor isotrópico das tensões deve produzir dilatação e não distorção e, portanto, as grandezas \underline{s} e \underline{e} , considerando-se material viscoelástico, devem ser conectadas por uma das relações do tipo (3), apresentadas na secção 2:

$$P s(t) = Q e(t) \quad (30)$$

ou utilizando-se (22) e (26):

$$P \sigma_{ii}(t) = 3Q \epsilon_{ii}(t) \quad (31)$$

Por outro lado, cada um dos tensores de (24) deve produzir distorção simples representada pelo tensor correspondente em (28), e a isotropia do material exige que uma das relações do tipo (3) seja igualmente válida para todos os pares de componentes correspondentes, ou seja,

$$P' s_{ij}(t) = 2Q' e_{ij}(t) \quad (32)$$

onde, de acordo com (21) e (25),

$$s_{ij}(t) = \sigma_{ij}(t) - \frac{1}{3} \sigma_{kk}(t) \delta_{ij} \quad (33)$$

$$e_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk}(t) \delta_{ij} \quad (34)$$

sendo δ_{ij} , o símbolo de Kronecker, isto é, $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

Os quatro operadores P , Q , P' e Q' que descrevem o comportamento viscoelástico do material são inteiramente independentes.

Note-se que o material elástico é um caso limite dos materiais viscoelásticos. Pode-se escrever a lei de Hooke ¹⁵ na forma (31) e (32):

$$\sigma_{ii} = 3K\varepsilon_{ii} \quad (35)$$

$$s_{ij} = 2Ge_{ij} \quad (36)$$

onde K é o módulo de elasticidade volumico e G é o módulo de elasticidade transversal. Portanto, para um sólido elástico linear, os quatro operadores são simples constantes multiplicativas:

$$P = 1, \quad Q = K, \quad P' = 1, \quad Q' = G \quad (37)$$

As outras constantes elásticas, *módulo de elasticidade* E e *coeficiente de Poisson* ν , que igualmente descrevem as propriedades do material elástico linear, estão relacionadas com as constantes K e G através das expressões ¹⁵:

$$E = \frac{9KG}{3K + G}, \quad \nu = \frac{3K - 2G}{6K + 2G} \quad (38)$$

Como a aplicação de um operador linear sobre outro do mesmo tipo resulta num operador linear, os operadores viscoelásticos básicos P , Q , P' e Q' podem ser combinados, como foram as constantes elásticas, determinando-se operadores apropriados para a descrição de respostas a estados particulares de tensão. Há conveniência em se definir ⁸,

$$\frac{Q}{P} = K \quad \text{e} \quad \frac{Q'}{P'} = G \quad (39)$$

pois, desta forma, as relações tensão-deformação viscoelásticas lineares (31) e (32) se expressam por relações formalmente idênticas às elásticas lineares (35) e (36), ou seja,

$$\sigma_{ij}(t) = 3K \epsilon_{ij}(t) \quad (40a)$$

$$S_{ij} = 2G \epsilon_{ij}(t) \quad (40b)$$

onde $\frac{Q}{P} = K$ e $\frac{Q'}{P'} = G$.

As relações (32), (33), (34) e (39), para $i=j=1$, permitem escrever:

$$\sigma_{11}(t) - \frac{1}{3} \sigma_{kk}(t) = 2G [\epsilon_{11}(t) - \frac{1}{3} \epsilon_{kk}(t)] \quad (41)$$

A combinação de (40a) e (41) resulta:

$$\sigma_{11}(t) = [K + \frac{4}{3} G] \epsilon_{11}(t) + [K - \frac{2}{3} G] [\epsilon_{22}(t) + \epsilon_{33}(t)] \quad (42)$$

Fazendo-se novamente uma analogia com a lei de Hooke ¹⁵,

$$\sigma_{11} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_{11} + \nu(\epsilon_{22} + \epsilon_{33})] \quad (43)$$

pode-se definir formalmente em (42) os operadores viscoelásticos E e ν tais que:

$$K + \frac{4}{3} G = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad , \quad K - \frac{2}{3} G = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (44)$$

De (44) resultam para E e ν relações idênticas às corresponden-

tes da teoria da elasticidade expressas por (38):

$$E = \frac{9 KG}{3K + G}, \quad \nu = \frac{3K - 2G}{6K + 2G} \quad (45)$$

sendo: $K = Q/P$ e $G = Q'/P'$

Desta forma, definindo-se K e G através de (39), pode-se obter os operadores combinados, correspondentes às outras constantes elásticas, utilizando-se formalmente as relações (45).

Por exemplo, considerando-se estado de tração simples, o operador viscoelástico correspondente ao módulo de elasticidade E é definido por:

$$E = \frac{\sigma(t)}{\epsilon(t)} \quad (46)$$

Para um material viscoelástico definido por (31) e (32), utilizando-se (45), (46) pode ser expresso formalmente por:

$$\frac{\sigma(t)}{\epsilon(t)} = \frac{9 (Q/P)(Q'/P')}{3 (Q/P) + (Q'/P')} \quad (47)$$

$$\text{ou} \quad [3 P'Q + Q'P] \sigma(t) = [9 QQ'] \epsilon(t) \quad (48)$$

Esta é a relação viscoelástica tensão-deformação para um estado de tração simples em termos dos operadores diferenciais básicos. Para melhor exemplificar, tomando-se um corpo que se comporta elasticamente a solicitações hidrostáticas e como material de Maxwell a solicitações tangenciais, ou seja, utilizando-se (35) e (4), com uma notação conveniente, tem-se:

$$\frac{Q}{P} = K, \quad \frac{Q'}{P'} = \frac{D}{AD + B} \quad (49)$$

onde K , A e B são constantes do material e D é o operador $\frac{d}{dt}$. Substituindo (49) em (48), tem-se:

$$[(3KA + 1) D + 3KB] \sigma(t) = 9KD \epsilon(t) \quad (50)$$

ou

$$\left(\frac{3KA + 1}{9K} D + \frac{B}{3} \right) \sigma(t) = D \epsilon(t) \quad (51)$$

que é do tipo da relação (4), de Maxwell, apenas com coeficientes diferentes. Assim, o corpo definido por (49) se comporta como um material de Maxwell num teste de tração simples, com tempo de relaxação e demais constantes diferentes daquelas correspondentes ao

modelo básico de Maxwell para solicitações tangenciais.

De maneira análoga, uma relação de operadores pode ser obtida para relacionar, num elemento em estado simples de tensão, o alongamento principal mínimo e o alongamento principal máximo, correspondente à constante elástica coeficiente de Poisson ν .

Na consideração das relações entre os vários métodos de representar os operadores viscoelásticos que se fará adiante, estas relações podem ser vistas como aplicadas ou aos pares de operadores básicos, ou a outros operadores viscoelásticos combinados. Portanto, por exemplo, a tensão σ e a deformação ϵ podem representar efeitos dilatacionais, distorcionais, ou estados de tração simples conforme se esteja considerando (31), (32) ou (48).

4. ANÁLISE VISCOELÁSTICA

4.1 Formulação no plano real do tempo

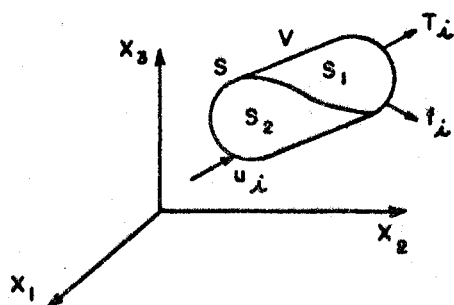


FIGURA 12 - CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA O CORPO V

A fig.12 mostra um corpo viscoelástico V sujeito a esforços constantes $T_i(x_j)$ aplicados na parte S_1 , e com deslocamentos $u_i(x_j)$ impostos na parte S_2 ; S_1 e S_2 formam o contorno S do corpo. Forças por unidade de volume $f_i(x_j)$ também podem ser

consideradas. A análise viscoelástica consiste em determinar a variação das tensões, deformações e deslocamentos, funções da variável tempo, no corpo viscoelástico V . A presente análise é limitada a pequenos deslocamentos e deformações ¹⁵, desta forma, considerando-se material viscoelástico linear, a análise toda pode ser considerada linear.

Assim sendo, as componentes do estado de tensão e as componentes de deformação,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_k, t), \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}(x_k, t), \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (52)$$

satisfazendo as relações viscoelásticas lineares descritas em (31) e (32), são funções das coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) e da variável tempo t . Assim, as derivadas em relação ao tempo, até aqui consideradas, tornam-se derivadas parciais. Os operadores P , Q , P' e Q' podem assumir qualquer uma das formas discutidas nas secções anteriores, onde todas as derivadas ou integrais, em relação à variável tempo t , são válidas para cada ponto (x_1, x_2, x_3) do corpo V .

As *relações deslocamento-deformação* linearizadas podem ser escritas ¹⁵:

$$\epsilon_{ij}(x_k, t) = \frac{1}{2} [u_{i,j}(x_k, t) + u_{j,i}(x_k, t)] \quad (53)$$

onde u_i ($i = 1, 2, 3$) são as componentes do vetor deslocamento.

As *equações de equilíbrio linearizadas* ¹⁵ são expressas por:

$$\sigma_{ij,j}(x_k, t) + f_i(x_k) = 0 \quad (54)$$

As *condições de contorno* para o problema se escrevem:

$$T_i(x_j) = \sigma_{ij} \eta_j \quad \text{em } S_1, \quad (55)$$

onde $T_i(x_j)$ são os esforços impostos e η_j são os cossenos directores da normal externa;

$$u_i(x_k) = \bar{u}_i(x_k) \quad \text{em } S_2, \quad (56)$$

onde $\bar{u}_i(x_k)$ são deslocamentos impostos.

As equações (31), (32), (53) e (54) formam um sis-

tema de 15 equações diferenciais parciais lineares que, juntamente com as condições de contorno (55) e (56), determinam as incógnitas, ou seja, seis componentes de tensão, seis componentes de deformação e três componentes de deslocamento, funções de x_1, x_2, x_3 e t .

Devido à existência de derivadas em relação ao tempo, serão necessárias condições iniciais. Este aspecto será abordado no item seguinte.

4.2. *Formulação no plano transformado de Laplace: problema elástico associado*

Uma grande classe de problemas da análise viscoelástica linear pode ser tratada pela remoção da variável tempo do sistema de 15 equações diferenciais acima referido, pela aplicação da transformada de Laplace em relação ao tempo t ^{3 16 8}.

A transformada de Laplace em relação a t é por definição (veja apêndice A):

$$\hat{f}(x, y, z, p) = \int_0^{\infty} f(x, y, z, t) e^{-pt} dt \quad (57)$$

onde o acento circunflexo sobre o símbolo f indica a transformada de Laplace da função f .

Para a aplicação da transformada de Laplace, a forma e o volume do corpo V não devem ser alterados, a menos de deslocamentos infinitesimais, e as regiões S_1 e S_2 , sobre as quais se prescrevem as condições de contorno mecânicas e geométricas, devem ser mantidas fixas durante o período em que a análise é feita. Do contrário, a transformada de Laplace, sendo uma integral sobre o tempo no intervalo de zero a infinito, não pode ser calculada.

De acordo com as conclusões do item A2.8 do apêndice A, supondo-se que o corpo esteja inicialmente descarregado, a hipótese de *condições iniciais nulas* (para $t \rightarrow 0^+$, tensões e deformações e suas derivadas de todas as ordens necessárias iguais a zero) levam a resultados corretos após a aplicação da transformada de Laplace. Portanto, a relação tensão-deformação (3) - (9), em termos de operadores diferenciais, se transforma em:

$$\left(\sum_{k=0}^m a_k p^k \right) \bar{\sigma}(p) = \left(\sum_{k=0}^n b_k p^k \right) \bar{\varepsilon}(p) \quad (58)$$

Por outro lado, as transformadas de Laplace das relações tensão-deformação (19) e (20), em termos de operadores integrais, são obtidas pela aplicação do teorema da Convolução (veja apêndice A2.5):

$$\bar{\varepsilon}(p) = \bar{J}(p) p \bar{\sigma}(p) \quad (59)$$

$$\bar{\sigma}(p) = \bar{Y}(p) p \bar{\varepsilon}(p) \quad (60)$$

Note-se que as expressões (59) e (60) permitem relacionar os módulos de relaxação e de fluência no plano transformado:

$$\bar{J}(p) \bar{Y}(p) = p^{-2} \quad (61)$$

Pela observação de uma das três relações equivalentes, (58), (59) ou (60), conclui-se que uma relação tensão-deformação elástica se aplica no plano transformado, sendo os termos equivalentes às constantes elásticas funções do parâmetro transformado p . Esta é realmente a grande importância da transformada de Laplace na solução de problemas em viscoelasticidade linear: uma equação diferencial ou integro-diferencial do tipo convolução (veja apêndice A, item A1.2) se transforma numa equação algébrica no plano de Laplace.

As transformadas das *relações tensão-deformação*, na forma (31) e (32), das *equações diferenciais* e das *condições de contorno* (53), (54), (55) e (56) formam o sistema de equações:

$$\bar{P}(p) \bar{\sigma}_{ij}(p) = 3 \bar{Q}(p) \bar{\varepsilon}_{ij}(p) \quad (62)$$

$$\bar{P}'(p) \bar{s}_{ij}(p) = 2 \bar{Q}'(p) \bar{\varepsilon}_{ij}(p) \quad (63)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij}(p) = \frac{1}{2} [\bar{u}_{i,j}(p) + \bar{u}_{j,i}(p)] \quad (64)$$

$$\bar{\sigma}_{ij,j}(p) + \bar{f}_i(p) = 0 \quad (65)$$

$$\bar{T}_i(p) = \bar{\sigma}_{ij}(p) \eta_j, \text{ em } S_1 \quad (66)$$

$$\bar{u}_i(p) = \bar{\bar{u}}_i(p), \text{ em } S_2 \quad (67)$$

Note-se que todas as funções que aparecem nas rela

ções acima dependem das variáveis x_k ($k = 1, 2, 3$), omitidas por simplicidade.

Este sistema de equações diferenciais lineares, com condições de contorno, constitui o chamado *problema elástico associado*, que possibilita a determinação das tensões, deformações e deslocamentos no plano transformado. Observe-se que as variáveis x_k permaneceram inalteradas e que, portanto, o *problema elástico associado* tem a mesma geometria que o problema original.

As constantes elásticas usuais correspondentes às equações (62) e (63) são expressas formalmente por:

$$\hat{K} = \hat{Q}/\hat{P} \quad (68a)$$

$$\hat{G} = \hat{Q}'/\hat{P}' \quad (68b)$$

Como a formulação do problema em termos do módulo de elasticidade e do coeficiente de Poisson pode ser mais conveniente, as demais constantes elásticas, \hat{E} e $\hat{\nu}$, podem ser deduzidas utilizando-se as relações equivalentes às relações expressas por (38):

$$\hat{E} = \frac{9\hat{K}\hat{G}}{3\hat{K} + \hat{G}}, \quad \hat{\nu} = \frac{3\hat{K} - 2\hat{G}}{6\hat{K} + 2\hat{G}} \quad (69)$$

Os acentos circunflexos sobre as constantes elásticas para o problema associado apenas lembram os seus significados. Assim, por exemplo, \hat{E} , num elemento em estado simples de tensão, é o quociente da tensão principal transformada, não nula, pelo alongamento principal transformado correspondente ³³.

As conclusões obtidas acima permitem a utilização das técnicas de resolução de problemas elásticos lineares, entre estas o método dos elementos finitos, para a resolução dos problemas viscoelásticos lineares correspondentes.

Desta forma, considerando o problema elástico associado, a aplicação do método dos elementos finitos, processo dos deslocamentos ^{18 19}, conduz à relação:

$$\underline{\underline{K}}(\hat{\nu}, \hat{E})\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{F}} \quad (70)$$

onde $\underline{\underline{K}}$ é a matriz de rigidez, $\underline{\underline{U}}$ o vetor deslocamento nodal transformado e $\underline{\underline{F}}$ o vetor dos esforços nodais transformados. Também, como se trata de analisar problemas estáticos, ou seja, $\underline{\underline{F}}$ constante,

tem-se que $\underline{\hat{F}} = \underline{F}/p$, portanto:

$$p\underline{\hat{U}} = \underline{K}^{-1}(\underline{\hat{v}}, \underline{\hat{E}})\underline{F} \quad (70a)$$

Note-se que a relação (70) também poderia ser obtida utilizando-se os métodos variacionais de uma outra maneira ³⁴.

Resolvido o problema elástico associado, as soluções reais poderão ser obtidas pela inversão das soluções transformadas na forma (70a).

4.3 Inversão da solução viscoelástica transformada para o plano real do tempo

Devido às dificuldades, mencionadas no apêndice B, de se aplicar um processo de inversão exata na solução viscoelástica transformada, deve-se utilizar um processo numérico de inversão aproximada para a obtenção da solução real função da variável tempo.

Dois processos numéricos de inversão aproximada, *colocação* ³¹ e *multidata* ⁶, são descritos no apêndice B.

Cost ⁶ realizou um estudo, descrito no item B.4.1, aplicando os dois processos acima citados à transformada da função teste $\lambda(t)$,

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \sum_{i=0}^{75} e^{-\beta_i t}, & t > 0 \end{cases} \quad (71)$$

$$\beta_i = 10^{-2,5 + (i/15)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 75$$

Note-se que a função transformada inversa considerada, $\lambda(t)$, assume o valor zero no limite quando a variável tempo t tende ao infinito. Baseado neste estudo, onde variou exaustivamente os parâmetros envolvidos nos dois processos, Cost aponta vantagens em se utilizar o processo *multidata* em relação ao processo da *colocação*, principalmente quando há erros na função a ser invertida. Aceitando esta conclusão, neste trabalho utilizar-

se-ã o processo *multidata*, pelo menos em suas bases mais gerais, ou seja, a aplicação do método dos mínimos quadrados no ajuste de curvas diretamente no plano transformado.

Para a sua aplicação, em casos semelhantes ao da função teste (71), o processo *multidata*, descrito no apêndice B, é a seguir resumido e colocado sob forma matricial visando facilitar a sua programação para cálculos em computador.

Na dedução do processo *multidata* chegou-se ao sistema (b.14):

$$\sum_{i=1}^{II} p_i \tilde{f}(p_i) \left(1 + \frac{\alpha_k}{p_i}\right)^{-1} = \sum_{i=1}^{II} \sum_{j=1}^{JJ} S_j \left(1 + \frac{\alpha_j}{p_i}\right)^{-1} \left(1 + \frac{\alpha_k}{p_i}\right)^{-1}$$

$$k = 1, 2, \dots, JJ \quad (72)$$

Este sistema de JJ equações lineares permite a determinação das constantes S_j , portanto, a determinação da transformada inversa aproximada procurada através de (b.9),

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^{JJ} S_j e^{-\alpha_j t} \quad (73)$$

O número de termos da série aproximação (73) deve ser fixado, segundo as conclusões de Cost (item B.4.7), de forma que se tenha um termo exponencial por *década* de $\log p$, no intervalo onde a função varia.

As considerações feitas para a *centragem* dos termos exponenciais resultaram no cálculo dos valores α_j em função da variável tempo t através da relação (b.20). Como as duas funções, inversa e transformada correspondente, variam no mesmo intervalo (veja, por exemplo, o gráfico b.1a), há uma correspondência entre t e a variável transformada p , de forma que a relação (b.20) pode ser expressa por:

$$\log \alpha_j = -\log p_j - 0,5 \quad (74)$$

onde $\log p_j$ é o *centro* da curva exponencial associada à constante correspondente α_j .

Estas condições para a determinação de JJ e α_j devem levar a bons resultados. Além disso, o valor de II, número de valores dados da função a ser invertida, deve ser igual a JJ, quan

do não há erros nos valores das funções transformadas. Porém, o valor de II deve ser aumentado conforme aumente a porcentagem de erros nos valores dados. Estes critérios, estabelecidos experimentalmente, são apresentados no apêndice B onde pode-se observar também os resultados obtidos quando se variam os valores de II e JJ .

O sistema de equações lineares (72) pode ser colocado sob a forma matricial:

$$\begin{bmatrix}
 (1 + \alpha_1/P_1)^{-1} & (1 + \alpha_1/P_2)^{-1} & (1 + \alpha_1/P_3)^{-1} & \dots & \dots & (1 + \alpha_1/P_{II})^{-1} \\
 (1 + \alpha_2/P_1)^{-1} & (1 + \alpha_2/P_2)^{-1} & (1 + \alpha_2/P_3)^{-1} & \dots & \dots & (1 + \alpha_2/P_{II})^{-1} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 (1 + \alpha_{JJ}/P_1)^{-1} & (1 + \alpha_{JJ}/P_2)^{-1} & (1 + \alpha_{JJ}/P_3)^{-1} & \dots & \dots & (1 + \alpha_{JJ}/P_{II})^{-1}
 \end{bmatrix}$$

\underline{B}^T (JJ x II)

$$\begin{bmatrix}
 P_1 \tilde{f}_1 \\
 P_2 \tilde{f}_2 \\
 P_3 \tilde{f}_3 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 P_{II} \tilde{f}_{II}
 \end{bmatrix}$$

(75)

\tilde{f}' (II x I)

$$\begin{bmatrix}
 (1 + \alpha_1/P_1)^{-1} & (1 + \alpha_1/P_2)^{-1} & (1 + \alpha_1/P_3)^{-1} & \dots & \dots & (1 + \alpha_1/P_{II})^{-1} \\
 (1 + \alpha_2/P_1)^{-1} & (1 + \alpha_2/P_2)^{-1} & (1 + \alpha_2/P_3)^{-1} & \dots & \dots & (1 + \alpha_2/P_{II})^{-1} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 (1 + \alpha_{JJ}/P_1)^{-1} & (1 + \alpha_{JJ}/P_2)^{-1} & (1 + \alpha_{JJ}/P_3)^{-1} & \dots & \dots & (1 + \alpha_{JJ}/P_{II})^{-1}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 S_1 \\
 S_2 \\
 \vdots \\
 S_{JJ}
 \end{bmatrix}$$

\underline{B}^T (JJ x II)

\underline{B} (II x JJ)

Com a notação indicada em (75), tem-se:

$$\underline{B}^T \underline{\hat{f}}' = \underline{B}^T \underline{B} \underline{S} \quad (76)$$

Portanto, formalmente,

$$\underline{S} = (\underline{B}^T \underline{B})^{-1} \underline{B}^T \underline{\hat{f}}' \quad (77)$$

Assim, com os valores de S_j determinados, a aproximação $f^*(t)$ da função inversa procurada é fornecida pela relação (73).

Este processo, da forma como foi descrito, foi aplicado à função teste (71), sem erros adicionais, repetindo o procedimento de Cost. Considerou-se o caso 3 citado no item B.4.5, relações (b.21), ou seja tomou-se 6 termos na série exponencial (73), isto é, $JJ = 6$, e 6 valores de $p\hat{\lambda}(p)$, isto é, $II = 6$. A inversão da matriz $\underline{B}^T \underline{B}$ foi feita considerando-se apenas precisão dupla (apêndice C) em computador B6700, não havendo necessidade de pivoteamento, pelo menos nos exemplos considerados. Desta forma, chegou-se a um erro quadrático médio, definido por (b.19), igual a 0,04, menor que o conseguido por Cost, em torno de 0,3 (veja fig.b.5, curva $k = 0$). Confirma-se assim, a eficiência do processo *multidata* proposto por Cost, quando aplicado a funções do tipo da função teste (71). Porém, em viscoelasticidade linear se encontra mais frequentemente funções do tipo de (71) com um termo constante adicional, por exemplo uma função do tipo mostrado na fig.2. Neste caso, a função teste (71) assumiria a forma:

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \sum_{i=0}^{75} e^{-\beta_i t} + C, & \text{para } t > 0 \end{cases} \quad (78)$$

onde, $\beta_i = 10^{-2,5 + (i/15)}$ $i = 0, 1, 2, \dots, 75$
 $C = \text{constante}$

Note-se que, desta forma, $\lambda(t)$ assume o valor constante C no limite, quando a variável tempo t tende ao infinito.

Para estes casos, constata-se que a utilização do processo *multidata*, adotando-se a série aproximação (73), não leva a bons resultados. Isto se deve ao fato de que quando $t \rightarrow \infty$, considerando-se a série (73), $f^*(t) \rightarrow 0$ e, portanto, não pode reproduzir a condição $\lambda(t) = C$ para $t \rightarrow \infty$.

Uma melhor aproximação para estes casos seria uma série composta de (73) com um termo constante adicional:

$$f^*(t) = S_0 + \sum_{j=1}^{JJ} S_j e^{-\alpha_j t} \quad (79)$$

Assim sendo, repetindo-se os passos indicados no apêndice B, na aplicação do processo *multidata*, obtêm-se a transformada de Laplace da relação (79), $\hat{f}(p)$, utilizando-se a tabela (a.1) do apêndice A, que pode ser colocada na forma:

$$p\hat{f}(p) = S_0 + \sum_{j=1}^{JJ} S_j \left(1 + \frac{\alpha_j}{p}\right)^{-1} \quad (80)$$

Sendo II o número de valores de $p\hat{f}(p)$, calculados com certos critérios fixados por experiência, de acordo com (b.11) o erro quadrático total é:

$$E^2 = \sum_{i=1}^{II} [p_i \hat{f}(p_i) - p_i \hat{f}^*(p_i)]^2 \quad (81)$$

Substituindo (80) em (81), obtêm-se:

$$E^2 = \sum_{i=1}^{II} \left[p_i \hat{f}(p_i) - S_0 - \sum_{j=1}^{JJ} S_j \left(1 + \frac{\alpha_j}{p_i}\right)^{-1} \right]^2 \quad (82)$$

Minimizando E^2 em relação a S_k ($k = 0, 1, 2, \dots, JJ$), resulta:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial S_k} = -2 \sum_{i=1}^{II} \left\{ \left[p_i \hat{f}(p_i) - S_0 - \sum_{j=1}^{JJ} S_j \left(1 + \frac{\alpha_j}{p_i}\right)^{-1} \right] \left(1 + \frac{\alpha_k}{p_i}\right)^{-1} \right\} = 0 \quad (83)$$

onde $\alpha_0 = 0$, por definição. Assim,

$$\sum_{i=1}^{II} \left[p_i \hat{f}(p_i) \left(1 + \frac{\alpha_k}{p_i}\right)^{-1} \right] = \sum_{i=1}^{II} \left\{ \left[S_0 + \sum_{j=1}^{JJ} S_j \left(1 + \frac{\alpha_j}{p_i}\right)^{-1} \right] \left(1 + \frac{\alpha_k}{p_i}\right)^{-1} \right\} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, JJ) \quad (84)$$

Sob forma matricial o sistema de equações lineares (84) se escreve:

$$\underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{f}}' = \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{B}} \underline{\underline{S}} \quad (85)$$

onde

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & (1 + \alpha_1/p_1)^{-1} & (1 + \alpha_2/p_1)^{-1} & \dots & (1 + \alpha_{JJ}/p_1)^{-1} \\ 1 & (1 + \alpha_1/p_2)^{-1} & (1 + \alpha_2/p_2)^{-1} & \dots & (1 + \alpha_{JJ}/p_2)^{-1} \\ 1 & (1 + \alpha_1/p_3)^{-1} & (1 + \alpha_2/p_3)^{-1} & \dots & (1 + \alpha_{JJ}/p_3)^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (1 + \alpha_1/p_{II})^{-1} & (1 + \alpha_2/p_{II})^{-1} & \dots & (1 + \alpha_{JJ}/p_{II})^{-1} \end{bmatrix} \quad (86)$$

$$\underline{\underline{f}}' = \begin{bmatrix} p_1 \hat{f}_1 \\ p_2 \hat{f}_2 \\ p_3 \hat{f}_3 \\ \vdots \\ p_{II} \hat{f}_{II} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_{JJ} \end{bmatrix} \quad (87)$$

Assim, os valores de S_j ($j = 0, 1, \dots, JJ$) podem ser determinados através de:

$$\underline{\underline{S}} = (\underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{B}})^{-1} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{f}}' \quad (88)$$

Adey e Brebbia¹, na aplicação do processo de inversão aproximada para a obtenção das respostas viscoelásticas reais, sugerem a utilização de uma série exponencial, aproximação da função inversa procurada, sob outra forma. Segundo os autores, se a equação proposta por McHenry¹⁷,

$$\gamma(t) = S_0 + \sum_{j=1}^{JJ} S_j (1 - e^{-t/\gamma_j}) \quad (89)$$

representa bem o m3dulo de relaxa33o do material viscoel33stico, 3 raz33vel supor que uma s3rie do mesmo tipo igualmente representa as respostas viscoel33sticas, ou seja, tens33es, deforma33es e deslocamentos.

Desta forma, a s3rie aproxima33o da transformada inversa 3 suposta ter a forma:

$$f^*(t) = S_0 + \sum_{j=1}^{JJ} S_j (1 - e^{-t/\gamma_j}) \quad (90)$$

Assim sendo, na aplica33o do processo *multidata*, transforma-se (90) para o plano de Laplace, utilizando-se a tabela (a.1) do ap3ndice A:

$$\tilde{f}^*(p) = \frac{S_0}{p} + \sum_{j=1}^{JJ} S_j \frac{1}{\gamma_j} \frac{1}{p(p + \frac{1}{\gamma_j})} \quad (91)$$

ou, mais convenientemente,

$$p\tilde{f}^*(p) = S_0 + \sum_{j=1}^{JJ} \frac{S_j}{1 + p\gamma_j} \quad (92)$$

Sendo II o n3mero de valores de $p\tilde{f}(p)$, arbitrariamente considerados, de acordo com (b.11) o *erro quadr3tico total* 3:

$$E^2 = \sum_{i=1}^{II} [p_i \tilde{f}(p_i) - p_i \tilde{f}^*(p_i)]^2 \quad (93)$$

Substituindo (92) em (93) obt3m-se:

$$E^2 = \sum_{i=1}^{II} [p_i \tilde{f}(p_i) - S_0 - \sum_{j=1}^{JJ} S_j (1 + p_i \gamma_j)^{-1}]^2 \quad (94)$$

Minimizando E^2 em rela33o a S_k ($k = 0, 1, 2, \dots, JJ$),

resulta:

$$\frac{\partial E^2}{\partial S_k} = -2 \sum_{i=1}^{II} \{ [p_i \tilde{f}(p_i) - S_0 - \sum_{j=1}^{JJ} S_j (1 + p_i \gamma_j)^{-1}] [1 + p_i \gamma_k]^{-1} \} = 0 \quad (95)$$

onde $\gamma_0 = 0$, por defini33o. Assim,

$$\sum_{i=1}^{II} [p_i \hat{f}(p_i)] [1+p_i \gamma_k]^{-1} = \sum_{i=1}^{II} [S_0 + \sum_{j=1}^{JJ} S_j (1+p_i \gamma_j)^{-1}] [(1+p_i \gamma_k)]^{-1} \quad (96)$$

ou seja, matricialmente:

$$\underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{\hat{f}'}} = \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{S}} \quad (97)$$

onde:

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & (1+p_1 \gamma_1)^{-1} & (1+p_1 \gamma_2)^{-1} & \dots & (1+p_1 \gamma_{JJ})^{-1} \\ 1 & (1+p_2 \gamma_1)^{-1} & (1+p_2 \gamma_2)^{-1} & \dots & (1+p_2 \gamma_{JJ})^{-1} \\ 1 & (1+p_3 \gamma_1)^{-1} & (1+p_3 \gamma_2)^{-1} & \dots & (1+p_3 \gamma_{JJ})^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (1+p_{II} \gamma_1)^{-1} & (1+p_{II} \gamma_2)^{-1} & \dots & (1+p_{II} \gamma_{JJ})^{-1} \end{bmatrix} \quad (98)$$

$$\underline{\underline{\hat{f}'}} = \begin{bmatrix} p_1 \hat{f}_1 \\ p_2 \hat{f}_2 \\ p_3 \hat{f}_3 \\ \vdots \\ p_{II} \hat{f}_{II} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_{JJ} \end{bmatrix} \quad (99)$$

Assim, os valores de S_j ($j = 0, 1, \dots, JJ$) podem ser determinados através de:

$$\underline{\underline{S}} = (\underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{B}})^{-1} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{\hat{f}'}} \quad (100)$$

obtendo-se, portanto, a solução aproximada por meio de (90).

Deve-se notar que a utilização do processo *multidimensional* tomando-se uma das duas séries aproximações (79) ou (90), ou

seja,

$$f^*(t) = S_0 + \sum_{j=1}^{JJ} S_j e^{-\alpha_j t} \quad (79)$$

$$f^{*'}(t) = S_0' + \sum_{j=1}^{JJ} S_j' (1 - e^{-t/\gamma_j}), \quad (90')$$

levam a resultados idênticos, pois considerando-se:

$$\begin{aligned} \gamma_j &= 1/\alpha_j \\ S_0' + \sum_{j=1}^{JJ} S_j' &= S_0 \end{aligned} \quad (101)$$

$$S_j' = - S_j$$

observa-se que (90') se torna igual a (79).

Assim sendo, nos exemplos de aplicação mostrados a seguir, considera-se apenas a série aproximação (90), para que a notação utilizada neste trabalho fique coerente com a da referência 1, ou seja, o processo *multidata* é associado a:

- função transformada inversa:

$$f^*(t) = S_0 + \sum_{j=1}^{JJ} S_j (1 - e^{-t/\gamma_j}) \quad (90)$$

- função transformada:

$$pf^*(p) = S_0 + \sum_{j=1}^{JJ} \frac{S_j}{1+p\gamma_j} \quad (92)$$

Note-se que o processo *multidata*, da maneira como foi apresentado no apêndice B, embora possua bases teóricas claras, ou seja, o método dos mínimos quadrados, teve a sua estabilidade numérica garantida através de parâmetros especificados experimentalmente. Desta forma, como há interesse em se aplicar este processo a funções diferentes da função teste de Cost (71), no sentido de que a função transformada inversa não converge para zero quando a variável tempo t tende ao infinito, a imposição dos valores dos argumentos da função exponencial, γ_j , deverá novamente ser pesquisada.

Assim, duas tentativas serão feitas no item 5.1:

- considerando-se a sugestão de Cost, (74):

$$\log \frac{1}{\gamma_j} = -0,5 - \log p_j \quad (102)$$

- considerando-se a sugestão de Brebbia:

$$\frac{1}{\gamma_j} = p_j \quad (103)$$

Observe-se que, como já se fez referência no Apêndice B, uma outra maneira de se calcular valores de γ_j poderá ser aceita desde que os resultados finais obtidos sejam confiáveis.

5 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

5.1 Função típica em viscoelasticidade linear

Pretende-se neste item estudar a influência da condição $f^*(t) = C$ para $t \rightarrow \infty$, não considerada por Cost na referência 6; também, pretende-se estabelecer uma maneira em que o processo *multidata*, associado às relações (90) e (92), forneça resultados aceitáveis.

Desta forma, aplica-se o processo à função construída a partir da função teste (71):

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1000}{76} \sum_{i=0}^{75} e^{-\beta_i t} + 500, & t > 0 \end{cases} \quad (104)$$

onde, $\beta_i = 10^{-1,5 + (i/25)}$; $i = 0, 1, 2, \dots, 75$

A função assim construída tem as seguintes características:

$$f(0) = 1500$$

$$f(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} = 500$$

e, portanto, se presta às finalidades estabelecidas.

A transformada de Laplace de (104), multiplicada por p , pode ser determinada de forma exata, ou seja,

$$p\hat{f}(p) = \frac{1000}{76} \sum_{i=0}^{75} \left(1 + \frac{\beta_i}{p}\right)^{-1} + 500 \quad (105)$$

Assim, seguindo os mesmos passos indicados por Cost (veja apêndice B), utilizando a expressão (105), pode-se obter a curva $[p\hat{f}(p), \log p]$ mostrada na fig.13a.

Observa-se que, na curva do gráfico 13a, o intervalo onde a função $p\hat{f}(p)$ varia pode ser considerado como sendo $-2,5 < \log p < +2,5$. Porém, tomou-se valores de p_j distribuídos em intervalos desde $-2,5 < \log p_j < +2,5$ até $-1,0 < \log p_j < 1,0$, conforme se indica na figura 13b, com o objetivo de se estudar estas variações. Assim, montou-se 12 tentativas de inversão referidas através de uma notação que é a seguir descrita.

As tentativas feitas para inversão foram construídas baseadas nas *locações* de (1) a (12), mostradas na fig.13b. Cada uma dessas *locações*, determinando valores de $\log p$ através das setas indicadas, serve para a especificação dos parâmetros envolvidos no processo *multidata*, ou seja:

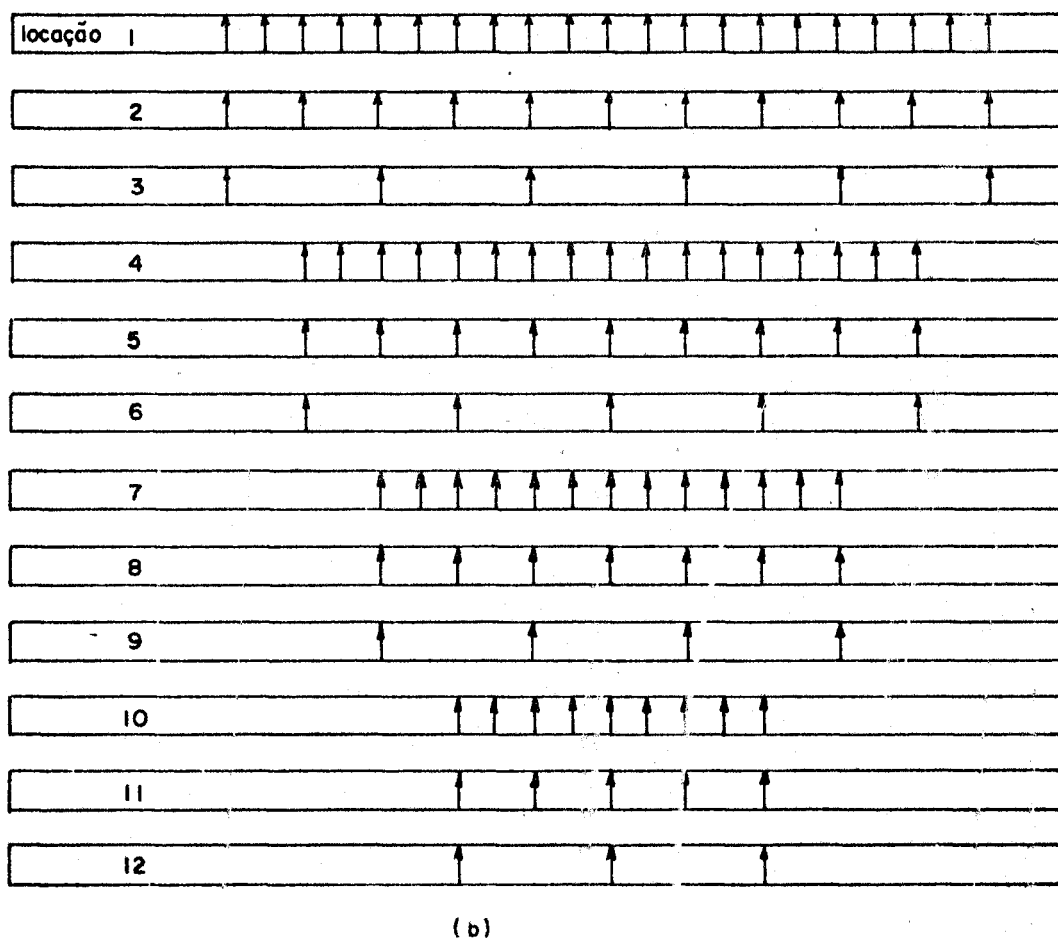
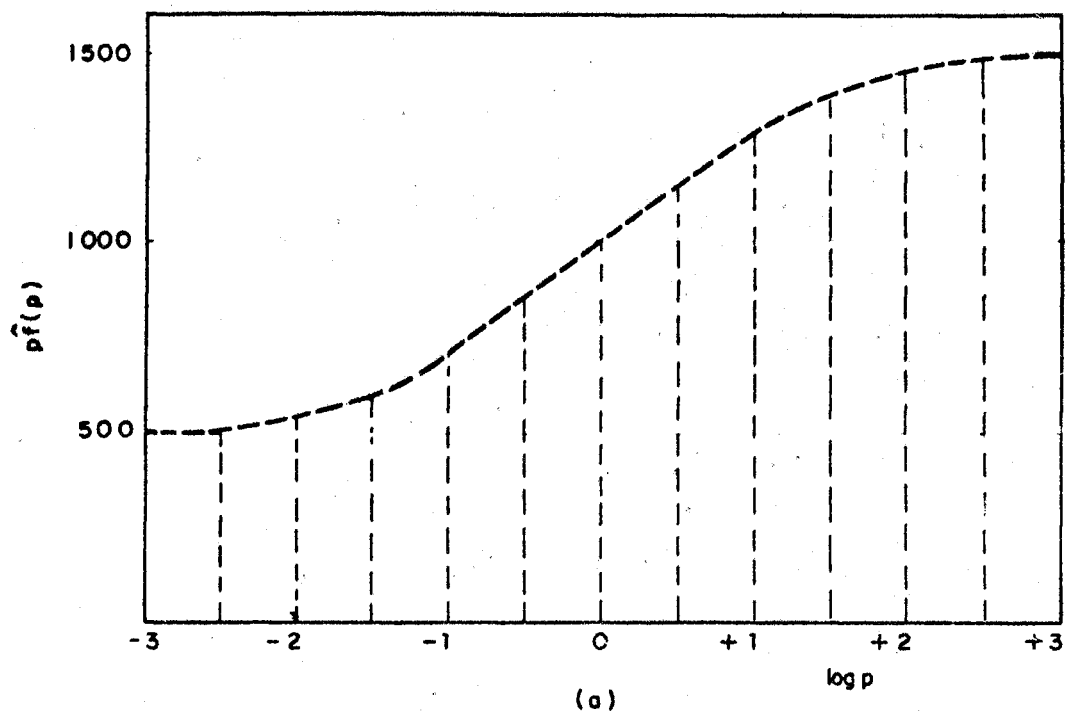
II valores $p_i \hat{f}(p_i)$,

JJ valores γ_j , correspondentes aos JJ termos exponenciais da série, calculados através de (102) ou (103).

Por exemplo, suponha-se o seguinte conjunto de dados:

6 valores $p_i \hat{f}(p_i)$, II = 6, onde os valores de p_i sejam determinados através da *locação* (3), ou seja, $\log p_i$ iguais a $\{-2,5; -1,5; -0,5; +0,5; +1,5; +2,5\}$

5 valores γ_j , JJ = 5, calculados através de uma das relações (102) ou (103), sendo os valores de p_j determinados através da *locação* (11), ou seja, $\log p_j$ iguais a $\{-1,0; -0,5; 0,0; +0,5; +1,0\}$



(a) curva da solução transformada $[\hat{p}f(p), \log p]$

(b) *locações* que determinam os valores de p_j para os cálculos de $p_j \hat{p}f(p_j)$ e γ_j ($j = 1, 2, \dots, J$).

Figura 13

Uma inversão através do processo *multidata*, onde os dados necessários são completamente especificados pelo conjunto acima descrito, será denominada de tentativa (3-11). Isto porque o conjunto de dados que compõe esta tentativa pode ser determinado pelas *locações* (3) e (11), indicadas no gráfico 13b. Esta notação será utilizada neste e noutros exemplos seguintes.

Considerou-se, na obtenção das inversões, o processo *multidata* no seu caso *restrito*, ou seja, tomou-se o número de termos da série incluindo S_0 , $JJ+1$, igual ao número de valores dados de $p_j \hat{f}(p_j)$, II. Desta forma, um valor de p , adicional aos valores dados nas *locações* da fig.13.b, deve ser fornecido para o cálculo de um valor adicional de $p \hat{f}(p)$. Este valor de p , nos casos *restritos* considerados, será designado por p_0 e estará associado ao valor da função transformada $p_0 \hat{f}(p_0)$.

Os valores de p_j ($j = 1, 2, \dots, JJ$) foram adotados de acordo com o critério sugerido por Cost (Apêndice B), ou seja, distribuídos homogeneamente no intervalo onde a função transformada varia. Foram adotados vários valores de p_0 (10^{-3} , 10^{-4} , 10^{-12} , 10^3 , 10^4 , 10^{12} , $10^{0.3}$), visando determinar as suas influências nos resultados da inversão.

Os valores de γ_j foram calculados através de (102) e (103), com o objetivo de, conforme se apontou no final do item 4.3, escolher uma maneira de impor os valores de γ_j de forma a se obter resultados aceitáveis.

Na tabela 1 estão relacionados os resultados obtidos, na consideração da inversão da função transformada (105), avaliados através do erro quadrático médio \underline{e} , definido no item B.4.4 do apêndice B. Além disso, para se ter uma idéia do que estes resultados fornecidos em termos do erro \underline{e} significam, apresenta-se na tabela 2, para o caso I, os valores das soluções aproximadas $f^*(t)$ obtidos através da tentativa de inversão (6-6), e os correspondentes erros relativos às soluções exatas $f(t)$.

Notação para a Tabela 1:

Caso (I) : $1/\gamma_j = p_j$ (103)

Caso (II) : $\log 1/\gamma_j = -0,5 - \log p_j$ (102)

| Tentativa | (I) $p_0=10^{+3}$ | (I) $p_0=10^{+4}$ | (I) $p_0=10^{+12}$ | (I) $p_0=10^{-3}$ | (I) $p_0=10^{-4}$ | (I) $p_0=10^{-12}$ | (I) $p_0=10^{+0.3}$ | (II) $p_0=10^{+12}$ |
|-----------|----------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|------------------------|------------------------|
| (1-1) | .705E-05 | .749E-05 | .755E-05 | .705E-05 | .749E-05 | .754E-05 | .364E-05 | .462E+07 |
| (2-2) | .119E+00 | .125E+00 | .126E+00 | .119E+00 | .125E+00 | .126E+00 | .203E+00 | .419E+07 |
| (3-3) | .299E+03 | .305E+03 | .306E+03 | .218E+03 | .223E+03 | .224E+03 | .100E+03 | .100E+06 |
| (4-4) | .219E-04 | .231E-04 | .232E-04 | .219E-04 | .231E-04 | .232E-04 | .449E-04 | .264E+09 |
| (5-5) | .169E+00 | .177E+00 | .178E+00 | .169E+00 | .177E+00 | .178E+00 | .549E+00 | .258E+08 |
| (6-6) | .137E+02 | .143E+02 | .144E+02 | .137E+02 | .143E+02 | .144E+02 | .123E+02 | .860E+06 |
| (7-7) | .549E-03 | .576E-03 | .580E-03 | .549E-03 | .576E-03 | .580E-03 | .257E-02 | .156E+14 |
| (8-8) | .519E+00 | .548E+00 | .551E+00 | .519E+00 | .548E+00 | .551E+00 | .235E+01 | .221E+09 |
| (9-9) | .737E+03 | .752E+03 | .754E+03 | .511E+03 | .522E+03 | .523E+03 | .267E+03 | .310E+06 |
| (10-10) | .885E+01 | .939E+01 | .945E+01 | .885E+01 | .939E+01 | .945E+01 | .632E+02 | .348E+12 |
| (11-11) | .529E+02 | .562E+02 | .566E+02 | .529E+02 | .562E+02 | .566E+02 | .246E+03 | .131E+09 |
| (12-12) | .577E+02 | .625E+02 | .631E+02 | .577E+02 | .625E+02 | .631E+02 | .749E+02 | .221E+07 |

Tabela 1: Erros quadráticos médios (\bar{e}) obtidos na inversão da função teste (105), através do processo *multidata*, caso *restrito* (Notação para (I) e (II): veja pag. anterior).

| tempo t | Solução exata $f(t)$ | Tentativa (6-6) $f^*(t)$ $e = 14.4$ | $\left \frac{f(t) - f^*(t)}{f(t)} \right \cdot 100$ |
|-----------------------|-------------------------|---|---|
| $.100 \times 10^{-2}$ | 1495.31 | 1494.91 | 0.02 % |
| $.316 \times 10^{-2}$ | 1485.44 | 1484.51 | 0.06 |
| $.100 \times 10^{-1}$ | 1456.39 | 1455.69 | 0.04 |
| $.316 \times 10^{-1}$ | 1382.14 | 1386.22 | 0.29 |
| $.100 \times 10^0$ | 1245.66 | 1246.24 | 0.04 |
| $.316 \times 10^0$ | 1083.37 | 1077.53 | 0.53 |
| $.100 \times 10^{+1}$ | 921.82 | 926.46 | 0.50 |
| $.316 \times 10^{+1}$ | 766.38 | 764.16 | 0.28 |
| $.100 \times 10^{+2}$ | 628.67 | 633.06 | 0.69 |
| $.316 \times 10^{+2}$ | 533.80 | 525.26 | 1.59 |
| $.100 \times 10^{+3}$ | 501.81 | 505.87 | 0.80 |
| $.316 \times 10^{+3}$ | 500.00 | 500.67 | 0.13 |
| $.100 \times 10^{+4}$ | 500.00 | 500.00 | 0.00 |

Tabela 2: Valores da função aproximada $f^*(t)$ obtidos na tentativa de inversão (6-6), caso I, $p_0 = 10^{+12}$ - erros relativos

Por análise da tabela 1, pode-se concluir que o caso I (103) forneceu melhores resultados do que o caso II (102) e, portanto, será o caso utilizado daqui por diante.

Para o caso I, pode-se afirmar com base nos erros quadráticos médios fornecidos na tabela 1 e nos valores das funções aproximadas $f^*(t)$ juntamente com os erros relativos relacionados na tabela 2, que todas as tentativas forneceram bons resultados, a menos das tentativas (3-3), (9-9) e (12-12) por considerarem poucos valores p_j , no intervalo onde a função $\widehat{p f(p)}$ varia, para a determinação de $p_j \widehat{f(p_j)}$ e γ_j . Também a tentativa (11-11) não forneceu bons resultados e deve-se notar que, embora tenha considerado 5 valores p_j , da mesma forma que a tentativa (6-6), estes valores não foram tomados homogeneamente distribuídos no in-

tervalo onde a função varia, ocasionando um valor relativamente alto de \underline{e} . Note-se que a conclusão de Cost (veja o item B.4.7 do apêndice B), de que é melhor considerar um termo por *década* de $\log p$, já não é mais válida, pois, encontrou-se melhores resultados considerando valores de p_j distanciados de 0,5 na escala $\log p$, no intervalo onde a função transformada varia.

Além disso, observando a tabela 1, pode-se concluir também que todos os valores de p_0 considerados para o cálculo de $p_0 \hat{f}(p_0)$ praticamente levaram aos mesmos resultados.

5.2 Teste de relaxação

Aplica-se o método exposto a um exemplo resolvido por Zienckiewicz, Watson e King ² através do método *passo a passo*. Trata-se de um teste de relaxação onde a estrutura apresentada na fig.14a, constituída de um material viscoelástico linear, é submetida a uma deformação provocada por uma variação de temperatura T_0 , mantida constante até o tempo $t = 80$ dias (fig.14b).

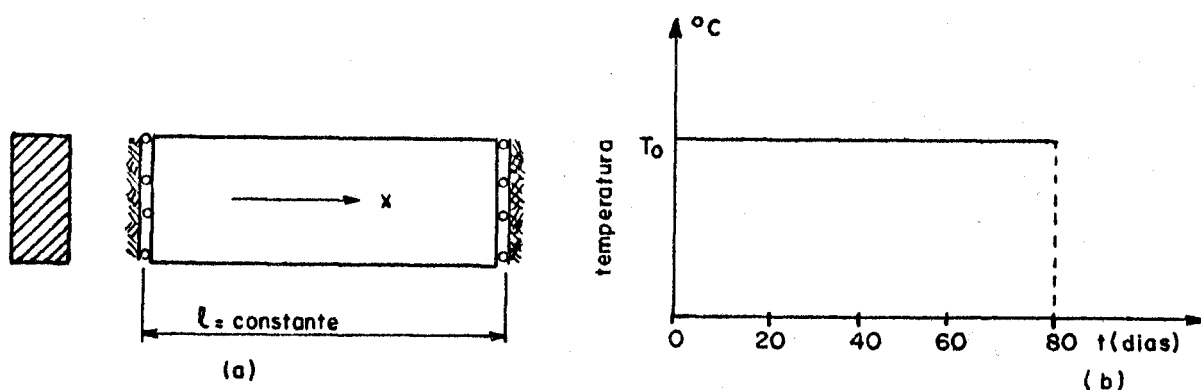


Fig.14: Teste de relaxação

O material da barra foi suposto representado por um modelo constituído por um elemento de Hooke e dois elementos de Kelvin, todos associados em série. Assim sendo, a equação (10) do modelo de Kelvin generalizado se aplica para o caso, tomando-se $r = 3$ e eliminando-se o elemento de Newton. Desta forma, sendo σ a tensão normal na direção do eixo x , mostrado na figura 14a, e sendo ϵ a deformação correspondente, tem-se:

$$\epsilon = \left(\frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1 + \eta_1 D} + \frac{1}{E_2 + \eta_2 D} \right) \sigma \quad (106)$$

Esta relação pode ser expressa na forma:

$$\epsilon = \left(\frac{1}{E_0} + \frac{a_1}{D + b_1} + \frac{a_2}{D + b_2} \right) \sigma \quad (107)$$

onde $1/a_1 = \eta_1$ $1/a_2 = \eta_2$
 $b_1 = E_1/\eta_1$ $b_2 = E_2/\eta_2$

A referência 2 especifica numericamente as constantes da expressão (107):

$$a_1 = 6,0 \cdot 10^{-9} T_0; \quad a_2 = 0,14 \cdot 10^{-9} T_0; \quad E_0 = 5,0 \cdot 10^6 \text{ p.s.i.}$$

$$b_1 = 1,5/\text{dia}; \quad b_2 = 0,035/\text{dia}; \quad T_0 = 40^\circ\text{C}$$

O coeficiente de dilatação térmica linear foi tomado igual a $9,0 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$.

Trata-se de determinar a variação de tensões com o tempo, até o tempo $t = 80$ dias.

5.2.1 Solução analítica exata

Como a variação da temperatura T_0 , imposta no instante zero, é mantida constante no decorrer da análise e estando fixas as extremidades da barra, uma deformação $\epsilon = \alpha T_0$ é imposta no instante zero e mantida constante durante a análise, ocorrendo então o fenômeno da relaxação.

Desta forma, (107) pode ser escrita:

$$\left(\frac{1}{E_0} + \frac{a_1}{D + b_1} + \frac{a_2}{D + b_2} \right) \sigma = \alpha T_0 \Delta(t) \quad (108)$$

onde $\Delta(t)$ é a função degrau unitário, definida no item A.2.6.1.

A transformada de Laplace (veja apêndice A) correspondente à expressão (108), se expressa por:

$$\left(\frac{1}{E_0} + \frac{a_1}{p + b_1} + \frac{a_2}{p + b_2} \right) \bar{\sigma} = \frac{\alpha T_0}{p} \quad (109)$$

ou

$$\bar{\sigma} = \frac{\alpha T_0 E_0 [p^2 + p (b_1 + b_2) + b_1 b_2]}{p \{ p^2 + [b_1 + b_2 + (a_1 + a_2) E_0] p + [b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) E_0] \}} \quad (110)$$

Fazendo-se as substituições numéricas, obtêm-se:

$$\bar{\sigma} = 1800 \left[\frac{p^2 + 1,535 p + 0,0525}{p(p^2 + 2,763 p + 0,1365)} \right] \quad (111)$$

Fatorando o denominador, tem-se:

$$\bar{\sigma} = 1800 \left[\frac{p^2 + d_1 p + d_0}{p (p + b) (p + c)} \right] \quad (112)$$

$$\begin{aligned} \text{onde, } d_1 &= 1,535 & b &= 0,0503192 \\ d_0 &= 0,0525 & c &= 2,7126807 \end{aligned}$$

Utilizando-se a inversão nº 296 da tabela 1, referência 29, obtêm-se a transformada inversa:

$$\sigma(t) = 1800 \left[\frac{a_0}{bc} + \frac{b^2 - a_1 b + a_0}{b (b - c)} e^{-bt} + \frac{c^2 - a_1 c + a_0}{c (c - b)} e^{-ct} \right] \quad (113)$$

A tabela 3 relaciona os valores de $\sigma(t)$ calculados através de (113) para alguns valores de t no intervalo considerado. A curva da fig.15 ilustra esta solução.

| Tempo (dias) | (p.s.i) |
|--------------|---------|
| 0.0 | 1800.00 |
| 1.0 | 1029.75 |
| 2.0 | 965.69 |
| 3.0 | 949.12 |
| 4.0 | 936.31 |
| 6.0 | 912.93 |
| 10.0 | 872.71 |
| 20.0 | 801.38 |
| 30.0 | 758.25 |
| 40.0 | 732.18 |
| 50.0 | 716.41 |
| 60.0 | 706.88 |
| 70.0 | 701.12 |
| 80.0 | 697.63 |

Tabela 3: Solução exata do problema da relaxação.

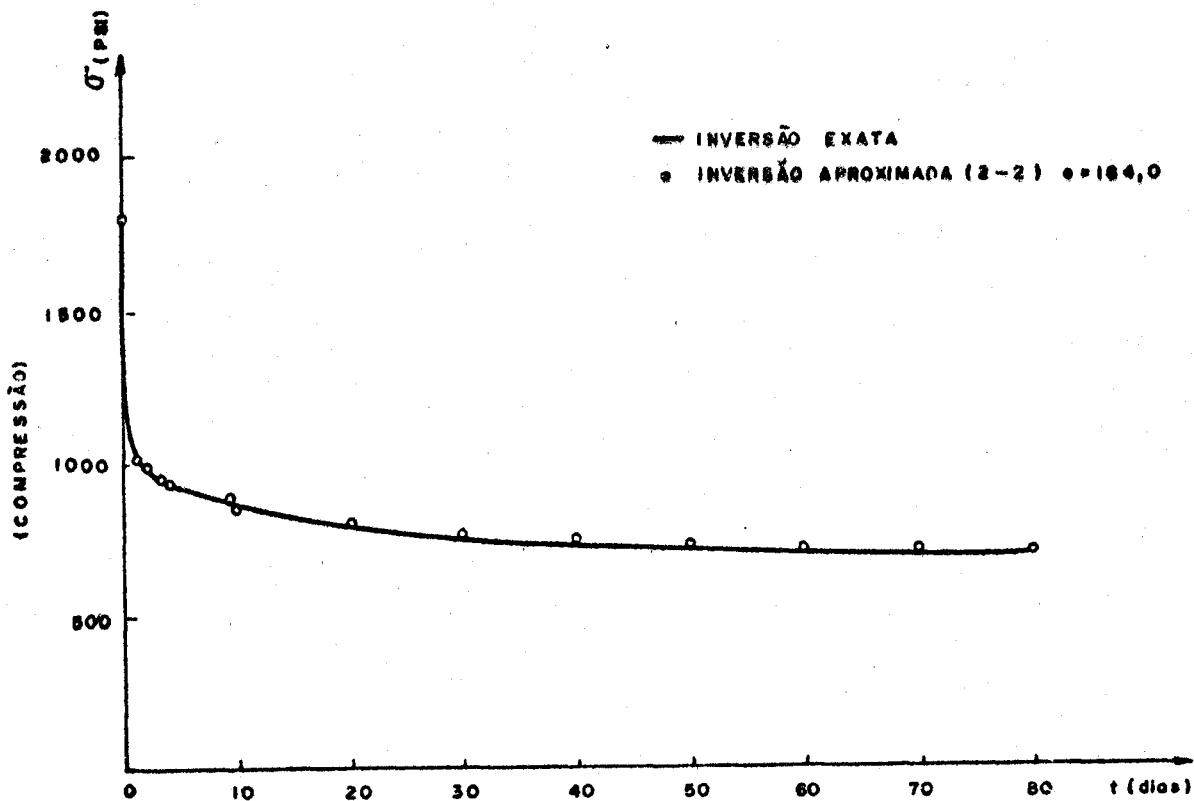


FIGURA 15 — RELAXAÇÃO DA TENSÃO AXIAL DE COMPRESSÃO COM O TEMPO

5.2.2 Solução numérica aproximada

Neste item, calcula-se soluções aproximadas para o teste da relaxação, especificado no item 5.2. Utiliza-se o processo *multidata* na forma que levou a bons resultados quando aplicado à função teste (104) no item 5.1, ou seja, associado às relações:

- função transformada inversa:

$$f^*(t) = S_0 + \sum_{j=1}^{JJ} S_j (1 - e^{-t/\gamma_j}) \quad (90)$$

- função transformada

$$\tilde{p}f(p) = S_0 + \sum_{j=1}^{JJ} \frac{S_j}{1 + p\gamma_j} \quad (92)$$

- Cálculo das constantes γ_j :

$$1/\gamma_j = p_j \quad (103)$$

Os passos a serem seguidos, na aplicação do processo, são os mesmos indicados no item 5.1. Assim, a expressão (109) pode ser, convenientemente, expressa por:

$$p\hat{\sigma}(p) = \alpha T_0 \hat{E}(p) \quad (114)$$

onde,

$$\hat{E}(p) = \frac{1}{\frac{1}{E_0} + \frac{a_1}{p + b_1} + \frac{a_2}{p + b_2}} \quad (115)$$

\hat{E} representa o módulo de elasticidade para o *problema elástico associado*. A expressão (114) representa a solução desejada no plano transformado, podendo ser calculada numericamente para os valores desejados de p , permitindo a montagem da tabela 4 e a construção da curva $[p\hat{\sigma}(p), \log p]$ mostrada na figura 16.

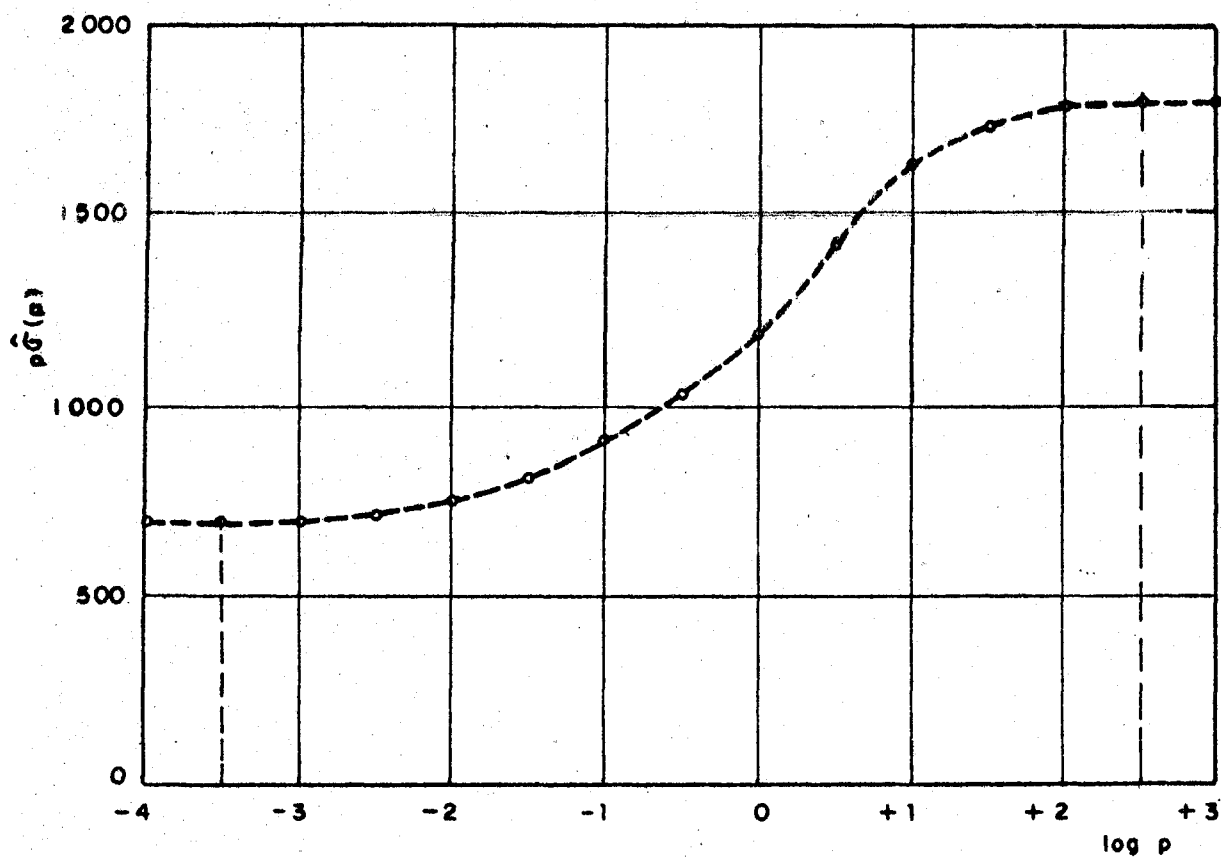
Por análise da curva do gráfico 16a. observa-se que fora do intervalo $-3,5 \leq \log p \leq +2,5$ a função transformada $p\hat{\sigma}(p)$ é constante. Portanto, tomou-se neste intervalo 8 locações de p_j (veja fig. 16b) para a determinação de 8 tentativas de inversão, através do processo *multidata*, caso *restrito*, ou seja, $II = JJ+1$; o valor adicional de p_0 , para o cálculo de $p_0 \hat{f}(p_0)$, foi adotado igual a 10^{+12} em todas as tentativas.

Com a notação referente às tentativas estabelecida no item 5.1, os resultados obtidos, avaliados através do erro quadrático médio e , estão relacionados na tabela 5.

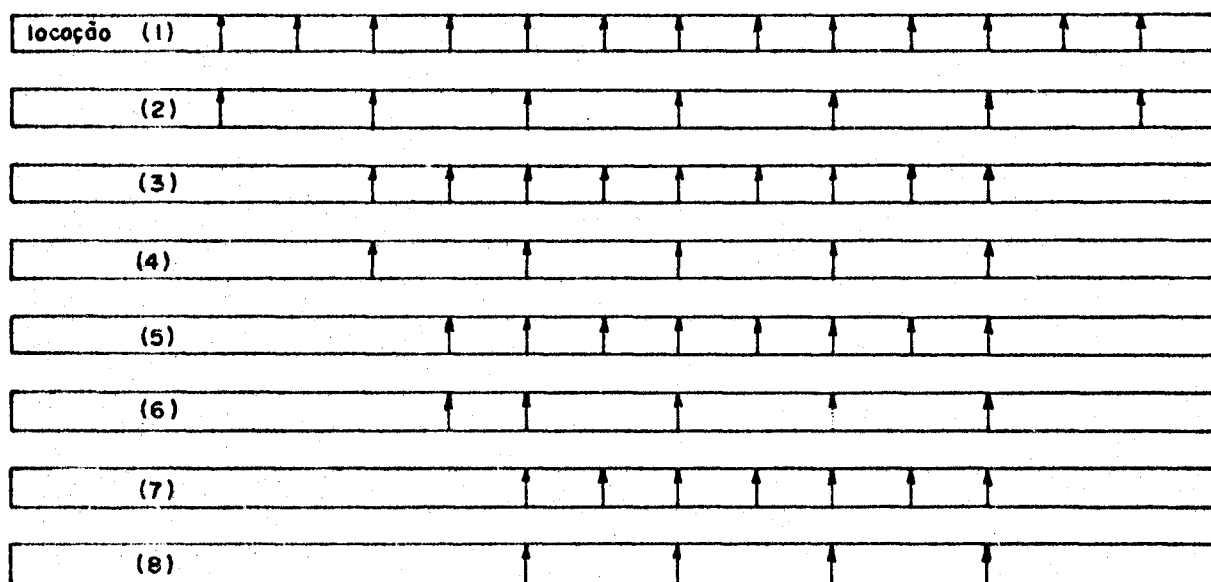
| $\log p$ | $p\hat{\sigma}(p)$ |
|----------|--------------------|
| -4.0 | .69292 E + 03 |
| -3.5 | .69426 E + 03 |
| -3.0 | .69842 E + 03 |
| -2.5 | .71089 E + 03 |
| -2.0 | .74474 E + 03 |
| -1.5 | .81678 E + 03 |
| -1.0 | .91958 E + 03 |
| -0.5 | .10342 E + 04 |
| 0.0 | .11943 E + 04 |
| +0.5 | .14216 E + 04 |
| +1.0 | .16258 E + 04 |
| +1.5 | .17355 E + 04 |
| +2.0 | .17784 E + 04 |
| +2.5 | .17930 E + 04 |
| +3.0 | .17977 E + 04 |

Tabela 4: Valores de $p\hat{\sigma}(p)$ calculados através de (114)

13977



(a)



(b)

(a) Curva da solução transformada $[p\hat{\sigma}(p), \log p]$

(b) Locações que determinam os valores de p_j para os cálculos de $p_j \hat{f}(p_j)$ e γ_j ($j = 1, 2, \dots, JJ$)

Figura 16

| Tentativa | erro \underline{e} |
|-----------|----------------------|
| (1 - 1) | 6,3 |
| (2 - 2) | 164,0 |
| (3 - 3) | 7,5 |
| (4 - 4) | 171,3 |
| (5 - 5) | 7,5 |
| (6 - 6) | 171,2 |
| (7 - 7) | 7,7 |
| (8 - 8) | 171,3 |

Tabela 5: Erros quadráticos médios (\underline{e}) obtidos na inversão das soluções transformadas do problema da relaxação.

Para se ter uma idéia do que estes resultados fornecidos em termos de erro \underline{e} significam, apresenta-se na tabela 6 os valores das soluções aproximadas $\sigma^*(t)$ obtidos através das tentativas de inversão (1 - 1) e (2 - 2), e os correspondentes erros relativos às soluções exatas $f(t)$.

| Tempo t | Solução exata $\sigma(t)$ | Tentativa (1-1) e = 6,3 | | Tentativa (2-2) e = 164,0 | |
|---------|------------------------------|----------------------------|--|------------------------------|--|
| | | $\sigma^*(t)$ | $\left \frac{\sigma(t) - \sigma^*(t)}{\sigma(t)} \right \cdot 100$ | $\sigma^*(t)$ | $\left \frac{\sigma(t) - \sigma^*(t)}{\sigma(t)} \right \cdot 100$ |
| 0. | 1800.00 | 1800.00 | 0.00 | 1800.00 | 0.0 |
| 1. | 1029.75 | 1032.34 | 0.25 | 1049.19 | 1.88 |
| 2. | 965.69 | 963.50 | 0.22 | 980.00 | 1.48 |
| 3. | 949.12 | 945.43 | 0.38 | 948.59 | 0.05 |
| 4. | 936.31 | 934.95 | 0.14 | 925.01 | 1.20 |
| 6. | 912.93 | 916.12 | 0.34 | 891.30 | 2.36 |
| 10. | 872.71 | 875.48 | 0.31 | 851.83 | 2.39 |
| 20. | 801.37 | 797.64 | 0.46 | 801.41 | 0.00 |
| 30. | 758.25 | 756.16 | 0.27 | 769.33 | 1.46 |
| 40. | 732.17 | 733.06 | 0.12 | 746.24 | 1.92 |
| 50. | 716.41 | 719.00 | 0.36 | 729.51 | 1.82 |
| 60. | 706.88 | 709.85 | 0.42 | 717.41 | 1.48 |
| 70. | 701.11 | 703.66 | 0.36 | 708.67 | 1.07 |
| 80. | 697.63 | 699.39 | 0.25 | 702.39 | 0.68 |

Tabela 6: Valores da função aproximada $\sigma^*(t)$, obtidos nas tentativas de inversão (1-1) e (2-2) - erros relativos

Assim, fazendo um julgamento através dos erros quadráticos médios fornecidos na tabela 6 e dos valores das funções aproximadas $\sigma^*(t)$ relacionados na tabela 7, pode-se afirmar que as tentativas (1 - 1), (3 - 3), (5 - 5) e (7 - 7), com erros quadráticos médios próximos entre si, forneceram resultados praticamente exatos, com erro relativo máximo em torno de 0,5%. As demais tentativas com erros quadráticos médios próximos ou menores que o erro quadrático médio obtido na tentativa (2 - 2) também levaram a bons resultados, com erro relativo máximo em torno de 3% (veja tabela 6 e gráfico 15).

5.3. Cilindro viscoelástico com reforço externo

Considera-se neste item um exemplo extraído da referência 33, onde os autores Lee, Radok e Woodward analisam um cilindro viscoelástico reforçado por um revestimento externo elástico e sujeito a uma pressão interna uniforme. O cilindro é tomado suficientemente longo e é impedido de ter movimento axial, de forma a se poder admitir estado plano de deformação. Uma secção transversal típica é mostrada na fig. 17.

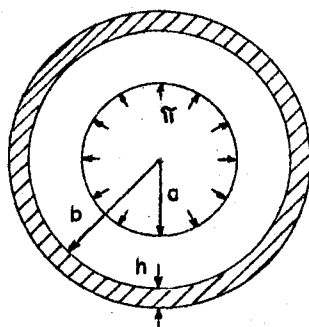


Fig.17: Cilindro viscoelástico com reforço externo, sujeito a pressão interna.

5.3.1 Solução analítica exata

A solução analítica exata, determinada na referência 33, pode ser encontrada diretamente em coordenadas polares cilíndricas (r, θ, z) utilizando-se a solução geral de Lamé¹⁵. Assim, considerando-se o cilindro sem reforço constituído de material elástico, tem-se:

$$\sigma_{rr} = A' - (B'/r^2) \quad (116)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = A' + (B'/r^2) \quad (117)$$

onde A' , B' são constantes.

Para o *problema elástico associado*, as soluções (116) e (117) continuam válidas, apenas que A' e B' serão funções do parâmetro transformado p , conforme as considerações feitas no item 4.2. As funções A' e B' serão determinadas através das condições de contorno impostas nas superfícies internas e externas do cilindro viscoelástico, ou seja, nos pontos $r = a$ e $r = b$.

Desta forma, sendo a pressão interna imposta igual a Π , a condição de contorno (66) se escreve:

$$\hat{\Pi}(p) = -\hat{\sigma}_{rr}, \quad \text{em } r = a \quad (118)$$

A condição de contorno em $r = b$ deve expressar o equilíbrio entre as tensões no reforço e pressão radial no cilindro, e a igualdade da deformação circunferencial do cilindro e do reforço em contacto. O reforço é suposto delgado e, portanto, pode se aplicar a teoria de membrana desprezando-se as influências de flexão. Sendo \hat{F} a força de tração circunferencial transformada no reforço, o equilíbrio radial em $r = b$ exige que:

$$\hat{F}d\theta = -\hat{\sigma}_{rr} b d\theta \quad (119)$$

Utilizando-se a lei de Hooke para a deformação circunferencial $\epsilon_{\theta\theta}$ no caso de estado plano de deformação¹⁵, tem-se:

- para o reforço:

$$\hat{\epsilon}_{\theta\theta}(b, p) = \frac{\hat{F}}{h} \frac{(1 - \nu^2)_R}{E_R} \quad (120)$$

onde h é a espessura do reforço, conforme indica a fig.17, e o índice R denota o material do reforço.

- para o cilindro viscoelástico:

$$\hat{\epsilon}_{\theta\theta}(b, p) = \frac{1}{\hat{E}} \left[\hat{\sigma}_{\theta\theta} (1 - \hat{\nu}^2) - \frac{\hat{\nu}}{(1 - \hat{\nu})} (1 - \hat{\nu}^2) \hat{\sigma}_{rr} \right] \quad (121)$$

Igualando os segundos membros de (120) e (121), e eliminando \hat{F} pela utilização de (119), chega-se à condição de contorno em $r = b$:

$$\hat{\sigma}_{rr} = \hat{\sigma}_{\theta\theta} \frac{\alpha(1 - \hat{v}^2)}{\alpha\hat{v}(1 + \hat{v}) - \hat{E}}, \quad r = b \quad (122)$$

onde

$$\alpha = \frac{E_R h}{(1 - \nu_R^2) b},$$

contêm as propriedades do reforço.

Substituindo as condições de contorno (118) e (122) na solução geral (116) e (117) determina-se A' e B' e, portanto, as soluções procuradas:

$$\hat{\sigma}_{rr} = -\hat{\Pi} \frac{\frac{\alpha(1 - \hat{v}^2)}{\alpha\hat{v}(1 + \hat{v}) - \hat{E}} \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right) - \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right)}{\frac{\alpha(1 - \hat{v}^2)}{\alpha\hat{v}(1 + \hat{v}) - \hat{E}} \left(\frac{b^2}{a^2} + 1 \right) - \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right)} \quad (123)$$

$$\hat{\sigma}_{\theta\theta} = \hat{\Pi} \frac{\frac{\alpha(1 - \hat{v}^2)}{\alpha\hat{v}(1 + \hat{v}) - \hat{E}} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right) - \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right)}{\frac{\alpha(1 - \hat{v}^2)}{\alpha\hat{v}(1 + \hat{v}) - \hat{E}} \left(\frac{b^2}{a^2} + 1 \right) - \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right)} \quad (124)$$

Para que se possa avaliar a distribuição de tensões, a referência 33 supõe que uma pressão interna igual a Π_0 é aplicada instantaneamente em $t = 0$ e mantida constante nos instantes seguintes. Portanto,

$$\Pi(t) = \Pi_0 \Delta(t) \quad (125)$$

onde $\Delta(t)$ é a função degrau unitário (veja item A.2.6).

A transformada de Laplace de (125), utilizando-se a tabela al do apêndice A, se expressa por:

$$\hat{\Pi}(p) = \Pi_0 / p \quad (126)$$

Para a especificação dos operadores viscoelás-

ticos a referência 33 supõe um material que se comporta elasticamente quanto a dilatações e como corpo de Maxwell quanto a distorções. Assim, o material considerado pode ser descrito fazendo-se uso das relações (35) e (4):

$$\sigma_{ii} = 3K\epsilon_{ii} \quad (127)$$

$$\frac{\dot{S}_{ij}}{E} + \frac{S_{ij}}{\eta} = \dot{e}_{ij} \quad (128)$$

onde a notação utilizada para tensões e deformações é a mesma definida nos itens 3.1 e 3.2.

A relação (128) pode ser expressa, fazendo uso de uma notação conveniente, por:

$$S_{ij} = \frac{D}{AD + B} e_{ij} \quad (129)$$

onde, $A = 1/E$, $B = 1/\eta$ e $D = \frac{d}{dt}$.

As transformadas de Laplace das relações tensão-deformação (127) e (128), representativas do material, se expressam por:

$$\hat{\sigma}_{ii} = 3K\hat{\epsilon}_{ii} \quad (130)$$

$$\hat{S}_{ij} = \frac{P}{Ap + B} \hat{e}_{ij} \quad (131)$$

Comparando (130) com (62) e (131) com (63), tem-se:

$$\hat{Q}/\hat{P} = K = C/3 \quad (132)$$

$$\hat{Q}'/\hat{P}' = \frac{P}{2(Ap + B)} \quad (133)$$

onde $C = 3K$.

Assim, utilizando-se (68a) e (68b), obtêm-se:

$$\hat{K} = C/3 \quad (134)$$

$$\hat{G} = \frac{P}{2(Ap + B)} \quad (135)$$

Como, conforme referências já feitas anterior-

mente, a formulação do *problema associado* em termos do módulo de elasticidade \bar{E} e coeficiente de Poisson $\bar{\nu}$ é mais conveniente, utilizando-se as relações (69) chega-se a:

$$\bar{E} = \frac{3 C p}{(2AC + 1) p + 2BC} \quad (136)$$

$$\bar{\nu} = \frac{(AC - 1) p + BC}{(2AC + 1) p + 2BC} \quad (137)$$

Substituindo (126), (136) e (137) em (123) e (124) obtêm-se as tensões transformadas para o problema considerado, ou seja:

$$\bar{\sigma}_{rr} = - \frac{\Pi_0}{p} \left[\begin{array}{l} \left[\left(1 - \frac{b^2}{r^2} - \alpha A \right) (2AC + 1) - 3\alpha A \frac{b^2}{r^2} \right] p^2 \\ + \left[\left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) 2BC - \alpha B \left(3\frac{b^2}{r^2} + 4AC + 1 \right) \right] p - 2\alpha B^2 C \\ \hline \left[\left(1 - \frac{b^2}{a^2} - \alpha A \right) (2AC + 1) - 3\alpha A \frac{b^2}{a^2} \right] p^2 \\ + \left[\left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) 2BC - \alpha B \left(3\frac{b^2}{a^2} + 4AC + 1 \right) \right] p - 2\alpha B^2 C \end{array} \right] \quad (138)$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta} = - \frac{\Pi_0}{p} \left[\begin{array}{l} \left[\left(1 + \frac{b^2}{r^2} - \alpha A \right) (2AC + 1) + 3\alpha A \frac{b^2}{r^2} \right] p^2 \\ + \left[\left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) 2BC - \alpha B \left(-3\frac{b^2}{r^2} + 4AC + 1 \right) \right] p - 2\alpha B^2 C \\ \hline \left[\left(1 - \frac{b^2}{a^2} - \alpha A \right) (2AC + 1) - 3\alpha A \frac{b^2}{a^2} \right] p^2 \\ + \left[\left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) 2BC - \alpha B \left(3\frac{b^2}{a^2} + 4AC + 1 \right) \right] p - 2\alpha B^2 C \end{array} \right] \quad (139)$$

Prosseguindo, a referência 33 adota, para as constantes envolvidas no problema, os valores numéricos:

$$C = 3 K = 3 \cdot 10^5 \text{ p.s.i}$$

$$h/b = 1/33$$

$$A = B = \frac{4}{3} \cdot 10^{-5}$$

$$E_R = 3 \cdot 10^7 \text{ p.s.i.}$$

$$b/a = 2$$

$$\sqrt{R} = 1/\sqrt{11}$$

Desta forma, (138) pode ser escrita em termos de frações parciais:

$$\bar{\sigma}_{rr} = - \frac{\pi_0}{p} \left[\left(.3616 + \frac{.005282}{p+.9849} + \frac{.2233}{p+.3528} \right) + \frac{b^2}{r^2} \left(1.596 - \frac{.001320}{p+.9849} - \frac{.05583}{p+.3528} \right) \right] \quad (140)$$

A inversão de (140), obtida através de tabelas ²⁹ ²⁷, se expressa por:

$$\sigma_{rr} = - \pi_0 \left\{ \left[\frac{.3616 + \frac{.005282}{.9849} (1 - e^{-.9849t})}{.9849} + \frac{.2233}{.3528} (1 - e^{-.3528t}) \right] + \frac{b^2}{r^2} \left[1.596 - \frac{.001320}{.9849} (1 - e^{-.9849t}) - \frac{.05583}{.3528} (1 - e^{-.3528t}) \right] \right\} \quad (141)$$

De forma análoga se obtém a expressão para $\sigma_{\theta\theta}$ em função da variável tempo t .

As figuras 18 e 19, extraídas da referência 33, ilustram estas soluções.

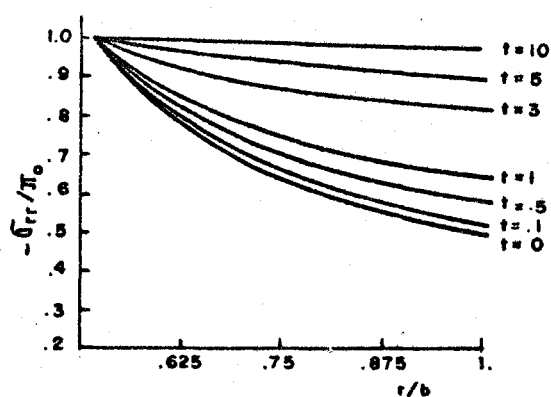


Fig.18 - Variação da tensão radial σ_{rr} . Solução exata.

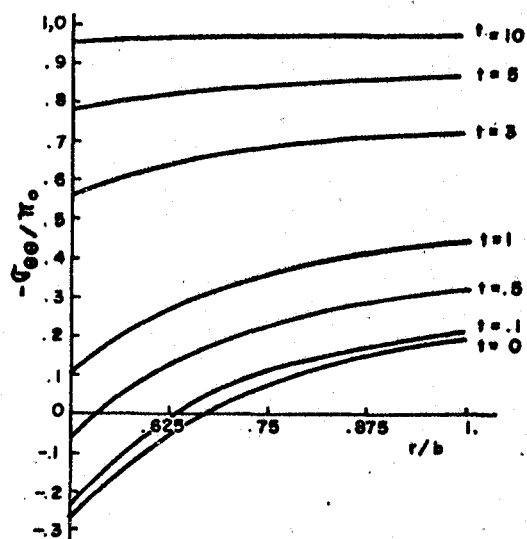


Fig.19 - Variação da tensão circunferencial $\sigma_{\theta\theta}$. Solução exata.

Observe-se que na fig.19, nos instantes iniciais, ocorrem tensões circunferenciais de tração numa região adjacente ao furo interno do cilindro. Isto, segundo a referência 33, poderia ser evitado na prática aplicando-se a pressão interna gradativamente.

5.3.2 Solução numérica aproximada

No item anterior, o problema elástico associado, com a mesma geometria que o problema real proposto (fig.17), teve as soluções transformadas calculadas analiticamente expressas por (138) e (139). Isto tornou possível a obtenção da inversão exata através de tabelas.

Neste item, calcula-se a solução transformada numericamente, como fizeram Adey e Brebbia¹ através do método dos elementos finitos^{18 19 20 21} o que torna obrigatório a aplicação de um processo numérico aproximado de inversão, no caso, o processo *multidata*.

Assim sendo, na aplicação do processo *multidata*, deve-se arbitrar certos valores da variável transformada p e calcular os valores das soluções transformadas correspondentes $p \bar{f}(p)$ de forma a se poder construir a curva $[p \bar{f}(p), \log p]$. Ba-

seado nesta curva, através de critérios estabelecidos anteriormente, escolhe-se II valores p_i que definirão os valores $p_i \hat{f}(p_i)$ e JJ valores p_j que definirão os valores γ_j . Estes dados, assim obtidos, permitem a aplicação do processo *multidata*.

Porém, os cálculos das soluções $p_i \hat{f}(p_i)$, obtidas através do método dos elementos finitos, são operações bastante dispendiosas no que se refere ao tempo de computação. Assim, uma tentativa é feita no sentido de eliminar a construção da curva $[p \hat{f}(p), \log p]$, substituindo-a pelas curvas $[\hat{E}(p), \log p]$ e $[\hat{v}(p), \log p]$, admitindo que as tensões transformadas tenham variações semelhantes. Desta forma, as curvas $[\hat{E}(p), \log p]$ e $[\hat{v}(p), \log p]$ permitirão a determinação dos II valores $p_i \hat{f}(p_i)$ e dos JJ valores γ_j , necessários para a aplicação do processo *multidata*.

Portanto, considerando-se as expressões (136) e (137), após as substituições numéricas, ou seja,

$$\hat{E}(p) = \frac{9 \cdot 10^5 p}{9 p + 8} \quad (142)$$

$$\hat{v}(p) = \frac{3 p + 4}{9 p + 8} \quad (143)$$

pode-se, arbitrando valores p_j , construir a tabela 7 e as curvas $[\hat{E}(p), \log p]$ e $[\hat{v}(p), \log p]$, apresentadas nas figuras 20 e 21, respectivamente.

| $\log p$ | $\tilde{E}(p)$ | $\tilde{v}(p)$ |
|------------------------|----------------|----------------|
| -2,0 | 1 112,4845 | 0,4981 |
| -1,5 | 3 435,3477 | 0,4942 |
| -1,0 | 10 112,3595 | 0,4831 |
| -0,5 | 26 240,4278 | 0,4562 |
| 0,0 | 52 941,1764 | 0,4117 |
| +0,5 | 78 058,4461 | 0,3699 |
| +1,0 | 91 836,7346 | 0,3469 |
| +1,5 | 97 265,9390 | 0,3378 |
| +2,0 | 99 118,9427 | 0,3348 |
| $p \rightarrow \infty$ | 100 000,0000 | 0,3333 |

Tabela 7: Valores de $\tilde{E}(p)$ e $\tilde{v}(p)$ para a construção dos gráficos $[\tilde{E}(p), \log p]$ e $[\tilde{v}(p), \log p]$.

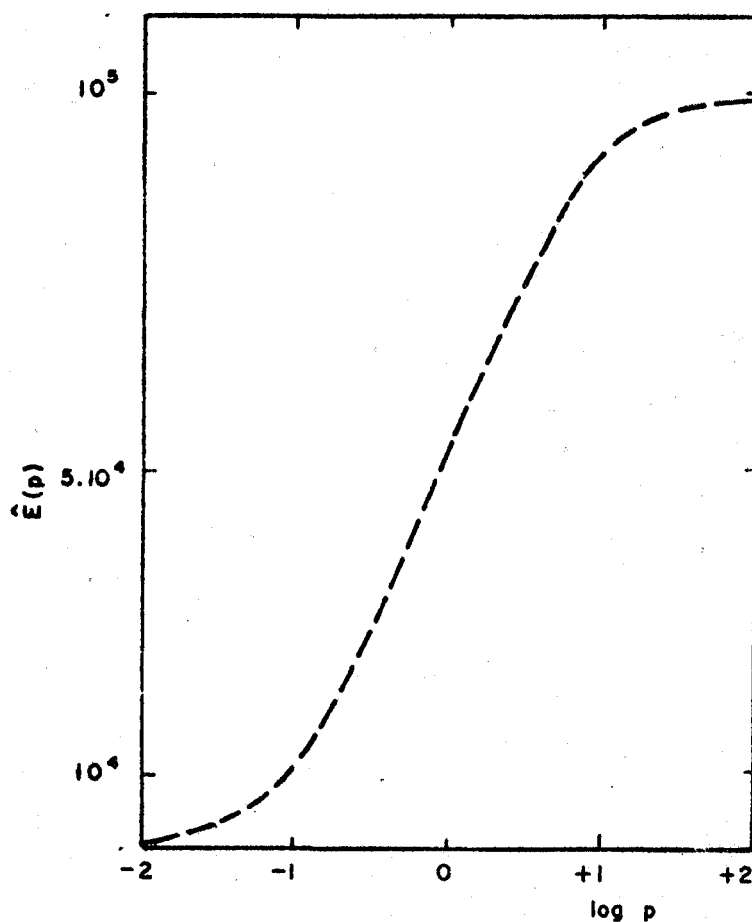


Fig. 20 - Curva $[\tilde{E}(p), \log p]$

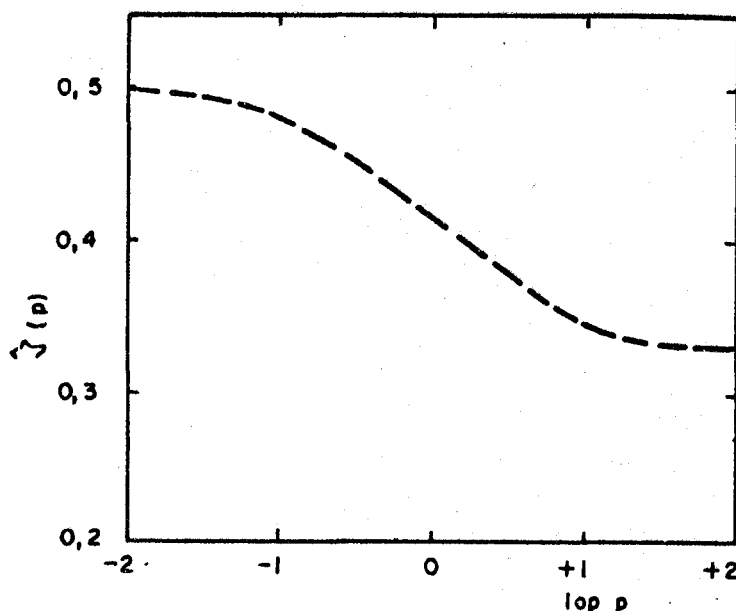


FIGURA 21 — CURVA $[\hat{v}(p), \log p]$

Observando as figuras 20 e 21, pode-se tomar os II e JJ valores de $\log p$ no intervalo $-1 \leq \log p \leq +1$, onde as funções $\hat{E}(p)$ e $\hat{v}(p)$ variam. Além disso, como este intervalo é muito pequeno, os valores $\log p_j$ foram escolhidos distanciados de 0,5 na escala $\log p$, ou seja, iguais a -1,0, -0,5, 0,0, +0,5, +1,0. Considerou-se o processo *multidata* no seu caso *restrito*, ou seja, $II = JJ+1 = 6$; o valor adicional p_0 para o cálculo de $p_0 \hat{f}(p_0)$ foi adotado igual a $10^{+1.5}$. Observe-se que, sendo $JJ = 5$, foram considerados cinco termos exponenciais na série aproximação, mais um termo constante. Este caso, *restrito*, deve conduzir a bons resultados, pois, com a utilização do método dos elementos finitos, a solução transformada obtida praticamente não contém erros, se a malha utilizada for de tamanho e regularidade razoáveis.

Os cinco valores de $\hat{E}(p)$ e $\hat{v}(p)$, correspondentes aos valores de $\log p$ acima arbitrados, que foram utilizados nos cálculos das soluções elásticas associadas, podem ser retiradas da tabela 7.

As soluções elásticas associadas foram calculadas numericamente através do método dos elementos finitos, utilizando-se um elemento triangular com seis graus de liberdade.

A discretização de uma secção transversal típica do cilindro, considerando-se a simetria existente, pode ser vista na fig.22.

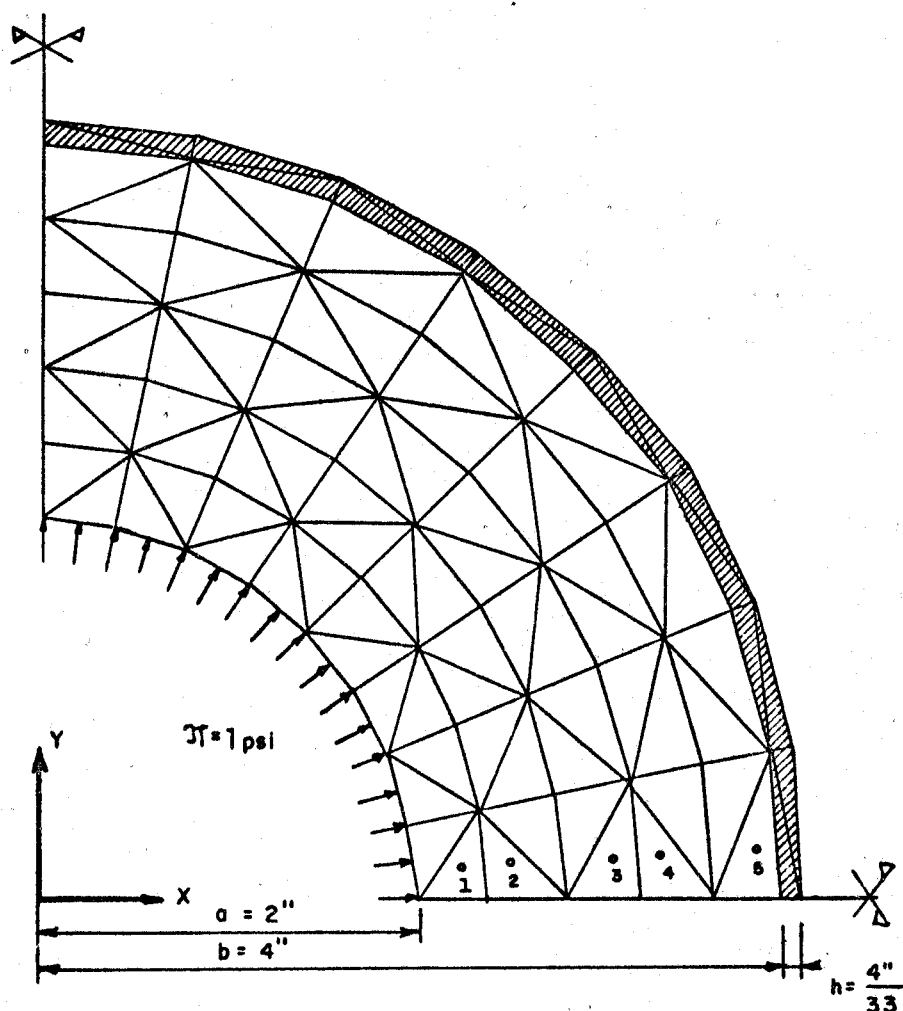


FIGURA 22 — MALHA TRIANGULAR PARA O CILINDRO VISCO-ELÁSTICO COM REFORÇO EXTERNO

Após a resolução dos problemas elásticos associados, tomou-se as soluções transformadas referentes ao eixo global (x,y) , ou seja, $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$ e $\bar{\tau}_{xy}$, em cinco pontos localizados nos centros de gravidade dos elementos 1,2,3,4 e 5 (veja fig.22) e procedeu-se a inversão através do processo *multidata*.

Um programa de inversão numérica baseado no processo *multidata* na forma anteriormente indicada, utilizado em todos os exemplos apresentados neste trabalho, é apresentado no apêndice C. Também são apresentados neste apêndice, a título de exemplo, os dados de entrada do cilindro viscoelástico, ou seja, as tensões transformadas, $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$ e $\bar{\tau}_{xy}$, e os correspondentes resultados σ_x , σ_y e τ_{xy} , relativos a alguns valores arbitrários de tempo.

Obtidas as tensões reais para os cinco pontos da

estrutura e os valores de tempo já referidos acima (veja apêndice C), por considerações do estado duplo de tensão ¹³, em cada ponto, obteve-se as tensões radiais σ_{rr} e circunferenciais $\sigma_{\theta\theta}$, correspondentes. Estes resultados são ilustrados nas figuras 23 e 24, onde são comparados com as soluções exatas fornecidas pela referência 33.

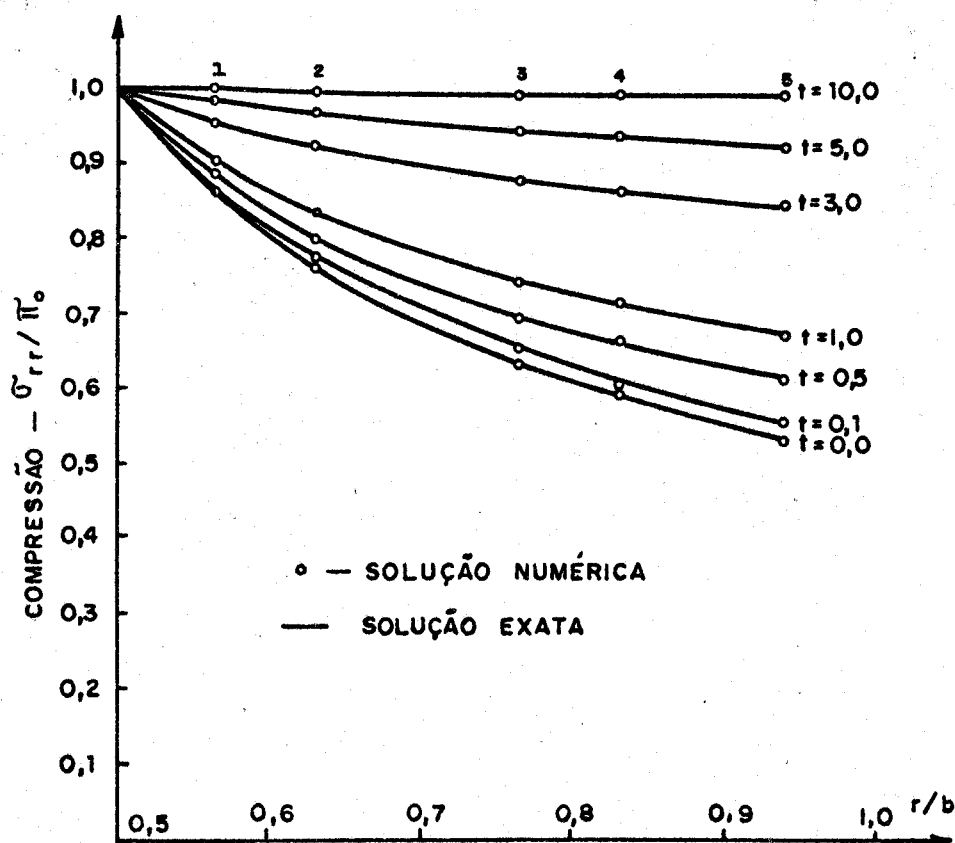


FIGURA 23 - VARIAÇÃO DA TENSÃO RADIAL $\bar{\sigma}_{rr}$

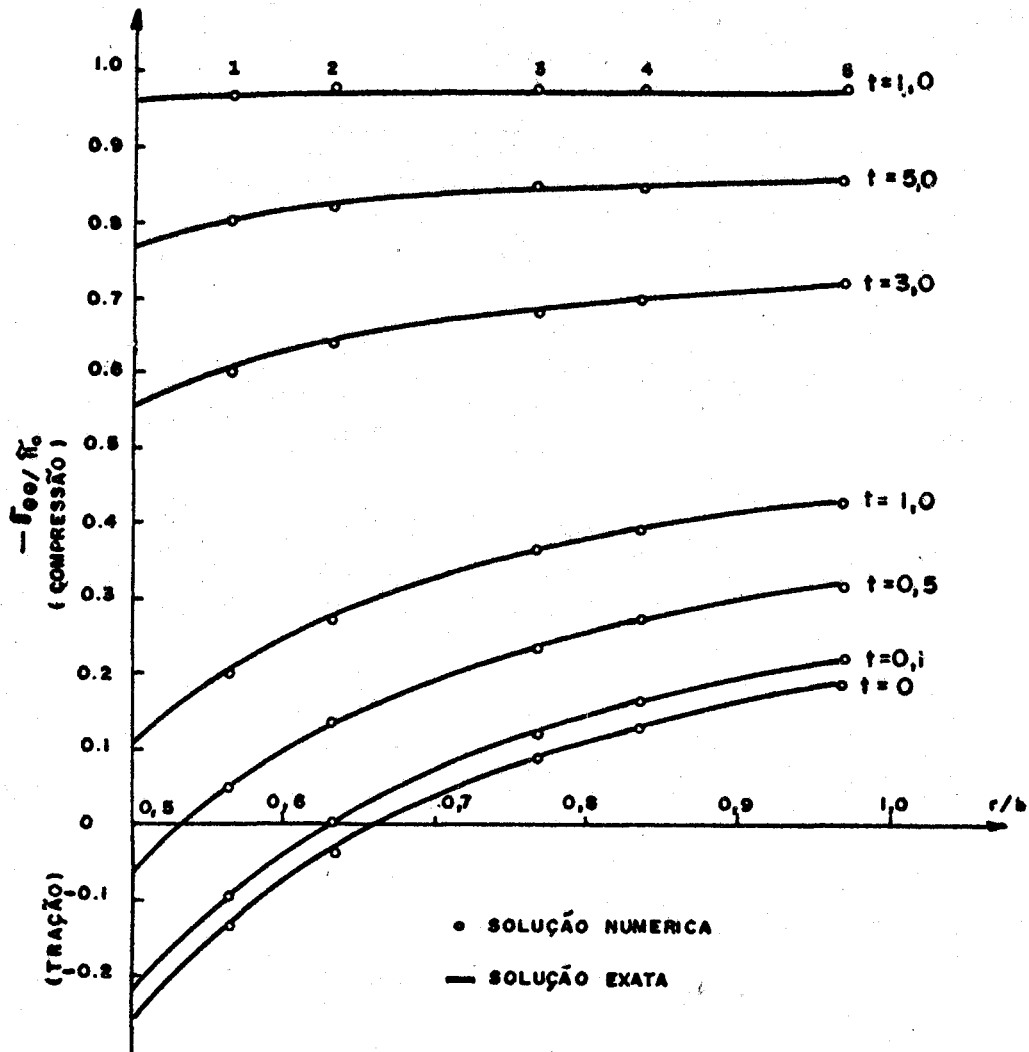


FIGURA 24 — VARIÇÃO DA TENSÃO CIRCUNFERENCIAL σ_{ee}

Conclui-se, observando os gráficos das figuras 23 e 24, que o processo *multidata* na forma apresentada também forneceu bons resultados para o exemplo analisado neste item.

6. UTILIZAÇÃO DAS CURVAS DE RELAXAÇÃO OU DE FLUÊNCIA PARA A CARACTERIZAÇÃO DE MATERIAIS VISCOELÁSTICOS LINEARES

Como já se fez referência anteriormente, o método da transformada integral, proposto por Adey e Brebbia ¹, permite que as propriedades dos materiais viscoelásticos lineares possam ser descritas diretamente através das curvas de relaxação ou de fluência obtidas, por exemplo, através de ensaios experimentais. Desta forma, os modelos reológicos utilizados nos exemplos já apresentados podem ser dispensados.

Assim sendo, em primeiro lugar deve-se aplicar os testes de linearidade apontados resumidamente no item 2.4. Se estes testes indicarem a linearidade do material, a determinação das curvas de relaxação ou de fluência, por pontos, é suficiente para a caracterização completa do material, como se verá adiante.

A descrição do método, seguindo a referência 1, é feita a seguir. Considera-se em primeiro lugar, que sejam conhecidas as curvas de relaxação do material, pelo menos para alguns valores especificados de tempo segundo critérios a serem estabelecidos no item 6.1. A consideração das curvas de fluência será feita posteriormente.

Adey e Brebbia ¹, seguindo McHenry ¹⁷, representam o módulo de relaxação experimental através da expressão:

$$Y^*(t) = S_0 + \sum_{j=1}^{JJ} S_j (1 - e^{-t/\gamma_j}) \quad (144)$$

onde JJ deve ser escolhido de forma a representar adequadamente o material. A relação (144) pode ser ajustada aos dados experimentais aplicando-se o processo *multidata*, descrito no apêndice B, para o caso, ou seja, ajustando-se uma curva aos pontos dados, no plano do tempo, através do método dos mínimos quadrados.

Se II o número de valores de Y(t), arbitrariamente considerados, o erro quadrático total no plano real do tempo é definido por:

$$E^2 = \sum_{i=1}^{II} [Y(t_i) - Y^*(t_i)]^2 \quad (145)$$

Substituindo (144) em (145) obtêm-se:

$$E^2 = \sum_{i=1}^{II} [Y(t_i) - S_0 - \sum_{j=1}^{JJ} S_j (1 - e^{-t_i/\gamma_j})]^2 \quad (146)$$

Minimizando E^2 em relação a S_k ($k = 0, 1, 2, \dots, JJ$),

resulta:

$$\frac{\partial E^2}{\partial S_k} = -2 \sum_{i=1}^{II} \{ [Y(t_i) - S_0 - \sum_{j=1}^{JJ} S_j (1 - e^{-t_i/\gamma_j})] (1 - e^{-t_i/\gamma_k}) \} = 0 \quad (147)$$

onde $\gamma_0 \rightarrow 0$, por definição. Assim,

$$\sum_{i=1}^{II} [Y(t_i) (1 - e^{-t_i/\gamma_k})] = \sum_{i=1}^{II} \{ [S_0 + \sum_{j=1}^{JJ} S_j (1 - e^{-t_i/\gamma_j})] (1 - e^{-t_i/\gamma_k}) \} \quad (148)$$

($k = 0, 1, 2, \dots, JJ$)

Este sistema de JJ equações lineares permite a determinação das constantes S_j ($j = 0, 1, \dots, JJ$).

Matricialmente o sistema (148) pode ser expresso por:

$$\underline{B}^T \underline{Y} = \underline{B}^T \underline{B} \underline{S} \quad (149)$$

onde:

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & (1 - e^{-t_1/\gamma_1}) & (1 - e^{-t_1/\gamma_2}) & \dots & (1 - e^{-t_1/\gamma_{JJ}}) \\ 1 & (1 - e^{-t_2/\gamma_1}) & (1 - e^{-t_2/\gamma_2}) & \dots & (1 - e^{-t_2/\gamma_{JJ}}) \\ 1 & (1 - e^{-t_3/\gamma_1}) & (1 - e^{-t_3/\gamma_2}) & \dots & (1 - e^{-t_3/\gamma_{JJ}}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (1 - e^{-t_{II}/\gamma_1}) & (1 - e^{-t_{II}/\gamma_2}) & \dots & (1 - e^{-t_{II}/\gamma_{JJ}}) \end{bmatrix} \quad (150)$$

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y(t_1) \\ Y(t_2) \\ Y(t_3) \\ \vdots \\ \vdots \\ Y(t_{II}) \end{bmatrix} \quad \underline{S} = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_{JJ} \end{bmatrix} \quad (151)$$

(JJ+1 x 1)

Portanto, formalmente, pode-se escrever:

$$\underline{S} = (\underline{B}^T \underline{B})^{-1} \underline{B}^T \underline{Y} \quad (152)$$

Assim, com os valores de S_j determinados, a aproximação $Y^*(t)$ do módulo de relaxação é fornecida pela relação (144), bem como a sua transformada de Laplace expressa por:

$$\widehat{Y}(p) = \frac{1}{p} \left[S_0 + \sum_{j=1}^{JJ} \left(\frac{S_j}{1 + p \gamma_j} \right) \right] \quad (153)$$

Conforme descrito no item 4.2, assumindo que o corpo esteja descarregado e com deformação nula antes da aplicação da carga, a relação tensão-deformação pode ser expressa através da expressão (20):

$$\sigma(t) = \int_0^t \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} Y(t - \tau) d\tau \quad (154)$$

onde o extremo inferior da integral, valor zero, apenas indica o início do carregamento.

A transformada de Laplace da relação (154), utilizando o teorema da convolução (item A.2.5), se expressa através de (60):

$$\widehat{\sigma}(p) = p \widehat{Y}(p) \widehat{\varepsilon}(p) \quad (155)$$

Observando a relação (155), conforme referência

feita no item 4.2, conclui-se que uma relação tensão-deformação e lástica se aplica no plano transformado e, se σ e ϵ se referirem a um estado de tração simples, vale a equivalência:

$$\hat{E} \rightarrow p \hat{Y}(p) \quad (156)$$

\hat{E} é o denominado m \ddot{o} dulo de elasticidade para o *problema elástico associado* no plano transformado, função da variável transformada p . Desta forma, utilizando a transformada do m \ddot{o} dulo de relaxação aproximado, ajustado a dados de ensaios, pode-se escrever utilizando a expressão (153):

$$\hat{E} \rightarrow p \hat{Y}(p) = S_0 + \sum_{j=1}^{JJ} \frac{S_j}{1 + p\gamma_j} \quad (157)$$

Para a determinação do coeficiente de Poisson para o *problema elástico associado*, os autores Adey e Brebbia ¹ afirmam que uma boa aproximação para muitos materiais pode ser obtida assumindo constante o m \ddot{o} dulo de elasticidade vol \ddot{u} mico K .

Eliminando, considerando o *problema elástico associado*, o m \ddot{o} dulo de elasticidade transversal \hat{G} das duas expressões indicadas em (69), obt \hat{e} m-se a expressão do coeficiente de Poisson $\hat{\nu}$ em função do m \ddot{o} dulo de elasticidade \hat{E} e do m \ddot{o} dulo de elasticidade vol \ddot{u} mico \hat{K} :

$$\hat{\nu} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\hat{E}}{3\hat{K}} \right) \quad (158)$$

Assim, se o m \ddot{o} dulo de elasticidade vol \ddot{u} mico K \hat{e} suposto constante ao longo do tempo, tem-se:

$$\hat{K} = K \quad (159)$$

portanto,

$$\hat{\nu} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\hat{E}}{3K} \right) \quad (160)$$

Observe-se que, uma expressão an \hat{a} loga a (154) pode ria ser escrita em termos das componentes do tensor tangencial das tensões e do tensor das distorsões, permitindo a determinação do m \ddot{o} dulo de elasticidade transversal para o *problema elástico as* *sociado*, \hat{G} . Este fato possibilitaria, a menos da exist \hat{e} ncia de

possíveis dificuldades experimentais, a determinação do coeficiente de Poisson para o problema associado, $\bar{\nu}$.

Assim, determinadas as constantes elásticas \bar{E} e $\bar{\nu}$ para o *problema elástico associado* no plano transformado, pode-se determinar as soluções transformadas. A inversão para o plano do tempo, para a obtenção da solução real, é feita de acordo com as considerações feitas no item 4.3.

Caso se tenha a curva de fluência experimental, o procedimento é análogo no que se refere ao ajuste da curva, ou seja, pode-se assumir a aproximação:

$$J^*(t) = S_0 + \sum_{j=1}^{JJ} S_j (1 - e^{-t/\gamma_j}) \quad (161)$$

A aplicação do processo *multidata*, seguindo-se exatamente os mesmos passos quando se considerou a curva de relaxação, conduz à transformada da equação de fluência:

$$\bar{J}(p) = \frac{1}{p} \left[S_0 + \sum_{j=1}^{JJ} \left(\frac{S_j}{1 + p\gamma_j} \right) \right] \quad (162)$$

Fazendo uso da expressão (61), ou seja,

$$\bar{J}(p) \bar{Y}(p) = p^{-2} \quad (163)$$

obtem-se $\bar{Y}(p)$, recaindo-se, portanto, no caso anterior quando se admitiu conhecida a curva de relaxação.

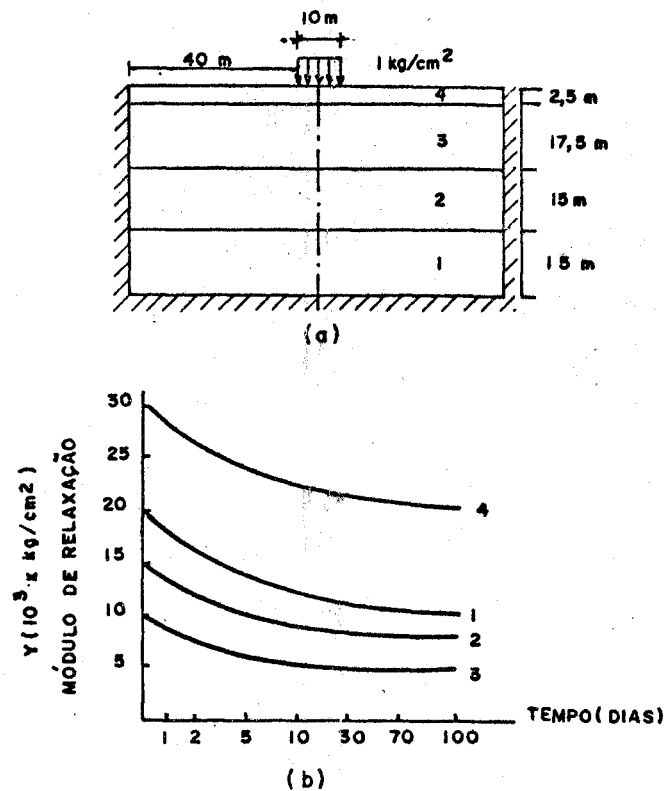
6.1 Exemplo de aplicação: fundação

Neste item, repete-se a análise do problema de fundação, em estado plano de deformação, proposto pelos autores Adey e Brebbia¹. Neste exemplo, a curva de relaxação é o dado característico do material.

Considera-se, portanto, o solo comportando-se como material viscoelástico linear, embora o autor Folque, para os tipos de solos analisados na referência 22, tenha apontado um comportamento não-linear. Assim sendo, o método exposto no item anterior se aplica ao presente caso.

Uma secção transversal típica do subsolo composto

de 4 camadas diferentes pode ser vista na fig.25, juntamente com as respectivas curvas de relaxação que caracterizam suas propriedades viscoelásticas lineares.



- a) geometria e condições de contorno
b) curvas de relaxação dos materiais

Fig.25 - Problema de fundação

Procura-se determinar neste problema, a título de exemplo, a variação dos deslocamentos verticais ao longo do tempo, da superfície superior do subsolo, sob a ação do carregamento indicado na fig.25a. Observe-se que a determinação de qualquer das variáveis, tensões ou deslocamentos, em qualquer ponto da estrutura se faria de maneira análoga que a descrita a seguir.

6.1.1 Determinação dos módulos de elasticidade para o problema e lástico associado

Para a aplicação do processo *multidata* no ajuste da função aproximação (144) às curvas de relaxação fornecidas na

fig. 25b, escolheu-se:

$$II = 9 \text{ e } t_i \text{ iguais a } \{10^{-1,5}; 10^{-1,0}; 10^{-0,5}; 10^0.; 10^{0,5}; \\ 10^{1,0}; 10^{1,5}; 10^{2,0}; 10^{2,5}\}$$

$$JJ = 4 \text{ e } t_j \text{ iguais a } \{10^{-0,5}; 10^{0,5}; 10^{1,5}; 10^{2,5}\}$$

Observe-se que estes valores foram escolhidos, no intervalo de tempo onde a função $Y(t)$ não é constante, diretamente no gráfico $[Y(t), t]$, fig.25.b, dispensando-se, portanto, a construção do gráfico $[Y(t), \log t]$.

Sendo $II = 9$, número de valores de $Y(t_i)$, e $JJ+1=5$, número de termos na série aproximação, considerou-se o processo *multidata* no seu caso *irrestrito*, ou seja, $II \neq JJ+1$. Isto porque os valores $Y(t_i)$, necessários para a aplicação do processo, foram determinados graficamente utilizando-se as curvas de relaxação apresentadas na fig.25b, e que, portanto, podem conter erros. Neste caso, conforme se concluiu no item B.4.7, do Apêndice B, o caso *irrestrito* deve levar a melhores resultados.

Um programa desenvolvido conforme a descrição feita no item 6 para o cálculo dos valores de \bar{E} , a partir das curvas de relaxação, é apresentado no apêndice D e é ilustrado com uma aplicação ao problema em análise.

Os valores de γ_j , seguindo uma sugestão do autor Brebbia, foram impostos através de:

$$\gamma_j = t_j \quad (164)$$

Note-se que, da mesma forma como se fez referência no item 4.3, qualquer outro critério pode ser empregado desde que conduza a resultados aceitáveis.

Os dados de entrada do programa, extraídos das curvas da fig.25b, são apresentados na tabela 8.

Os valores do módulo de elasticidade \bar{E} para o problema elástico associado, relativos a valores de p no intervalo de $10^{-3} < p < 10^{+2}$, calculados através do programa já mencionado, estão relacionados no Apêndice D e permitem a construção das curvas $[\bar{E}, \log p]$, apresentadas na fig.26.

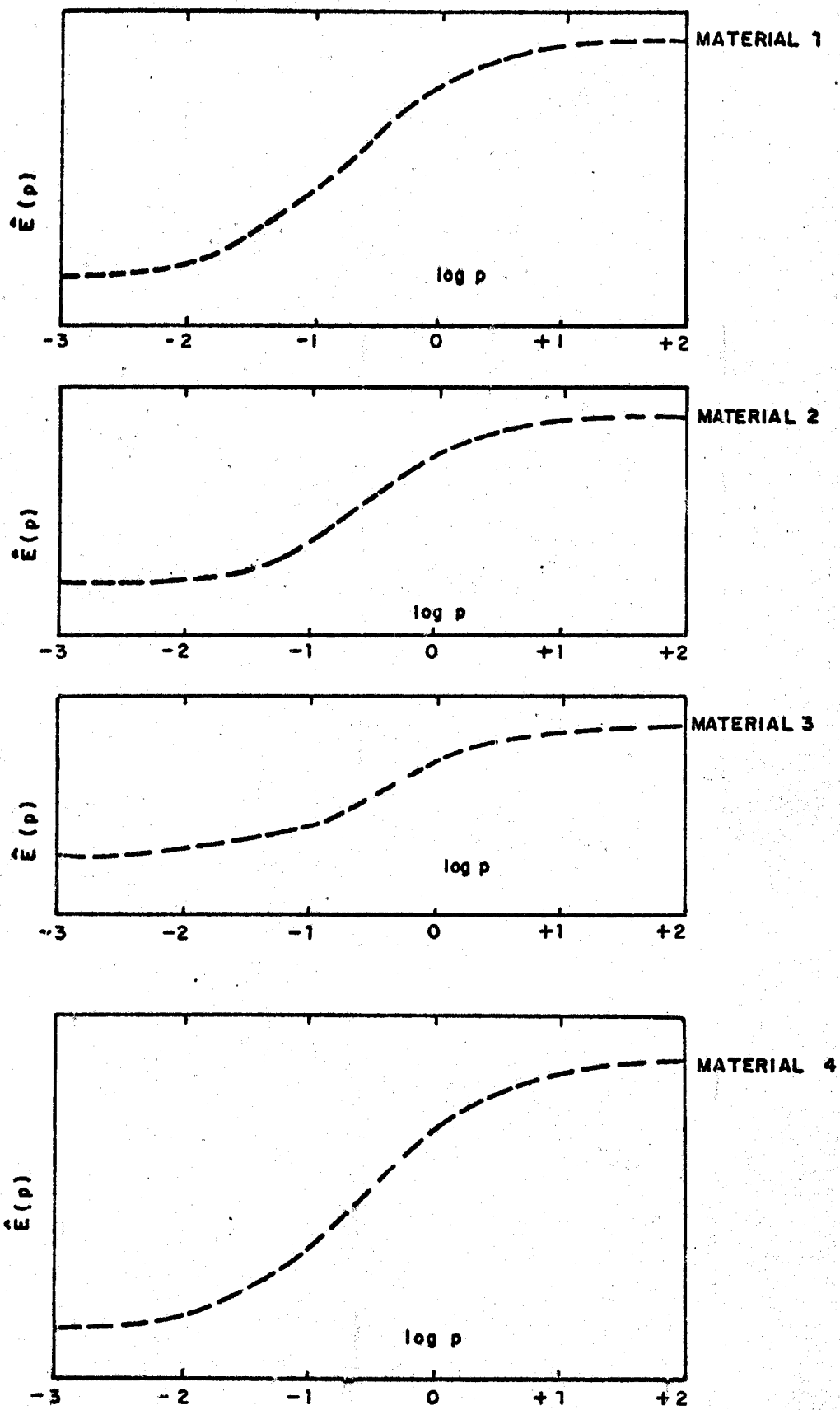


Fig.26 - Curvas $[\hat{E}(p), \log p]$

| t | Mat. 1 | Mat. 2 | Mat. 3 | Mat. 4 |
|-------------|--------|--------|--------|--------|
| $10^{-1,5}$ | 20.0 | 15.0 | 10.0 | 31.5 |
| $10^{-1,0}$ | 19.9 | 14.9 | 9.9 | 31.4 |
| $10^{-0,5}$ | 19.3 | 14.6 | 9.5 | 29.9 |
| $10^{0,0}$ | 18.1 | 13.2 | 8.8 | 28.5 |
| $10^{+0,5}$ | 15.3 | 11.1 | 5.8 | 25.6 |
| $10^{+1,0}$ | 12.4 | 9.0 | 5.4 | 22.6 |
| $10^{+1,5}$ | 11.3 | 8.4 | 5.1 | 21.5 |
| $10^{+2,0}$ | 10.6 | 8.3 | 5.1 | 20.6 |
| $10^{+2,5}$ | 10.6 | 8.3 | 5.1 | 20.6 |

Tabela 8: Valores do módulo de relaxação $\gamma(10^4 \times t/m^2)$ para o cálculo dos módulos de elasticidade \bar{E} para o *problema elástico associado*.

Observe-se que outras tentativas de ajuste variando os JJ valores de \underline{t} levaram a resultados praticamente iguais aos do caso considerado, o que indica a estabilidade do processo. Várias tentativas de ajuste ou de inversão sempre devem ser feitas, principalmente quando existem erros nos dados de entrada, para maior garantia da interpolação feita.

6.1.2 Inversão das soluções transformadas

Observando a fig.26, de acordo com o procedimento adotado na determinação dos módulos de elasticidade do problema elástico associado, considerou-se o caso *irrestrito* do processo *multidata*, com:

II = 9 e $\log p_i$ iguais a $\{-2,5; -2,0; -1,5; -1,0; -0,5; 0,0; +0,5; +1,0; +1,5\}$

JJ = 5 e $\log p_j$ iguais a $\{-2,5; -1,5; -0,5; +0,5; +1,5\}$

Os valores de $\bar{E}(p)$ correspondentes aos II valores

de $\log p_i$ estão relacionados no Apêndice D. Os autores da referência 1 não fazem alusão ao coeficiente de Poisson, que poderia ser determinado através da expressão (160) mantendo-se constante o módulo de elasticidade volúmico K , conforme sugestão dada pelos próprios autores. A título de exemplo, neste trabalho, adota-se constante o coeficiente de Poisson, igual a 0,3.

Desta forma, os nove problemas elásticos associados, considerando-se a geometria e as condições de contorno apresentadas na fig.25.a, podem ser calculados e, portanto, pode-se determinar os deslocamentos verticais transformados da superfície superior do subsolo.

Utilizando o mesmo programa de inversão apresentado no Apêndice C, os deslocamentos reais em função do tempo são, finalmente, determinados. Estas soluções estão apresentadas graficamente na fig.27.

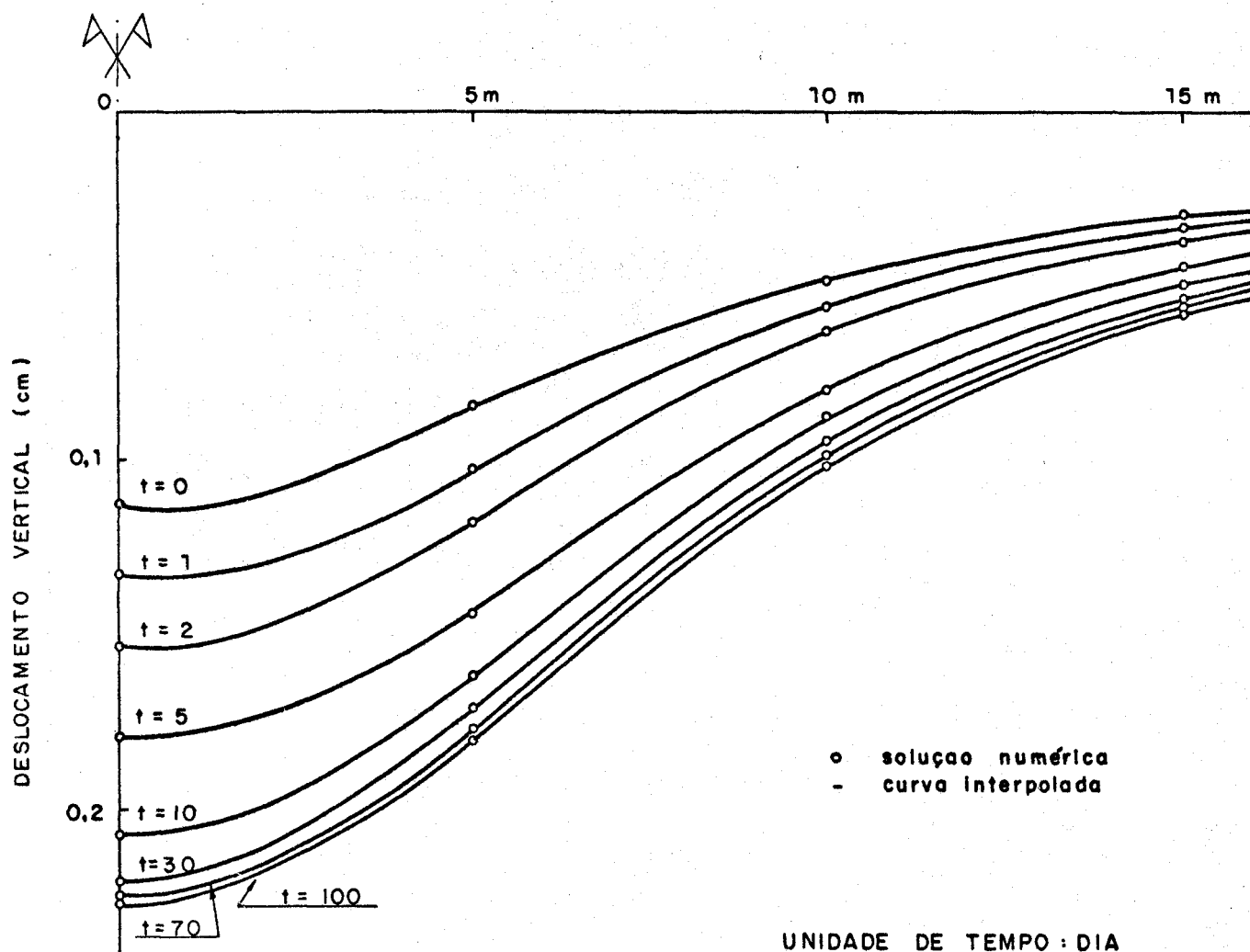


Fig.27 - Deslocamentos verticais da superfície superior do subsolo ao longo do tempo.

Embora o problema analisado a título de exemplo seja de simples geometria, conforme afirmativa dos autores Adey e Brebbia ¹, o programa pode ser utilizado para problemas com quaisquer configurações geométricas e números de materiais.

7 Conclusões

Foi descrito um método numérico, apresentado por Adey e Brebbia em "*Efficient Method for Solution of Viscoelastic Problems*" ¹, capaz de resolver um grande número de problemas estáticos viscoelásticos lineares.

As vantagens mais marcantes do método exposto a serem apontadas são as possibilidades de utilização da literatura sobre a teoria da elasticidade linear, principalmente o método dos elementos finitos, e a utilização direta das curvas experimentais de relaxação ou de fluência dispensando, portanto, a montagem dos modelos reológicos.

Além disso, segundo os autores, muitas dificuldades inerentes aos métodos do tipo *passo a passo* ² foram eliminadas, em particular, os resultados não divergem da solução verdadeira quando o tempo aumenta, uma falha comum do método *passo a passo*.

Ainda segundo os autores, os resultados obtidos pela aplicação do método descrito depende da precisão da solução obtida através do método dos elementos finitos e do número de termos tomado na série aproximação. Porém, se a malha utilizada for de tamanho e de regularidade razoáveis pode-se desprezar os erros introduzidos nas soluções transformadas e uma alta precisão seria encontrada na solução dependente do tempo, com a utilização de poucos termos na série aproximação ¹.

É recomendável adotar valores da variável transformada p_i no intervalo onde a função varia, distanciados de 0,5 na escala $\log p$. Tomando-se os vários subconjuntos destes valores p_i , distribuídos de forma regular na escala $\log p$, pode-se calcular as correspondentes soluções inversas. Um estudo comparativo entre estas soluções quando se aumenta o número de valores da função transformada, ou o número de termos na série aproximação, pode assegurar a estabilidade da solução e permitir a escolha da melhor inversão.

APÊNDICE A

A. Transformada de Laplace

A.1 Introdução

A.1.1 Transformadas integrais

A.1.1.1 Definição

Transformada integral de uma função $f(x)$ é, por definição, a integral imprópria:

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x,y) f(x) dx \quad (a.1)$$

onde y pode ser variável real ou complexa e a função $K(x,y)$ é denominada *núcleo da transformada* ²³. Alguns dos núcleos mais comuns em aplicações são apresentados abaixo:

$$\text{Transformada exponencial de Fourier: } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} f(x) dx \quad (a.2)$$

$$\text{Transformada de Fourier em cosseno: } \int_0^{\infty} \cos(xy) f(x) dx \quad (a.3)$$

$$\text{Transformada de Fourier em seno: } \int_0^{\infty} \text{sen}(xy) f(x) dx \quad (a.4)$$

$$\text{Transformada de Mellin: } \int_0^{\infty} x^{y-1} f(x) dx \quad (a.5)$$

$$\text{Transformada de Laplace: } \int_0^{\infty} e^{-xy} f(x) dx \quad (a.6)$$

As expressões (a.3), (a.4) e (a.6) podem ser consideradas como casos especiais de (a.2), transformada exponencial de Fourier.

A.1.1.2 Linearidade

Uma equação do tipo de (a.1) é, às vezes, representada por $g = K\{f\}$, onde K denota o operador integral que converte f em g . Em particular, os operadores definidos pelas transformadas de Fourier e Laplace são denotados respectivamente por F e L ²³.

Com esta notação, segue-se que K é um operador linear, pois,

$$K\{a_1 f_1 + a_2 f_2\} = a_1 K\{f_1\} + a_2 K\{f_2\} \quad (a.7)$$

sendo a_1 e a_2 constantes.

A.1.2 Convolução

Dadas duas funções f e g , ambas absolutamente integráveis em $(-\infty, +\infty)$, seja S o conjunto de x em que a integral imprópria

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dt \quad (\text{a.8})$$

converge. Esta integral define uma função h , em S , chamada *convolução de f e g* , representada simbolicamente por $f * g$ ²³.

Um caso especial importante ocorre quando f e g são nulas no eixo real negativo. Neste caso, $g(x-t) = 0$ se $t > x$, e (a.8) torna-se:

$$h(x) = \int_0^x f(t) g(x-t) dt \quad (\text{a.9})$$

A.2 Transformada de Laplace

A.2.1 Definição

Seja $f(t)$ uma função de variável real positiva t . Conforme definições dadas em (A.1.1), a transformada de Laplace é definida pela transformada integral na forma:

$$\tilde{f}(p) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (\text{a.10})$$

onde $p = x + iy$. Assim, $\tilde{f}(p)$ é uma função da variável complexa p , para valores de p para os quais a integral (a.10) existe ^{23 24}. No que se segue, o acento circunflexo indicará a transformada de Laplace da função correspondente.

A.2.2 Existência

A.2.2.1 Definição: função seccionalmente contínua

Uma função $f(t)$ se diz *seccionalmente contínua* sobre um intervalo finito, se este intervalo pode ser dividido em um número finito de subintervalos, onde, em cada um dos quais, $f(t)$ é contínua e possui limites finitos quando t tende aos extremos do subintervalo a partir do interior ^{24 25}.

A.2.2.2 Definição: função de ordem exponencial

Uma função $f(t)$ se diz de *ordem exponencial* quando $t \rightarrow \infty$, se existe uma constante c de forma que $e^{-ct} |f(t)|$ é limitada para todo $t > T$, onde T é um número finito positivo ²⁴ ²⁵. Em outras palavras, se M é um limite, então

$$|f(t)| < M e^{ct}, \quad \text{para } t > T \quad (\text{a.11})$$

Note-se que qualquer função limitada é de ordem exponencial com $c = 0$.

A.2.2.3 Existência da transformada de Laplace

Considere-se uma função $f(t)$ seccionalmente contínua em todo intervalo finito para o qual $t \geq 0$, e de ordem exponencial quando $t \rightarrow \infty$. A desigualdade é válida:

$$\int_0^{\infty} |e^{-pt} f(t)| dt < \int_0^T e^{-xt} |f(t)| dt + M \int_T^{\infty} e^{-(x-c)t} dt \quad (\text{a.12})$$

A primeira integral do segundo membro existe, pois, $f(t)$ é seccionalmente contínua, enquanto que a segunda integral existe para $x > c$ (x é a parte real de p). Desta forma, a transformada de Laplace existe quando $x > c$, pois, então a integral (a.10) converge absolutamente ²³ ²⁴.

Embora a transformada de Laplace de $f(t)$ possa existir para outros casos, estas condições permitem a consideração da maioria das aplicações práticas ²⁵.

A.2.3 Exemplo

Antes de se estudar as propriedades da transformada de Laplace, ilustra-se uma de suas mais úteis aplicações, que é a resolução de equações diferenciais, considerando-se um simples problema ²⁵:

$$\frac{dy}{dt} - y = e^{at} \quad (\text{a.13})$$

para valores positivos de t , devendo satisfazer a condição inicial

$$y(0) = -1 \quad (\text{a.14})$$

Em lugar de se determinar a solução geral da equação (a.13) e depois calcular as constantes arbitrárias satisfazendo a condição (a.14), pode-se utilizar a transformada de Laplace para obter diretamente a solução, satisfazendo (a.13) e (a.14). Aplicando-se a transformada de Laplace em ambos os membros de (a.13), tem-se:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{dy}{dt} dt - \int_0^{\infty} e^{-pt} y dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{at} dt \quad (\text{a.15})$$

Supõe-se que as três integrais de (a.15) existem para certos valores de p .

A integral do segundo membro pode ser calculada:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} e^{at} dt = - \left. \frac{e^{-(p-a)t}}{p-a} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{p-a} \quad (\text{a.16})$$

Esta integral existe quando $p > a$.

A primeira integral do primeiro membro de (a.15) pode ser integrada formalmente por partes:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{dy}{dt} dt &= e^{-pt} y(t) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} y dt \\ &= -y(0) + p \int_0^{\infty} e^{-pt} y dt \\ &= 1 + p \int_0^{\infty} e^{-pt} y dt \end{aligned} \quad (\text{a.17})$$

A introdução de (a.16) e (a.17) em (a.15) resulta:

$$(p-1) \int_0^{\infty} e^{-pt} y dt = \frac{1}{p-a} - 1, \quad \text{ou}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} y dt = \frac{a+1-p}{(p-1)(p-a)} \quad (\text{a.18})$$

Portanto, o problema reduz-se à determinação de $y(t)$ cuja transformada de Laplace é dada por (a.18), denominada *equação subsidiária*. Pode-se expressar (a.18) na forma:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} y dt = \frac{1}{a-1} \frac{1}{p-a} - \frac{a}{a-1} \frac{1}{p-1} \quad (\text{a.19})$$

De acordo com (a.16), $1/(p-a)$ é a transformada de e^{at} e que, portanto, o primeiro termo de (a.19) é a transformada

de $e^{at}/(a-1)$ e o segundo termo \bar{e} a transformada de $-ae^t/(a-1)$. Assim, (a.19) será satisfeita para

$$y = \frac{1}{a-1} (e^{at} - ae^t) \quad (\text{a.20})$$

quando $a \neq 1$.

Não se pode afirmar que (a.20) seja a única solução de (a.19), pois, pode haver diversas soluções para (a.19) e somente uma das quais satisfazer (a.13) e (a.14). Este aspecto de unicidade de solução para (a.19) será discutido mais adiante, considerando-se o teorema de Lerch. Porém, por substituição direta em (a.13) e (a.14), mostra-se que (a.20) é solução e portanto única, pois, sabe-se que (a.13) e (a.14) têm uma única solução.

A.2.4 Transformada de Laplace das derivadas $\frac{d^n f(t)}{dt^n}$

Uma das mais importantes propriedades da transformada de Laplace é a expressão da transformada de uma derivada, de ordem qualquer de uma função, em termos da transformada da própria função e dos valores das derivadas de ordem mais baixa da função, calculadas quando $t \rightarrow 0^+$.

Considere-se $n = 1$. Utilizando-se a definição (a.10) tem-se:

$$L \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{df(t)}{dt} dt \quad (\text{a.21})$$

A integração por partes de (a.21) fornece:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{df(t)}{dt} dt = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (\text{a.22})$$

onde $f(t)$ é contínua e $\frac{df(t)}{dt}$ seccionalmente contínua em qualquer intervalo $(0, T)$ para que se possa fazer a integração por partes. Como $f(t)$ é de ordem exponencial, a parte integrada se anula para $t \rightarrow \infty$ (para $x > c$), portanto

$$L \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} = p \bar{f}(p) - f(0^+) \quad (\text{a.23})$$

Analogamente, para $n = 2$:

$$L \left\{ \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right\} = p^2 \bar{f}(p) - pf(0^+) - \frac{df(0^+)}{dt} \quad (\text{a.24})$$

Repetindo-se o processo n v\u00e9zes tem-se:

$$L\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = p^n \hat{f}(p) - \{p^{n-1} f(0^+) + p^{n-2} \frac{d f(0^+)}{dt} + \dots + \frac{d^{n-1} f(0^+)}{dt^{n-1}}\} \quad (\text{a.25})$$

onde $f(t)$ e sua $n-1$ derivadas s\u00e3o cont\u00ednuas em qualquer intervalo $(0, T)$, $\frac{d^n f(t)}{dt^n}$ \u00e9, ao menos, seccionalmente cont\u00ednuo em qualquer intervalo $(0, T)$ e $f(t)$ e suas n derivadas s\u00e3o de ordem exponencial ²⁵.

A.2.5. Teorema da convolu\u00e7\u00e3o

Se $f(t)$ e $g(t)$ s\u00e3o seccionalmente cont\u00ednuas e da ordem de e^{ct} , ent\u00e3o:

$$\hat{f}(p) \hat{g}(p) = L\{f * g\} \quad (\text{a.26})$$

onde $\hat{f}(p) = L\{f(t)\}$, $\hat{g}(p) = L\{g(t)\}$ e $L\{f * g\}$ \u00e9 a transformada de Laplace da convolu\u00e7\u00e3o entre f e g definida por (a.9).

A demonstra\u00e7\u00e3o ²⁵ \u00e9 feita considerando-se (a.10) e utilizando-se duas vari\u00e1veis intermedi\u00e1rias diferentes, u e v :

$$\begin{aligned} \hat{f}(p) \hat{g}(p) &= \left\{ \int_0^{\infty} e^{-pv} f(v) dv \right\} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-pu} g(u) du \right\} \quad \text{ou,} \\ \hat{f}(p) \hat{g}(p) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-p(v+u)} f(v) g(u) dv du \quad \text{ou,} \\ \hat{f}(p) \hat{g}(p) &= \int_0^{\infty} g(u) \left\{ \int_0^{\infty} e^{-p(v+u)} f(v) dv \right\} du \quad (\text{a.27}) \end{aligned}$$

Se, para a segunda integral de (a.27), trocar v por uma nova vari\u00e1vel t atrav\u00e9s da substitui\u00e7\u00e3o:

$$v = t - u, \quad dv = dt$$

segue-se que:

$$\int_0^{\infty} e^{-p(v+u)} f(v) dv = \int_u^{\infty} e^{-pt} f(t-u) dt \quad (\text{a.28})$$

Portanto:

$$\hat{f}(p) \hat{g}(p) = \int_0^{\infty} \left\{ \int_u^{\infty} e^{-pt} f(t-u) g(u) dt \right\} du \quad (\text{a.29})$$

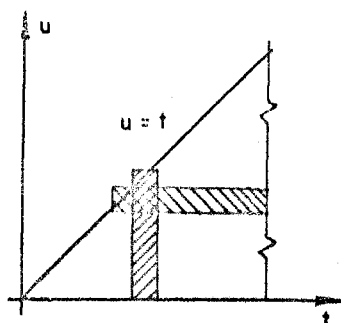


FIGURA a.1

Trocando-se a ordem de integração na integral dupla e os limites conforme a fig.a1, obtêm-se:

$$\hat{f}(p) \hat{g}(p) = \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^t e^{-pt} f(t-u) g(u) du \right\} dt \quad \text{ou,}$$

$$\hat{f}(p) \hat{g}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \left\{ \int_0^t f(t-u) g(u) du \right\} dt \quad \text{ou,}$$

$$\hat{f}(p) \hat{g}(p) = L \left\{ \int_0^t f(t-u) g(u) du \right\} \quad (\text{a.30})$$

Considerando-se (a.9), (a.30) torna-se idêntica a (a.26), demonstrando o teorema.

A utilidade deste teorema é a possibilidade de se transformar uma equação integral ou integro-diferencial do tipo convolução (a.9) em um produto de funções dependentes do parâmetro p , o que torna mais fácil a obtenção da solução real.

A.2.6 Funções degrau unitário e impulso unitário

A.2.6.1 Definição: função degrau unitário $\Delta(t)$

A função degrau unitário é definida como se segue

24 26 :

$$\begin{aligned} \Delta(t-t_0) &= 0, \quad t < t_0 \\ \Delta(t-t_0) &= 1, \quad t > t_0 \end{aligned} \quad (\text{a.31})$$

O gráfico correspondente a (a.31) é mostrado na fig.a2.

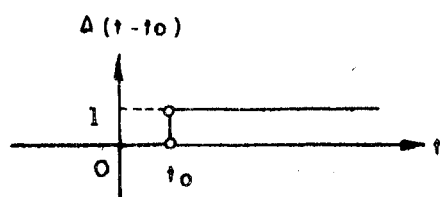


FIGURA a2 — FUNÇÃO DEGRAU UNITÁRIO

A transformada de Laplace da função degrau unitário é:

$$L\{\Delta(t-t_0)\} = \int_{t_0}^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{e^{-pt_0}}{p}, \quad x > 0 \quad (x: \text{parte real de } p) \quad (\text{a.32})$$

Em particular, para $t_0 = 0$, tem-se:

$$\Delta(t) = 0, \quad t < 0 \quad (\text{a.33})$$

$$\Delta(t) = 1, \quad t > 0$$

$$L\{\Delta(t)\} = 1/p \quad (\text{a.34})$$

A.2.6.2 Definição: função impulso unitário $\delta(t)$

A função impulso unitário é, por definição:

$$\delta(t-t_0) = 0, \quad t \neq t_0 \quad (\text{a})$$

$$\delta(t-t_0) = \infty, \quad t = t_0 \quad (\text{a.35})$$

com

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) dt = 1 \quad (\text{b})$$

Uma definição equivalente ²⁴ ²⁵ para $\delta(t-t_0)$, pode ser obtida considerando-se o limite da função (fig.a3):

$$\frac{\Delta(t-t_0) - \Delta(t-t_0-\epsilon)}{\epsilon} \quad (\text{a.36})$$

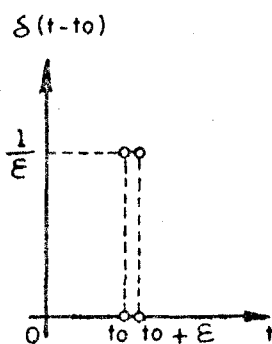


FIGURA a3 - FUNÇÃO
IMPULSO UNITÁRIO

A função (a.36) tem sempre a propriedade (a.35b), para qualquer valor de ϵ . Portanto, quando $\epsilon \rightarrow 0$ em (a.36), obtém-se a derivada formal de $\Delta(t-t_0)$, que satisfaz as propriedades de $\delta(t-t_0)$ relacionadas em (a.35). Portanto, $\Delta'(t-t_0) = \delta(t-t_0)$ onde,

$$\Delta'(t-t_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta(t-t_0) - \Delta(t-t_0-\epsilon)}{\epsilon} \quad (\text{a.37})$$

A transformada de Laplace de $\delta(t-t_0)$ é:

$$L \{ \Delta'(t-t_0) \} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-pt_0} - e^{-p(t_0 + \epsilon)}}{p\epsilon} = e^{-pt_0} \quad (\text{a.38})$$

após a aplicação da regra de L'Hospital, para o cálculo do limite.

Em particular, para $t_0 = 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} \delta(t) &= 0, & t &\neq 0 \\ \delta(t) &= \infty, & t &= 0 \end{aligned} \quad (\text{a.39})$$

com

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$L \{ \delta(t) \} = 1 \quad (\text{a.40})$$

A.2.6.3 Utilização das funções $\Delta(t)$ e $\delta(t)$

Observando-se as transformadas das funções $\Delta(t)$ em (a.34) e $\delta(t)$ em (a.40), pode-se estabelecer a relação ²⁵:

$$L \{ \delta(t) \} = p L \{ \Delta(t) \} \quad (\text{a.41})$$

Portanto, $\delta(t)$ é a derivada formal de $\Delta(t)$, conforme se afirmou no

item A.2.6.2, porém de acordo com (a.41), deve-se considerar condição inicial nula para $\Delta(t)$, ou seja $\Delta(0^+) = 0$, na aplicação da regra de derivação (a.23).

A função $\delta(t)$, com a definição dada em (a.35), não é uma função ordinária no sentido matemático usual e, portanto, tentativas de justificar operações matemáticas ordinárias, diferenciação, integração etc, em expressões contendo a função $\delta(t)$, envolvem questões extremamente complicadas. Uma discussão rigorosa desse tipo de funções *singulares* é feita na teoria das distribuições. Porém, para se evitar uma justificativa mais trabalhosa e complexa, utiliza-se formalmente a função $\delta(t)$ e se os resultados obtidos forem confiáveis, passíveis de interpretação física, pode-se aceitá-los como corretos nos casos práticos ^{25 26 27}.

A.2.7 Transformada inversa

A.2.7.1 Definição

Em aplicações da transformada de Laplace encontra-se o problema inverso, ou seja, a determinação da função $f(t)$ que tem para transformada uma dada função $F(p)$. A notação $L^{-1}\{F(p)\}$ é convencionalmente utilizada para se indicar a *transformada de Laplace inversa* de $F(p)$, isto é, se $F(p) = L\{f(t)\}$, escreve-se $f(t) = L^{-1}\{F(p)\}$.

A.2.7.2 Unicidade

Considerações sobre a unicidade da transformada inversa faz-se utilizando o teorema de Lerch ^{25, 28} onde se estabelece que duas funções $f_1(t)$ e $f_2(t)$ podem ter a mesma transformada $\hat{f}(p)$, porém, neste caso,

$$f_1(t) - f_2(t) = N(t) \quad (\text{a.42})$$

onde $N(t)$ é uma função nula no sentido de que

$$\int_0^t N(t) dt = 0 \quad (\text{a.43})$$

para todo valor positivo de t_0 .

Uma possível função $N(t)$ é mostrada na fig.a4 ²⁸.

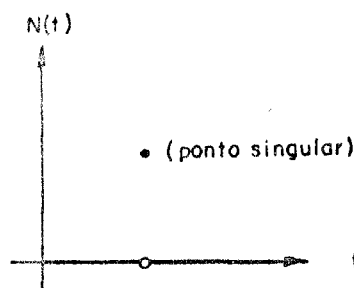


FIGURA a4 — UMA POSSIVEL FUNÇÃO NULA

Tomando-se o teorema de Lerch no seu sentido mais amplo, a inversa da transformada de Laplace não é única. Porém, para a maioria dos casos práticos de engenharia, pode-se tomar $N = N(t) = 0$, pois, artificialidades como a mostrada na fig.a4, na prática não têm sentido ^{25 26}. Desta forma, considerando-se funções contínuas $f(t)$, se a equação integral (a.10) tiver solução, esta será única.

A.2.7.3 Transformada inversa exata

A determinação da transformada inversa de maneira exata pode ser feita utilizando-se a integral de Bromwich, formalmente expressa por:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{c-iR}^{c+iR} e^{pt} \tilde{f}(p) dp \quad (a.44)$$

Este procedimento ^{24 26 28}, fora dos objetivos deste trabalho, em geral, é muito difícil. Porém, facilita-se a inversão utilizando-se a definição da transformada (a.10) para a construção de uma tabela de funções transformadas e transformadas inversas correspondentes, que utilizada juntamente com as propriedades já apresentadas em (A.1.1.2), (A.2.4) e (A.2.5) e outras adicionais ^{24 25}, permitem a determinação das transformadas diretas e inversas de forma exata.

Extensas tabelas podem ser encontradas nas referências 29,24,25,26,27, etc. Uma pequena amostra, útil para problemas viscoelásticos lineares, extraída da referência 10 é apresentada na tabela a1.

Tabela a1 - Pares de Transformadas de Laplace

| | $f(t)$ | $\tilde{f}(p)$ |
|-----|---|--------------------------------------|
| (1) | $\Delta(t)$ | $1/p$ |
| (2) | $\delta(t)$ | 1 |
| (3) | $e^{-\alpha t}$ | $1/(\alpha + p)$ |
| (4) | $\frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$ | $1/p(\alpha + p)$ |
| (5) | $\frac{t}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha t})$ | $1/p^2(\alpha + p)$ |
| (6) | t^n | $n! p^{-n-1}, \quad n = 0, 1, \dots$ |

O exemplo apresentado no item A.2.3 tem uma solução mais rápida utilizando-se as tabelas de transformação citadas acima, pois, estas permitiriam a passagem de (a.13) e (a.14), diretamente para (a.18) e de (a.19) para a solução (a.20) ²⁵.

A.2.7.4 Transformada inversa aproximada

Como a aplicação da inversão exata, discutida no item A.2.7.3, para aplicações práticas, nem sempre é possível, ou pela dificuldade intrínseca do método ou porque a solução transformada é conhecida somente para pontos discretos do parâmetro p , técnicas numéricas de inversão aproximada têm sido desenvolvidas ^{30 31 32} tentando contornar estas dificuldades. No apêndice B apresentam-se duas técnicas propostas nas referências 31 e 6, bastante eficientes para problemas específicos em viscoelasticidade linear.

A.2.8 Exemplo de aplicação em viscoelasticidade linear

Considera-se um exemplo, extraído da referência 2, onde se procura determinar a equação de relaxação de um modelo de Hooke associado em série com um modelo de Kelvin. A equação (10) fornece:

$$\epsilon = \left(\frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1 + \eta_1 D} \right) \sigma \quad (\text{a.45})$$

onde, $D = \frac{d}{dt}$. Sendo $E = E_0$, $a = 1/\eta_1$ e $b = E_1/\eta_1$, (a.45) se expressa por:

$$\epsilon = \left(\frac{1}{E} + \frac{a}{D+b} \right) \sigma \quad (\text{a.46})$$

Para se determinar a equação da relaxação, uma deformação ϵ_0 é imposta no instante $t = 0$, e mantida constante durante toda a análise. Portanto,

$$\epsilon = \epsilon_0 \Delta(t) \quad (\text{a.47})$$

A substituição de (a.47) em (a.46) resulta em:

$$\epsilon_0 \Delta(t) (ED + bE) = \sigma(t) (D+b+aE) \quad (\text{a.48})$$

Efetuando-se a derivada de $\Delta(t)$, de acordo com as definições dadas no item A.2.6.2, tem-se:

$$E\epsilon_0 \delta(t) + bE\epsilon_0 \Delta(t) = D\sigma(t) + (b+aE)\sigma(t) \quad (\text{a.49})$$

Recorda-se das considerações feitas no item A.2.6.3, que a utilização das funções $\Delta(t)$ e $\delta(t)$ leva a expressões meramente formais, estando as soluções que delas decorrerem sujeitas a verificações para serem aceitas como corretas. A seguir procura-se estabelecer as condições em que a utilização formal dessas funções singulares leva a resultados corretos.

Para se obter a transformada de Laplace de (a.49), suponha-se que, por sugestão das conclusões tiradas no item A.2.6.3, se tenha *condições iniciais nulas*, ou seja, que as funções dependentes do tempo e todas as suas derivadas em relação ao tempo quando $t \rightarrow 0^+$ sejam nulas. Portanto, sob estas condições, utilizando-se (a.34) e (a.40) tem-se:

$$E\epsilon_0 + bE\epsilon_0/p = p\bar{\sigma} + (b+aE)\bar{\sigma} \quad (\text{a.50})$$

que pode ser colocado na forma (método das frações parciais):

$$\bar{\sigma} = \frac{E\epsilon_0}{(Ea+b)} \left(\frac{b}{p} + \frac{Ea}{p+Ea+b} \right) \quad (\text{a.51})$$

Utilizando-se a tabela a1, a transformada inversa de (a.51) é:

$$\sigma(t) = \frac{E\epsilon_0}{(Ea + b)} \{b\Delta(t) + Ea e^{-(Ea+b)t}\}, \quad t > 0 \quad (\text{a.52})$$

Note-se que, se a transformada de Laplace tivesse sido aplicada diretamente sobre a equação (a.46), teria se obtido o mesmo resultado, ou seja, impondo-se $\epsilon = \epsilon_0 \Delta(t)$ em (a.46) e utilizando-se (a.34), obtêm-se:

$$\bar{\sigma} = \frac{E\epsilon_0}{(Ea+b)} \left(\frac{b}{p} + \frac{Ea}{p+Ea+b} \right)$$

que é a equação (a.51).

A fig.a5 ilustra a solução (a.52).

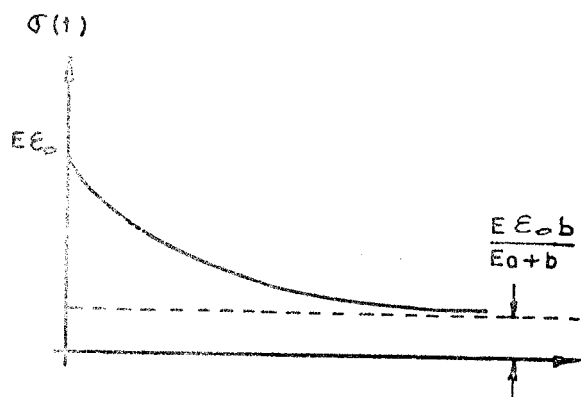


FIGURA a5

Observe-se que, de acordo com (a.52), quando $t \rightarrow 0^+$, a solução $\sigma \rightarrow E\epsilon_0$, ou seja, σ não tende a zero como foi imposto para se obter a equação subsidiária (a.50). Isto torna aceitável a solução (a.52) já que satisfaz a equação diferencial (a.46) com $\epsilon = \epsilon_0 \Delta(t)$ e fornece a condição inicial esperada $\sigma(0) = E\epsilon_0$.

Supor condições iniciais nulas para o problema é como se a integral da transformada de Laplace (a.10) fosse tomada com extremo inferior igual a 0^- , desta forma, incluindo a descontinuidade em 0^{10} . Sob estas condições, a utilização formal de $\delta(t)$, no exemplo analisado acima, levou a resultados corretos. Esta conclusão também é válida para outros modelos viscoelásticos

envolvendo derivadas de ordens mais altas de $\Delta(t)$, conclusão que é extensivamente utilizada em toda a literatura sobre viscoelasticidade^{3 9 10 16} que faz uso da transformada de Laplace.

APÊNDICE B

B Processos numéricos de inversão da transformada de Laplace

B.1 Introdução

Quando corpos viscoelásticos são solicitados com cargas constantes, o gráfico das respostas em função do logaritmo do tempo, em geral, se desenvolve por muitas *décadas* de $\log t$. Estes comportamentos podem ser representados por uma série exponencial com um alto grau de precisão ³¹.

Os processos aqui discutidos se basearão neste tipo de série exponencial e, portanto, representam processos de inversão limitados a formas específicas de funções a serem invertidas, porém, eficientes para problemas viscoelásticos.

Existem vários processos de inversão, segundo Cost ⁶, apresentando uma grande variedade no que se refere à quantidade de trabalho. Porém, a maioria destes processos é sensível a erros nos valores da função a ser invertida. Esses erros podem ser atribuídos a técnicas numéricas utilizadas para a determinação dos valores da função, a processos de arredondamento de números e possivelmente a técnicas de interpolação. Embora esses erros combinados não afetem muito a função a ser invertida, seus efeitos na solução inversa podem ser muito grandes. Nestes casos, a aplicação da maioria dos processos de inversão aproximada existentes não leva a resultados satisfatórios ⁶.

Dois processos de inversão numérica da transformada de Laplace aqui são descritos: um do tipo *colocação* proposto por Schapery ³¹ e outro do tipo *multidata* proposto por Cost ⁶. Neste trabalho, estes processos serão chamados simplesmente de processos da *colocação* e *multidata*.

Descreve-se também uma comparação entre os dois processos, feita por Cost, baseada numa inversão de uma função com solução analítica exata. Esta comparação mostrará a sensibilidade a erros a que o processo da *colocação* está sujeito, bem como, a melhoria da precisão alcançada com o processo *multidata*, especialmente quando existem erros na função a ser invertida.

B.2 Processo da Colocação

Schapery ³¹ sugere que as respostas viscoelásti-

cas, para a classe de problemas em que a analogia *elástico-viscoelástico* se aplica, seja aproximada por uma série de Dirichlet:

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^{JJ} S_j e^{-\alpha_j t} \quad (b.1)$$

onde S_j e α_j são constantes incógnitas, e t é a variável tempo; $f^*(t)$ é uma *aproximação* para a resposta real $f(t)$.

Neste processo, S_j e α_j são teoricamente determinados de forma que o *erro quadrático total* entre $f(t)$ e $f^*(t)$, definido por:

$$E^2 = \int_0^{\infty} [f(t) - f^*(t)]^2 dt, \quad (b.2)$$

seja mínimo.

A determinação de α_j pela minimização de E^2 leva a um sistema de equações não lineares envolvendo trabalhos computacionais mais laboriosos e a solução não é única⁶. Desta forma, especifica-se por inspeção e experiência prévia as constantes α_j e somente se determina S_j por minimização de E^2 , resultando:

$$\frac{\partial E^2}{\partial S_j} = - \int_0^{\infty} 2 [f(t) - f^*(t)] e^{-\alpha_j t} dt = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, JJ) \quad (b.3)$$

ou

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-\alpha_i t} dt = \int_0^{\infty} f^*(t) e^{-\alpha_i t} dt \quad (i = 1, 2, \dots, JJ) \quad (b.4)$$

Esta equação pode ser interpretada de forma que para a minimização do erro quadrático total, em relação a S_j , a transformada de Laplace (Apêndice A) da *função aproximada* $f^*(t)$ deve ser igual a transformada de Laplace da *função exata* $f(t)$ em pelo menos n pontos, $p = \alpha_j$, $i = 1, 2, \dots, JJ$.

Portanto:

$$\tilde{f}(p)]_p = \alpha_j = \tilde{f}^*(p)]_p = \alpha_j \quad i = 1, 2, \dots, JJ \quad (b.5)$$

onde o acento circunflexo indica a transformada de Laplace da função correspondente.

A transformada de Laplace de (b.1) é

$$\tilde{f}^*(p) = \sum_{j=1}^{JJ} S_j \frac{1}{p + \alpha_j} \quad (b.6)$$

Substituindo-se (b.6) em (b.5) tem-se:

$$\tilde{f}(p)]_p = \alpha_i = \left[\sum_{j=1}^{JJ} \frac{S_j}{p + \alpha_j} \right]_{p = \alpha_i} \quad i=1,2,\dots, JJ \quad (b.7)$$

Por conveniência escreve-se (b.6) na forma:

$$p \tilde{f}(p)]_p = \alpha_i = \sum_{j=1}^{JJ} S_j \left(1 + \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \right)^{-1} \quad i=1,2,\dots, JJ \quad (b.8)$$

$\tilde{f}(p)$ representa os valores dados da função transformada a ser invertida, correspondentes, em problemas viscoelásticos lineares, aos valores conhecidos das soluções elásticas associadas. Estes valores, daqui por diante, serão chamados simplesmente de *dados*, no sentido de que são dados de entrada para a obtenção da inversão.

Portanto, especificando-se os valores de α_j e conhecendo-se os JJ dados $\tilde{f}(p)$ em (b.8), obtêm-se um sistema de JJ equações lineares que permitem o cálculo dos valores de S_j . Assim, a função $f^*(t)$, aproximação da função inversa exata $f(t)$, pode ser determinada utilizando-se (b.1).

Deve-se lembrar que no processo da *colocação* descrito acima, exigiu-se um ajuste da série exponencial aproximada à função exata no plano real do tempo, no sentido dos mínimos quadrados. Este critério resultou num ajuste ponto a ponto da transformada de Laplace da série exponencial aos dados, no plano transformado. O número de dados $\tilde{f}(p)$ utilizado é igual ao número de termos da série exponencial.

Por análise do erro quadrático total, Schapery³¹ afirma ser necessário a obtenção dos valores das funções transformadas com bastante precisão, para que se obtenha uma inversão satisfatória.

B.3 *Processo multidata*

Em geral, há dois tipos de problemas em que, segundo Cost⁶, a determinação de uma aproximação por ajuste, passando exatamente em um conjunto de pontos discretos dados, não é o processo mais desejável. Primeiro, quando a função a ser aproximada é conhecida para numerosos valores da variável independente em certo intervalo, é desejável levar em conta muitos ou todos os valores conhecidos, em vez de selecionarem-se poucos valores arbitrários. Segundo, quando são obtidos valores aproximados da função, o procedimento de tentar forçar a passagem da função aproximada exatamente pelos pontos dados é questionável. Estas observações, segundo Cost, indicam uma certa limitação para o processo da *colocação*, que pode ser significativa na solução de problemas viscoelásticos que possuem ambas as características apresentadas acima.

De forma diferente do processo da *colocação* no qual a função é ajustada ponto a ponto no plano transformado, o processo *multidata*⁶ utiliza um número maior de valores da função a ser invertida e ajusta estes valores dados no plano transformado no sentido dos mínimos quadrados. Assim, um número maior de valores são levados em conta no processo *multidata* e uma menor importância é atribuída a um ponto individual. A base deste argumento fundamenta-se na idéia de que uma melhor representação no plano transformado da função a ser invertida resulta numa melhor aproximação da inversa no plano do tempo.

No processo *multidata*, proposto por Cost⁶, uma série de funções racionais no plano transformado, cuja inversa no plano do tempo é uma série de funções exponenciais, será ajustada no sentido dos *mínimos quadrados* a valores da função a ser invertida.

Como no processo da *colocação*, a resposta incógnita viscoelástica é suposta ter a forma:

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^{JJ} S_j e^{-\alpha_j t} \quad (b.9)$$

onde $f^*(t)$ é a aproximação desejada para a função inversa exata $f(t)$; α_j e S_j são constantes a serem escolhidas com base em experiência prévia e determinadas pela minimização do erro quadrático

total no plano transformado, respectivamente.

A transformada de Laplace de (b.9), multiplicada por p , é

$$p\hat{f}^*(p) = \sum_{j=1}^{JJ} S_j \left(1 + \frac{\alpha_j}{p}\right)^{-1} \quad (b.10)$$

Na aplicação do método dos mínimos quadrados para a determinação dos S_j , o erro quadrático total \bar{e} é definido como:

$$E^2 = \sum_{i=1}^{II} [p_i \hat{f}(p_i) - p_i \hat{f}^*(p_i)]^2 \quad (b.11)$$

onde II é um número arbitrário de dados $p_i \hat{f}(p_i)$. Substituindo (b.10) em (b.11) tem-se:

$$E^2 = \sum_{i=1}^{II} \left[p_i \hat{f}(p_i) - \sum_{j=1}^{JJ} S_j \left(1 + \frac{\alpha_j}{p_i}\right)^{-1} \right]^2 \quad (b.12)$$

Minimizando E^2 em relação ao S_k ($k = 1, 2, \dots, JJ$) obtem-se:

$$\frac{\partial E^2}{\partial S_k} = -2 \sum_{i=1}^{II} \left\{ \left[p_i \hat{f}(p_i) - \sum_{j=1}^{JJ} S_j \left(1 + \frac{\alpha_j}{p_i}\right)^{-1} \right] \left(1 + \frac{\alpha_k}{p_i}\right)^{-1} \right\} = 0 \quad (b.13)$$

$k = 1, 2, \dots, JJ$

ou,

$$\sum_{i=1}^{II} p_i \hat{f}(p_i) \left(1 + \frac{\alpha_k}{p_i}\right)^{-1} = \sum_{i=1}^{II} \sum_{j=1}^{JJ} S_j \left(1 + \frac{\alpha_j}{p_i}\right)^{-1} \left(1 + \frac{\alpha_k}{p_i}\right)^{-1} \quad (b.14)$$

$k = 1, 2, \dots, JJ$

As JJ equações (b.14) definem um sistema de equações lineares a ser resolvido para JJ incógnitas S_j , em termos de II valores de $p\hat{f}(p)$ dados. Assim, a aproximação $\hat{f}^*(t)$ da função inversa $f(t)$ fica determinada pela equação (b.9).

B.4 Exemplo de aplicação - Comparação dos processos de colocação e multidata

B.4.1 Função teste estudada

Cost ⁶ apresenta um exemplo de aplicação do proces

so, tomando como função exata no plano do tempo uma sêrie exponencial de 76 termos que afirma ser de representação analítica simples e típica em problemas práticos:

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \sum_{i=0}^{75} e^{-\beta_i t}, & t \geq 0, \text{ onde} \end{cases} \quad (b.15)$$

$$\beta_i = 10^{-2,5 + (i/15)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 75 \quad (b.16)$$

Como a transformada de Laplace de (b.15), multiplicada por p, pode ser determinada de forma exata, ou seja,

$$p \tilde{\lambda}(p) = \sum_{i=0}^{75} \left(1 + \frac{\beta_i}{p}\right)^{-1} \quad (b.17)$$

a função teste pode ser descrita de forma exata nos planos do tempo e de Laplace (fig.b.1.a⁶). Desta forma, Cost pode estudar e comparar a precisão dos dois métodos já apresentados. Uma descrição sumária deste estudo é apresentada a seguir.

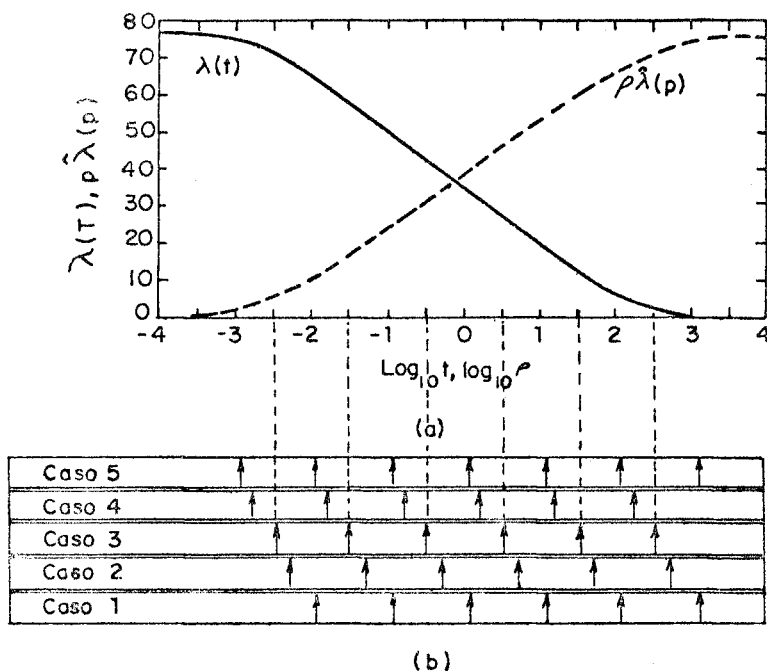


FIGURA b1
 (a) - FUNÇÃO TESTE
 (b) - LOCAÇÃO DOS CENTROS DOS TERMOS EXPONENCIAIS PARA A ESCOLHA DOS VALORES DE α_i

B.4.2 Cálculo dos erros introduzidos nos valores dados

Os erros que eventualmente possam existir nas funções a serem invertidas, apontados no item (B.1), foram gerados e introduzidos ao acaso nos dados, calculados de forma exata através de (b.17). Este procedimento, feito por Cost, é descrito a seguir.

Em primeiro lugar, o erro máximo a ser adicionado em cada valor exato foi especificado como sendo uma certa porcentagem k do máximo valor da função transformada $\{p \tilde{\lambda}(p)\} \text{máx.}$ A seguir foi gerado um conjunto de números ao acaso, variando de -1.0 a $+1.0$, designados por RN, associados um a um aos valores exatos. Assim sendo, cada dado $\{p_j \tilde{\lambda}(p_j)\}$ contendo erro foi obtido adicionando-se ao valor exato, calculado por (b.17), um certo erro igual ao produto da porcentagem k especificada, dividida por 100, pelo valor máximo da função transformada $\{p \tilde{\lambda}(p)\} \text{máx.}$ e pelo número ao acaso, RN, associado. Este procedimento para o valor $p = p_j$ é ilustrado pela equação (b.18) ⁶.

$$\text{DADO } (p_j) = p_j \tilde{\lambda}(p_j) = \sum_{i=0}^{75} \left\{ 1 + \frac{\beta_i}{p_j} \right\}^{-1} + \text{RN } (k/100) \{p \tilde{\lambda}(p)\} \text{máx} \quad (\text{b.18})$$

B.4.3 Estudos dos parâmetros

O processo da *colocação* permite a variação de dois parâmetros: α_j , valores que comparecem no argumento das funções exponenciais e o número de termos da série, JJ. O processo *multi-data* além desses dois parâmetros, permite a variação de um terceiro parâmetro, II, número de pontos dados, ou seja, possui um grau de liberdade adicional.

Devido às dificuldades já mencionadas, os valores de α_j serão escolhidos baseados num entendimento de sua função na série ³¹. Alterando-se os valores α_j , simplesmente mudam-se as locações das funções exponenciais associadas num gráfico tendo por abcissa $\log t$. Isto permite escolher α_j de forma que as funções exponenciais sejam uniformemente distribuídas no intervalo de variação da função a ser invertida. Portanto, para se manter o estudo linear, os α_j foram impostos de acordo com a experiência. O n

mero de termos da série, o número de pontos dados e a porcentagem do erro k adicionada nos valores dados exatos foram as variáveis analisadas.

B.4.4 Avalia ao dos erros

Para análise dos parâmetros, Cost ⁶ escolheu como medida dos desvios das inversões aproximadas, calculadas pelos processos *multidata* e *coloca ao*, em rela ao   inversão exata, o erro quadrático médio, definido por:

$$e = \frac{\sum_{i=1}^r [f(t_i) - f^*(t_i)]^2}{r} \quad (b.19)$$

onde $f(t)$   a fun ao exata inversa, $f^*(t)$   a aproxima ao de $f(t)$, e r   o número de pontos onde estas fun oes foram calculadas.

B.4.5 Escolha dos valores de α_i

Considerando-se o gráfico $[e^{-x}, \log x]$, a curva exponencial   praticamente constante fora do intervalo $-2 < \log x < 1$; portanto, o centro da região onde a curva não   constante ("centro da curva")   aproximadamente $\log x = -0,5$. Como o argumento da fun ao exponencial nas equa oes (b.1) e (b.9) são compostas de fatores α_i e t , os valores de α_i podem ser escolhidos de forma que as fun oes exponenciais sejam centradas em alguns pontos desejados na escala $\log t$ ⁶. Desta forma, como num gráfico

$[e^{-\alpha t}, \log \alpha t]$ o centro da curva   dado por $\log \alpha t = -0,5$, pode-se trocar a variável independente $\log \alpha t$ para $\log t$. Neste caso, a posi ao do centro no gráfico $[e^{-\alpha t}, \log t]$ será dada por

$$\log t = -0,5 - \log \alpha \quad (b.20)$$

Experiências prévias ³¹, permitem admitir, em princípio, que um termo exponencial localizado em cada *década* de $\log t$ (ou $\log p$), no intervalo em que a fun ao varia,   o número mínimo de termos a serem utilizados para a obten ao de uma aproxima ao razoável.

As considera oes feitas acima foram tomadas, por

Cost, como base para tentativas de seleção de um conjunto ótimo de α_i . No gráfico (b.1.a) observa-se que o intervalo onde a função não é constante pode ser considerado como sendo $-2,5 \leq \log t \leq +2,5$. Portanto, foi tomado para a aproximação básica uma série contendo 6 termos, onde cada termo exponencial foi centrado nos valores de $\log t$ iguais a $-2,5, -1,5, -0,5, +0,5, +1,5, +2,5$. Assim, os centros das exponenciais ficaram distanciados de uma *década* de $\log t$. A utilização de (b.20) permitiu a determinação dos valores de α_i ($10^2, 10^1, 10^0, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$) correspondentes, respectivamente, aos 6 valores de $\log t$ pré-fixados. Além disso, Cost considerou mais 4 casos ligeiramente diferentes do conjunto básico. Estes 5 casos podem ser resumidos nas expressões abaixo:

$$\begin{array}{l}
 \text{Caso 1 } \alpha_i = [0.354] \cdot 10^{(-3+i)} \\
 \text{Caso 2 } \alpha_i = [0.630] \cdot 10^{(-3+i)} \\
 \text{Caso 3 } \alpha_i = [1.000] \cdot 10^{(-3+i)} \\
 \text{Caso 4 } \alpha_i = [2.000] \cdot 10^{(-3+i)} \\
 \text{Caso 5 } \alpha_i = [0.354] \cdot 10^{(-3+i)}
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ i = 0,1,2,3,4,5 \\ \\ \\ \\ \\ i = 0,1,2,3,4,5,6 \end{array} \quad (b.21)$$

As locações dos centros de cada termo exponencial, para os cinco casos, são mostradas na fig. (b.1.b).

Considerando estes 5 conjuntos de α_i , Cost obteve as inversões aproximadas tomando valores da função teste (b.17) sem erro adicional ($k = 0$), através do método da *colocação*. Os resultados são mostrados na Tabela I.

Tabela I
Erro quadrático médio (e) nas tentativas de
otimizar os valores α_i

| Caso | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| erro e | 0.4692 | 1.0251 | 0.3431 | 0.3885 | 0.4478 |

Pela análise da Tabela I, isto é, fazendo um julga

mento baseado no erro quadrático médio, o caso 3 resultou na melhor aproximação. Este caso, chamado no que se segue de *aproximação de 6 termos*, foi o conjunto examinado com mais detalhes. Três outros conjuntos de valores de α_i , contendo 11, 21 e 41 termos respectivamente, foram determinados de forma que, em cada caso, os termos exponenciais tivessem por centro as abscissas interpoladas a partir da aproximação dos 6 termos (fig.b.2 ⁶).

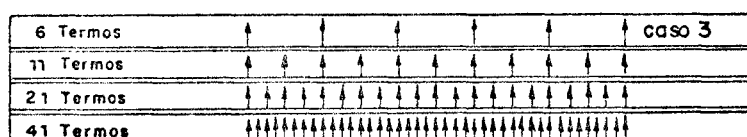


FIGURA b2 — LOCAÇÃO DOS CENTROS DOS TERMOS EXPONENCIAIS RELATIVO À APROXIMAÇÃO DE 6 TERMOS

Os valores de α_i para os 4 casos podem ser resumidos nas expressões:

$$\begin{aligned}
 \text{6 termos: } \alpha_i &= 10^{(-3+i)} & (i = 0, 1, \dots, 5) \\
 \text{11 termos: } \alpha_i &= 10^{(-3+\frac{i}{2})} & (i = 0, 1, \dots, 10) \\
 \text{21 termos: } \alpha_i &= 10^{(-3+\frac{i}{4})} & (i = 0, 1, \dots, 20) \\
 \text{41 termos: } \alpha_i &= 10^{(-3+\frac{i}{8})} & (i = 0, 1, \dots, 40)
 \end{aligned}$$

B.4.6 Resultados

Na aplicação dos processos de inversão, *colocação e multidata*, os sistemas de equações lineares resultantes que permitem a determinação dos coeficientes incógnitas foram resolvidos por Cost ⁶, em computador, pelo processo de eliminação de Gauss com pivoteamento completo e precisão dupla para a minimização dos erros.

Devido à natureza casual em que os erros são introduzidos (b.18), os aspectos estatísticos do problema são signifi-

cativos. Desta forma, para se obter uma amostra significativa, em geral, para um dado conjunto de parâmetros estabelecidos, Cost obteve dez diferentes aproximações. Neste caso, cada solução difere da outra somente na maneira casual de introdução dos erros. Desta forma, em vez de se comparar os resultados exatos através do erro quadrático médio (b.19) resultante da aplicação dos processos da *colocação* e *multidata*, na referência 6 comparou-se a média destes erros.

B.4.6.1 Processo da colocação

O processo da *colocação* foi aplicado à função teste considerando-se as 4 aproximações estabelecidas, com 6, 11, 21 e 41 termos na série, e tomando-se para k os valores 0, 1, 2 e 3%. Os resultados obtidos por Cost, são ilustrados na fig.b.3 extraída da referência 6.

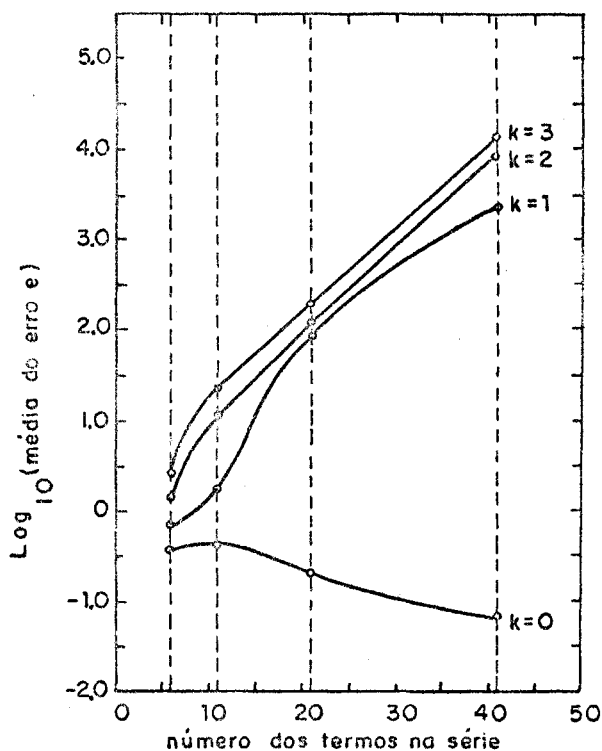


FIGURA b3 — RESULTADOS DO PROCESSO DA COLOCAÇÃO

B.4.6.2 Processo multidata

Os casos analisados em (B.4.6.1) também foram analisados pelo processo *multidata*, porém, considerando-se vários diferentes números de valores dados, com o objetivo de estudar este efeito.

Embora as aproximações em série exponencial com 6, 11, 21 e 41 termos tenham sido estudadas considerando-se $k = 0,1, 2$ e 3% e uma grande quantidade de dados, o conjunto completo destes resultados não foi apresentado na referência 6, segundo Cost, devido a limitações de espaço, mas os resultados apresentados (fig.b.4 ⁶) são típicos do conjunto inteiro.

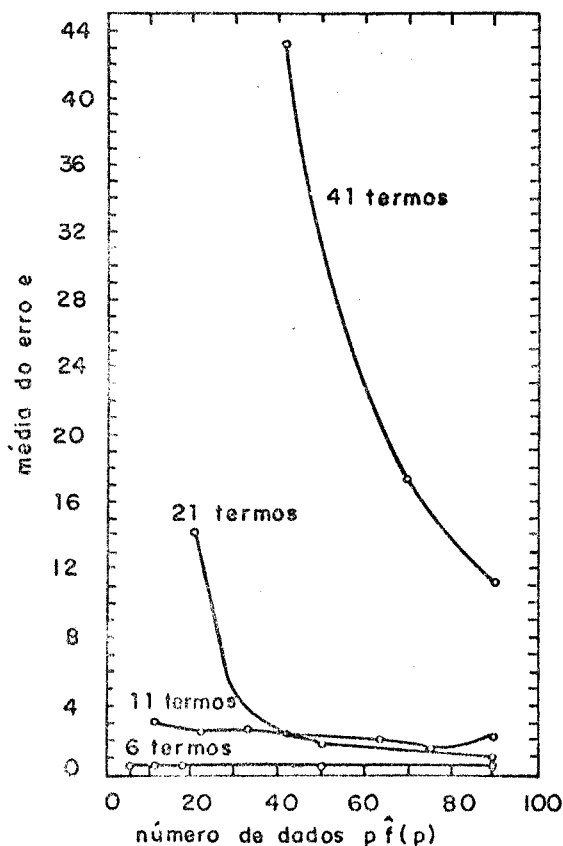


FIGURA b4 — RESULTADOS DO PROCESSO "MULTIDATA" PARA $K = 1\%$

Como pela observação da fig.b.4 a aproximação de 6 termos fornece o melhor resultado, independente do número de dados, este caso foi mais detalhado variando-se o número de dados e as porcentagens k , conforme mostra a fig.b.5 ⁶.

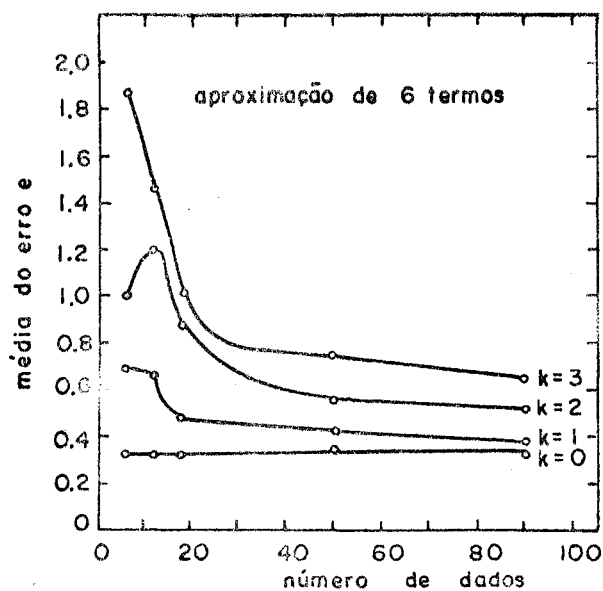
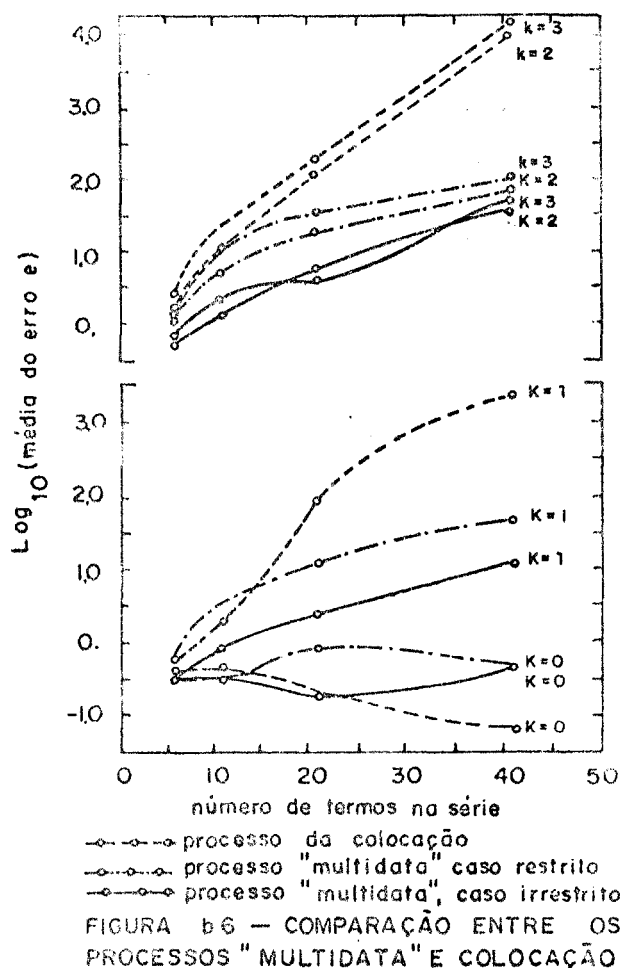


FIGURA b5 — RESULTADOS DO PROCESSO "MULTIDATA" PARA A APROXIMAÇÃO DE 6 TERMOS

B.4.6.3 Comparação dos processos multidata e colocação

Cost considerou na aplicação do processo *multidata* a função teste, em primeiro lugar, casos onde o número de dados é igual ao número de termos da série aproximação (caso *restrito*). Isto restringe o processo *multidata* de 3 para 2 graus de liberdade, portanto, com limitações semelhantes às inerentes ao processo da *colocação*. Depois considerou casos com um grande número de dados, maior que o número de termos da série. Como mostram as figuras b.4 e b.5, estes casos correspondem aos melhores resultados obtidos pelo processo *multidata* (caso *irrestrito*).

Estes dois casos foram comparados com o processo da *colocação* onde os parâmetros são variados de acordo com a fig. b.6.



B.4.7 Conclusão

A fig.b.3 mostra que no processo da *colocação*, para o caso em que não são adicionados erros nos valores dados ($k=0$), obtêm-se melhoria na precisão das aproximações quando se aumenta o número de termos da série. Porém, se há presença de erros ($k \neq 0$), a consideração de mais termos na série diminui a precisão das aproximações. Note-se que na fig.b.3 as médias dos erros quadráticos médios estão em escala logarítmica.

Cost afirma que as flutuações anormais dos gráficos seriam eliminadas se fossem incluídas mais amostras.

Os resultados do método *multidata*, mostrados nas figuras b.4 e b.5, indicam que quando há erros nos dados ($k \neq 0$),

significativas melhorias na precisão das aproximações são obtidas quando se aumenta o número de dados. Se não há erros presentes, não se obtêm melhorias.

A fig.b.6 mostra que o caso *restrito* do processo *multidata* fornece resultados iguais ou melhores que o correspondente caso resolvido pelo processo da *colocação*.

A fig.b.4 mostra que a aproximação de 6 termos conduz a melhores resultados do que as aproximações com maiores números de termos, portanto, a utilização de um termo por *década* de $\log t$ parece ser mais vantajosa.

Resumindo ⁶, o estudo feito por Cost permite afirmar:

a) O processo da *colocação* é sensível a erros nos valores dados da função transformada.

b) O processo *multidata* dá resultados, pelo menos, tão bons quanto os do processo da *colocação*, mesmo quando o número de pontos dados é igual ao número de termos na série.

c) Melhorias significativas na precisão podem ser obtidas com o processo *multidata*, considerando-se um número maior de pontos dados do que o número de termos na série.

d) É melhor utilizar somente um termo por *década* de $\log t$ em ambos os processos, *colocação* e *multidata*, para a inversão de funções do tipo aqui consideradas.

** APENDICE C **

PROGRAMA / PROCESSO ' MULTIDATA ' DE INVERSAO DA TRANSFORMADA
DE LAPLACE

```
DIMENSION TITULO(20), INDP(30), JSEP(30)
DOUBLE PRECISION PTOT(30), TWRIT(30), S0(30,5), PXL(30,30,5), BTBINV
*(30,30), GAHA(30), B(30,30), BTB(30,30), BTPXL(30,5), S(30,5), RPXL(30
*,5), APXL(30,5), R(30,5)
```

1* DADOS GERAIS

READ(5,10) TITULO

10 FORMAT(20A4)

WRITE(6,20) TITULO

20 FORMAT(1H0,20A4)

WRITE(6,21)

21 FORMAT(1X,'PROCESSO MULTIDATA DE INVERSAO DA TRANSFORMADA DE LAPLA
*CE')

WRITE(6,25)

25 FORMAT(///,1X,'*** DADOS DE ENTRADA ***')

READ(5,30) NUMPTO, NPTOT, NTHRIT, NTENT

30 FORMAT(4I5)

WRITE(6,40) NUMPTO, NPTOT, NTHRIT, NTENT

40 FORMAT(///,1X,'NUMERO DE PONTOS DA ESTRUTURA PARA INVERSAO',I5,//

*,1X,'NUMERO DE VALORES DA VARIÁVEL P',I17,///,1X,'NUMERO DE TEMPOS

*PARA IMPRESSAO',I17,///,1X,'NUMERO DE TENTATIVAS DE INVERSAO',I16)

READ(5,50)(PTOT(I), I=1, NPTOT)

50 FORMAT(16F5.2)

DO 63 I=1, NPTOT

63 PTOT(I) = 10.**(PTOT(I))

WRITE(6,60) (PTOT(I), I=1, NPTOT)

60 FORMAT(///,1X,'VALORES DE P :',///,10(1X,E10.5))

READ(5,55) (TWRIT(I), I=1, NTHRIT)

55 FORMAT(8E10.4)

WRITE(6,80) (TWRIT(I), I=1, NTHRIT)

80 FORMAT(///,1X,'VALORES DE TEMPO PARA IMPRESSAO :',///,1X,10(1X,F10.
*6))

DO 130 I=1, NUMPTO

DO 130 J=1, NPTOT

130 READ(5,140)(PXL(I,J,L), L=1,5)

140 FORMAT(5E15.8)

WRITE(6,150)

150 FORMAT(///,1X,'TENSOES E DESLOCAMENTOS TRANSFORMADOS :')

DO 160 I=1, NUMPTO

WRITE(6,170) I

170 FORMAT(//,1X,'PONTO NUMERO',I5,///,1X,T7,'VALORES DE P',T26,'UXLAPL
*',T41,'UYLAPL',T54,'SIGMAXLAPL',T69,'SIGMAYLAPL',T83,'SIGMAXYLAPL'
*,//)

```

DO 160 J=1,PTOT
160 WRITE(6,180) J,PTOT(J),(PAL(I,J,L),L=1,5)
180 FORMAT(1X,I3,'*',1X,6(F15.8))
C
C   2* TENTATIVAS DE INVERSÃO
C
WRITE(6,255)
255 FORMAT('1',//,1X,'*** RESULTADOS / TENTATIVAS DE INTERPOLAÇÃO ***'
*)
DO 1001 ITENT=1,NTENT
WRITE(6,200) ITENT
200 FORMAT(///,1X,'TENTATIVA NUMERO',I5)
READ(5,210) II,JJ
210 FORMAT(2I5)
WRITE(6,220) II,JJ
220 FORMAT(///,1X,'NUMERO DE VALORES DE P CONSIDERADOS',I5,//,1X,'NUM
*ERO DE TERMOS NA SERIE',I15)
READ(5,230) (INDP(I),I=1,II)
READ(5,230) (JSER(J),J=1,JJ-1)
230 FORMAT(16I5)
WRITE(6,240) (INDP(I),I=1,II)
240 FORMAT(/,1X,'INDICES DOS II VALORES DE P:',6X,16(I5))
WRITE(6,241)
241 FORMAT(1X,'CALCULO DE PI*F(PI)')
WRITE(6,250) (JSER(J),J=1,JJ-1)
250 FORMAT(/,1X,'INDICES DOS JJ-1 VALORES DE P:',6X,16(I5))
WRITE(6,251)
251 FORMAT(1X,'CALCULO DE GAMAJ')
C
C   3* MONTAGEM DA B E INVERSÃO DA BTB
C
DO 300 I=1,IT
DO 300 J=1,JJ
IF(J-1) 3002,3003,3002
3003 B(I,J)=1.
GO TO 300
3002 GAMA(J)=1./PTOT(JSER(J-1))
B(I,J)=1./(1.+PIOT(INDP(I))*GAMA(J))
300 CONTINUE
DO 310 I=1,JJ
DO 310 J=1,JJ
BTB(I,J)=0.
DO 310 K=1,II
310 BTB(I,J)=BTB(I,J)+B(K,I)*B(K,J)
CALL INVERT(JJ,BTB,BTBINV)
C
C   4* AJUSTE NO PLANO DE LAPLACE / CALCULO DOS COEFICIENTES SJ
C
WRITE(6,400)
400 FORMAT(///,1X,'AJUSTE NO PLANO DE LAPLACE')
DO 1002 NPT=1,NUMPTO
WRITE(6,1003) NPT
1003 FORMAT(///,1X,'PONTO NUMERO',I10)
DO 1004 L=1,5
DO 510 J=1,JJ
BTPXL(J,L)=0.
DO 510 I=1,II
510 BTPXL(J,L)=BTPXL(J,L)+B(I,J)*PXL(NPT,INDP(I),L)
DO 520 I=1,JJ
S(I,L)=0.

```

```

DO 520 J=1,JJ
520 S(I,L)=S(I,L)+BTBINV(I,J)+BTPXL(J,L)
DO 550 I=1,II
  RPXL(I,L)=S(1,L)
DO 550 J=2,JJ
550 RPXL(I,L)=RPXL(I,L)+S(J,L)/(1.+PTOT(INDP(I))*GAMA(J))
DO 560 I=1,II
560 APXL(I,L)=PXL(NPT,INDP(I),L)-RPXL(I,L)
C
C      5* CALCULO DOS DESLOCAMENTOS E TENSOES REAIS
C
DO 610 IT=1,NTWRIT
  R(IT,L)=S(1,L)
DO 610 J=2,JJ
610 R(IT,L)=R(IT,L)+S(J,L)*(1.-DEXP(-TWRIT(IT)/GAMA(J)))
1004 CONTINUE
C
C      6* IMPRESSOES DAS DIFERENCAS DE AJUSTE NO PLANO TRANSFORMADO
C      E DAS SOLUCOES REAIS
C
WRITE(6,530)
530 FORMAT(//,1X,'COEFICIENTES S (F(PI)=S0+SJ*(1/1+PI*GAMAJ))
* :', //,1X,'INDICE DE S',T18,'UXLAPL',
*T33,'UYLAPL',T48,'SIGMAXLAPL',T63,'SIGMAYLAPL',T78,'SIGMAXYLAPL')
DO 535 J=1,JJ
535 WRITE(6,540) (J-1,(S(J,L),L=1,5))
540 FORMAT(I5,10X,5(E15.8))
WRITE(6,700)
700 FORMAT(///,1X,'CONTROLE DO AJUSTE / DIFERENCA(INTERPOLADO-DADO)',
*//,1X,T7,'VALORES DE P',T26,'UXLAPL',T41,'UYLAPL',T54,'SIGMAXLAPL',
*,T69,'SIGMAYLAPL',T83,'SIGMAXYLAPL',/)
DO 710 I=1,II
710 WRITE(6,720) I,PTOT(INDP(I)),(APXL(I,L),L=1,5)
720 FORMAT(1X,I3,'*',1X,6(E15.8))
WRITE(6,730)
730 FORMAT(///,1X,'DESLOCAMENTOS E TENSOES REAIS',//,T4,'VALORES DE T'
*,T26,'UXREAL',T41,'UYREAL',T54,'SIGMAXREAL',T68,'SIGMAYREAL',T83,'
*SIGMAXYREAL')
DO 725 I=1,NTWRIT
725 WRITE(6,735) I,TWRIT(I),(R(I,L),L=1,5)
735 FORMAT(1X,I3,'*',1X,6(E15.8))
1002 CONTINUE
1001 CONTINUE
CALL EXIT
END

```



```
GO TO 100
200 CONTINUE
DO 500 I=1,N
DO 500 J=1,N
C(I,J)=0.
DO 500 K=1,N
C(I,J)=AA(I,K)*B(K,J)+C(I,J)
500 CONTINUE
WRITE(6,501) ((C(I,J),J=1,N),I=1,N)
501 FORMAT('11',//' MATRIZ UNIDADE/CONTROLE DA INVERSAO DA MATRIZ HTB'
*///,6(6(2X,E10.4)/))
RETURN
END
```

MANUAL DE USO - DADOS DE ENTRADA

PROCESSO MULTIDATA DE INVERSÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Este programa permite que se faça diversas tentativas de inversão num só processamento.

Cada grupo de cartões, relacionados abaixo, refere-se a um comando READ do programa.

I - Dados Gerais

Grupo 1

- variável: TITULØ - título do problema
- número de cartões: 1
- formato: 20 A4

Grupo 2

- variáveis: NUMPTØ - número de pontos da estrutura onde se farão as inversões das soluções transformadas (sem limite máximo).
NPTØT - número total de valores da variável transformada $p(PTØT)$ que serão considerados nas diversas tentativas de inversão (máximo igual a 30).
NTWRIT - número de valores da variável tempo t (TWRIT) em que se deseja obter as soluções transformadas inversas (máximo igual a 30).
NTENT - número de tentativas de inversão das soluções transformadas (sem limite máximo).
- número de cartões: 1
- formato: 4 I5

Grupo 3

- variável: PTØT (I), I=1, NPTØT - valores da variável transformada p em que serão considerados os valores das soluções transformadas. A entrada é feita em log p para maior facilidade.
- número de cartões: depende de NPTØT
- formato: 16 F5.2

Grupo 4

- variável: TWRIT (I), I=1, NTWRIT - valores da variável tempo t em que se deseja obter as soluções transformadas inversas, ou seja, para a impressão das soluções reais.
- número de cartões: depende de NTWRIT
- formato: 8 E10.4

Grupo 5

- variável: PXL (I,J,L), I=1, NUMPTØ; J=1, NPTØT; L=1,5 - valores das soluções transformadas nos NUMPTØ pontos da estrutura e referentes aos NPTØT valores da variável transformada p (PTØT).
 - PXL (I,J,1) = $\bar{u}_x(p)$
 - PXL (I,J,2) = $\bar{u}_y(p)$
 - PXL (I,J,3) = $\bar{\sigma}_x(p)$
 - PXL (I,J,4) = $\bar{\sigma}_y(p)$
 - PXL (I,J,5) = $\bar{\tau}_{xy}(p)$
- número de cartões: NUMPTØ x NPTØT
- formato: 5 E15.8
- leitura por cartão: {PXL (I,J,1), PXL (I,J,2), PXL (I,J,3),
PXL (I,J,4), PXL (I,J,5)}

II - *Dados referentes às tentativas de inversão*Grupo 6

- variável: II - número de valores de $p_i \hat{f}(p_i)$
JJ - número de termos na série aproximação, incluindo a constante S_0 .
- número de cartões: 1
- formato: 2 I5

Grupo 7

- variável: INDP (I), I=1, II
Considerando a ordem em que os valores de PTØT foram dados, os índices INDP (I) determinam os valores de PTØT (I) a serem considerados numa tentativa de inversão, para o cálculo de $p_i \hat{f}(p_i)$.
- número de cartões: depende de II
- formato: 16 I5

Grupo 8

- variável: JSER(J), J=1, JJ-1
Considerando a ordem em que os valores de PTØT foram dados, os índices JSER(J) determinam os valores de PTØT(I) a serem considerados numa tentativa de inversão, para o cálculo de γ_j ($\gamma_j = 1/p_j$).
- número de cartões: depende de JJ
- formato: 16 I5

Observações:

- Repetir os cartões dos grupos 6, 7 e 8 para cada tentativa a ser feita.

- Imprime-se sob o título "MATRIZ UNIDADE/CONTROLE DA INVERSÃO DA MATRIZ BTB" o resultado do produto $\underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{B}} \times (\underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{B}})^{-1}$. Considera-se que uma inversão foi satisfatória quando este produto for muito próximo da matriz unidade (veja o exemplo nas páginas seguintes).

- As demais impressões feitas pelo programa podem ser entendidas pela leitura dos títulos e comentários.

CILINDRO VISCOELASTICO COM REFORCO EXTERNO / ITEM 5.3 - FIG.17
PROCESSO MULTIDATA DE INVERSAO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

*** DADOS DE ENTRADA ***

| | |
|---|----|
| NUMERO DE PONTOS DA ESTRUTURA PARA INVERSAO | 5 |
| NUMERO DE VALORES DA VARIÁVEL P | 10 |
| NUMERO DE TEMPOS PARA IMPRESSAO | 7 |
| NUMERO DE TENTATIVAS DE INVERSAO | 1 |

VALORES DE P :

.10000E+01 .31623E+01 .10000E+00 .31623E+00 .10000E+01 .31623E+01 .10000E+02 .31623E+02 .10000E+03
.10000E+13

VALORES DE TEMPO PARA IMPRESSAO :

0.000000 0.100000 0.500000 1.000000 3.000000 5.000000 10.000000

TFNSOES E DESLOCAMENTOS TRANSFORMADOS :

PONTO NUMERO 1

| VALORES DE P | UXLAPL | UYLAPL | SIGMAXLAPL | SIGMAYLAPL | SIGMAXYLAPL |
|----------------------|--------|--------|----------------|----------------|----------------|
| 1* .10000000E+01 0. | 0. | 0. | -.99784853E+00 | -.97047764E+00 | -.22589654E+02 |
| 2* .31622777E-01 0. | 0. | 0. | -.98986046E+00 | -.90865768E+00 | -.60184101E+02 |
| 3* .10000000E+00 0. | 0. | 0. | -.96962470E+00 | -.75189359E+00 | -.15506846E+01 |
| 4* .31622777E+00 0. | 0. | 0. | -.93284645E+00 | -.46671714E+00 | -.32636856E+01 |
| 5* .10000000E+01 0. | 0. | 0. | -.89385633E+00 | -.16410138E+00 | -.50632577E+01 |
| 6* .31622777E+01 0. | 0. | 0. | -.87030506E+00 | .18910311E-01 | -.61410337E-01 |
| 7* .10000000E+02 0. | 0. | 0. | -.86053484E+00 | .94906927E-01 | -.55858363E-01 |
| 8* .31622777E+02 0. | 0. | 0. | -.85713037E+00 | .12140096E+00 | -.57404855E-01 |
| 9* .10000000E+03 0. | 0. | 0. | -.85601867E+00 | .13005394E+00 | -.57909460E-01 |
| 10* .10000000E+13 0. | 0. | 0. | -.85549359E+00 | .13410223E+00 | -.58145454E-01 |

PONTO NUMERO 2

| VALORES DE P | UXLAPL | UYLAPL | SIGMAXLAPL | SIGMAYLAPL | SIGMAXYLAPL |
|----------------------|--------|--------|----------------|----------------|----------------|
| 1* .10000000E-01 0. | 0. | 0. | -.99466117E+00 | -.97299627E+00 | -.15534410E+02 |
| 2* .31622777E-01 0. | 0. | 0. | -.98124329E+00 | -.91646699E+00 | -.42702364E+02 |
| 3* .10000000E+00 0. | 0. | 0. | -.94729508E+00 | -.77317261E+00 | -.11135755E+01 |
| 4* .31622777E+00 0. | 0. | 0. | -.88569031E+00 | -.51262232E+00 | -.23604636E+01 |
| 5* .10000000E+01 0. | 0. | 0. | -.82045323E+00 | -.23627052E+00 | -.36877659E+01 |
| 6* .31622777E+01 0. | 0. | 0. | -.78105468E+00 | -.69205400E+01 | -.44951108E+01 |
| 7* .10000000E+02 0. | 0. | 0. | -.76470539E+00 | .15461927E+03 | -.48337947E+01 |
| 8* .31622777E+02 0. | 0. | 0. | -.75900717E+00 | .24332842E+01 | -.49518653E+01 |
| 9* .10000000E+03 0. | 0. | 0. | -.75714628E+00 | .32229261E+01 | -.49904707E+01 |
| 10* .10000000E+13 0. | 0. | 0. | -.75627569E+00 | .35923354E+01 | -.50085392E+01 |

PONTO NUMERO 3

| VALORES DE P | UKLAPL | UYLAPL | SIGMAXLAPL | SIGMAYLAPL | SIGMAXYLAPL |
|--------------|--------------|--------|----------------|----------------|----------------|
| 1* | .1000000E+01 | 0. | -.99125740E+00 | -.97660718E+00 | -.11118797E-02 |
| 2* | .3162277E-01 | 0. | -.97094765E+00 | -.92703557E+00 | -.33339240E-02 |
| 3* | .1000000E+00 | 0. | -.91957383E+00 | -.80135385E+00 | -.88266213E-02 |
| 4* | .3162277E+00 | 0. | -.82631379E+00 | -.57270209E+00 | -.18416699E-01 |
| 5* | .1000000E+01 | 0. | -.72747366E+00 | -.33002123E+00 | -.28165144E-01 |
| 6* | .3162277E+01 | 0. | -.66773979E+00 | -.18324929E+00 | -.33894554E-01 |
| 7* | .1000000E+02 | 0. | -.64294129E+00 | -.12230369E+00 | -.36242661E-01 |
| 8* | .3162277E+02 | 0. | -.63429739E+00 | -.10105743E+00 | -.37057308E-01 |
| 9* | .1000000E+03 | 0. | -.63147435E+00 | -.94118403E-01 | -.37322969E-01 |
| 10* | .1000000E+13 | 0. | -.63015363E+00 | -.90872026E-01 | -.37447166E-01 |

PONTO NUMERO 4

| VALORES DE P | UKLAPL | UYLAPL | SIGMAXLAPL | SIGMAYLAPL | SIGMAXYLAPL |
|--------------|--------------|--------|----------------|----------------|-----------------|
| 1* | .1000000E+01 | 0. | -.99000691E+00 | -.97764592E+00 | -.97610059E-03 |
| 2* | .3162277E-01 | 0. | -.96720282E+00 | -.93015877E+00 | -.26205652E-02 |
| 3* | .1000000E+00 | 0. | -.90965892E+00 | -.80987222E+00 | -.69384153E-02 |
| 4* | .3162277E+00 | 0. | -.80559953E+00 | -.59133047E+00 | -.14513625E-01 |
| 5* | .1000000E+01 | 0. | -.69571781E+00 | -.35967441E+00 | -.22300238E-01 |
| 6* | .3162277E+01 | 0. | -.62944518E+00 | -.21967642E+00 | -.26942022E-01 |
| 7* | .1000000E+02 | 0. | -.60195404E+00 | -.16156187E+00 | -.285663649E-01 |
| 8* | .3162277E+02 | 0. | -.59237335E+00 | -.14130473E+00 | -.29533406E-01 |
| 9* | .1000000E+03 | 0. | -.58924456E+00 | -.13468895E+00 | -.29752175E-01 |
| 10* | .1000000E+13 | 0. | -.58779084E+00 | -.13159385E+00 | -.29854543E-01 |

PONTO NUMERO 5

| | VALORES DE P | UXLAPL | UYLAPL | SIGMAXLAPL | SIGMAYLAPL | SIGMAXYLAPL |
|-----|------------------|--------|--------|----------------|----------------|----------------|
| 1* | .10000000E+01 0. | | 0. | -.98849243E+00 | -.97916680E+00 | -.77874994E+03 |
| 2* | .31622777E+01 0. | | 0. | -.96264945E+00 | -.93478287E+00 | -.23232449E+02 |
| 3* | .10000000E+00 0. | | 0. | -.89736882E+00 | -.82248118E+00 | -.61578739E+02 |
| 4* | .31622777E+00 0. | | 0. | -.77907610E+00 | -.61865936E+00 | -.12876479E+01 |
| 5* | .10000000E+01 0. | | 0. | -.65386189E+00 | -.40271953E+00 | -.19676225E+01 |
| 6* | .31622777E+01 0. | | 0. | -.57820512E+00 | -.27222373E+00 | -.23617294E+01 |
| 7* | .10000000E+02 0. | | 0. | -.54679163E+00 | -.21804785E+00 | -.25210604E+01 |
| 8* | .31622777E+02 0. | | 0. | -.53583984E+00 | -.19916242E+00 | -.25759380E+01 |
| 9* | .10000000E+03 0. | | 0. | -.53226278E+00 | -.19299444E+00 | -.25937833E+01 |
| 10* | .10000000E+13 0. | | 0. | -.53058928E+00 | -.19010883E+00 | -.26021178E+01 |

*** RESULTADOS / TENTATIVAS DE INTERPOLACAO ***

TENTATIVA NUMERO 1

NUMERO DE VALORES DE P CONSIDERADOS 6

NUMERO DE TERMOS NA SERIE 6

INDICES DOS 11 VALORES DE P : 5 4 5 6 7 8
 CALCULO DE PI*(PI)

INDICES DOS JJ-1 VALORES DE P : 3 4 5 6 7
 CALCULO DE GAMAJ

MATRIZ UNIDADE/CONTROLE DA INVERSAO DA MATRIZ BTR

| | | | | | |
|------------|------------|------------|------------|-----------|------------|
| .1000E+01 | -.8674E-18 | .6505E-16 | -.1084E-18 | .1193E-17 | -.3253E-18 |
| 0. | .1000E+01 | -.1491E-18 | -.9487E-19 | .1626E-18 | 0. |
| -.5082E-20 | -.8132E-19 | .1000E+01 | -.3253E-18 | .1084E-18 | -.1491E-18 |
| -.5082E-20 | -.1084E-18 | -.1084E-18 | .1000E+01 | .4337E-18 | -.2168E-18 |
| -.5082E-20 | .3253E-18 | -.4337E-18 | -.2494E-17 | .1000E+01 | .5828E-18 |
| -.1604E-20 | -.3253E-18 | .1084E-18 | .6505E-16 | .1084E-18 | .1000E+01 |

AJUSTE NO PLANO DE LAPLACE

PONTO NUMERO 1

COEFICIENTES S (F(PI)=SO+SJ*(1/1+PI*GAMA-J)) :

| INDICE DE S | UXLAPL | UYLAPL | SIGMAXLAPL | SIGMAYLAPL | SIGMAXYLAPL |
|-------------|--------|--------|----------------|----------------|----------------|
| 0 | 0. | 0. | -.85548150E+00 | .13423567E+00 | -.68152097E-01 |
| 1 | 0. | 0. | .11018975E-01 | .85980183E-01 | -.44738167E-02 |
| 2 | 0. | 0. | -.14700395E+00 | -.11391718E+01 | .60323169E-01 |
| 3 | 0. | 0. | -.10520740E-01 | -.83776807E-01 | .39472008E-02 |
| 4 | 0. | 0. | .20320907E-02 | .15922240E-01 | -.70304518E-03 |
| 5 | 0. | 0. | -.37608795E-03 | -.29396116E-02 | .14596434E-03 |

CONTROLE DO AJUSTE / DIFERENCA(INTERPOLADU-DADUO)

| VALORES DE P | UYLAPL | SIGMAXLAPL | SIGMAYLAPL | SIGMAXYLAPL |
|--------------|--------|---------------|----------------|---------------|
| 1* | 0. | .60206175E-18 | -.27596069E-18 | .33506297E-19 |
| 2* | 0. | .69542398E-18 | -.19529403E-18 | .27052115E-19 |
| 3* | 0. | .62737679E-18 | -.17362521E-18 | .18236851E-19 |
| 4* | 0. | .43631792E-18 | -.18109755E-18 | .12378758E-19 |
| 5* | 0. | .31108278E-18 | -.12570540E-18 | .90683536E-20 |
| 6* | 0. | .22273327E-18 | -.40675779E-19 | .99285875E-20 |

DESLOCAMENTOS E TENSOES REAIS

| VALORES DE T | UXREAL | UYREAL | SIGMAXREAL | SIGMAYREAL | SIGMAXYREAL |
|--------------|--------|--------|----------------|----------------|----------------|
| 1* | 0. | 0. | -.85548150E+00 | .13423567E+00 | -.68152097E-01 |
| 2* | 0. | 0. | -.86063580E+00 | .94117062E-01 | -.65814244E-01 |
| 3* | 0. | 0. | -.87934220E+00 | -.51409020E-01 | -.57332056E-01 |
| 4* | 0. | 0. | -.89936703E+00 | -.20706747E+00 | -.43163911E-01 |
| 5* | 0. | 0. | -.95104328E+00 | -.60913108E+00 | -.24332907E-01 |
| 6* | 0. | 0. | -.97669900E+00 | -.80696131E+00 | -.12362507E-01 |
| 7* | 0. | 0. | -.99816184E+00 | -.97315642E+00 | -.22390449E-02 |

PUNTO NUMERO 2

COEFICIENTES S (F(PID)=SD+SJ*(1/1+PI*3.14159...)) :

| INDICE DE S | UXLAPL | UYLAPL | SIGMAXLAPL | SIGMAYLAPL | SIGMAXYLAPL |
|-------------|--------|--------|----------------|----------------|----------------|
| 0 | 0. | 0. | -.75624764E+00 | .36044547E-01 | -.50091615E-01 |
| 1 | 0. | 0. | .17751412E-01 | .77879425E-01 | -.32174553E-02 |
| 2 | 0. | 0. | -.24551507E+00 | -.10404438E+01 | .49197500E-01 |
| 3 | 0. | 0. | -.17523234E-01 | -.75945166E-01 | .45285335E-02 |
| 4 | 0. | 0. | .33463727E-02 | .14440813E-01 | -.72905350E-03 |
| 5 | 0. | 0. | -.61805924E-03 | -.26663667E-02 | .13908751E-03 |

CONTROLE DO AJUSTE / DIFERENCA(INTERPOLAOU-DADO)

| VALORES DE P | UXLAPL | UYLAPL | SIGMAXLAPL | SIGMAYLAPL | SIGMAXYLAPL |
|--------------|---------------|--------|---------------|----------------|----------------|
| 1* | .10000000E+00 | 0. | .19098012E-17 | .78969279E-19 | -.24075092E-20 |
| 2* | .31622777E+00 | 0. | .15541466E-17 | .12458333E-18 | -.44704976E-20 |
| 3* | .10000000E+01 | 0. | .96759618E-18 | .97332688E-19 | -.48840879E-20 |
| 4* | .31622777E+01 | 0. | .44878850E-18 | .25294770E-19 | -.14492204E-20 |
| 5* | .10000000E+02 | 0. | .23470092E-18 | -.53438695E-20 | .20836680E-20 |
| 6* | .31622777E+02 | 0. | .17106757E-18 | .20224566E-19 | .45354313E-20 |

DESLOCAMENTOS E TENSOES REAIS

| VALORES DE T | UXREAL | UYREAL | SIGMAXREAL | SIGMAYREAL | SIGMAXYREAL |
|--------------|---------------|--------|----------------|----------------|----------------|
| 1* 0. | 0. | 0. | -.75624764E+00 | .36044547E-01 | -.50091615E-01 |
| 2* | .10000000E+00 | 0. | -.76487443E+00 | -.56508434E-03 | -.48301505E-01 |
| 3* | .50000000E+00 | 0. | -.79618004E+00 | -.13338023E+00 | -.41829942E-01 |
| 4* | .10000000E+01 | 0. | -.82967561E+00 | -.27545862E+00 | -.34940306E-01 |
| 5* | .30000000E+01 | 0. | -.91610354E+00 | -.64169260E+00 | -.17364412E-01 |
| 6* | .50000000E+01 | 0. | -.95904680E+00 | -.82335352E+00 | -.37206424E-02 |
| 7* | .10000000E+02 | 0. | -.99504835E+00 | -.97529618E+00 | -.14916871E-02 |

PONTO NÚMERO 3

COEFICIENTES S (CPID=SC+SJ*(1/1+PI*CA AJ)) :

| INDICE DE S | UYLAPL | UYLAPL | SIGMAXLAPL | SIGMAYLAPL | SIGMAXYLAPL |
|-------------|--------|--------|----------------|----------------|----------------|
| 0 | 0. | 0. | -.63011041E+00 | -.90764699E-01 | -.37448882E-01 |
| 1 | 0. | 0. | .27222990E-01 | .69352912E-01 | -.22267226E-03 |
| 2 | 0. | 0. | -.37177938E+00 | -.91377963E+00 | .36400218E-01 |
| 3 | 0. | 0. | -.27144251E-01 | -.67206204E-01 | .13723930E-02 |
| 4 | 0. | 0. | .51619521E-02 | .12809915E-01 | -.21386921E-03 |
| 5 | 0. | 0. | -.95324184E-03 | -.23657355E-02 | .38506868E-04 |

CONTROLE DO AJUSTE / DIFERENÇA (INTERPOLADO-DADO)

| | VALORES DE F | UXLAPL | UYLAPL | SIGMAXLAPL | SIGMAYLAPL | SIGMAXYLAPL |
|----|---------------|--------|--------|---------------|----------------|---------------|
| 1* | .10000000E+00 | 0. | 0. | .73726939E-18 | -.47767695E-18 | .60018157E-20 |
| 2* | .31622777E+00 | 0. | 0. | .86253431E-18 | -.37524221E-18 | .60596343E-20 |
| 3* | .10000000E+01 | 0. | 0. | .73400037E-18 | -.32166407E-18 | .64983309E-20 |
| 4* | .31622777E+01 | 0. | 0. | .43632123E-18 | -.26209052E-18 | .41822252E-20 |
| 5* | .10000000E+02 | 0. | 0. | .28307113E-18 | -.15611793E-18 | .38798907E-20 |
| 6* | .31622777E+02 | 0. | 0. | .18694613E-18 | -.38844402E-19 | .40655927E-20 |

DESLOCAMENTOS E TENSÕES REAIS

| VALORES DE T | UXREAL | UYREAL | SIGMAXREAL | SIGMAYREAL | SIGMAXYREAL |
|--------------|---------------|--------|----------------|----------------|----------------|
| 1* | 0. | 0. | -.63011041E+00 | -.90764699E-01 | -.37448882E-01 |
| 2* | .10000000E+00 | 0. | -.64319853E+00 | -.12293714E+00 | -.36221071E-01 |
| 3* | .50000000E+00 | 0. | -.69068183E+00 | -.23964042E+00 | -.31727928E-01 |
| 4* | .10000000E+01 | 0. | -.74147982E+00 | -.36447884E+00 | -.26900526E-01 |
| 5* | .30000000E+01 | 0. | -.87244680E+00 | -.60612747E+00 | -.14073662E-01 |
| 6* | .50000000E+01 | 0. | -.93744089E+00 | -.84556663E+00 | -.74374997E-02 |
| 7* | .10000000E+02 | 0. | -.99187875E+00 | -.97678732E+00 | -.15332439E-02 |

COEFFICIENTES S (F(PI)=S0+SJ*(1/1+PI*BAVAJ)) :

| INDICE DE S | UXLAPL | UYLAPL | SIGMAXLAPL | SIGMAYLAPL | SIGMAXYLAPL |
|-------------|--------|--------|----------------|----------------|----------------|
| 0 | 0. | 0. | -.58773514E+00 | -.13149312E+00 | -.29856628E-01 |
| 1 | 0. | 0. | .27582811E-01 | .64343713E-01 | -.34331316E-03 |
| 2 | 0. | 0. | -.41259512E+00 | -.87189364E+00 | .28515760E-01 |
| 3 | 0. | 0. | -.29212102E-01 | -.63358244E-01 | .17911591E-02 |
| 4 | 0. | 0. | .54761249E-02 | .12034307E-01 | -.20845422E-03 |
| 5 | 0. | 0. | -.10091127E-02 | -.22214441E-02 | .47476529E-04 |

CONTROLE DO AJUSTE / DIFERENCAC(INTERPOLAÇÃO)

| | VALORES DE P | UXLAPL | UYLAPL | SIGMAXLAPL | SIGMAYLAPL | SIGMAXYLAPL |
|----|---------------|--------|--------|---------------|---------------|---------------|
| 1* | .10000000E+00 | 0. | 0. | .48109486E-18 | .63321999E-18 | .16537822E-19 |
| 2* | .31622777E+00 | 0. | 0. | .69271186E-18 | .65720492E-18 | .15990228E-19 |
| 3* | .10000000E+01 | 0. | 0. | .59997016E-18 | .59653619E-18 | .12168654E-19 |
| 4* | .31622777E+01 | 0. | 0. | .51781837E-18 | .47353443E-18 | .76956748E-20 |
| 5* | .10000000E+02 | 0. | 0. | .34487807E-18 | .35314326E-18 | .52741035E-20 |
| 6* | .31622777E+02 | 0. | 0. | .22642911E-18 | .21666176E-18 | .39770844E-20 |

DESLOCAMENTOS E TENSOES REAIS

| VALORES DE I | UXREAL | UYREAL | SIGMAXREAL | SIGMAYREAL | SIGMAXYREAL |
|--------------|---------------|--------|----------------|----------------|----------------|
| 1* | 0. | 0. | -.58773514E+00 | -.13149312E+00 | -.29856628E-01 |
| 2* | .10000000E+00 | 0. | -.60223711E+00 | -.16216418E+00 | -.28844523E-01 |
| 3* | .50000000E+00 | 0. | -.65487781E+00 | -.27344491E+00 | -.25163338E-01 |
| 4* | .10000000E+01 | 0. | -.71119785E+00 | -.39249260E+00 | -.21233373E-01 |
| 5* | .30000000E+01 | 0. | -.85669471E+00 | -.69946060E+00 | -.10986384E-01 |
| 6* | .50000000E+01 | 0. | -.92913793E+00 | -.85180399E+00 | -.57768199E-02 |
| 7* | .10000000E+02 | 0. | -.99017353E+00 | -.9793471E+00 | -.11821901E-02 |

PONTO NUMERO 5

COEFFICIENTES S (F(CPI)=S0+SJ*(1/1+PI+GAMA)) :

| INDICE DE S | UXLAPL | UYLAPL | SIGMAXLAPL | SIGMAYLAPL | SIGMAXYLAPL |
|-------------|--------|--------|----------------|----------------|----------------|
| 0 | 0. | 0. | -.53053526E+00 | -.19001502E+00 | -.20022148E-01 |
| 1 | 0. | 0. | .33003762E-01 | .54763691E-01 | -.44339154E-03 |
| 2 | 0. | 0. | -.46999679E+00 | -.81179209E+00 | .20197384E-01 |
| 3 | 0. | 0. | -.34488058E-01 | -.59315962E-01 | .32356722E-03 |
| 4 | 0. | 0. | .64762168E-02 | .11226141E-01 | -.11108198E-03 |
| 5 | 0. | 0. | -.11935659E-02 | -.20703809E-02 | .21323720E-04 |

CONTROLE DO AJUSTE / DIFERENCAC(INTERPOLADU)DADU)

| VALORES DE P | UXLAPL | UYLAPL | SIGMAXLAPL | SIGMAYLAPL | SIGMAXYLAPL |
|--------------|---------------|--------|---------------|----------------|----------------|
| 1* | .10000000E+00 | 0. | .16685887E-18 | -.10607863E-17 | -.67468387E-20 |
| 2* | .31622777E+00 | 0. | .34899081E-18 | -.75396520E-18 | -.14129274E-20 |
| 3* | .10000000E+01 | 0. | .36932953E-18 | -.49597419E-18 | .63196599E-21 |
| 4* | .31622777E+01 | 0. | .26242801E-18 | -.31138718E-18 | .43840572E-22 |
| 5* | .10000000E+02 | 0. | .19664730E-18 | -.13026413E-18 | .30936555E-21 |
| 6* | .31622777E+02 | 0. | .15226741E-18 | -.10223952E-19 | .14132361E-20 |

POSLOCAMENTOS E TENSOES REAIS

| VALORES DE T | UXREAL | UYREAL | SIGMAXREAL | SIGMAYREAL | SIGMAXYREAL |
|--------------|---------------|--------|----------------|----------------|----------------|
| 1* 0. | 0. | 0. | -.53053526E+00 | -.19001502E+00 | -.26022148E-01 |
| 2* | .10000000E+00 | 0. | -.54711763E+00 | -.21860969E+00 | -.25197429E-01 |
| 3* | .50000000E+00 | 0. | -.60727320E+00 | -.32235058E+00 | -.22154644E-01 |
| 4* | .10000000E+01 | 0. | -.67160580E+00 | -.43331928E+00 | -.18847341E-01 |
| 5* | .30000000E+01 | 0. | -.63746038E+00 | -.71941756E+00 | -.98794862E-02 |
| 6* | .50000000E+01 | 0. | -.91982165E+00 | -.86142729E+00 | -.51771365E-02 |
| 7* | .10000000E+02 | 0. | -.95897393E+00 | -.98045635E+00 | -.10117672E-02 |

B6700/37700 F O R T R A N C O M P I L A T I O N M A R K 2.6.0

** APENDICE D **

PROGRAMA / CALCULO DO MODULO DE ELASTICIDADE PARA O PROBLEMA
ELASTICO ASSOCIADO

```

DOUBLE PRECISION T(30),YJ(30),B(30,30),YJA(30),YJD(30)
DIMENSION TITULO(20),JSER(30)
COMMON BTB(30,30),BTYJ(30),JJ
COMMON/ELFIN/ELAPL(30,5)
DOUBLE PRECISION BTB,BTYJ,ELAPL,P(30),GAMA(30),SO,JY(30)
INTEGER CODE

```

1* DADOS GERAIS

READ (5,10) TITULO

10 FORMAT(20A4)

WRITE(6,20) TITULO

20 FORMAT(1H0,20A4)

WRITE(6,30)

30 FORMAT(///,1X,'*** DADOS DE ENTRADA ***')

READ(5,40) NUMMAT, NPWRIT

40 FORMAT(2I5)

WRITE(6,50) NUMMAT

50 FORMAT(///,1X,'NUMERO DE MATERIAIS',I43,///,1X,'NUMERO DE VALORES
*DA VARIAVEL P PARA A IMPRESSAO')

WRITE(6,51) NPWRIT

51 FORMAT(1X,'DO MODULO DE ELASTICIDADE TRANSFORMADO',I24)

READ(5,60) II,JJ

60 FORMAT(2I5)

WRITE(6,70) II,JJ

70 FORMAT(//,1X,'NUMERO DE TEMPOS TOMADOS',I38,///,1X,'NUMERO DE TERM
*OS DA SERIE',I37)

READ(5,80) (T(I),I=1,II)

80 FORMAT(8E10.5)

READ(5,400) (JSER(J),J=1,JJ-1)

400 FORMAT(16I5)

WRITE(6,410) (JSER(J),J=1,JJ-1)

410 FORMAT(//,1X,'INDICE DOS TEMPOS PARA A SERIE',5X,10(3X,I5))

READ(5,85) (P(I),I=1,NPWRIT)

85 FORMAT(16F5.1)

WRITE(6,86)(T(I),I=1,II)

86 FORMAT(///,1X,'VALORES DE TEMPOS DADOS:',///, 8(1X,E10.5))

WRITE(6,87)(P(I),I=1,NPWRIT)

87 FORMAT(///1X,'VALORES DE LOG(P) PARA IMPRESSAO: ',//

* 1X,I5(1X,F5.1))

CODE 1 - DADO: CURVA DE RELAX. EXPR. POR PONTOS

CODE 2 - DADO: CURVA DE FLUENCIA EXPR. POR PONTOS

READ(5,100) CODE

100 FORMAT(I5)

WRITE(6,95)

```

95  FORMAT('1', //, 1X, '*** RESULTADOS ***')
    DO 1000 M=1, NUMMAT
    WRITE(6, 90) M
90  FORMAT(///, 1X, '*** MATERIAL NUMERO', IS, ' ***')
    GO TO(120, 140), CODE
120 WRITE(6, 150)
160 FORMAT(///, 1X, 'DADO : CURVA DE RELAXACAO EXPERIMENTAL POR PONTOS')
    GO TO 190
140 WRITE(6, 130)
180 FORMAT(///, 1X, 'DADO : CURVA DE FLUENCIA EXPERIMENTAL POR PONTOS')
    GO TO 240
190 WRITE(6, 200)
200 FORMAT(///, 1X, 'TEMPO', 13X, 'VALORES DE Y')
    GO TO 350
240 WRITE(6, 250)
250 FORMAT(///, 1X, 'TEMPO', 13X, 'VALORES DE J')
350 CONTINUE
    READ(5, 360) (YJ(I), I=1, II)
360 FORMAT(9F10.6)
365 WRITE(6, 370) (T(I), YJ(I), I=1, II)
370 FORMAT(// (1X, F10.3, 10X, F10.3))

C
C      2* AJUSTE DE Y :  $YI = S0 + SJ(1 - \exp(-TI/GAMAJ))$ 
C      CALCULO DOS COEFICIENTES SJ
C
    DO 420 I=1, II
    DO 420 J=1, JJ
    IF(J-1) 430, 440, 430
440  B(I, J)=1.
    GO TO 420
430  GAMA(J)=Y(JSER(J-1))
    B(I, J)=1.-DEXP(-T(I)/GAMA(J))
420  CONTINUE
    DO 460 I=1, JJ
    DO 460 J=1, JJ
    BTB(I, J)=0.
    DO 460 K=1, II
460  BTB(I, J)=B(K, I)*B(K, J)+BTB(I, J)
    DO 490 J=1, JJ
    BTYJ(J)=0.
    DO 490 I=1, II
    BTYJ(J)=B(I, J)*YJ(I)+BTYJ(J)
490  CONTINUE
    CALL GAUSS

C
C      CALCULO DO DESVIO NOS VALORES DE Y DADOS
C
    IF(CODE*2) 515, 516, 516
515  WRITE(6, 520)
520  FORMAT(///, 1X, 'CONTROLE DO AJUSTE', //, 1X, 'TEMPO', 12X, 'Y-DADO', 9X, '
    *Y-AJUSTADO', 5X, 'DIFERENCA')
    GO TO 526
516  WRITE(6, 525)
525  FORMAT(///, 1X, 'CONTROLE DO AJUSTE', //, 1X, 'TEMPO', 12X, 'J DADO', 9X, '
    *J AJUSTADO', 5X, 'DIFERENCA')
526  CONTINUE
    DO 530 I=1, II
    YJA(I)=BTYJ(1)
    DO 530 J=2, JJ
531  YJA(I)=YJA(I)+BTYJ(J)*(1.-DEXP(-T(I)/GAMA(J)))

```

```

530 CONTINUE
    DO 540 I=1,II
540  YJD(I)=YJ(I)-YJA(I)
    WRITE(6,550) (T(I),YU(I),YJA(I),YJD(I),I=1,II)
550  FORMAT(/(1X,E12.6,3X,E12.6,3X,E12.6,3X,E12.6))
C
C    3* CALCULO DOS II MODULOS DE ELAST. TRANSFORMADOS:
C    ELAPL=P*YLAPL=S0+SJ/(1+GAMAJ*P)
C
    WRITE(6,560)
560  FORMAT(///,1X,'MODULOS DE ELASTICIDADE TRANSFORMADOS',//,
*2X,'LOG P', 6X,'E TRANSFORMADO',/)
    DO 570 I=1,NPWRT
    ELAPL(I,M)=BTYU(1)
    DO 570 J=2,NPWRT
671  ELAPL(I,M)=ELAPL(I,M)+BTYU(J)/(1.+10.**P(I)*GAMA(J))
570  CONTINUE
C
C    SE DADO J ; P*YLAPL=1/P*JLAPL
C
    IF(CODE=2) 580,590,590
590  DO 595 I=1,NPWRT
    ELAP=ELAPL(I,M)
595  ELAPL(I,M)=1./ELAP
580  CONTINUE
C
    WRITE(6,600) (P(I),ELAPL(1,M),I=1,NPWRT)
600  FORMAT(1X,F7.3 ,5X,E15.8)
1000 CONTINUE
    CALL EXIT
    END

```

```

SUBROUTINE GAUSS
COMMON A(30,30),B(30),N
DOUBLE PRECISION A,B
DOUBLE PRECISION AA(30,30),BB(30),C(30),RES(30)
C
C
C
C
N=ORDER (MAX=30)
GUARDAR A E B P/ CALC. DO RESIDUO

DO 1040 I=1,N
DO 1040 J=1,N
BR(I)=B(I)
1040 AA(J,J)=A(I,J)
DO 10 K=1,N
K1=K+1
R(K)=B(K)/A(K,K)
IF(K.EQ.N) GO TO 100
DO 20 J=K1,N
IF(A(K,J).EQ.0.) GO TO 20
A(K,J)=A(K,J)/A(K,K)
DO 30 I=K1,N
A(I,J)=A(I,J)-A(I,K)*A(K,J)
30 CONTINUE
R(J)=B(J)-A(J,K)*R(K)
20 CONTINUE
10 CONTINUE
100 K1=K
K=K-1
IF(K.EQ.0) GO TO 200
DO 40 J=K1,N
B(K)=B(K)-A(K,J)*R(J)
40 CONTINUE
GO TO 100
200 WRITE(6,5000)(B(K),K=1,N)
5000 FORMAT(//,1X,'COEFICIENTES S',//,6(E12.6,2X))
C
DO 250 I=1,N
C(I)=0.
DO 250 J=1,N
250 C(I)=C(I)+AA(I,J)*R(J)
DO 210 I=1,N
210 RES(I)=C(I)-BR(I)
WRITE(6,220) (RES(I),I=1,N)
220 FORMAT(///,1X,'CONTROLE DA RESOLUCAO DO SISTEMA',//,6(E12.6,2X))
*)
RETURN
END

```

MANUAL DE USO - DADOS DE ENTRADA

CÁLCULO DO MÓDULO DE ELASTICIDADE PARA O PROBLEMA
ELÁSTICO ASSOCIADO

Cada grupo de cartões relacionados abaixo refere-se a um comando READ do programa.

I - *Dados gerais*Grupo 1

- variável: TITULO - título do problema
- número de cartões: 1
- formato: 20 A4

Grupo 2

- variável: NUMMAT - número de materiais considerados
NPWRIT - número de valores da variável transformada p em que se deseja obter os módulos de elasticidade para o problema elástico associado.
- número de cartões: 1
- formato: 2 I5

Grupo 3

- variáveis: II - número de valores do módulo de relaxação $Y(t_i)$ considerados.
JJ - número de termos na série aproximação, incluindo a constante S_0 .
- número de cartões: 1
- formato: 2 I5

Grupo 4

- variável: $T(I)$, $I=1, II$ - valores da variável tempo t onde serão considerados os valores do módulo de relaxação.
- número de cartões: depende de II
- formato: 8 E10.5

Grupo 5

- variável: JSER (J), $J=1, JJ-1$
Considerando a ordem em que os valores de $T(I)$ foram dados, os índices JSER(J) determinam os valores de $T(I)$ a serem considerados, para o cálculo de γ_j ($\gamma_j = t_j$).
- número de cartões: depende de JJ
- formato: 16 I5

Grupo 6

- variável: $P(I)$, $I=1, NPWRIT$ - valores da variável transformada p em que se deseja obter os módulos de elasticidade para o problema elástico associado. A entrada é feita em $\log p$ para maior facilidade.
- número de cartões: depende de $NPWRIT$
- formato: 16 F5.1

Grupo 7

- variável: CØDE - código para diferenciação:
CØDE = 1: é dada a curva experimental de relaxação por pontos.
CØDE = 2: é dada a curva experimental de fluência por pontos.
- número de cartões: 1
- formato: I5

II - *Dados referentes a cada material*Grupo 8

- variável: YJ(I), I=1, II - valores dos módulos de relaxação referentes aos II valores da variável tempo T(I).
- número de cartões: depende de II
- formato: 8 F10.6

Observações:

- Repetir os cartões do grupo 8 para cada material considerado.
- Imprime-se sob o título "CØNTROLE DA RESØLUÇÃØ DØ SISTEMA" o resultado da expressão matricial $\underline{B}^T \underline{B} \underline{S} - \underline{B}^T \underline{Y}$. Considera-se que a resolução do sistema foi satisfatória quando o resultado desta expressão for muito próximo da matriz coluna nula. (Veja o exemplo nas páginas seguintes).
- As demais impressões feitas pelo programa podem ser entendidas pela leitura dos títulos e comentários.

E TRANSFORMADO / FUNDAÇÃO FIG.25 / UNIDADES (T.MADIA)

*** DADOS DE ENTRADA ***

NUMERO DE MATERIAIS

4

NUMERO DE VALORES DA VARIÁVEL P PARA A IMPRESSÃO
DO MÓDULO DE ELASTICIDADE TRANSFORMADO

11

NUMERO DE TEMPOS TOMADOS

9

NUMERO DE TERMOS DA SÉRIE

5

ÍNDICE DOS TEMPOS PARA A SÉRIE

3 5 7 9

VALORES DE TEMPOS DADOS:

.31622E-01 .10000E+00 .31622E+00 .10000E+01 .31622E+01 .10000E+02 .31622E+02 .10000E+03
.31622E+03

VALORES DE LOG(P) PARA IMPRESSÃO:

-3.0 -2.5 -2.0 -1.5 -1.0 -0.5 0.0 0.5 1.0 1.5 2.0

*** RESULTADOS ***

*** MATERIAL NUMERO 1 ***

DADO : CURVA DE RELAXACAO EXPERIMENTAL POR PONTOS

TEMPO VALORES DE Y

| | |
|---------|------------|
| 0.032 | 200000.000 |
| 0.100 | 199000.000 |
| 0.316 | 193000.000 |
| 1.000 | 181000.000 |
| 3.162 | 153000.000 |
| 10.000 | 124000.000 |
| 31.622 | 113000.000 |
| 100.000 | 106000.000 |
| 316.220 | 106000.000 |

COEFICIENTES S

.200702E+06 .768231E+03 -.739453E+05 -.234432E+05 .307728E+04

CONTROLE DA RESOLUCAO DO SISTEMA

. 0. .693889E-17 .693889E-17 .260209E-17

CONTROLE DO AJUSTE

| TEMPO | Y-DADO | Y-AJUSTADO | DIFERENCA |
|-------------|-------------|-------------|--------------|
| .316220E-01 | .200000E+06 | .200016E+06 | -.158616E+02 |
| .100000E+00 | .199000E+06 | .198535E+06 | .464948E+03 |
| .316220E+00 | .193000E+06 | .193920E+06 | -.920244E+03 |
| .100000E+01 | .181000E+06 | .180670E+06 | .330166E+03 |
| .316220E+01 | .153000E+06 | .152527E+06 | .472819E+03 |
| .100000E+02 | .124000E+06 | .124394E+06 | -.394408E+03 |
| .316220E+02 | .113000E+06 | .113002E+06 | -.183604E+01 |
| .100000E+03 | .106000E+06 | .105908E+06 | .920761E+02 |
| .316220E+03 | .106000E+06 | .106028E+06 | -.276585E+02 |

MODULOS DE ELASTICIDADE TRANSFORMADOS

| LOG P | E TRANSFORMADO |
|--------|----------------|
| -3.000 | .10737080E+06 |
| -2.500 | .10848254E+06 |
| -2.000 | .11271711E+06 |
| -1.500 | .12279712E+06 |
| -1.000 | .13972819E+06 |
| -0.500 | .16232614E+06 |
| 0.000 | .18281046E+06 |
| 0.500 | .19413427E+06 |
| 1.000 | .19854656E+06 |
| 1.500 | .20001623E+06 |
| 2.000 | .20048478E+06 |

*** MATERIAL NUMERO 2 ***

DADO : CURVA DE RELAXACAO EXPERIMENTAL POR PONTOS

| TEMPO | VALORES DE Y |
|---------|--------------|
| 0.032 | 150000.000 |
| 0.100 | 149000.000 |
| 0.316 | 146000.000 |
| 1.000 | 132000.000 |
| 3.162 | 111000.000 |
| 10.000 | 90000.000 |
| 31.622 | 84000.000 |
| 100.000 | 83000.000 |
| 316.220 | 83000.000 |

COEFICIENTES S

.151281E+06 -.136561E+04 -.609270E+05 -.729329E+04 .221714E+04

CONTROLE DA RESOLUCAO DO SISTEMA

. .693889E-17 0. .780626E-17 .433681E-17

CONTROLE DO AJUSTE

| TEMPO | Y-DADO | Y-AJUSTADO | DIFERENCA |
|-------------|-------------|-------------|--------------|
| .316220E+01 | .150000E+06 | .150538E+06 | -.538102E+03 |
| .100000E+00 | .149000E+06 | .148992E+06 | .778511E+01 |
| .316220E+00 | .146000E+06 | .144550E+06 | .145020E+04 |
| .100000E+01 | .132000E+06 | .133235E+06 | -.123545E+04 |

| | | | |
|-------------|-------------|-------------|--------------|
| .316220E+01 | .111000E+06 | .110731E+06 | .269410E+03 |
| .100000E+02 | .900000E+05 | .896592E+05 | .340791E+03 |
| .316220E+02 | .840000E+05 | .845922E+05 | -.592213E+03 |
| .100000E+03 | .830000E+05 | .826052E+05 | .394805E+03 |
| .316220E+03 | .830000E+05 | .830972E+05 | -.972385E+02 |

MODULOS DE ELASTICIDADE TRANSFORMADOS

| LOG P | E TRANSFORMADO |
|--------|----------------|
| -3.000 | .83795931E+05 |
| -2.500 | .84071590E+05 |
| -2.000 | .85852177E+05 |
| -1.500 | .91095790E+05 |
| -1.000 | .10198389E+06 |
| -0.500 | .11893490E+06 |
| 0.000 | .13538907E+06 |
| 0.500 | .14493960E+06 |
| 1.000 | .14906330E+06 |
| 1.500 | .15054689E+06 |
| 2.000 | .15104520E+06 |

*** MATERIAL NUMERO 3 ***

DADO : CURVA DE RELAXACAO EXPERIMENTAL POR PONTOS

| TEMPO | VALORES DE Y |
|---------|--------------|
| 0.032 | 100000.000 |
| 0.100 | 99000.000 |
| 0.316 | 95000.000 |
| 1.000 | 88000.000 |
| 3.162 | 58000.000 |
| 10.000 | 54000.000 |
| 31.622 | 51000.000 |
| 100.000 | 51000.000 |
| 316.220 | 51000.000 |

COEFICIENTES S

| | | | | |
|-------------|--------------|--------------|-------------|--------------|
| .101184E+06 | -.244091E+04 | -.533600E+05 | .956646E+04 | -.520497E+04 |
|-------------|--------------|--------------|-------------|--------------|

CONTROLE DA RESOLUCAO DO SISTEMA

| | | | | |
|-------------|----|----|-------------|-------------|
| .693889E-17 | 0. | 0. | .954098E-17 | .433681E-17 |
|-------------|----|----|-------------|-------------|

CONTROL DO AJUSTE

| TEMPO | Y-DADO | Y-AJUSTADO | DIFERENCA |
|-------------|-------------|-------------|--------------|
| .316220E+01 | .100000E+06 | .100424E+06 | -.424416E+03 |
| .100000E+00 | .990000E+05 | .938738E+05 | .126235E+03 |
| .316220E+00 | .950000E+05 | .946051E+05 | .394904E+03 |
| .100000E+01 | .880000E+05 | .845250E+05 | .347499E+04 |
| .316220E+01 | .530000E+05 | .655543E+05 | -.755433E+04 |
| .100000E+02 | .540000E+05 | .495880E+05 | .441195E+04 |
| .316220E+02 | .510000E+05 | .503993E+05 | .600678E+03 |
| .100000E+03 | .510000E+05 | .524415E+05 | -.144151E+04 |
| .316220E+03 | .510000E+05 | .505885E+05 | .411493E+03 |

MODULOS DE ELASTICIDADE TRANSFORMADOS

| LOG P | E TRANSFORMADO |
|--------|----------------|
| -3.000 | .49663591E+05 |
| -2.500 | .51073581E+05 |
| -2.000 | .52380248E+05 |
| -1.500 | .54066851E+05 |
| -1.000 | .60027693E+05 |
| -0.500 | .72351005E+05 |
| 0.000 | .86665396E+05 |
| 0.500 | .95156090E+05 |
| 1.000 | .98974592E+05 |
| 1.500 | .10043742E+06 |
| 2.000 | .10094183E+06 |

*** MATERIAL NUMERO 4 ***

DADO : CURVA DE RELAXACAO EXPERIMENTAL POR PONTOS

| TEMPO | VALORES DE Y |
|---------|--------------|
| 0.032 | 315000.000 |
| 0.100 | 314000.000 |
| 0.316 | 299000.000 |
| 1.000 | 285000.000 |
| 3.162 | 256000.000 |
| 10.000 | 226000.000 |
| 31.622 | 215000.000 |
| 100.000 | 206000.000 |
| 316.220 | 206000.000 |

COEFICIENTES S

.317861E+06 -.140576E+05 -.727805E+05 -.265749E+05 .238073E+04

CONTROLE DA RESOLUCAO DO SISTEMA

.138778E-16 -.485723E-16 -.277556E-16 -.693889E-17

CONTROLE DO AJUSTE

| TEMPO | Y-DADO | Y-AJUSTADO | DIFERENCA |
|-------------|-------------|-------------|--------------|
| .316220E-01 | .315000E+06 | .315773E+06 | -.772763E+03 |
| .100000E+00 | .314000E+06 | .311701E+06 | .229389E+04 |
| .316220E+00 | .299000E+06 | .301787E+06 | -.278689E+04 |
| .100000E+01 | .285000E+06 | .283847E+06 | .115300E+04 |
| .316220E+01 | .256000E+06 | .255293E+06 | .707231E+03 |
| .100000E+02 | .226000E+06 | .226973E+06 | -.972771E+03 |
| .316220E+02 | .215000E+06 | .214454E+06 | .545743E+03 |
| .100000E+03 | .206000E+06 | .206218E+06 | -.218285E+03 |
| .316220E+03 | .206000E+06 | .205954E+06 | .458536E+02 |

MODULOS DE ELASTICIDADE TRANSFORMADOS

| LOG P | E TRANSFORMADO |
|--------|----------------|
| -3.000 | .20730525E+06 |
| -2.500 | .20878838E+06 |
| -2.000 | .21367984E+06 |
| -1.500 | .22470720E+06 |
| -1.000 | .24262741E+06 |
| -0.500 | .26629828E+06 |
| 0.000 | .28888755E+06 |
| 0.500 | .30395483E+06 |
| 1.000 | .31216953E+06 |
| 1.500 | .31583610E+06 |
| 2.000 | .31719234E+06 |

***** 1595
***** 1595
***** 1595
***** 1595
***** 1595
***** 1595
***** 1595
***** 1595
***** 1595
***** 1595
***** 1595
***** 1595

0000000000 00 00 00000000
0000000000 000 00 000000000
00 0000 00 00 00 00
00 00000 00 00 00 00
0000000 00 000 00 00 00
0000000 00 00 000 00 00 00
00 00 000000 00 00 00
00 00 00000 00 00 00
0000000000 00 000 000000000
0000000000 00 00 00000000

1595 *****
1595 *****
1595 *****
1595 *****
1595 *****
1595 *****
1595 *****
1595 *****
1595 *****
1595 *****
1595 *****
1595 *****

APÊNDICE E: BIBLIOGRAFIA

1. Adey, R.A. e Brebbia, C.A., "Efficient Methods for Solution of Viscoelastic Problems", Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 99, No. EM6, December, 1973, p. 1119-1127.
2. Zienkiewicz, O.C., Watson, M., King, I.P., "A Numerical method of Visco-elastic Stress Analysis" - International Journal of Mechanical Science, Vol. 10, 1968, p. 807-827.
3. Lee, E.H., "Stress Analysis in Visco-elastic Bodies", Quarterly Applied Mathematics, 1955, p. 183-190.
4. Alfrey, T., "Non-Homogeneous Stresses in Visco-elastic Media", Quarterly Journal Applied Mathematics", Vol. 2, 1944, p. 113-119.
5. Tsien, H.S., "A Generalization of Alfrey's Theorem for Visco-elastic Media", Quarterly Journal of Applied Mathematics", Vol. 8, 1950, p. 104-106.
6. Cost, T.L., and Becker, E.B., "A Multidata Method of Approximate Laplace Transform Inversion", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 2, 1970, p. 207-219.
7. Gross, B., "Mathematical Structure of the Theories of Viscoelasticity", Hermann, Paris, 1953.
8. Lee, E.H., "Viscoelasticity", Handbook of Engineering Mechanics (edited by Flügge, W.), chapter 53, McGraw-Hill, New York, 1962.
9. Nowacki, W., "Théorie du Fluage", Eyrolles, Paris, 1965.
10. Flügge, W., "Viscoelasticity", Blaisdell Publishing Company, USA, 1967.
11. Rabotnov, Yu. N., "Creep Problems in Structural Members", North-Holland Publishing Company, Amsterdam-London, 1969.
12. Reinner, M., "Lectures on Theoretical Rheology", North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1960.
13. Langendonck, T. van, "Resistência dos Materiais - Tensões", Editora Científica, Rio de Janeiro, 1960.
14. Langendonck, T. van, "Resistência dos Materiais - Deformações I", Editora Científica, Rio de Janeiro, 1960.

15. Timoshenko, S.P., Goodier, J.N., "Theory of Elasticity, third Edition, McGraw-Hill Book Company.
16. Radok, J.R.M., "Visco-elastic Stress Analysis", Quarterly Applied Mathematics, 15, 1957, p. 198-202.
17. McHenry, D., "A New Aspect of Creep in Concrete and its Application to Design", Proceedings, American Society for Testing and Materials, Vol. 43, 1943.
18. Zienkiewicz, O.C., "The Finite Element Method in Engineering Science", second edition, McGraw-Hill Publishing Company Limited, 1971.
19. Brebbia, C.A., and Tottenham, H., (editors), "Finite Element Techniques", Stress Analysis Publication, 1971.
20. Desai, C.S., and Abel, J.F., "Introduction to the Finite Element Method", Van Nostrand Reinhold Company, 1972.
21. Brebbia, C.A., and Connor, J.J., "Fundamentals of Finite Element Techniques", Butterworths, London, 1973.
22. Folque, J.B., "Reologia dos Solos não Saturados", LNEC, memória nº 176, Lisboa, 1961.
23. Apostol, T.M., "Mathematical Analysis", Addison-Wesley Publishing Company, 1957.
24. Scott, E.J., "Laplace Transformation", Handbook of Engineering Mechanics (edited by Flügge, W.), Chapter 19, McGraw-Hill, New York, 1962.
25. Hildebrand, F.B., "Advanced Calculus for Applications", Prentice-Hall, 1962.
26. Carslaw H.S., and Jaeger, J.C., "Operational Methods in Applied Mathematics", 2nd edition, Dover Publications, 1947.
27. Churchill, R.V., "Operational Mathematics", 2nd edition, McGraw-Hill, 1958.
28. Arfken, G. "Mathematical Methods for Physicists", Academic Press, New York, 1968.
29. MacCollum, P.A., and Brown, B.F., "Laplace Transform Tables and Theorems", Holt, Rinehart and Winston, 1965.

30. Bellman, R.E., Kalaba, R.E. and Lockett, J.A., "Numerical Inversion of the Laplace transform", American Elsevier Publishing Company, New York, 1966.
31. Schapery, R.A. "Approximate Methods of Transform Inversion in Viscoelastic Stress Analysis", Proceedings, 4th U.S. National Congress in Applied Mechanics, Vol. 2, 1962, p. 1075.
32. Cost, T.L., "Approximate Laplace Transform Inversions in Viscoelastic Stress Analysis", AIAA Int., 2, 1964, p2157-2166.
33. Lee, E.H., Radok, J.R.M., and Woodward, W.B., "Stress Analysis for Linear Viscoelastic Materials", Transactions of the Society of Rheology, Vol. III, 1959, p. 41-49.
34. Brebbia, C.A., "Some Applications of Finite Elements for Flow Problems", Variational Methods in Engineering, Vol.I, edited by Brebbia C.A., and Tottenham H., Southampton, 1973.