



AUTARQUIA ASSOCIADA À UNIVERSIDADE
DE SÃO PAULO

OTIMIZAÇÃO DA FORMA GEOMÉTRICA DE ESTRUTURAS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

ERIC ROBALINHO

Dissertação apresentada como parte dos requisitos
para obtenção do Grau de Mestre em Ciências na
Área de Tecnologia Nuclear - Reatores.

Orientador:
Dr. Luciano Mendes Bezerra

São Paulo

1998

**OTIMIZAÇÃO DA FORMA GEOMÉTRICA
DE ESTRUTURAS UTILIZANDO O MÉTODO
DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

ERIC ROBALINHO



**Dissertação apresentada como parte
dos requisitos para obtenção do grau
de Mestre em Ciências na Área de
Tecnologia Nuclear - Reatores.**

**Orientador:
Dr. Luciano Mendes Bezerra**

A

Rossana,
Valéria e
Helena

e a

Walderez Liberatori Robalinho
(*in memoriam*)

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Luciano Mendes Bezerra, professor do Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Brasília, pela orientação, dedicação e imprescindível apoio para a realização deste trabalho.

Ao Prof. Dr. José Rubens Maiorino, diretor da Diretoria de Reatores do Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, pelo estímulo e pelos recursos e facilidades oferecidos para a conclusão deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Miguel Mattar Neto, chefe da Divisão de Equipamentos e Estruturas do Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, pelo apoio e pela compreensão no transcorrer deste trabalho.

Aos colegas de departamento Gerson Fainer, Carlos Alberto de Oliveira, Sergio Marcelino, Carlos Alexandre de Jesus Miranda, Julio Ricardo Barreto Cruz, Altair Antonio Faloppa, pelo apoio e oportunidade de convivência durante o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Araken dos Santos Werneck Rodrigues e ao Prof. Mestre Adriano Jacinto Carneiro Cardoso, pela imensa hospitalidade durante minhas viagens a Brasília.

Ao Prof. Mestre Mário César Faustino Honório, pelo incentivo e apoio com os softwares gráficos, além da incontestável hospitalidade durante minhas estadas em Brasília.

Ao Prof. Dr. Elédio José Robalinho, meu pai, pela orientação para a vida.

A minha esposa Rossana e minha filha Valéria, pelo imenso amor, compreensão e amizade.

Aos amigos Eduardo Matheus Robalinho, Raquel Liberatori Robalinho Teixeira, Henrique Drummond de Paula Lemos Teixeira, Danielle Liberatori Robalinho, Marisa Forte, Paolo Rocchiccioli, pelo apoio e compreensão no transcorrer deste trabalho.

A Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior - CAPES, pelo apoio financeiro.

OTIMIZAÇÃO DA FORMA GEOMÉTRICA DE ESTRUTURAS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Eric Robalinho

RESUMO

Neste trabalho, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) é utilizado para o estudo da caracterização ótima de geometrias de sistemas estruturais planos. Para isso, propõe-se uma formulação baseada no MEC e em técnicas de otimização. A caracterização ótima da geometria da estrutura é obtida com o auxílio de dados de referência que podem ser em termos de deslocamentos, deformações ou tensões fornecidos em pontos internos ou do contorno da estrutura (pontos de referência). O processo de caracterização ótima de uma estrutura, a fim de satisfazer os dados de referência, é feito através da minimização de uma função objetivo escrita como a diferença entre os dados de referência e as respectivas respostas calculadas (via MEC). Na formulação aqui proposta, a geometria da estrutura é expressa em termos de variáveis de projeto cujos valores são iterativamente modificados até que se obtenha uma configuração ideal de sorte que os valores de referência sejam satisfeitos. A utilização do MEC para este tipo de problema é adequada pois apenas o contorno do objeto, e a respectiva malha, devem ser modificados durante o processo de busca do mínimo. O mesmo já não pode ser dito quando o problema é formulado via elementos finitos; neste caso a discretização da estrutura é feita em todo o seu contínuo e, conseqüentemente, a atualização da malha, ao longo das iterações, revela-se bastante laboriosa. Nesta dissertação, a aproximação do contorno do objeto é feita com elementos quadráticos. Na aplicação do processo de otimização (minimização) utiliza-se um algoritmo quase-Newtoniano e portanto, necessita-se do cálculo do gradiente (ou sensibilidade) da função objetivo em relação às variáveis de projeto. Como a função objetivo pode ser escrita em termos de deslocamentos, deformações ou tensões, necessita-se portanto, do cálculo das sensibilidades destas grandezas em relação às variáveis de projeto. Neste trabalho estas sensibilidades são obtidas de forma implícita através da diferenciação das soluções fundamentais e da equação fundamental do MEC. Diversos exemplos simples ilustram a aplicação da formulação aqui proposta e os resultados obtidos são comentados e discutidos. Finalmente, algumas conclusões e sugestões para trabalhos futuros são também apresentadas.

SHAPE OPTIMIZATION TECHNIQUES USING BOUNDARY ELEMENT METHOD

Eric Robalinho

ABSTRACT

In this work, the Boundary Element Method (BEM) is applied for the study and optimum characterization of planar structural systems. A formulation, based in the BEM and in optimization techniques, is proposed then. The optimal characterization is obtained with the help of reference data that may be in terms of displacement, strain or stress maps available at internal or boundary points of the structural system (those points are called reference points). The process of optimal characterization of structures, satisfying the reference data, is done by minimizing an objective function written as a difference between the reference data and the respective response calculated via BEM. The geometry of the body is expressed in terms of design variables which values are modified iteratively until an ideal configuration, that satisfies the reference data, is obtained. The use of BEM in this kind of problem is adequate because only the boundary of the body and its respective mesh will be modified during the process of the minimum searching. The same is not true when using the Finite Element Method. In this case, the discretization (mesh) of the object involves the whole domain, and consequently, the mesh update of the object at each iteration, makes the procedure of minimum searching (ideal geometric configuration) computationally expensive and cumbersome. In this work the boundary element approximation is performed with quadratic elements. A quasi-Newton optimization method is used during the optimization procedure, requiring, then, the evaluation of the objective function gradient (sensitivities) with respect to the design variables. As the objective function can be written in terms of displacement, strain or stress, it requires the evaluation of their respective sensitivities with respect to the design variables. The sensitivities, in this work, are obtained by implicit differentiation of the fundamental solutions and the fundamental equation of the BEM. Many simple examples illustrate the implementation of the proposed formulation and the respective results are showed and discussed. Finally, some conclusions and suggestions for future works in this area are presented.

SUMÁRIO

1	Introdução	1
	1.1 Motivação	3
	1.2 Aspectos Matemáticos	5
	1.3 Formulação do Problema	10
	1.4 Objetivos	11
2	Revisão Bibliográfica e Estratégia Adotada	15
	2.1 Introdução	15
	2.2 Revisão Bibliográfica	16
	2.3 Esquema Adotado	19
	2.4 Instabilidade e Funções de Especificação	23
3	Método Numérico Utilizado	25
	3.1 Introdução	25
	3.2 Métodos Numéricos na Engenharia	26
	3.3 Vantagens do MEC na Otimização de Forma	29
	3.4 Equações Integrais do Contorno	31
	3.5 Implementação Numérica do MEC	39
4	Otimização	47
	4.1 Introdução	47
	4.2 A Otimização de Formas em Estruturas	48
	4.3 O Método BFGS	54
	4.4 Método Heurístico Adotado	59
5	Cálculo das Sensibilidades	61
	5.1 Introdução	61
	5.2 Sensibilidades dos <i>Kernels</i>	64
	5.3 Análise das Singularidades	67
6	Aplicações Numéricas	71
	6.1 Introdução	71
	6.2 Viga sob Carregamento Uniforme	73
	6.3 Painel Retangular sob Tração Constante	77
	6.4 Concordância de Raios em <i>Lug</i>	81
	6.5 Chapa Tracionada com Furo Circular	86
	6.6 Filete Tracionado	91

7	Conclusões Finais e Sugestões	95
	7.1 Conclusões	95
	7.2 Sugestões para Trabalhos Futuros	98
8	APÊNDICE 1 - Obtenção das Soluções Fundamentais da Elastostática	99
9	APÊNDICE 2 - Fluxogramas e Algoritmos	108
10	Referências Bibliográficas	114

LISTA DE TABELAS

Tabelas

6.1	Análise da sensibilidade dos deslocamentos da viga simplesmente apoiada. Exemplo 1.	76
6.2	Resultados obtidos para o exemplo 2.	80
6.3	Resultados obtidos para o exemplo 3, caso-1.	85
6.4	Resultados obtidos para o exemplo 3, caso-2.	85
6.5	Resultados obtidos para o caso da determinação da posição do furo circular, para o exemplo 4.	88
6.6	Resultados obtidos para o caso da determinação do raio e da posição do furo circular, para o exemplo 4.	90
6.7	Resultados obtidos para o exemplo 5.	94

LISTA DE TABELAS

Tabelas

6.1	Análise da sensibilidade dos deslocamentos da viga simplesmente apoiada. Exemplo 1.	76
6.2	Resultados obtidos para o exemplo 2.	80
6.3	Resultados obtidos para o exemplo 3, caso-1.	85
6.4	Resultados obtidos para o exemplo 3, caso-2.	85
6.5	Resultados obtidos para o caso da determinação da posição do furo circular, para o exemplo 4.	88
6.6	Resultados obtidos para o caso da determinação do raio e da posição do furo circular, para o exemplo 4.	90
6.7	Resultados obtidos para o exemplo 5.	94

LISTA DE FIGURAS

Figuras

1.1	Região do suporte com alta concentração de tensões. * : x_k : pontos de referência.	2
1.2	Problema direto em elastostática.	8
2.1	Aproximação entre modelo e realidade, para otimização de configuração geométrica 2D.	23
3.1	Componente discretizado em células (MDF).	26
3.2	Componente discretizado com o MEF.	28
3.3	Componente discretizado em elementos de contorno.	28
3.4	Corpo bidimensional com domínio Ω e contorno Γ .	31
3.5	Função delta de Dirac.	32
3.6	Integral da função delta de Dirac em parte do domínio bidimensional.	33
3.7	Corpo 2D sujeito a condições de contorno preestabelecidas.	37
3.8	Problema físico e modelo em Elementos de Contorno.	40
3.9	Discretização em Elementos de Contorno para problemas 2D. (a)Elementos constantes; (b)Elementos lineares; (c)Elementos quadráticos.	41
3.10	Pontos fonte a diferentes distâncias do elemento de contorno que está sendo integrado.	43
3.11	Funções $h^{(i)}(\rho)$.	43
3.12	Elemento de Contorno quadrático, contínuo, e sua representação através do Jacobiano.	44
4.1	Funções de barreira interna.	50
4.2	Minimização através de interpolação parabólica inversa. A aproximação do mínimo (ponto e) da função original (linha contínua) é feita pelas parábolas a-b-c e a-b-d .	56

4.3	Algoritmo de otimização.	60
6.1	Metade de uma viga simplesmente apoiada com carregamento uniformemente distribuído.	74
6.2	Malha ($m=1, n=1$), condições de contorno e geometria do exemplo 1.	75
6.3	Configuração inicial do exemplo 2 (geometria exata).	77
6.4	Convergência da análise da 1ª. variação geométrica do exemplo 2.	78
6.5	Convergência da análise da 2ª. variação geométrica do exemplo 2.	78
6.6	Convergência da análise da 3ª. variação geométrica do exemplo 2.	79
6.7	Convergência da análise da 4ª. variação geométrica do exemplo 2.	79
6.8	Condições de contorno e geometria do exemplo 3.	82
6.9	Geometrias inicial e final para o caso-1 do exemplo 3.	83
6.10	Geometrias inicial e final para o caso-2 do exemplo 3.	84
6.11	Condições de contorno e geometria do exemplo 4.	86
6.12	Numeração dos nós do contorno interno, com sentido horário, do furo circular interno da chapa quadrada, do exemplo 4.	87
6.13	Convergência do problema de determinação da posição do furo circular - exemplo 4, $x_{1, inicial} = 6.0$, $x_{2, inicial} = 4.0$.	87
6.14	Convergência do problema de determinação da posição e do raio do furo circular - exemplo 4, $x_{1, inicial} = 3.0$, $x_{2, inicial} = 7.0$, $r_{inicial} = 0.42m$ ($d=0.84m$).	89
6.15	Condições de contorno e geometria inicial do exemplo 5.	92
6.16	Geometrias iniciais e finais para o problema do filete tracionado.	93
9.1	Fluxograma do programa MEC-direto.	109
9.2	Fluxograma do programa MEC-inverso.	111
9.3	Fluxograma do programa MEC-inverso/BFGS.	112

LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIACÕES

A notação a seguir é utilizada neste trabalho, salvo indicação contrária (é utilizada a notação indicial, logo, a vírgula no sub-índice indica derivação; o uso da barra (por exemplo: \bar{u}), denota um valor preestabelecido para aquela variável; o asterisco no super-índice (por exemplo: u^*), denota a solução fundamental relativa àquela variável).

Ω	domínio do problema
Ω''	domínio desconhecido
Γ	contorno externo de um objeto
Γ_n	contorno externo com prescrição de deslocamentos ou trações
Γ''	contorno desconhecido de um objeto
σ_{ij}	tensor de tensões
b_j	forças de corpo
λ	constante de Lamé
δ_{ij}	delta de Kronecker
ε_{ij}	tensor de deformações
μ	constante de Lamé (módulo de cisalhamento)
u_{ij}	vetor deslocamento
t_i	forças de superfície
n_j	vetor normal à superfície
x	pontos do domínio
y	pontos do contorno
i, j, k, l	índices com valores (1,2) para problemas planos
φ_{ik}	resposta do modelo assumido
$\hat{\varphi}_{ik}$	valores de referência (deslocamentos, deformações ou tensões)
\mathbb{R}^2	domínio bidimensional

A	operador matemático
\bar{A}	região admissível
$S^{(k)}$	direção de busca
$\alpha^{(k)}$	tamanho do passo sobre uma direção de busca linear
$f(z)$	função objetivo
$F(z, \mathfrak{R})$	função objetivo aumentada ($\mathfrak{S}(z)$)
$P^{(0)}, P^{(1)}, \dots, P^{(k+1)}$	aproximações da inversa da matriz Hessiana da função objetivo
H	matriz Hessiana
z	vetor modelo
z^0	vetor modelo inicial
z^T	vetor modelo transposto
ν	coeficiente de Poisson
E	módulo de Young
ξ_i	ponto de aplicação de carregamento do contorno
$h^{(i)}$	funções interpoladoras
ρ	coordenadas naturais das funções interpoladoras
θ	função de penalidade inversa
C	restrições geométricas
\mathfrak{R}	parâmetro de penalidade
J	operador Jacobiano
I_l	vetor que define o deslocamento de uma unidade na direção l
v	vetor das incógnitas
b	vetor dos valores conhecidos (trações e deslocamentos)
F, G	matrizes do sistema reordenado

∂	operador diferencial parcial
∇	operador gradiente
∇^2	operador Laplaciano

Abreviações:

BFGS	Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno
DFP	Davidon-Fletcher-Powell
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
MDF	Método das Diferenças Finitas
MDI	Método da Derivação Implícita
PVC	Problemas de Valores de Contorno
<i>BIE</i>	<i>Boundary Integral Equations</i>
MEC-direto	Programa de Análise Direta, via MEC
MEC-inverso	Programa de Análise Inversa, via MEC

O propósito central da análise estrutural é obviamente o de prever o comportamento das estruturas. Para isso, num projeto estrutural os resultados da análise estrutural são usados com o intuito de se conhecer a adequabilidade e os méritos relativos aos diversos projetos alternativos em relação a critérios de projetos estabelecidos (SCHMIT, 1984). Por exemplo, na análise de tensão de reatores nucleares pelo código ASME (1989), as intensidades de tensão devem ser calculadas pelo critério de Tresca (CALLADINE, 1969) e depois de adequadamente classificadas devem ser limitadas a valores admissíveis - valores estes que dependem do material e das condições operacionais para as quais o componente nuclear está sendo projetado. Do ponto de vista de tensões, um projeto de um componente nuclear será considerado melhor quanto mais próximos (inferiormente) estiverem os valores das intensidades de tensão dos respectivos valores admissíveis. A existência de métodos numéricos genéricos e confiáveis em conjunção com o contínuo aumento do poder de computação digital a preços cada vez mais baixos e velocidades cada vez maiores, nos levou naturalmente a um significativo incremento nas pesquisas em otimização estrutural.

Entretanto, dentro da otimização estrutural surge um tipo de problema conhecido como otimização de forma (*shape optimization*) que consiste em extremizar uma função objetivo variando a forma da estrutura, mais especificamente, a forma do contorno da estrutura. Como é conhecido, todo processo de otimização é caracterizado por uma função objetivo e por variáveis de projeto. Neste caso as variáveis de projeto do processo de otimização são parâmetros que controlam a forma geométrica da estrutura ou do componente estrutural (BARRA, 1990). A Fig. 1.1 ilustra o seguinte exemplo: qual a configuração ideal de um suporte para um determinado componente nuclear que deve trabalhar sob determinadas condições? A resposta a tal pergunta seria de grande ajuda para um engenheiro projetista de centrais nucleares, notadamente se tal resposta fosse obtida de forma rápida e independente da experiência do projetista. Na prática, quando um projetista

lança mão das facilidades computacionais e analisa diversas concepções estruturais e seleciona, digamos, aquela cuja tensão em determinado ponto seja menor, porém o mais próximo possível, da tensão de escoamento, ele está otimizando seu projeto segundo um critério.

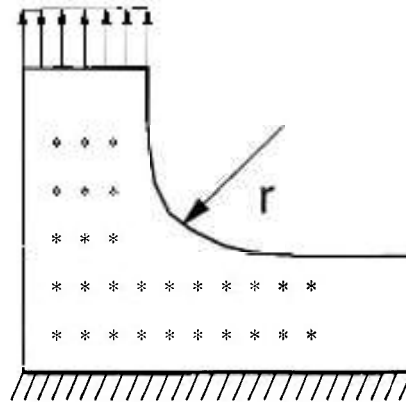


Figura 1.1 Região do suporte com alta concentração de tensões. $*$: x_k : pontos de referência.

Convém notar que o problema de otimização de forma pode ser aplicado tanto para estruturas discretas - aquelas formadas por barras (uma dimensão prevalece sobre as demais), como pórticos de edifícios e treliças- ou para estruturas contínuas - entendidas aqui como aquelas definidas por superfícies ou volumes (uma dimensão não predomina sobre as outras) como por exemplo um vaso de pressão de um reator PWR. Existem diferenças (VANDERPLAATS, 1984) e similaridades na formulação matemática para tratar a otimização de uma ou de outra estrutura, contudo é bom ressaltar que basicamente utilizam-se, em ambos os casos, formulações com métodos numéricos tais como o Método dos Elementos Finitos (MEF) ou, mais recentemente, o Método dos Elementos de Contorno (MEC). A aplicação destes métodos geralmente é associada a técnicas de otimização. Cada método apresenta, naturalmente, vantagens e desvantagens peculiares, dependendo obviamente do caso a ser analisado.

A formulação dos problemas de otimização de forma as vezes difere da formulação clássica de um Problema de Valores de Contorno (PVC). Na forma clássica, um PVC

apresenta seu domínio matemático Ω , inclusive sua fronteira Γ , além dos valores de contorno impostos na fronteira Γ sempre bem definidos do ponto de vista matemático. Observa-se que na Física Matemática tais problemas “bem definidos” são considerados problemas bem-postos (*well-posed*) e diretos. Quando se deseja otimizar uma forma estrutural a fim de se obter deslocamentos (deformações ou tensões) específicos em determinados pontos, além do desconhecimento matemático de Ω (e conseqüentemente Γ), valores extras (que podem ser valores internos ou de superfície) são geralmente especificados. Na otimização de forma das estruturas desejamos encontrar domínios (e fronteiras) que levem determinadas respostas (*outputs*) a valores ótimos em relação a um conjunto de valores ou critérios de projeto estabelecidos. Estamos portanto interessados em conhecer o domínio ou parte do domínio matemático Ω do problema e neste caso dizemos que se trata de um problema de identificação geométrica. Este tipo de problema geralmente não é bem-posto ou direto e é conhecido na literatura como problema inverso de identificação (BAUMEISTER, 1981). Portanto, neste caso tratamos de um problema de identificação de uma geometria desconhecida, conhecendo-se não só as condições de contorno como adicionalmente alguns outros valores de referência em pontos específicos.

Este trabalho trata, portanto, do desenvolvimento de uma formulação numérica e de um procedimento computacional em campo elastostático para a otimização da forma de estruturas bidimensionais.

1.1 *Motivação*

No que diz respeito aos requisitos de segurança e confiabilidade, os equipamentos destinados à indústria nuclear merecem cuidados e atenções especiais (ASME, 1989). A segurança na construção e operação de centrais nucleares é condição básica para a preservação do meio ambiente e para a proteção do ser humano contra os efeitos indesejáveis da radiação nuclear. Para isso, torna-se essencial que no projeto e na análise apropriada de um equipamento se leve em conta todas as influências e condições de

operação a que tal equipamento ficará sujeito. Em muitos casos, entretanto, é perfeitamente justificável levar-se em consideração, além da boa funcionalidade e rigidez do equipamento, a busca da otimização de outros parâmetros de projeto (por exemplo, a forma) com o objetivo de se produzir um equipamento (ou parte dele) com as melhores características possíveis (STELTZER, 1984).

Da literatura consultada (ver §2.2), o MEF parece ser a ferramenta mais usada para a otimização de estruturas, inclusive estruturas contínuas. A otimização de forma de estruturas contínuas (superfícies e volumes) tem recebido pouca atenção da comunidade científica se comparada com a quantidade de publicações em otimização estrutural dedicadas às estruturas ditas “discretas”, tais como pórticos e treliças (RICKETTS & ZIENKIEWICZ, 1984). É curioso observar que na otimização de forma das estruturas contínuas as variáveis são geralmente relacionadas com a topologia; portanto, são em menor número quando comparadas com a otimização de estruturas discretas cujas variáveis de projeto geralmente são as dimensões dos membros (vigas, colunas e barras), configuração geométrica da estrutura, topologia etc. Isso, entretanto, é justificável observando-se que o MEF é mais eficiente na otimização de estruturas discretas do que em estruturas contínuas (superfícies e volumes).

Apesar do relativo sucesso do MEF na otimização, em geral só recentemente alguns pesquisadores, ver MELNIKOV & TITARENKO (1995) e SAIGAL et al. (1989), entre outros, têm despertado a comunidade científica para o problema de otimização de forma com o uso do MEC. Esse atraso se deve basicamente a dois fatores: o MEC é de concepção muito mais recente que o MEF, e além disso possui uma complexidade matemática muito maior quando comparada com a simplicidade matemática exigida numa formulação por elementos finitos.

Observa-se ainda que geralmente os métodos de otimização de forma envolvem funções objetivo não-lineares com as restrições nas variáveis de projeto podendo ser lineares ou mesmo não-lineares (RICKETTS & ZIENKIEWICZ, 1984). O objetivo em minimizar a função objetivo numa otimização de forma é achar uma forma Γ tal que determinados valores de referência possam ser satisfeitos. Geralmente, este tipo de

problema é matematicamente mal-posto e para resolvê-lo, usam-se técnicas de otimização que necessitam do cálculo das sensibilidades.

Dito isto, portanto, podemos dizer que diversas foram as motivações para desenvolver este trabalho. Entre elas podemos citar o desafio em conhecer e solucionar um problema inverso de otimização de forma, problema este com potencialidade de aplicação na otimização de forma de estruturas contínuas de equipamentos nucleares; os desafios em buscar métodos mais eficientes de otimização de forma usando um método numérico de desenvolvimento mais recente como é o caso do MEC em vez do MEF e além disso, buscar um cálculo mais exato das sensibilidades via derivação implícita das soluções fundamentais (*sensitivity kernels*) do MEC.

Observa-se que o presente trabalho ainda introduz, no âmbito do IPEN, uma formulação numérico-computacional pioneira com o uso do Método dos Elementos de Contorno e demonstra a aplicabilidade da mesma na caracterização adequada da configuração geométrica de componentes e sistemas estruturais planos. Embora este trabalho seja apenas uma pequena contribuição dentro de um assunto tão abrangente, acreditamos que a formulação ora proposta possa despertar o interesse sobre o assunto do projetista estrutural de componentes de reatores nucleares a usar ou pesquisar a otimização de forma. Confiamos ainda que a energia nuclear será, num futuro próximo, uma alternativa concreta para suprir as necessidades de demanda de energia da humanidade (COHEN, 1990), e que um projeto otimizado de um equipamento nuclear pode propiciar um melhor desempenho sem contudo comprometer a segurança nuclear.

1.2 Aspectos matemáticos

O comportamento da maioria dos sistemas estudados pela Física Matemática é determinado através de uma equação diferencial (ordinária ou parcial) e de valores de

contorno adicionais chamados de condições de contorno. Tais problemas são comumente chamados de problemas de valores de contorno (PVC).

Do ponto de vista matemático, uma equação diferencial que governa um problema, definida em um certo domínio matemático, admite um número infinito de soluções. Estas soluções são, na realidade, combinações de funções pertencentes a um conjunto de possíveis soluções para aquela equação diferencial. As condições de contorno selecionam, do conjunto das possíveis soluções, a solução do problema governado por aquela equação diferencial sob aquelas específicas condições de contorno (ROMANOV, 1987). As condições de contorno para um PVC são, portanto, de extrema importância e devem ser definidas de “forma apropriada”. Entende-se por condições de contorno definidas de “forma apropriada” aqueles valores de contorno definidos em partes disjuntas e complementares do contorno Γ , do objeto Ω . Por exemplo, forças superficiais (não nulas ou mesmo nulas) podem estar atuando na superfície de uma estrutura Ω , numa região Γ_1 , enquanto deslocamentos (nulos ou não, apoios fixos ou móveis), podem ser definidos em Γ_2 . Tais condições de contorno podem ser consideradas definidas de forma apropriada se $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ e $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

HADAMARD (1923), estudando um problema de Cauchy relativo a equações diferenciais hiperbólicas, foi o primeiro a usar a expressão “problema corretamente-posto” para aqueles problemas cujas condições de contorno estão definidas de forma apropriada e portanto propiciam uma e somente uma solução da equação diferencial que governa o problema físico. Na literatura (TIKHONOV & ARSENIN, 1977) tal problema é também conhecido como problema “bem-posto” ou ainda “problema direto”.

Em contraposição à denominação de problema “bem-posto” ou direto existe também o problema “mal-posto”, ou mais comumente conhecido na literatura como problema inverso. Entretanto, segundo HENSEL (1991), dependendo para quem se faça a pergunta sobre o que é um problema inverso, teremos respostas diferentes. Um engenheiro civil, um geofísico, um matemático ou ainda um engenheiro mecânico certamente possuem concepções diferentes do que vem a ser um problema inverso. Apesar das diferentes

concepções, HENSEL (1991) observa que algumas semelhanças podem ser traduzidas numa linguagem mais universal, a linguagem matemática.

Portanto, para entender melhor o que vem a ser um problema “bem-posto” e conseqüentemente o que vem a ser também um problema inverso, considere a Fig. 1.2. Em tal figura, considere o domínio matemático Ω , como sendo homogêneo, isotrópico e linear elástico, representando um sólido num campo elastostático bidimensional com contorno Γ . Em elastostática, um problema direto tem os seguintes itens bem definidos (KUBO, 1988):

- 1) O domínio de interesse, Ω , e as respectivas fronteiras ou contornos, Γ .
- 2) A equação (diferencial) que governa o problema, válida no domínio definido anteriormente.
- 3) As condições de contorno definidas de forma apropriada em todo o contorno Γ .
- 4) As propriedades dos materiais envolvidos na equação que governa o problema.
- 5) As forças e outros *inputs* atuando no sólido.

Sob as condições expressas nos itens de (1) a (5) descritos acima um problema de elastostática pode ser então classificado como “bem-posto” ou “direto”.

As equações que regem o problema direto na elastostática, juntamente com as condições de contorno prescritas em Γ_1 e Γ_2 (ver Fig. 1.2) podem ser escritas como

$$\sigma_{ij,j}(x) = -b_j(x) \quad ; \forall x \in \Omega \quad (1.1)$$

$$\sigma_{ij}(x) = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{ll}(x) + 2\mu \varepsilon_{ij}(x) \quad ; \forall x \in \Omega \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_{ij}(x) = \frac{1}{2} [u_{i,j}(x) + u_{j,i}(x)] \quad ; \forall x \in \Omega \quad (1.3)$$

$$\sigma_{ij}(y) n_j(y) = \bar{t}_i \quad ; \forall y \in \Gamma_1 \tag{1.4}$$

$$u_i(y) = \bar{u}_i \quad ; \forall y \in \Gamma_2 \tag{1.5}$$

A Eq. 1.1 corresponde à equação de equilíbrio com os pontos $x \in \Omega$; onde Ω é o conjunto de todos os pontos que definem de forma completa o domínio do sólido; σ_{ij} é o tensor de tensões; b_j são as forças de corpo e os índices $i, j, k, l = 1, 2$ para problemas planos. A Eq. 1.2 representa a lei de Hooke; ϵ_{ij} é o tensor de deformações; λ e μ são as constantes de Lamé; δ_{ij} é o delta de Kronecker. A Eq. 1.3 é a equação cinemática: relaciona as pequenas deformações ϵ_{ij} com os deslocamentos u_i . A Eq. 1.4 descreve as condições de contorno em termos de forças de superfícies \bar{t}_i atuando no contorno $y \in \Gamma_1$. A Eq. 1.5 descreve os deslocamentos \bar{u}_i prescritos atuando nos pontos de contorno $y \in \Gamma_2$. Observe que Γ denota o conjunto de todos os pontos que definem a fronteira (linha imaginária ou superfície) do sólido ($\Gamma \subset \Omega$). n_j representa as componentes da normal externa à fronteira Γ . A barra denota condições de contorno preestabelecidas.

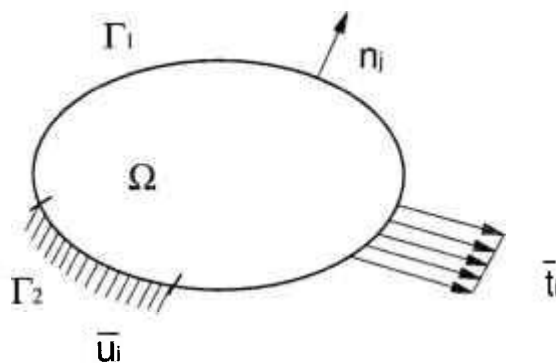


Figura 1.2 Problema direto em elastostática.

Portanto, se as condições de contorno ou mesmo a geometria do contorno (ver item 1 definido anteriormente - no caso da forma geométrica de um componente mecânico a ser otimizada) não estão bem definidas o problema passa a ser classificado como “problema mal-posto” ou “inverso”. Existem ainda outras categorias de problemas inversos, como por exemplo, aqueles onde se deseja encontrar uma parte do domínio matemático ou determinar um coeficiente que aparece na equação diferencial que governa um problema físico, ou mesmo encontrar a equação do problema.

Em elastostática, os estados de deslocamento, deformação e tensão dentro de um objeto não podem ser conhecidos se o problema estiver mal-posto. Por exemplo, se o domínio do objeto Ω não está definido de forma completa, ou se uma condição de contorno, pelo menos em uma pequena região da fronteira Γ , está faltando ou está definida de forma não unívoca, ou mesmo se uma combinação de todas estas situações existir, então o problema é classificado como mal-posto. Se uma das condições especificadas nos itens anteriores de (1) a (5) estiver faltando ou definida de forma ambígua, então o problema não pode ser resolvido como um problema clássico de valor de contorno.

Um exemplo seria se na Fig. 1.2 tanto o valor da força de superfície \bar{t}_i como os deslocamentos de \bar{u}_i estivessem definidos numa só região, digamos Γ_2 , então o problema seria mal-posto. Na prática, para se superar a falta de definição de um (alguns) dos itens de (1) a (5) anteriormente citados, pode-se ter disponíveis condições de contorno ambíguas, definidas em pontos onde as condições de contorno estavam antes definidas de forma apropriada; uma outra alternativa seria a disponibilidade de informações extras em pontos no interior do domínio Ω do objeto. Neste último caso, o problema poderia ser considerado como um problema de valores internos, em contraposição aos problemas de valores de contorno, cujos valores são especificados no contorno e não no interior do corpo.

1.3 Formulação do problema

Suponha que se deseje conhecer a forma de um objeto a fim de que o mesmo possa obedecer a certos critérios de projeto estabelecidos ou, do ponto de vista da análise estrutural, vamos assumir que se deseje conhecer a forma de uma peça (ou mesmo parte dela) tal que seus deslocamentos, deformações ou tensões em pontos críticos assumam determinados valores. Procura-se portanto uma forma adequada, ótima, desta estrutura contínua para que em determinados pontos de observação (internos ou no contorno) os valores de deslocamentos, deformações ou tensões em campo elastostático possam alcançar determinados valores de referência.

Matematicamente falando, considere que se deseje otimizar a forma do domínio Ω e conseqüentemente também da fronteira Γ do objeto representado na Fig. 1.2 a fim de que em determinados pontos, determinados valores sejam obtidos. Portanto a forma do domínio matemático deste problema é desconhecida. Procura-se portanto a forma desconhecida deste domínio que chamaremos de Ω'' (e o correspondente contorno Γ''). A determinação deste domínio desconhecido Ω'' constitui um problema inverso. Neste caso as expressões matemáticas que regem o nosso problema em campo elastostático podem ser escritas como

$$\sigma_{ij,j}(x) = -b_j(x) \quad ; \forall x \in \Omega'' \quad (1.6)$$

$$\sigma_{ij}(x) = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{ii}(x) + 2\mu \varepsilon_{ij}(x) \quad ; \forall x \in \Omega'' \quad (1.7)$$

$$\varepsilon_{ij}(x) = \frac{1}{2} [u_{i,j}(x) + u_{j,i}(x)] \quad ; \forall x \in \Omega'' \quad (1.8)$$

$$\sigma_{ij}(y) n_j(y) = t_i \quad ; \forall y \in \Gamma'' \quad (1.9)$$

$$u_i(y) = \bar{u}_i \quad ; \forall y \in \Gamma_2'' \quad (1.10)$$

$$\varphi_{ik} = \hat{\varphi}_{ik} = \hat{\varphi}_i(x_k) \quad ; x_k \in \Omega'' \text{ ou } x_k \in \Gamma'' \quad (1.11)$$

Note que estas expressões diferem um pouco das equações (1.1) a (1.5) que regem um problema clássico de valores de contorno normalmente encontrado em elastostática. Nas equações acima δ_{ij} , i, j, k, l, σ_{ij} , ϵ_{ij} , t_i , u_i , b_j , n_j , x , y , λ e μ representam as grandezas já definidas anteriormente. Apesar das equações (1.6) a (1.10) significarem o mesmo que as equações (1.1) a (1.5), a diferença agora é que o domínio matemático Ω'' (e as fronteiras Γ_1'' e Γ_2'' que são desconhecidas) deve ser determinado tendo em consideração que em pontos de observação $x_k \in \Omega''$ (ou $x_k \in \Gamma''$) alguns valores de referência $\hat{\varphi}_{ik}$ (na direção i e nos pontos $k=1, m$) devem ser satisfeitos, ver Eq. 1.11. Estes valores de referência $\hat{\varphi}_{ik}$ podem ser, em elastostática, deslocamentos, deformações ou tensões. Observa-se ainda que as k localizações podem estar tanto no domínio como na fronteira ou contorno do objeto, inclusive em trechos onde outras condições de contorno já estejam definidas. Portanto, este problema é um problema inverso desde que: (a) a sua geometria (domínio e contorno, Ω'' e Γ'' respectivamente) é desconhecida; (b) as condições de contorno podem estar definidas de forma ambígua desde que os pontos de observação x_k estejam também em partes da fronteira onde outras condições de contorno foram definidas de forma apropriada; (c) os pontos de observação x_k podem também estar no domínio, ou seja, podem ser pontos internos ao invés de valores discretos especificados no contorno.

1.4 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é, portanto, o desenvolvimento de uma formulação numérico-computacional para obtenção da otimização de forma (*shape optimization*) em estruturas contínuas no espaço \mathbb{R}^2 . Consideraremos que a estrutura contínua está em regime elástico linear, com carregamento estático (regime elastostático).

A forma da estrutura deverá ser otimizada sob determinados critérios de projeto a serem obedecidos tais como especificações de deslocamentos (deformações ou tensões). Usar-se-á para isso uma formulação com o método dos elementos de contorno e técnicas de otimização de primeira ordem, além do cálculo, com maior precisão, das sensibilidades.

A forma do domínio contínuo da estrutura a ser determinada será expressa em termos de alguns parâmetros matemáticos ou variáveis de projeto (z). Como explicado anteriormente, este problema de identificação de geometria, a fim de satisfazer determinados valores de referência, constitui-se em um problema inverso. A otimização de primeira ordem será usada na formulação aqui proposta. Tal otimização, exigirá naturalmente o conhecimento das derivadas primeiras da função objetivo e em seguida o cálculo das sensibilidades em relação às variáveis de projeto (z). Neste trabalho as sensibilidades serão obtidas a partir da derivação exata das soluções fundamentais do método dos elementos de contorno.

Na fase final da formulação aqui proposta implementaremos os algoritmos da formulação através da linguagem FORTRAN-77. O desempenho da formulação proposta será testado com alguns exemplos. Esta dissertação está dividida em sete capítulos e dois apêndices.

Neste primeiro capítulo apresentamos as motivações para o desenvolvimento do trabalho, os aspectos matemáticos do problema e sua formulação. Relacionamos, nestes tópicos, o problema geral de valores de contorno ao problema de identificação de forma, também chamado de problema inverso.

No segundo capítulo uma pequena revisão da literatura é apresentada, com o intuito de orientação bibliográfica e de enquadramento deste trabalho dentro do que existe na literatura sobre o tópico estudado nesta tese. Também ainda neste capítulo detalhamos o esquema adotado para a solução do problema de otimização de forma e abordamos alguns aspectos concernentes a instabilidade do tratamento numérico de problemas de identificação de forma.

O método utilizado (Método dos Elementos de Contorno - MEC) é descrito no terceiro capítulo, assim como uma abordagem geral dos principais métodos numéricos atualmente utilizados em análise estrutural. Ainda neste capítulo também são comentadas as vantagens do uso do MEC, com relação aos outros métodos tradicionais de análise estrutural no que diz respeito ao uso do MEC especificamente para problemas de otimização de forma em estruturas contínuas. A formalização do problema é também elaborada através das Equações Integrais do Contorno inerentes ao MEC. A implementação numérica do MEC será esquematizada no final deste capítulo.

O método de otimização a ser empregado na formulação descrita nesta tese é explicado no Capítulo 4, assim como as funções de penalização utilizadas em conjunto com as equações de restrições das variáveis. Estes limites geométricos sobre as variáveis de projeto são incorporados à função objetivo original, resultando numa função objetivo aumentada. Discutimos ainda no final deste capítulo um método heurístico utilizado que mantém o conjunto de variáveis de projeto dentro de regiões factíveis.

O Capítulo 5 traz os cálculos das sensibilidades via Método de Derivação Implícita. O método utilizado no trabalho exige o cálculo das derivadas das soluções fundamentais, o que implica em conceitos matemáticos mais arrojados de cálculo avançado, assim como a eliminação de singularidades dos *kernels*, que surgem desse procedimento. Este capítulo traz uma análise dessas singularidades.

No sexto capítulo apresentamos uma série de exemplos que tentam mostrar a eficiência, a convergência e a precisão da formulação desenvolvida. Algumas comparações são feitas a fim de se verificar a validade da formulação proposta para a resolução de problemas de identificação de formas, além de demonstrar a exatidão do cálculo das sensibilidades. Espera-se que os resultados obtidos possam certamente servir como estímulo a novos estudos e desenvolvimentos.

Finalmente, sintetizamos no Capítulo 7 alguns resultados e discussões bem como apresentamos algumas conclusões e sugestões para trabalhos futuros nessa mesma linha de pesquisa de otimização de forma. O Apêndice 1 traz um esclarecimento matemático de

como obter as soluções fundamentais da elastostática no MEC, visando popularizar a obtenção daquelas soluções. O Apêndice 2 apresenta os fluxogramas e os algoritmos utilizados no trabalho e traz uma descrição resumida de cada subrotina utilizada ou desenvolvida neste trabalho.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E ESTRATÉGIA ADOTADA

2.1 *Introdução*

Não existe nenhum método genérico disponível na literatura para a resolução de problemas que tratam de achar uma configuração geométrica de uma estrutura contínua a fim de que determinados valores de referência (internos ou de contorno) sejam satisfeitos. A razão da falta de um método genérico é que os problemas de otimização de forma geralmente são problemas inversos que se apresentam numa diversidade muito grande (NOVAK, 1997; KUBO, 1988). Para problemas inversos mais simples, soluções analíticas podem ser encontradas na literatura (BURGGRAF, 1964; IMBER & KHAN, 1972). Entretanto, para geometrias mais complexas, diversos métodos geralmente utilizados em problemas diretos, têm sido gradativamente incorporados a algoritmos para resolução de problemas inversos.

Nota-se a partir da literatura consultada que o Método dos Elementos Finitos e o Método dos Elementos de Contorno, devido aos seus respectivos sucessos em tratar problemas diretos de valores de contorno, vêm sendo vagarosamente incorporados a esquemas numéricos destinados a resolução de problemas inversos. Em geral estes esquemas dão preferência a associações entre estes métodos e a técnicas de otimização determinísticas. Esta combinação vem se revelando mais robusta que as formulações variacionais (ZABARAS et al., 1989b). O Método dos Elementos de Contorno parece revelar certas vantagens em relação aos métodos cuja discretização de todo o domínio do objeto em estudo é essencial. Desde a década de 60 (BREBBIA et al., 1984), o Método dos Elementos de Contorno vem gradualmente provando ser também uma técnica numérica de extraordinário poder para resolver PVC em várias áreas da Engenharia e da Ciência (MELNIKOV & TITARENKO, 1995). Entretanto, o desenvolvimento deste método para aplicações em problemas inversos (e especificamente problemas de otimização de formas)

é assunto bastante recente (TANAKA & MASUDA, 1986; BEZERRA, 1993; ZABARAS et al., 1989a; INGHAM & WROBEL, 1997).

Neste capítulo faremos uma revisão dos principais trabalhos e contribuições disponíveis na literatura, analisando de forma reduzida os diferentes esquemas numéricos e escolhendo uma estratégia para resolver nosso problema.

2.2 Revisão bibliográfica

Começamos pela resolução de problemas inversos em elastostática. Tal problema tem sido pouco pesquisado, os trabalhos publicados nesse campo dão sempre maior atenção a problemas de reconstrução, deixando os problemas de identificação de forma em segundo plano, e conseqüentemente com poucas referências disponíveis para pesquisa. Entretanto, BANKS & KOJIMA (1988) propuseram uma técnica de transformação de coordenadas em conjunto com o MEF e métodos de otimização para a reconstrução do contorno (forma) de corpos bidimensionais. KUBO (1988) revisou os recentes progressos relacionados a problemas inversos e TANAKA & MASUDA (1986) apresentaram uma formulação integrais de contorno para a detecção de formas (falhas internas) em problemas de potencial e em elastostática. Foi utilizada uma formulação em série de Taylor, a partir de uma configuração assumida. Contudo, apesar destes autores falarem em problemas em campo elatostático, eles não apresentaram resultados numéricos consistentes. Em ambos os exemplos ilustrados na referência TANAKA & MASUDA (1986), a configuração inicial encontra-se bastante próxima da configuração final. Ainda, TANAKA, NAKAMURA & NAKANO (1988) estudaram problemas de detecção de falhas (formas internas) em elastodinâmica, aplicando o MEC e otimização via método dos gradientes conjugados. Neste trabalho foi minimizada a diferença entre os resultados numéricos calculados pelo MEC para uma forma assumida e os resultados experimentais. Foi concluído naquele trabalho que não há convergência quando a forma procurada é descrita com mais de duas variáveis de projeto. Entretanto, estes dois trabalhos utilizaram diferenças finitas para a

determinação das sensibilidades à mudança de forma, em relação às variáveis de projeto (TANAKA & MASUDA, 1986; TANAKA et al., 1988). As deficiências desta abordagem de aproximação numérica são discutidas por SAIGAL, AITHAL & KANE (1989). MANIATTY, ZABARAS & STELSON (1989) realizaram também estudos em problemas inversos no campo elástico, empregando o MEF e um método de regularização espacial de primeira ordem, para a reconstrução das condições de contorno. Utilizaram valores de referência em deslocamentos e deformações para identificar as condições de tração do contorno. Ainda nesta linha de problema inverso, ZABARAS, MORELLES & SCHNUR (1989a) apresentaram a resolução de um problema de reconstrução das condições de contorno em elastostática usando o MEF, regularização espacial e o método *keynode*, que consiste basicamente em especificar um polinômio para representar as condições de contorno a serem determinadas. Nestes trabalhos não são empregados métodos de otimização. Ao invés disso, o sistema de equações obtido da substituição dos valores de referência é resolvido para fornecer a solução desejada. SCHNUR & ZABARAS (1990) utilizaram o MEF com os termos de regularização de ordens maiores do que três para a determinação das trações atuantes na superfície de contato de uma roda móvel. Mais recentemente, SCHNUR & ZABARAS (1992), usando o MEF, apresentaram um trabalho sobre a detecção de formas de inclusões elásticas em sólidos usando funções de penalidade e uma modificação do método de Levenberg-Marquardt para encontrar os deslocamentos medidos no modelo de elementos finitos, que dependem de parâmetros desconhecidos.

A otimização de formas (*shape optimization*) e os problemas inversos de objetos sólidos em elastostática utilizando o Método dos Elementos de Contorno têm, só recentemente, recebido algumas contribuições dos pesquisadores da área numérica. Uma retrospectiva dos desenvolvimentos mais recentes na otimização de forma de estruturas contínuas é apresentada por KANE & SAIGAL (1988). O Método dos Elementos de Contorno para determinação da forma ótima em problemas elásticos bidimensionais, utilizando técnicas de programação não-linear, foi aplicado por ZOCHOWSKI & MIZUKAMI (1983). MOTA SOARES et al. (1984a, 1985) utilizaram o MEC para determinação da forma ótima de eixos sólidos e vazados, aplicando técnicas de programação não-linear; MOTA SOARES, RODRIGUES & CHOI (1984b) usaram o método em estruturas bidimensionais, também aplicando técnicas de programação não-

linear. LEAL (1985) incorporou uma técnica de refinamento adaptativa de malha; BURCZYNSKI & ADAMCZYK (1985) apresentaram uma modelagem para problemas elásticos tridimensionais; EIZADIAN (1984) usou técnicas de subestruturas para representar contornos fixos e móveis, em conjunto com o Método dos Elementos de Contorno; FUTAGAMI (1983), BARONE & CAULK (1982) e MERIC (1984) aplicaram o MEC em otimização de formas para problemas de transferência de calor; PIRONNEAU (1984) utilizou o MEC para otimização de aerofólios e asas. Também STELTZER (1984) estuda a otimização de toróides para a produção de campos magnéticos em reatores de fusão tipo Tokamak e analisa também a otimização do número de parafusos em equipamentos de espalhamento de fontes de nêutrons. Em ambos os casos citados, observamos que o estudo foi feito com o MEF e a otimização considerava valores de referência em deslocamentos e também em tensões. Nota-se da literatura que quando, nos processos de minimização, o MEC é usado, muitos pesquisadores (TANAKA & MASUDA, 1986) evitam o cálculo das sensibilidades de forma mais exata preferindo o cálculo de forma muito aproximada (geralmente usando diferenças finitas), tendo em vista a maior complexidade matemática envolvida no cálculo exato das sensibilidades, e além disso o aparecimento de singularidades fortes nas soluções fundamentais do MEC.

Portanto, da exposição acima, percebemos que não há, entre os desenvolvimentos apresentados, uma formulação eficiente para a obtenção de soluções de problemas inversos de otimização de forma usando o MEC, técnicas de otimização e cálculo de sensibilidades - de forma mais exata.

2.3 Esquema adotado

O Método dos Elementos Finitos tem sido o método numérico mais utilizado na resolução de problemas de otimização de forma. Tal método, por envolver uma completa discretização do contínuo, ou seja, de todo o domínio matemático da estrutura, gradativamente está cedendo lugar aos métodos que discretizam apenas o contorno, como por exemplo o Método dos Elementos de Contorno. Recentes trabalhos na literatura (MOTA SOARES et al., 1984b; BARRA, 1990) têm mostrado que o MEC se enquadra muito bem dentro de esquemas numéricos para a otimização de forma de estruturas.

O problema de otimização de forma aqui tratado utiliza um *approach* inverso. Em tal *approach*, dado um determinado mapa (*outputs*) do comportamento dos deslocamentos (deformações ou tensões) nos pontos de referência, a partir destes dados se busca um domínio Ω'' (ou contorno Γ'') para a estrutura, de tal sorte que os valores dos dados de referência sejam satisfeitos. Para este tipo de *approach* o uso do MEC apresenta vantagens sobre o MEF por permitir discretizações apenas do contorno do domínio Ω'' que se quer encontrar. Outras vantagens do uso do MEC, principalmente em problemas como o que aqui está sendo tratado, estão expostas no próximo capítulo.

Antes porém de adotarmos um esquema para a resolução do problema de otimização de forma, faz-se necessário estabelecer algumas terminologias comumente usadas em problemas inversos. O vetor dos dados de referência $\hat{\varphi}$ é também chamado de quantidades medidas, dados observáveis ou ainda dados experimentais. O modelo matemático que descreve uma possível forma a ser encontrada para Ω'' é o vetor z que geralmente é denominado de vetor das variáveis de projeto ou vetor dos parâmetros independentes. Os pontos discretos $k = 1, m$, onde os valores de referência $\hat{\varphi}_{ik}$ do vetor φ estão disponíveis, são comumente denominados de pontos de observação ou de referência.

Ao se adotar um modelo z , um vetor de resposta φ daquele modelo pode ser calculado por meio de um operador matemático A de tal modo que $\varphi = Az$. A matriz A é portanto um operador de mapeamento ou um operador matemático (TIKHONOV & GONCHARSKY, 1987) entre o modelo z e a realidade expressa por $\hat{\varphi}$.

Para as formulações inversas, algumas categorias de esquemas numéricos são geralmente adotadas. Tais esquemas foram devidamente revisados por KUBO (1988), BECK et al. (1985) e HENSEL (1991) e podem ser resumidos nos seguintes esquemas:

- 1) Substituem-se os valores de referência $\hat{\varphi}$ (ver Eq. 1.11) na equação que governa o problema $Az = \hat{\varphi}$ de forma que se possa obter um sistema simultâneo de equações; assim, os parâmetros z que descrevem o contorno a se determinar podem ser calculados.
- 2) Assumindo-se valores iniciais para os parâmetros $z^0 = \{z^0_1, z^0_2, z^0_3, \dots\}^T$ do modelo, uma análise direta pode ser feita usando-se um esquema numérico (como por exemplo o MEF, MEC, etc.). A resposta obtida por estes cálculos é então comparada com os dados de referência $\hat{\varphi}$. A resposta para a solução do problema é então aquela combinação de parâmetros $z = \{z_1, z_2, z_3, \dots\}$ que melhor aproxime a resposta calculada $\varphi = Az$ aos dados de referência $\hat{\varphi}$. Este esquema é conhecido como o método *best-fit*.
- 3) Uma transformação apropriada dos parâmetros desconhecidos, tal como uma transformação de Laplace ou de Fourier, pode ser encontrada a partir dos dados de referência. Usando-se a respectiva transformada inversa, os parâmetros de interesse podem ser então encontrados.

Alguns outros esquemas ainda podem ser encontrados na literatura. Dentre os principais esquemas anteriormente descritos, o primeiro pode nos levar a um sistema de equações mal condicionado e de conseqüência gerar soluções muito instáveis devido a pequenos erros nos dados de referências $\hat{\varphi}$. O último esquema numérico apresentado pode ser empregado com sucesso para problemas em domínios muito simples onde já existe

solução analítica disponível. O segundo esquema parece ser o esquema preferido pelos cientistas, pesquisadores e engenheiros (TANAKA & MASUDA, 1986; TANAKA et al., 1988; SCHNUR & ZABARAS, 1992; BEZERRA, 1993; MELNIKOV & TITARENKO, 1995).

Portanto o esquema que será adotado neste trabalho é o método *best-fit*, via técnicas de otimização. A base do método é minimizar uma função residual que mede a diferença entre a resposta calculada φ através do modelo z e os respectivos valores dos dados de referência $\hat{\varphi}$. Lembramos que no *best-fit* a resposta φ tanto pode ser calculada pelo MEF ou pelo MEC, entretanto, pelas razões explicitadas no início desta seção e também no § 2.2, o valor da resposta φ será calculada pelo Método dos Elementos de Contorno.

A formulação pelo método *best-fit* é na realidade um problema de regressão de dados resolvido usando-se técnicas de otimização, que no nosso problema é a determinação dos parâmetros em $z = \{z_1, z_2, z_3, \dots\}$ do modelo matemático A , dado um conjunto de dados de referência $\hat{\varphi}$. O mapeamento $\varphi = Az$ dos parâmetros $z = \{z_1, z_2, z_3, \dots\}$ deve portanto reproduzir o conjunto de dados de referência $\hat{\varphi}$. A diferença entre os valores de referência $\hat{\varphi}$ e os valores calculados φ revela quão perto o modelo z reproduz os valores de referência. Esta diferença é chamada de resíduo.

Uma das formas de minimizar o resíduo entre $\hat{\varphi}$ e φ é achar o modelo z que otimiza a forma de um componente mecânico, em relação aos valores de referência $\hat{\varphi}$. O que pode ser traduzido através de uma função residual que mede a diferença entre a resposta calculada φ em termos de deslocamento (deformação ou tensão) e os valores $\hat{\varphi}$. Em geral, podemos escrever esta função residual como

$$f(z) = \left[|Az - \hat{\varphi}|^q \right]^{\frac{1}{q}} \quad ; \quad q \geq 1 \quad (2.1)$$

na qual

$z^T = \{z_1, z_2, z_3, \dots, z_n\}$ são as variáveis de projeto (vetor modelo);

$\varphi = Az$ é a resposta do modelo assumido;

A é um operador matemático (TIKHONOV & GONCHARSKY, 1987; SCALES & GERSZTENKORN, 1988);

$\hat{\varphi}$ são os dados de referência em deslocamentos (deformações ou tensões) que devem ser perseguidos;

“ q ” é um valor inteiro que depende do tipo de métrica empregada na determinação do resíduo (KOLMOGOROV & FOMIN, 1970).

Para o nosso problema, precisamos determinar os parâmetros z do modelo matemático A , dado um conjunto de dados de referência $\hat{\varphi}$. A transformação $\varphi = Az$, dos parâmetros z , deve aproximar estes dados de referência $\hat{\varphi}$. Esta aproximação, ilustrada na Fig. 2.1, será tão melhor quanto menor a diferença entre estes dados de referência ($\hat{\varphi}$) e os valores φ calculados. Em outras palavras, a aproximação será tão melhor quanto menor o resíduo (expresso pela Eq. 2.1). A minimização utilizando a norma Euclidiana ($q=2$) é geralmente aplicada (HENSEL, 1991; TANAKA et al., 1988; BEZERRA, 1993). Neste trabalho usaremos, portanto, $q=2$.

Para o caso de estruturas contínuas bidimensionais, podemos escrever

$$f(z) = w \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^2 (\varphi_{ik} - \hat{\varphi}_{ik})^2 \quad (2.2)$$

na qual

w é o parâmetro que pondera a função residual no processo de minimização;

φ_{ik} são os valores calculados, por exemplo, de tensões, na direção i , no ponto k ;

$i = 1,2$ corresponde às direções x e y , respectivamente;

$\hat{\varphi}_{ik}$ são os valores que desejamos alcançar.

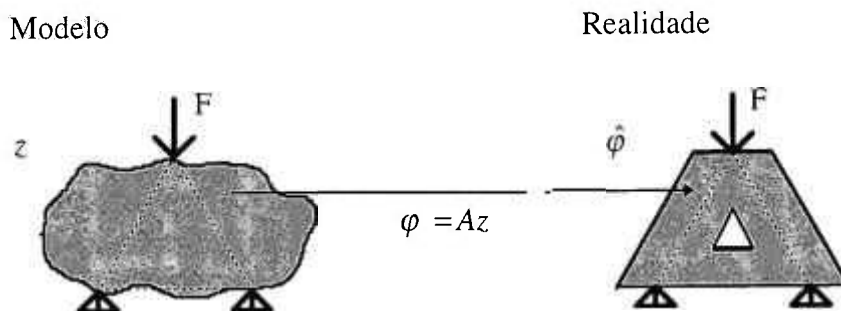


Figura 2.1 Aproximação entre modelo e realidade, para otimização de configuração geométrica 2D.

2.4 Instabilidade e funções de especificação

No nosso problema inverso de otimização de forma de uma estrutura contínua, a solução Ω^u (ou Γ^u) será baseada num conjunto de dados de referência disponíveis em pontos discretos dentro (ou no contorno) de objetos. Entretanto, devido ao fato deste problema ser mal-posto, uma variedade de soluções z pode ocorrer de tal forma que as respostas calculadas φ segundo um modelo z podem estar muito próximas dos valores medidos $\hat{\varphi}$ sem que a função objeto tenha realmente chegado ao mínimo global, são os chamados mínimos locais da função objetivo. Além disso, neste tipo de problema inverso, pequenas variações nos dados de referência $\hat{\varphi}$ podem gerar valores muito diferentes do vetor solução a menos que algumas condições de suavidade nas soluções sejam impostas (TIKHONOV & GONCHARSKY, 1987; SCHNUR & ZABARAS, 1990).

A fim de superar estas eventuais dificuldades de instabilidade, peculiares aos problemas inversos, informações *a priori* sobre a solução desejada podem ser impostas ao problema na forma de condições auxiliares ao vetor z , de forma a tornar a solução da otimização da forma da estrutura mais suave. Normalmente estas condições para suavizar a solução z são implementadas através do uso de funções aproximadas que geram uma forma suave; por exemplo, pode-se impor que um contorno (ou domínio) procurado

assuma a forma de uma semicircunferência ou tenha uma forma linear ou ainda seja parabólica (BARRA, 1990). Outra estratégia, que não será explorada neste trabalho, mas é usada por TIKHONOV & ARSENIN (1977) e também por BECK et al. (1985), entre outros, é a regularização da função objetivo a ser minimizada.

Nos problemas inversos de reconstrução de condições de contorno no campo térmico, um funcional de forma do fluxo de calor é comumente admitido. O funcional neste caso pode ser uma seqüência de segmentos lineares ou de polinômios de grau mais elevado. FRANK (1963) sugere que o fluxo possa ser aproximado por expressões polinomiais e que seja usado o método dos mínimos quadrados para estimar os coeficientes destes polinômios.

TANAKA et al. (1986, 1988) e BEZERRA & SAIGAL (1992), ao resolverem o problema inverso de determinação de falhas pelo MEC dentro de objetos (problema inverso similar a *shape optimization*, já que busca um domínio desconhecido Ω , a posição, a localização e o tamanho de uma falha), usaram formas específicas para simular falhas elípticas achatadas dentro de estruturas. SCHNUR & ZABARAS (1990) usaram expressões polinomiais para descrever as condições de contorno a ser reconstruídas via MEF.

3 MÉTODO NUMÉRICO UTILIZADO

3.1 Introdução

Nas últimas décadas, o uso de métodos numéricos em associação com o contínuo progresso verificado nos computadores digitais em termos de memória, rapidez de cálculo e baixo custo, tem permitido aos engenheiros resolver uma grande variedade de problemas complexos. As principais técnicas numéricas para solução de problemas de mecânica do contínuo e em especial em elastostática são: o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Elementos Finitos (MEF) e mais recentemente, o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Todos estes métodos nasceram da necessidade de se resolver de forma aproximada os problemas governados por equações diferenciais.

Estes métodos revelaram-se bastante genéricos e aplicáveis a domínios de variadas topologias. Nos três métodos temos sempre que utilizar relações algébricas aproximadas em função de valores nodais (incógnitas), e também utilizar uma grade (*mesh*, malha, discretização) para descrever a topologia do objeto em estudo. O resultado destes procedimentos é um sistema matricial de equações algébricas que deve ser resolvido a fim de se poder determinar as incógnitas (valores nodais) do problema. Geralmente, em elastostática, estes valores nodais são forças e/ou deslocamentos. Neste capítulo faremos uma breve comparação entre estes métodos numéricos utilizados na engenharia, mostrando suas vantagens e desvantagens. Será também justificado e escolhido um dos métodos a fim de que possa ser usado neste trabalho na formulação proposta para resolver o problema inverso de otimização de forma de estruturas contínuas.

3.2 Métodos numéricos na engenharia

Para efeito de comparações práticas e de escolha de um método a ser adotado no esquema exposto no Capítulo 2, segue uma breve exposição das principais características e aplicações dos métodos numéricos mais comuns utilizados atualmente na área de engenharia (KANE, 1994; entre outros). Compararemos então o Método das Diferenças Finitas, o Método dos Elementos Finitos e o Método dos Elementos de Contorno.

No Método das Diferenças Finitas (MDF), a equação diferencial do problema é substituída por uma diferença finita em cada intersecção das linhas que formam a grade. É um método de uso bastante geral: é aplicado em mecânica dos fluidos (choques e turbulências), problemas térmicos e químicos etc.; não utiliza integração numérica; trabalha com matrizes esparsas e é um método já consagrado. O MDF possui também algumas desvantagens: é ineficaz para aplicação em problemas em meio infinito; utiliza grades muito finas; é ineficaz para modelagem do contorno e também das condições de contorno (ver Fig. 3.1).

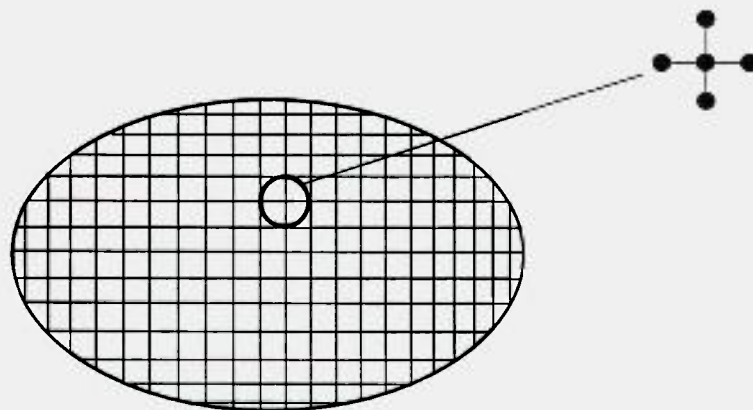


Figura 3.1 Componente discretizado em células (MDF).

O Método dos Elementos Finitos (MEF) transforma a equação diferencial que governa o problema em equações integrais equivalentes que contém as incógnitas a serem determinadas. Estas equações integrais são aproximadas por discretização (malha) onde aparecem as incógnitas, que em seguida são calculadas através das respostas dos nós vizinhos e de fórmulas simples de interpolação. Trata-se de um método também já consagrado; utiliza integração de funções simples; é de aplicação geral sendo muito utilizado em análises estrutural e térmica, entre outras. O MEF trabalha com matrizes de banda e também simétricas; gera boa modelagem do contorno e das condições de contorno e é aplicado através de uma gama enorme de tipos de elementos. Suas desvantagens principais são: não é aplicado com muita eficiência em problemas definidos em meio infinito; há a necessidade de discretização do domínio; a solução melhora com o refinamento da malha (ver Fig. 3.2).

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) também transforma a equação diferencial que governa o problema em equações integrais equivalentes. Utilizando técnicas de cálculo, essas equações integrais são manipuladas de modo que obtemos equações integrais apenas do contorno (*boundary integral equations-BIE*), que contém incógnitas apenas com relação às condições de contorno. Essas transformações algébricas são possíveis em parte porque utilizamos soluções já conhecidas (*fundamental solutions*), da equação diferencial original. Geralmente estas soluções fundamentais descrevem a resposta de um ponto unitário de aplicação, em um meio infinito. O MEC é aplicado em análise estrutural, térmica, acústica, elastodinâmica e de fluidos; trabalha com matrizes cheias; é ideal para aplicação em meios infinitos; faz a modelagem do contorno e das condições de contorno de forma natural; requer a discretização apenas do contorno. Por outro lado, alguns aspectos negativos da utilização deste método são: as dificuldades matemáticas das relações integrais; a obtenção das soluções fundamentais; a exigência de integração numérica de funções complicadas que apresentam singularidades e, finalmente, o MEC ainda é um método novo, em rápido e franco desenvolvimento (ver Fig. 3.3).

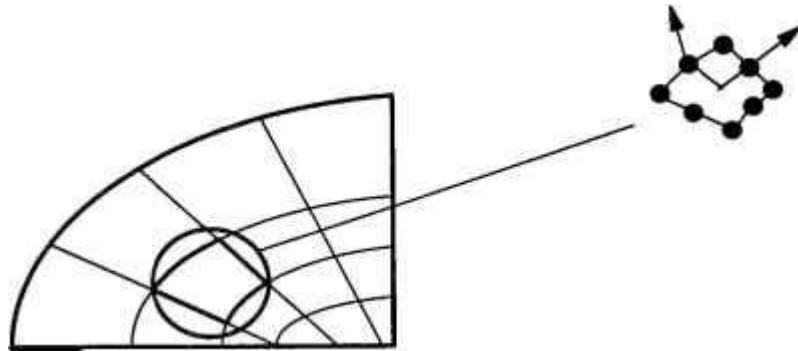


Figura 3.2 Componente discretizado com o MEF.

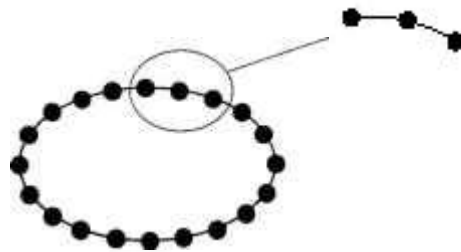


Figura 3.3 Componente discretizado em elementos de contorno.

3.3 Vantagens do MEC na otimização de forma

Na seção anterior descrevemos de forma sucinta o MDF, o MEF e o MEC. Observa-se entretanto que o método numérico mais utilizado em problemas de engenharia estrutural é o Método dos Elementos Finitos. Contudo, durante as últimas décadas, o Método dos Elementos de Contorno tem se tornado um método de análise alternativo, mostrando-se poderoso na solução de vários problemas complexos de engenharia. O MEC vem sendo gradualmente desenvolvido e incorporado como uma ferramenta numérica alternativa para o cálculo de deslocamentos, deformações e tensões em componentes mecânicos. É importante ressaltar portanto as vantagens e desvantagens deste método alternativo, em relação aos outros métodos numéricos.

O MEC tem algumas vantagens peculiares, especialmente para certas classes de problemas lineares. Como é um método que não requer discretização intensa do domínio, apresenta grande vantagem com relação aos métodos que envolvem discretização de todo o domínio contínuo do problema. A grande desvantagem do Método dos Elementos de Contorno é a sua complexidade matemática. Este trabalho enfoca estas complexidades, trazendo de forma sucinta uma discussão sobre as principais dificuldades matemáticas do método, quando utilizado em esquemas de otimização. Apesar desta desvantagem, o MEC possui atributos extremamente positivos para sua aplicação em esquemas de otimização de forma.

O MEC é um método com equações integrais de contorno (*Boundary Integral Equations* - BIE). A formulação aparece portanto, em integrais no contorno. No domínio temos somente as forças de massa. Neste trabalho, por simplificação, as forças de massa não são importantes, e , portanto, as integrais no domínio podem ser desprezadas.

A grande vantagem do MEC é a redução, por um, da dimensionalidade do problema. Isto é, problemas com geometria tipicamente tridimensional, massivos, podem ser reduzidos a integrais de área. Já os problemas bidimensionais podem ser reduzidos a integrais de linha.

Enquanto o MEC usa a discretização do contorno, o Método dos Elementos Finitos discretiza obrigatoriamente todo o interior dos objetos. A discretização processada só no contorno dos equipamentos gera sistemas de equações com menor grau de liberdade. Em métodos numéricos, geralmente, ter sistemas com menor grau de liberdade significa ter maior estabilidade numérica nos processos de solução (DORRI, 1987).

Uma outra vantagem do uso do MEC, em esquemas de otimização de forma (*shape optimization*), é que tais esquemas requerem uma contínua atualização da forma (e conseqüentemente da malha, na linguagem dos objetos discretizados). A discretização somente no contorno dos objetos torna este processo de atualização de malha (*mesh update*) uma tarefa mais simples quando comparada com os métodos que discretizam todo o domínio. Portanto, o uso do MEC em problemas de otimização de forma (*shape optimization*) reduz os problemas de geração e de atualização de malha, associados a evolução das formas durante o processo iterativo de busca da forma ótima.

Finalmente, o cálculo dos deslocamentos, deformações e das tensões com o MEC é mais preciso que com o MEF. Isto se dá porque no MEC as soluções analíticas da equação diferencial associada ao problema (isto é, funções de Green) fazem parte da solução numérica, enquanto no MEF os campos de deslocamento são, geralmente, funções polinomiais assumidas.

Por estas razões, no esquema adotado para a resolução do problema de otimização de forma descrito no Capítulo 2 será utilizado o Método dos Elementos de Contorno. Portanto, a resposta $\varphi = Az$ do modelo $z = \{z_1, z_2, z_3, \dots\}$ será calculada via MEC. Também no esquema adotado (utilizando o MEC com técnicas de otimização) será necessário o cálculo das sensibilidades de $\partial\varphi/\partial z$, o que será abordado no Capítulo 5. Descreveremos agora brevemente o MEC.

3.4 Equações integrais do contorno

O Método dos Elementos de Contorno desenvolveu-se do Método Clássico da Teoria de Energia Potencial. A primeira aplicação de métodos da Teoria de Energia Potencial em elastostática foi feita por BETTI (1872). Seu trabalho foi expandido por SOMIGLIANA (1885) e LAURICHELLA (1909). JASWON (1963) implementou uma versão numérica da Teoria de Energia Potencial para problemas de torsão, explorando pela primeira vez a formulação de Green no contorno. Muitos outros deram continuidade aos problemas de elastostática. Por exemplo, RIZZO et al. (1967,1970), relacionaram deslocamentos e trações no contorno através da aplicação da identidade de Somigliana; CRUSE (1969,1973,1974), desenvolveu aplicações para problemas de interesse tecnológico.

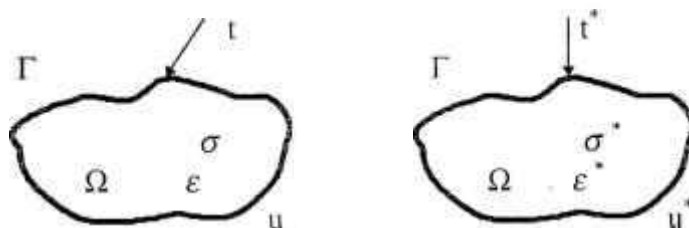


Figura 3.4 Corpo bidimensional com domínio Ω e contorno Γ .

Para entender melhor o MEC, consideremos um corpo bidimensional isotrópico e homogêneo, de domínio Ω e fronteira Γ (BREBBIA et al., 1984). Este corpo poderá ser simplesmente conectado ou multiplamente conectado. Considere que este corpo Ω está em um estado de equilíbrio representado por σ_{ik} , ϵ_{ik} , u_i , t_i e b_i ; tensões, deformações, deslocamentos, carregamentos de superfície e forças de corpo, respectivamente. Assumimos que este mesmo corpo Ω também possa estar em outro estado de equilíbrio definido por σ_{ik}^* , ϵ_{ik}^* , u_i^* , t_i^* e b_i^* , como representado na Fig. 3.4. O Teorema da reciprocidade diz que

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega \quad (3.1)$$

Depois de integrarmos por partes esta equação, e levamos em conta a equação de equilíbrio no domínio, $\sigma_{ij,j} + b_j = 0$, obtemos a identidade de Somigliana (Eq. 3.2). Esta nova identidade é a relação fundamental da formulação do Método dos Elementos de Contorno:

$$\int_{\Omega} b_k^* u_k d\Omega + \oint_{\Gamma} t_k^* u_k d\Gamma = \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega + \oint_{\Gamma} t_k u_k^* d\Gamma \quad (3.2)$$

A Eq. 3.2 pode ser modificada considerando-se a força de corpo b_k^* como um ponto de carregamento unitário. Tal ponto pode ser representado através da função delta de Dirac. Esta função é usada para garantir que a função, ou melhor, a distribuição estudada seja zero em todos os pontos do domínio, exceto na origem (ou no ponto de carregamento), onde terá um valor infinito. A representação gráfica da função delta de Dirac é mostrada na Fig. 3.5.

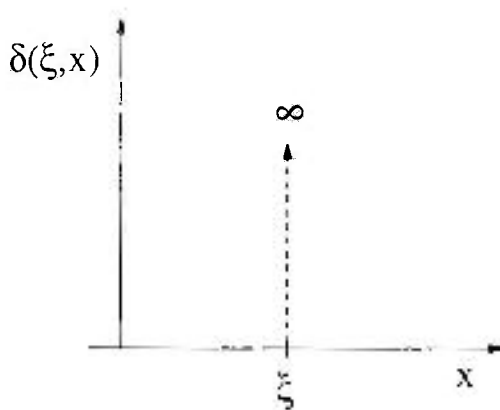


Figura 3.5 Função delta de Dirac.

Destacamos as seguintes propriedades da função delta de Dirac $\delta = \delta(\xi, x)$, que são importantes nas equações a seguir relativas ao MEC:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \delta(\xi, x) = 0 && \xi \neq x \\
 2) \quad & \delta(\xi, x) = \infty && \xi = x \\
 3) \quad & \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(\xi, x) dx = 1 && , \forall \varepsilon > 0 \\
 4) \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(\xi, x) dx = f(\xi) && , \forall f(x) \text{ contínua}
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

Para domínios bidimensionais podemos ilustrar a aplicação da propriedade três, representando o domínio por um pequeno círculo de raio λ , como mostrado na Fig. 3.6. A interpretação desta propriedade é que o integrando só pode depender de valores de $f(x)$ muito próximos de $x=\xi$, de forma que, sem erro apreciável, podemos substituir $f(x)$ pelo seu valor no ponto ξ .

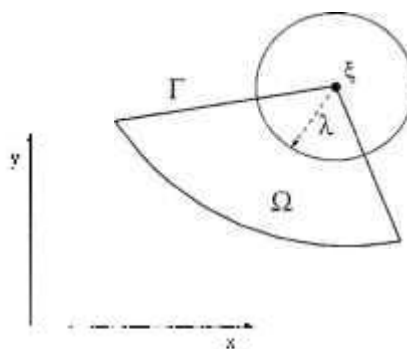


Figura 3.6 Integral da função delta de Dirac em parte do domínio bidimensional.

A aplicação da função delta de Dirac dá um significado simbólico para a interpretação das equações a seguir. Uma interessante interpretação física destas equações é que as funções de Green (chamadas soluções fundamentais), podem ser entendidas como

sendo os deslocamentos do sistema no qual é aplicada uma força de densidade δ , concentrada no ponto $x = \xi$. Este ponto ξ , de coordenadas ξ_i , é chamado ponto fonte. Analogamente, o ponto x , de coordenadas x_i , é chamado ponto campo.

Assim, se considerarmos a força unitária $b_k^* = \delta(\xi, x)e_k$, onde $(\xi, x) \in \Omega$ e ξ é o ponto de aplicação do carregamento unitário e x é um ponto qualquer do domínio, esta equação, colocada dentro da Eq. 3.2, tendo em conta a propriedade 4 da Eq. 3.3, transformará a primeira integral em $u_i(\xi)$. Consideramos ainda que os deslocamentos e trações do sistema “estrela” podem ser escritos como

$$u_j^* = u_{ij}^*(\xi, x)e_i \quad (3.4)$$

$$t_j^* = t_{ij}^*(\xi, x)e_i \quad (3.5)$$

onde $u_{ij}^*(\xi, x)$ e $t_{ij}^*(\xi, x)$ são os deslocamentos e trações no ponto x , na direção j correspondendo a um carregamento pontual na direção e_i aplicado no ponto $\xi \in \Omega$.

Os valores $u_{ij}^*(\xi, x)$ e $t_{ij}^*(\xi, x)$ são chamados soluções fundamentais, e correspondem respectivamente à deslocamentos e trações em um ponto x de um meio infinito, devido à ação de uma carga pontual aplicada em ξ . A obtenção das soluções fundamentais é explicada no Apêndice 1.

Portanto, a Eq. 3.2, representando a componente i do deslocamento do ponto ξ , pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
u_i(\xi) = & \oint_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) t_j(x) d\Gamma(x) - \oint_{\Gamma} t_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \\
& + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x) b_j(x) d\Omega(x)
\end{aligned} \quad (3.6)$$

Por razões de simplicidade, omitiremos as forças de corpo, ou seja, faremos $b_j = 0$.

Assim, operamos a integração apenas na fronteira Γ , na Eq. 3.6.

$$u_i(\xi) = \oint_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) t_j(x) d\Gamma(x) - \oint_{\Gamma} t_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) \quad (3.7)$$

Quando um conjunto de condições de contorno é considerado (Fig. 3.7), por exemplo: $\bar{u}_j \in \Gamma_1$ e $\bar{t}_j \in \Gamma_2$, a Eq. 3.7 transforma-se em

$$\begin{aligned}
u_i(\xi) = & \oint_{\Gamma_1} u_{ij}^*(\xi, x) t_j(x) d\Gamma(x) + \oint_{\Gamma_2} u_{ij}^*(\xi, x) \bar{t}_j(x) d\Gamma(x) - \\
& - \oint_{\Gamma_1} t_{ij}^*(\xi, x) \bar{u}_j(x) d\Gamma(x) - \oint_{\Gamma_2} t_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x)
\end{aligned} \quad (3.8)$$

Para um problema bidimensional, temos as soluções fundamentais (BREBBIA et al., 1984; BANERJEE & BUTTERFIELD, 1981; KANE, 1994), ou *kernels* $u_{ij}^*(\xi, x)$ e $t_{ij}^*(\xi, x)$, expressos pelas seguintes equações:

$$u_{ij}^*(\xi, x) = c_1 (c_2 \delta_{ij} \log R - \frac{Y_i Y_j}{R^2}) \quad (3.9)$$

$$\tau_{ki}^* \left(\frac{R}{r}, x \right) = \frac{c_3}{R^2} \left[c_4 (n_k Y_i - n_i Y_k) + \left(c_4 \delta_{ik} + \frac{2Y_i Y_k}{R^2} \right) Y_j n_j \right] \quad (3.10)$$

nas quais

$$c_2 = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.11)$$

$$c_1 = -\frac{c_2}{8\pi\mu(1-\nu)} \quad (3.12)$$

$$c_2 = 3-4\nu \quad (3.13)$$

$$c_3 = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \quad (3.14)$$

$$c_4 = 1-2\nu \quad (3.15)$$

ν é o coeficiente de Poisson;

μ é o módulo de cisalhamento;

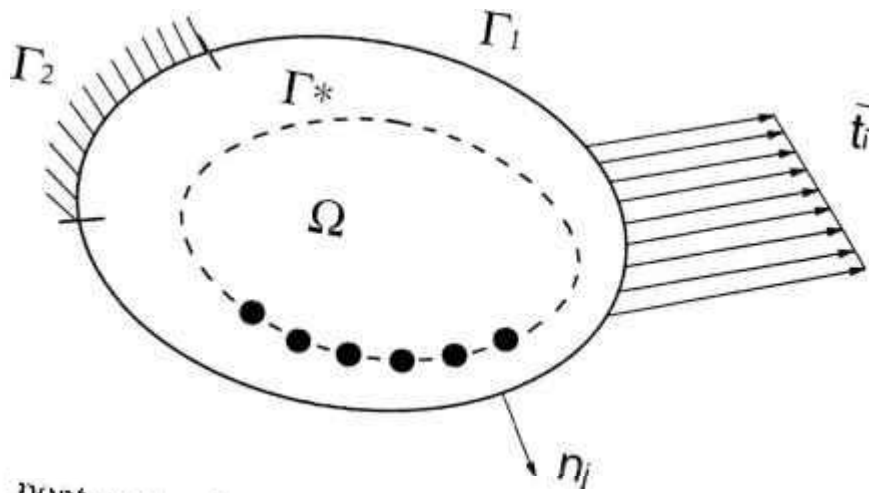
E é o módulo de Young;

n_i são as componentes da normal externa à Γ ;

$Y_i = x_i - \xi_i$ é a distância do ponto ξ_i da fronteira ao ponto x_i ;

$$R^2 = Y_i Y_i.$$

Ω : domínio
 Γ : fronteira



● pontos de referência

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$$

$x_k \in \Gamma^*$: deslocamentos ou tensões de referência

Figura 3.7 Corpo 2D sujeito a condições de contorno preestabelecidas.

A expressão para determinarmos as tensões em qualquer ponto, $\xi \in \Omega$, interno do domínio, pode ser deduzida da Eq. 3.6. Primeiro calculamos o tensor das deformações infinitesimais de Cauchy,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.16)$$

e em seguida aplicamos a Lei de Hooke para obtermos o tensor das tensões. Portanto, podemos escrever a equação das tensões como

$$\sigma_{ij}(\xi) = \int_{\Gamma} \left[\varepsilon_{ijk}^*(\xi, x) t_k(x) - \sigma_{ijk}^*(\xi, x) u_k(x) \right] d\Gamma(x) \quad (3.17)$$

na qual

u_k e t_k são valores de contorno definidos de forma complementar;

$\varepsilon_{ijk}^*(\xi, x)$ e $\sigma_{ijk}^*(\xi, x)$ são as soluções fundamentais para deformações e tensões.

As expressões para estas duas soluções fundamentais, ou *kernels*, podem ser encontradas em BREBBIA et al. (1984) ou em BANERJEE & BUTTERFIELD (1981) e são dadas por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}^*(\xi, x) = & \left(\frac{a_3 n_i Y_l}{R^4} \right) \left[2a_2 \delta_{ij} Y_k + 2\nu (\delta_{ik} Y_j + \delta_{jk} Y_i) - \frac{8Y_i Y_j Y_k}{\kappa^2} \right] + \\ & + \left(\frac{a_3}{R^2} \right) \left[n_i \left(2\nu \frac{Y_j Y_k}{R^2} + a_2 \delta_{jk} \right) + n_j \left(2\nu \frac{Y_i Y_k}{R^2} + a_2 \delta_{ik} \right) \right] + \\ & + \left(\frac{a_3}{R^2} \right) \left[n_k \left(2a_2 \frac{Y_i Y_j}{R^2} - a_4 \delta_{ij} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\sigma_{ijk}^*(\xi, x) = \left(\frac{Y_i}{R} \right) \left[\frac{a_2}{R} (\delta_{ik} Y_j + \delta_{ik} Y_i - \delta_{ij} Y_k) + \frac{2Y_i Y_j Y_k}{R^3} \right] \quad (3.19)$$

nas quais

$$a_1 = -c_3 \quad (3.20)$$

$$a_2 = c_4 \quad (3.21)$$

$$a_3 = \frac{\alpha}{2\pi(1-\nu)} \quad (3.22)$$

$$a_4 = 1 - 4\nu \quad (3.23)$$

Conhecendo-se as tensões, obtemos as deformações por meio da seguinte expressão

$$\varepsilon_{ij}(\xi, x) = \frac{\sigma_{ij}(\xi)}{2\mu} - \frac{\lambda \delta_{ij} \sigma_{ll}(\xi)}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} \quad (3.24)$$

3.5 Implementação numérica do MEC

A aplicação da solução fechada para as equações integrais do item anterior é possível apenas para geometrias e condições de contorno simples. O Método dos Elementos de Contorno permite uma aproximação numérica da identidade de Somigliana. Esta aproximação é feita por meio dos seguintes passos :

- 1) O contorno Γ é discretizado numa série de elementos, conforme ilustrado nas Figs. 3.8 e 3.9. Estes elementos serão caracterizados por funções interpoladoras dos seus nós. Estas funções aproximarão deslocamentos e trações.
- 2) A Eq. 3.2 é aplicada na forma discretizada para cada nó da fronteira Γ .
- 3) As integrais da Eq. 3.2 são calculadas através de um método de quadratura, com relação a todos os elementos da fronteira (ver Fig. 3.10).
- 4) Obtemos um sistema linear de M equações algébricas, envolvendo M nós tração e M nós deslocamento.
- 5) As condições de contorno são consideradas e conseqüentemente M valores de nós são estabelecidos (tração ou deslocamento em cada direção, para cada nó).
- 6) Obtemos os valores desconhecidos (de tração e deslocamento), através da solução do sistema de M equações, usando um método padrão de resolução de sistemas lineares.

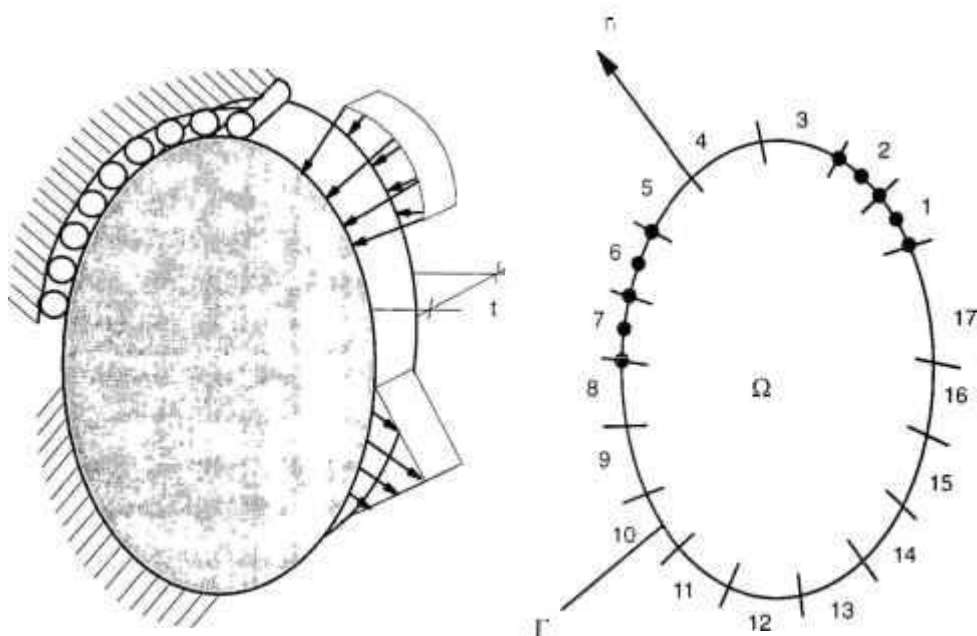
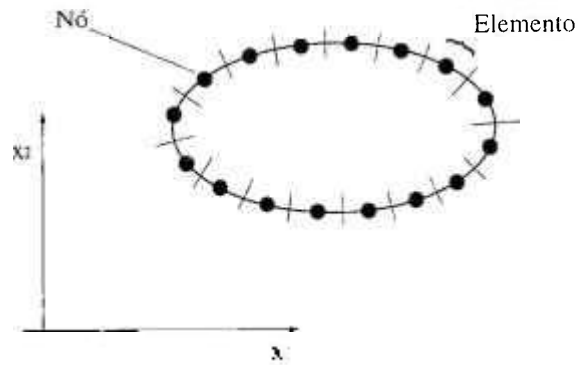
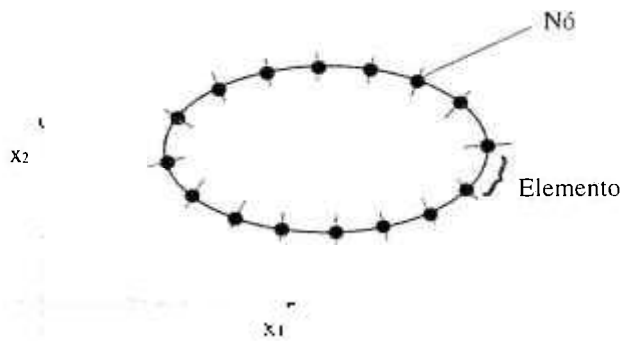


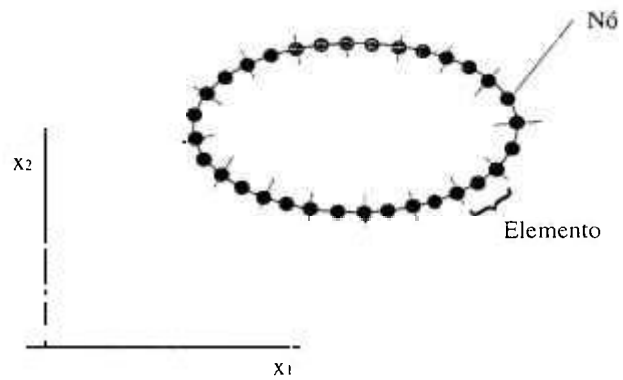
Figura 3.8 Problema físico e modelo em Elementos de Contorno.



(a) Elementos constantes



(b) Elementos lineares



(c) Elementos quadráticos

Figura 3.9 Discretização em Elementos de Contorno para problemas 2D.
 (a) Elementos constantes; (b) Elementos lineares; (c) Elementos quadráticos.

Para a discretização da Eq. 3.2, a fronteira Γ é aproximada por uma série de polinômios, escritos como

$$x_j(\rho) = \sum_{i=1}^3 h^{(i)}(\rho) x_j^{(i)} \quad (3.25)$$

$$u_j(\rho) = \sum_{i=1}^3 h^{(i)}(\rho) u_j^{(i)} \quad (3.26)$$

$$t_j(\rho) = \sum_{i=1}^3 h^{(i)}(\rho) t_j^{(i)} \quad (3.27)$$

nos quais (para o nó i):

$x_j^{(i)}$ são as coordenadas cartesianas que definem a geometria;

$u_j^{(i)}$ são os deslocamentos nodais;

$t_j^{(i)}$ são as trações nodais.

Os valores $h^{(i)}(\rho)$ são as funções interpoladoras (Fig. 3.11), que no nosso trabalho são funções quadráticas da coordenada natural ρ , definidas como

$$h^{(1)}(\rho) = (2\rho - 1) \cdot (\rho - 1) \quad (3.28)$$

$$h^{(2)}(\rho) = -4\rho(\rho - 1) \quad (3.29)$$

$$h^{(3)}(\rho) = \rho(2\rho - 1) \quad (3.30)$$

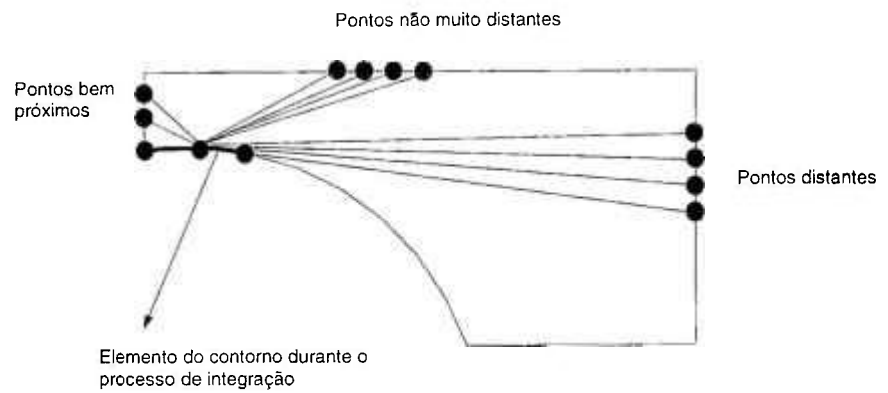


Figura 3.10 Pontos fonte a diferentes distâncias do elemento de contorno que está sendo integrado.

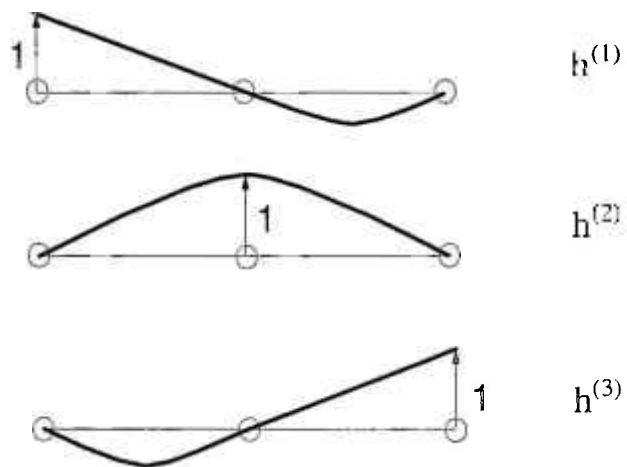


Figura 3.11 Funções $h^{(i)}(\rho)$.

Substituindo as equações 3.25 a 3.27, levando em conta as equações 3.28 a 3.29, na Eq. 3.2, obtemos um sistema matricial de equações com os deslocamentos nodais $u_j^{(i)} \in \{U\}$ de um lado, e as trações nodais $t_j^{(i)} \in \{T\}$ de outro. Portanto, temos

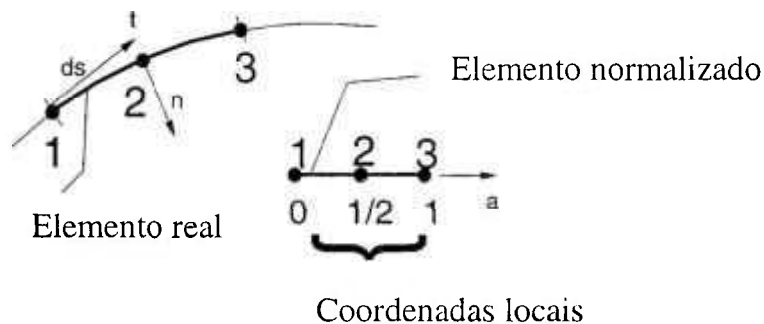
$$[F]\{U\} = [G]\{T\} \quad (3.31)$$

na qual os termos das matrizes $[F]$ e $[G]$ são, respectivamente,

$$G_{pq} = \sum_{q=1}^{N(Ne)} \int_0^{+1} [t_{ij}^*][h] J dp \quad (3.32)$$

$$F_{pq} = \sum_{q=1}^{N(Ne)} \int_0^{+1} [u_{ij}^*][h] J dp \quad (3.33)$$

Aqui os somatórios são sobre todos os elementos do contorno, com t_{ij}^* e u_{ij}^* respectivamente nos nós i do elemento $q = j$ considerado. Nestas expressões, o Jacobiano J é usado para representar o fator que relaciona a medida de área da superfície no elemento real com a medida normalizada deste mesmo elemento. Ou seja, ele relaciona os sistemas de coordenadas local e geral do elemento em questão, ver Fig. 3.12.



$$d\Gamma = t ds = t (dx_1^2 + dx_2^2)^{\frac{1}{2}} = t (\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2)^{\frac{1}{2}} da = J da$$

Figura 3.12 Elemento de Contorno quadrático, contínuo, e sua representação através do Jacobiano.

Nas Eqs. 3.32 e 3.33, os índices p e q referem-se aos nós e elementos, respectivamente; N_e é o número total de elementos; F_{pq} e G_{pq} são os coeficientes que relacionam o nó q (total de N nós) com todos os demais nós da fronteira do corpo.

As integrações das Eqs. 3.32 e 3.33 são feitas usando-se quadratura de Gauss. Teremos singularidades quando $x_i = \xi_i$, ou seja, quando o ponto de integração coincidir com o ponto de carregamento, tornando singulares os *kernels* ou soluções fundamentais que aparecem nas Eqs. 3.32 e 3.33.

Os termos $\log(R)$ e $YiYj/R^2$ presentes nos *kernels* de G_{pq} (ver Eqs. 3.9 e 3.10) dão origem a singularidades fracas. Os termos $YiYj/R^s$, para $s \geq 3$, aparecem em F_{pq} e originam singularidades fortes, que serão interpretadas como valores limites da integral (valores principais de Cauchy), (BANERJEE & BUTTERFIELD, 1981).

Singularidades fortes originadas nos termos da diagonal da matriz $[F]$ serão eliminadas através da técnica de movimento de corpo rígido (BREBBIA et al., 1984; SAIGAL et al., 1989). Esta técnica transforma a Eq. 3.31 em

$$[F]\{I_l\} = \{0\} \quad (3.34)$$

na qual $\{I_l\}$ é o vetor que define o deslocamento de uma unidade na direção l . Logo, podemos calcular os termos singulares diagonais de $[F]$ através de

$$\sum_{r=1,3,\dots}^{N(Ne)-1} F_{rs} = 0 \leftrightarrow F_{ss} = \sum_{s \neq r=1,3,\dots}^{N(Ne)-1} F_{rs} \quad (3.35)$$

$$\sum_{r=2,4,\dots}^{N(Ne)} F_{rs} = 0 \leftrightarrow F_{ss} = \sum_{s \neq r=2,4,\dots}^{N(Ne)} F_{rs} \quad (3.36)$$

Portanto, os termos da diagonal de $[F]$ são determinados explicitamente usando-se os elementos diagonais nulos. Mais detalhes desta formulação podem ser encontrados, por exemplo, em BANERJEE & BUTTERFIELD (1981).

O sistema matricial de equações representado pela Eq. 3.31 pode ser reescrito depois que as condições de contorno preestabelecidas são impostas. Passamos as incógnitas para o lado esquerdo e os valores conhecidos para o lado direito da Eq. 3.31, resultando a nova equação:

$$[A]\{v\} = \{b\} \quad (3.37)$$

onde $\{v\}$ é o vetor das incógnitas e $\{b\}$ é o vetor dos valores conhecidos (condições de contorno multiplicadas por algum outro valor resultante da aplicação destas condições).

Depois de calculados os valores das incógnitas $\{v\}$, podemos obter os deslocamentos em qualquer ponto (interno ou de fronteira) do corpo, usando a forma discretizada da Eq. 3.2. Da mesma maneira, obtemos os valores das tensões em qualquer ponto $\xi \in \Omega$ (interno do domínio) aplicando as condições de contorno na forma discretizada da Eq. 3.17. Para as deformações, o mesmo raciocínio é feito com relação à Eq. 3.24.

4.1 Introdução

Como foi definido na Seção 2.3, o esquema adotado para se aproximar o modelo z da realidade traduzida pelos dados de referência $\hat{\phi}$ é o método *best-fit*. Portanto, a estratégia adotada é minimizar (ou otimizar) a função definida na Eq. 2.2. Para se minimizar a Eq. 2.2 usaremos técnicas de otimização. O poder das técnicas de otimização determinísticas está na capacidade de se poder determinar o melhor valor sem contudo ter que testar todos os valores possíveis, usando um nível modesto de formulação matemática e ao custo de ter que efetuar algumas iterações numéricas com uma lógica bem definida e algoritmos que podem ser implementados computacionalmente.

Um problema de otimização começa com um conjunto de variáveis independentes, ou parâmetros geralmente chamados de variáveis de projeto, e freqüentemente inclui condições ou restrições que definem valores aceitáveis para estas variáveis. Outra componente essencial de um problema de otimização é a chamada função objetivo, que depende de alguma maneira daquelas variáveis de projeto. A solução de um problema de otimização é um conjunto de valores aceitáveis para as variáveis de projeto, para os quais a função objetivo assume um valor ótimo. Em termos matemáticos, otimização está relacionada com maximização ou minimização (GILL et al., 1981).

Problemas em diversas áreas da matemática, ciências aplicadas, engenharia, economia e medicina podem ser formulados em termos de otimização. Em particular, modelos matemáticos são muitas vezes desenvolvidos para análise e compreensão de fenômenos complexos. Neste trabalho uma técnica de otimização será usada a fim de que se possa fazer a determinação da forma do modelo z que melhor reproduza os dados de referência $\hat{\phi}$.

4.2 A otimização de formas em estruturas

O procedimento numérico adotado neste trabalho para a otimização de forma de estruturas contínuas planas envolve a determinação do valor z , desde que o valor da função $f(z)$, que mede a diferença entre o modelo z e dados de referência $\hat{\varphi}$, na Eq. 2.2 alcance um mínimo. Utilizaremos também neste procedimento equações de restrições, que funcionarão como delimitadores geométricos da região admissível do problema, ou seja, usaremos restrições para os valores das variáveis de projeto $z = \{z_1, z_2, z_3, \dots, z_n\}$. As desigualdades que caracterizam estas restrições geométricas podem ser escritas de forma geral como

$$C_j(z_i) \geq 0 \quad (4.1)$$

onde z_i são as componentes do vetor z .

Existem vários métodos de minimização para a solução de problemas com restrições. Por exemplo, certos problemas com restrições podem ser transformados em problemas sem restrições através de métodos de transformação. Os mais comuns são: mudança de variáveis, funções de penalização externas e funções de penalização internas.

O método de mudança de variáveis pode causar forte excentricidade da função objetivo, tornando o processo de convergência muito difícil (FOX, 1971). O uso de funções de penalização externas aproxima o mínimo através de pontos localizados na região não-admissível do problema. As funções de penalização internas entretanto aproximam o mínimo através de pontos localizados na região admissível do problema. Esta última função de penalidade interna é entretanto a que nos interessa tendo em vista que soluções fora da região admissível do problema não teria significado para certos tipos de problemas, como por exemplo, achar orifícios dentro de placas. Portanto, devido a natureza dos problemas de otimização considerados neste trabalho, utilizaremos as funções de

penalização internas, que nos assegura que o mínimo de $f(z)$ encontrar-se-á dentro da região admissível.

O método da função de penalização interna que aqui chamaremos de θ incrementa a função objetivo $f(z)$ na Eq. 2.2 gerando uma nova função $F(z)$. Esta operação permite a solução de problemas de otimização com restrições através de métodos de otimização sem restrições. A nova função objetivo pode portanto ser escrita como

$$\mathfrak{S}(z) = F(z, \mathfrak{R}) = f(z) + \theta(C_j(z_i), \mathfrak{R}) \quad (4.2)$$

onde \mathfrak{R} é o parâmetro de penalidade.

A função de penalização interna pode ser interpretada como uma barreira pois funciona como uma “barreira interna” sempre que o vetor z se aproxima da região de contorno. Entre as funções de barreira interna, as mais usadas são: penalidade infinita, penalidade logarítmica e penalidade inversa (Fig. 4.1). A penalização infinita (simulada por um grande número no computador) tem a desvantagem de ser descontínua. A penalização logarítmica envolve uma lógica mais complicada que a penalidade inversa e ambas têm um comportamento mais suave à proporção que z se aproxima da região não-admissível. Neste trabalho optaremos portanto pela penalização inversa, que pode ser escrita como

$$\theta(C_j(z_i), \mathfrak{R}) = \mathfrak{R} \sum_{j=1}^L \sum_{i=1}^P \left[\frac{1}{C_j(z_i)} \right] \quad (4.3)$$

onde L é o número de restrições e P é o número de variáveis de projeto em z .

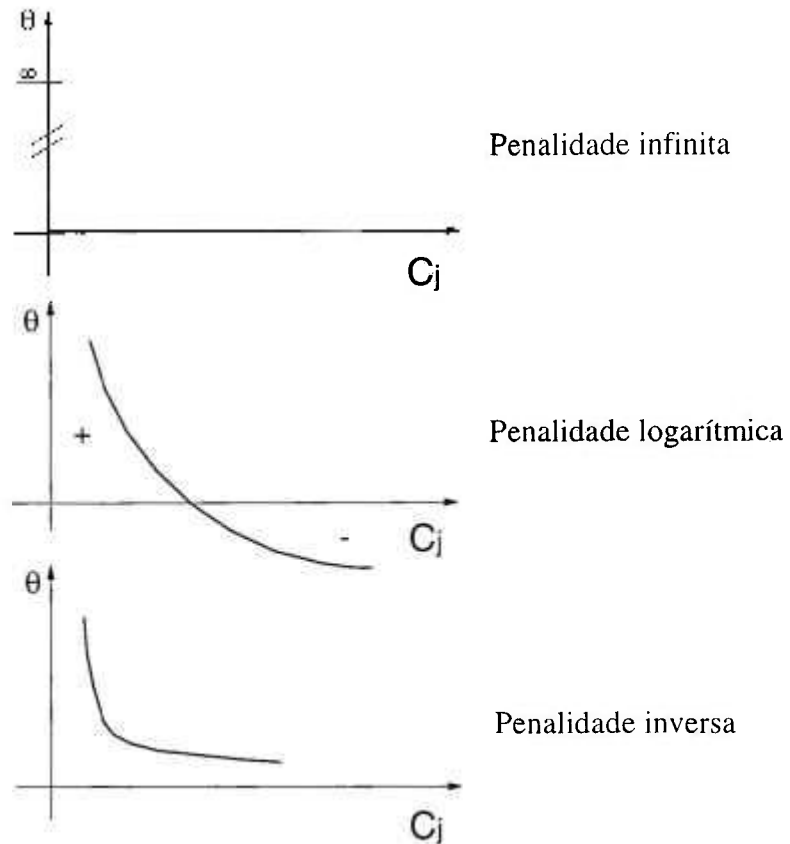


Figura 4.1 Funções de barreira interna.

Portanto, com a função objetivo na Eq. 4.2, nosso problema de otimização pode ser tratado sem restrições.

Durante o processo de minimização de um problema com restrições através de um método de otimização sem restrições, usando a função de penalização interna (4.2), os valores de \mathfrak{R} serão reduzidos gradualmente (inicialmente é dado um valor bastante grande para \mathfrak{R}), e à proporção que \mathfrak{R} diminui $F(z, \mathfrak{R})$ se aproxima de $F(z)$ (FOX, 1971).

Com o uso da função de penalização interna θ garantimos que a função objetivo $F(z, \mathfrak{R})$ esteja distante das restrições no começo do processo de minimização, e

gradualmente, com o decréscimo de \mathfrak{R} , a função de penalização θ atinja um valor desprezível e $F(z, \mathfrak{R})$ se aproxime da verdadeira função $f(z)$ que queremos minimizar.

A escolha do valor inicial, $\mathfrak{R}^{(0)}$, para o parâmetro de penalidade tem sido discutido na literatura. Para $\mathfrak{R}^{(0)}$ muito grande, a função é facilmente otimizada, mas o mínimo poderá estar distante da solução procurada. Para $\mathfrak{R}^{(0)}$ muito pequeno $\theta(C_j(z_i), \mathfrak{R})$ não cria uma barreira apropriada para manter z na região admissível. $\mathfrak{R}^{(0)}$ deverá portanto ser escolhido de tal forma que o termo de penalização $\theta(C_j(z_i), \mathfrak{R})$ não seja dominante em relação ao termo $f(z^{(0)})$ na Eq. 4.2. Definindo $\text{Int}\{X\}$ como sendo o inteiro mais próximo do número real X , BEZERRA (1993) sugeriu pela primeira vez que $\mathfrak{R}^{(0)} \approx 10^{E_0}$, onde E_0 assumiria um valor inicial aproximadamente igual a

$$E_0 \approx \text{Int} \left\{ \log_{10} \left[\frac{f(z^{(0)})}{\sum_{j=1}^L \sum_{i=1}^P \left(\frac{1}{C_j(z_i)} \right)} \right] \right\} \quad (4.4)$$

Portanto, no início do processo de minimização o valor $\mathfrak{R}^{(0)} \approx 10^{E_0}$ é assumido a fim de que o termo de penalidade seja da mesma ordem de grandeza do termo $f(z^{(0)})$ na Eq. 4.2.

O valor numérico associado a \mathfrak{R} é dado de acordo com o tipo de problema proposto, podendo-se adotar estratégias para a gradação deste valor, durante o processo de minimização, como foi feito neste trabalho.

Os parâmetros do modelo z devem ser tomados de tal forma que $\varphi = Az$ se aproxime dos valores experimentais $\hat{\varphi}$ tanto quanto possível. Neste trabalho consideraremos os dados experimentais $\hat{\varphi}$ e a função $\varphi = Az$ como sendo quantidades medidas de deslocamento (tensão ou deformação). A função $f(z)$ na Eq. 2.1 mede o quanto o modelo z se aproxima dos dados experimentais $\hat{\varphi}$.

Entre os diversos métodos de otimização sem restrição que podem ser usados para minimizar o funcional definido na Eq. 2.2, destacamos os métodos quase-Newtonianos. Tais métodos requerem apenas a primeira derivada da função objetivo (FOX, 1971). O método da métrica variável é um método quase-Newtoniano e é considerado dentre outros métodos da métrica variável um método robusto de otimização (GILL et al., 1981; FOX, 1971).

Os métodos da métrica variável postulam que a função a ser minimizada possa ser localmente aproximada, em qualquer ponto \bar{z} , por uma expansão em série de Taylor, assim o faremos com a função $\mathfrak{S}(z)$ expressa na Eq. 4.5.

$$\mathfrak{S}(z) = \mathfrak{S}(\bar{z}) + \sum_i \left[\frac{\partial \mathfrak{S}(z)}{\partial z_i} \right] (z - \bar{z}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left[\frac{\partial^2 \mathfrak{S}(\bar{z})}{\partial z_i \partial z_j} \right] (z - \bar{z})^2 + \dots \quad (4.5)$$

Considerando os termos da Eq. 4.5 até termos de segunda ordem e adotando notação matricial, temos

$$\mathfrak{S}(z) \approx A - Bz^T + \frac{1}{2} zHz^T \quad (4.6)$$

onde z^T é a matriz transposta de z , e os termos A , B , e H são dados por

$$A \equiv \mathfrak{S}(\bar{z}) \quad (4.7)$$

$$B \equiv - \left[\frac{\partial \mathfrak{S}(\bar{z})}{\partial z_i} \right] \quad (4.8)$$

$$H \equiv \left[\frac{\partial^2 \mathfrak{S}(\bar{z})}{\partial z_i \partial z_j} \right] = P^{-1} \quad (4.9)$$

A matriz A é constante, B é o vetor gradiente, e a matriz das segundas derivadas, H , é chamada matriz Hessiana da função.

Derivando a Eq. 4.6, podemos escrever o gradiente da função $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(z)$ como

$$\nabla \mathfrak{S}(z) = Hz - B \quad (4.10)$$

O método da métrica variável constrói iterativamente uma boa aproximação P para a inversa da matriz Hessiana (H^{-1}), de maneira que a seqüência de matrizes construídas ao longo das iterações k , $P^{(k)}$, tem a seguinte propriedade

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P^{(k)} = H^{-1} \quad (4.11)$$

O valor de $P^{(k)}$ é usado para atualizar o vetor z da seguinte maneira: suponhamos que z^* minimize $\mathfrak{S}(z)$, então $\nabla \mathfrak{S}(z^*) = 0$, e da Eq. 4.10

$$Hz^* = B \quad (4.12)$$

Para um valor qualquer de $z^{(k)}$ nas vizinhanças de z^* , escrevemos a equação do gradiente de $\mathfrak{S}(z)$ da seguinte forma

$$Hz^{(k)} = \nabla \mathfrak{S}(z^{(k)}) - B \quad (4.13)$$

Subtraindo-se a Eq. 4.12 da Eq. 4.13, e multiplicando-se o resultado pelo inverso da Hessiana H^{-1} , teremos

$$z^* - z^{(k)} = -H^{-1}(\nabla \mathfrak{S}(z^{(k)})) \quad (4.14)$$

O primeiro membro da equação anterior representa os passos finitos para a aproximação do valor mínimo z^* . Para obtermos as aproximações de forma iterativa, consideramos os passos k e $k+1$

$$z^{(k+1)} - z^{(k)} = -H^{-1}[\nabla\mathfrak{S}(z^{(k+1)}) - \nabla\mathfrak{S}(z^{(k)})] \quad (4.15)$$

Para boas aproximações da inversa da Hessiana ($H^{-1} \approx P$), obtemos

$$z^{(k+1)} \approx z^{(k)} - [P^{(k+1)}(\nabla\mathfrak{S}(z^{(k+1)}) - \nabla\mathfrak{S}(z^{(k)}))] \quad (4.16)$$

O termo entre colchetes na Eq. 4.16 é a direção de busca da iteração k e será aqui abreviado pela notação $S(z^{(k)})$.

As diferentes maneiras de atualização de $P^{(k+1)}$ sugerem as diferentes formulações do método da métrica variável. Essas formulações exibem convergência quadrática e boa estabilidade numérica (REKLAITIS et al., 1983; FLETCHER & POWELL, 1963).

4.3 O método BFGS

Utilizaremos a variação do método da métrica variável proposta por Broyden, Fletcher, Goldfarb e Shanno, conhecida por BFGS. Detalhes da formulação e implementação do BFGS são encontrados em GILL et al. (1981); FOX (1971); REKLAITIS et al. (1983); PRESS et al. (1986), entre outros.

O algoritmo de otimização começa com um valor arbitrário definido pelo valor $z^{(0)}$, e gera uma seqüência de valores atualizados para $z^{(k+1)}$, através das seguintes relações:

$$z^{(k+1)} = z^{(k)} + \alpha^{(k)} S(z^{(k)}) \quad (4.17)$$

com

$$S(z^{(k)}) = S^{(k)} = -P^{(k)} \Delta g^{(k)} \quad (4.18)$$

e

$$g^{(k)} = \nabla \mathfrak{S}(z^{(k)}) \quad (4.19)$$

onde

$$P^{(k+1)} = P^{(k)} - \frac{P^{(k)} \Delta z^{(k)} \Delta g^{(k)T} P^{(k)}}{\Delta z^{(k)T} P^{(k)} \Delta g^{(k)}} + \frac{\Delta g^{(k)} \Delta g^{(k)T}}{\Delta g^{(k)T} \Delta z^{(k)}} \quad (4.20)$$

$$\Delta z^{(k)} = z^{(k+1)} - z^{(k)} \quad (4.21)$$

$$\Delta g^{(k)} = g(z^{(k+1)}) - g(z^{(k)}) \quad (4.22)$$

onde

k é o número da iteração;

$S^{(k)}$ é a direção de busca;

$\alpha^{(k)}$ é o tamanho do passo sobre uma direção de busca linear;

∇ é o operador gradiente;

$P^{(0)}, P^{(1)}, \dots, P^{(k+1)}$ aproxima a inversa da matriz Hessiana, H^{-1} , da função objetivo;

$\mathfrak{S}(z)$, inicializando o processo com $P^{(0)} = I$, em N iterações (para funções quadráticas).

As equações 4.17 a 4.22 reduzem o problema de otimização original multidimensional $z = \{z_1, z_2, z_3, \dots, z_n\}$ a um problema unidimensional, com a determinação do escalar $\alpha^{(k)}$ (ver Eq. 4.17), que minimiza a função objetivo segundo uma direção $S^{(k)}$. Depois da primeira iteração, se o mínimo não é encontrado, outra direção de busca $S^{(k+1)}$ deve ser calculada; e o processo continua até que a minimização do funcional é completada.

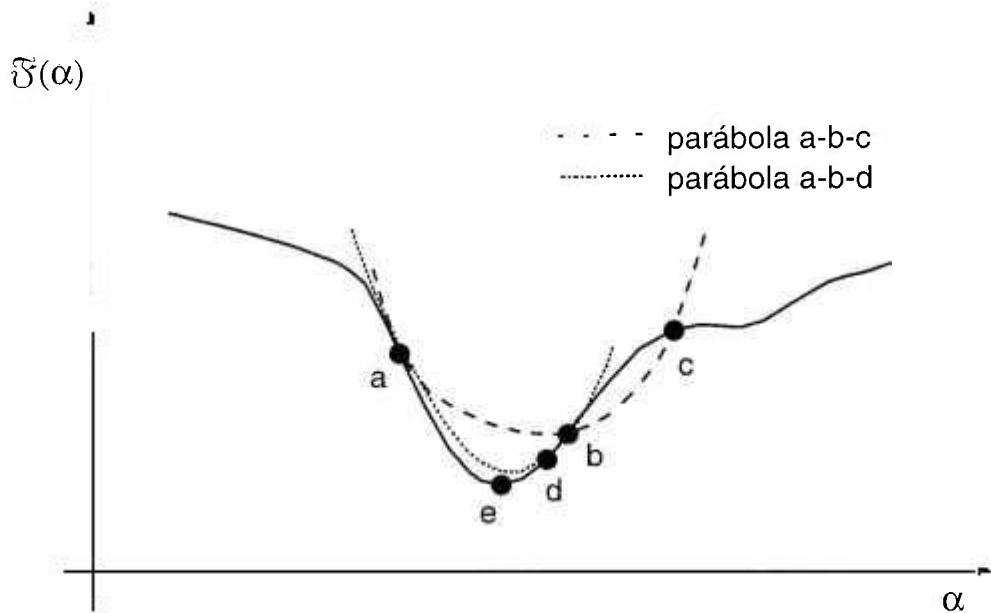


Figura 4.2 Minimização através de interpolação parabólica inversa. A aproximação do mínimo (ponto e) da função original (linha contínua) é feita pelas parábolas **a-b-c** e **a-b-d**.

Para ilustrar a otimização unidimensional em α , a Fig. 4.2 apresenta o Método de Brent. Dado $z^{(0)}$, calculamos $\mathfrak{F}(z^{(0)})$ e $S^{(0)}$ na direção do gradiente. Tomamos então três valores de α , digamos $\alpha^{(a)}, \alpha^{(b)}$ e $\alpha^{(c)}$ (os valores de $(a), (b)$ e (c) como super-índices, indicam apenas que α é calculado em três pontos diferentes chamados de a, b e c), tal que $\alpha^{(a)} < \alpha^{(b)} < \alpha^{(c)}$, e também de tal sorte que as funções avaliadas nestes valores sejam $\mathfrak{F}(z^{(a)}) > \mathfrak{F}(z^{(b)}) < \mathfrak{F}(z^{(c)})$. O Método de Brent falha apenas quando os três pontos $(\alpha^{(a)}, \alpha^{(b)}, \alpha^{(c)})$ forem colineares. Porém, esta situação é contornada com o Método da Secção Áurea (*Gold Section Method*) (GILL et al., 1981), quando necessário. No ponto mínimo, aqui denominado de $\alpha^{(m)}$, calculamos $\mathfrak{F}(z_m) = \mathfrak{F}(\alpha^{(m)})$. Note que o valor de $\alpha^{(m)}$, por ser ponto de mínimo de uma parábola, pode ser calculado como

$$\alpha^{(m)} = \alpha^{(b)} - \frac{1}{2} \frac{(\alpha^{(b)} - \alpha^{(a)})^2 [\mathfrak{F}(\alpha^{(b)}) - \mathfrak{F}(\alpha^{(c)})] - (\alpha^{(b)} - \alpha^{(c)})^2 [\mathfrak{F}(\alpha^{(b)}) - \mathfrak{F}(\alpha^{(a)})]}{(\alpha^{(b)} - \alpha^{(a)}) [\mathfrak{F}(\alpha^{(b)}) - \mathfrak{F}(\alpha^{(c)})] - (\alpha^{(b)} - \alpha^{(c)}) [\mathfrak{F}(\alpha^{(b)}) - \mathfrak{F}(\alpha^{(a)})]} \quad (4.23)$$

Em seguida comparemos os valores de $\mathfrak{S}(z^{(a)})$, $\mathfrak{S}(z^{(b)})$ e $\mathfrak{S}(z^{(c)})$, com o valor da função em $\alpha^{(m)}$, ou seja, comparemos com $\mathfrak{S}(z_m)$. Dentre os valores de $\mathfrak{S}(z^{(a)})$, $\mathfrak{S}(z^{(b)})$ e $\mathfrak{S}(z^{(c)})$, aquele que apresentar a maior diferença em relação a $\mathfrak{S}(z_m)$, será substituído por $\mathfrak{S}(z_m)$. Portanto, agora teremos um novo conjunto de três pontos de α e conseqüentemente uma nova parábola é interpolada nesses pontos. O processo é iterativamente aplicado até que o mínimo real da função $\mathfrak{S}(z)$, na direção de busca considerada, seja encontrado. A Fig. 4.2 ilustra bem este processo.

Determinado o valor de $\alpha^{(k)}$ que minimiza $\mathfrak{S}(z)$ numa direção de busca correspondente a iteração k , as Eqs. 4.20, 4.17 e 4.18 atualizam, para uma nova iteração $k+1$, os valores da inversa da Hessiana $P^{(k)}$, da direção de busca $S^{(k)}$ e do vetor modelo $z^{(k)}$, para valores respectivamente de $P^{(k+1)}$, $S^{(k+1)}$ e $z^{(k+1)}$. Calcula-se também o valor de $\mathfrak{S}(z^{(k+1)})$. Neste passo podemos fazer um teste de convergência:

$$\frac{2|\mathfrak{S}(z^{(k+1)}) - \mathfrak{S}(z^{(k)})|}{|\mathfrak{S}(z^{(k+1)})| + |\mathfrak{S}(z^{(k)})| + \bar{\epsilon}} \leq \hat{\epsilon} \quad (4.24)$$

onde $\hat{\epsilon}$ é o coeficiente de convergência, $\bar{\epsilon}$ é um número pequeno para o caso de $\mathfrak{S}(z)$ estar convergindo para o valor mínimo exato (zero) da função. Se a condição de convergência não for satisfeita, a próxima iteração ($k+1$) utilizará os valores já atualizados de P , S e z . Cada iteração (k) corresponde a uma mudança na direção de busca S , e cada reinício corresponde a uma mudança no parâmetro de penalização \mathfrak{R} . É importante ainda notar que a cada reinício a inversa da matriz Hessiana é também reinicializada, ou seja: $P^{(k)} = I$. Apresentamos a seguir, um diagrama de blocos na Fig. 4.3 com os principais passos do algoritmo de otimização. Em cada bloco do diagrama associamos um número. O programa inicia-se no bloco-1 e em seguida, no bloco-2, os principais parâmetros para a otimização são lidos, tais como M , que é o número máximo de iterações; N é o número de variáveis; $z^{(0)}$ é um chute ou valor inicial, que representa uma configuração inicial da geometria da estrutura. Também são fornecidos os valores de $\hat{\epsilon}$,

para teste de convergência, e os valores de penalização inicial $\mathfrak{R}^{(0)}$ e final $\hat{\mathfrak{R}}$, bem como o redutor de penalidade, que é o $\overline{\mathfrak{R}}$. No bloco-3 o número de iterações é zerado, $k = 0$, e o termo de penalização corresponde ao valor inicial. No bloco-4 faz-se um teste para se saber se o número de iterações já superou o número máximo permitido. No caso afirmativo, o programa termina. No caso negativo, o programa vai para o bloco principal, que é o bloco-5. Neste bloco, a função $\mathfrak{S}(z^{(k)})$ aumentada com o termo de penalização é avaliada para o valor atualizado do vetor $z^{(k)}$ na iteração (k) . Para se avaliar estas funções lembramos que as respostas φ (ver Eqs. 4.2, 2.1 e 2.2), já foram calculadas, para aquela configuração $z^{(k)}$, pelo MEC. Também neste bloco o gradiente $\nabla\mathfrak{S}(z^{(k)})$ da função é calculado, bem como a direção $S(z^{(k)})$ de pesquisa do mínimo. Note que a primeira vez, $k = 0$, $S(z^{(0)}) = S^{(0)}$, corresponde à direção de maior gradiente da função $\mathfrak{S}(z^{(0)})$. Em seguida, sabendo-se a direção $S^{(k)}$, a otimização com multivariáveis passa a otimização unidirecional (naquela direção $S^{(k)}$, se $S^{(k)} = S^{(0)}$). Para isto, o procedimento ilustrado na Fig. 4.2 é adotado, até que para um determinado passo $\alpha^{(k)}$, $\mathfrak{S}(z^{(k)} + \alpha^{(k)}S^{(k)})$ atinja um mínimo. Para este valor de $\alpha^{(k)}$, atualiza-se, então, o vetor que descreve a configuração geométrica, e, portanto, o novo vetor de z será $z^{(k+1)} = z^{(k)} + \alpha^{(k)}S(z^{(k+1)})$. Para este novo valor de $z^{(k+1)}$, atualizam-se também os valores da inversa da Hessiana e da direção de busca do mínimo, respectivamente para $P^{(k+1)} = P(z^{(k+1)})$ e $S^{(k+1)} = S(z^{(k+1)})$. Calcula-se ainda o valor da função $\mathfrak{S}(z^{(k+1)})$. No bloco-6 o teste de convergência é realizado. Verifica-se se a convergência $\hat{\mathfrak{E}}$ foi atingida. No caso negativo, passa-se para uma nova iteração. No caso afirmativo, verifica-se, no bloco-8, se $\mathfrak{R} < \hat{\mathfrak{R}}$. Se sim, o programa convergiu. Se não, o programa prossegue, indo ao bloco-9, tentando diminuir a importância do termo de penalização, fazendo $\mathfrak{R} = \mathfrak{R} * \overline{\mathfrak{R}}$. Então, inicia-se um outro processo de busca pelo bloco-3. Estes procedimentos continuam até que um mínimo seja atingido, ou que o número máximo de iterações seja atingido.

Resumidamente, os blocos-1-2-3 inicializam o procedimento de otimização, fornecendo os parâmetros necessários para o funcionamento do algoritmo. Os blocos-4-5-6-7 formam um *loop* que tem a função de encontrar um valor mínimo numa dada direção

de busca. Um teste de convergência (bloco-6), é o desvio para o *loop* formado pelos blocos-3-4-5-6-8-9, que tem a função de diminuir a influência do fator de penalização, quando um determinado mínimo é encontrado (numa dada direção de busca). O desvio para a saída deste 2º. *loop* está no bloco-8, no qual um teste para o valor final de penalização é realizado, terminando o programa (blocos-10-11-12). Temos ainda, para os dois *loops* principais, o desvio feito pelo bloco-4, que finaliza o programa (bloco-12), se o número de iterações exceder o número máximo permitido.

4.4 Método heurístico adotado

A fim de assegurar que os valores das componentes do vetor $z = \{z_1, z_2, z_3, \dots, z_n\}$ sempre permaneçam na região admissível (que aqui chamaremos de \bar{A}) o passo $\alpha^{(k)}$, quando da otimização unidimensional equivalente, é heurísticamente controlado através do seguinte procedimento

$$\alpha^{(k+1)} = \begin{cases} 1.00 \alpha^{(k)} & \text{se } z_i^{(k+1)} \in \bar{A} \\ 0.90 \alpha^{(k)} & \text{se } z_i^{(k+1)} \notin \bar{A} \end{cases} \quad (4.25)$$

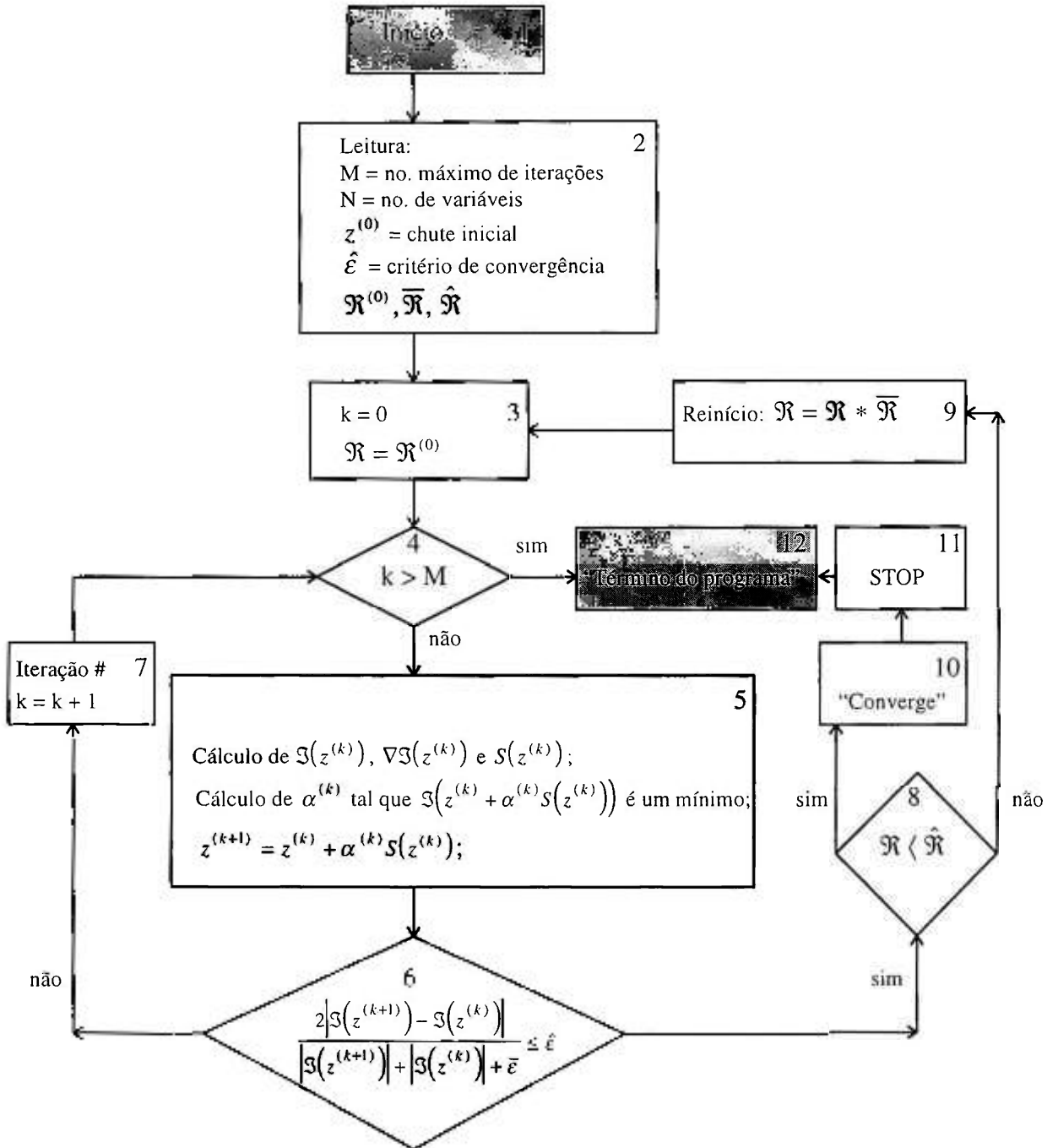


Figura 4.3 Algoritmo de otimização.

5 CÁLCULO DAS SENSIBILIDADES

5.1 Introdução

Podemos classificar os algoritmos usados nos processos de otimização quanto ao tipo de informação que requerem. Os algoritmos de ordem zero usam apenas a avaliação da própria função objetivo. Os de primeira ordem requerem os gradientes ou primeiras derivadas da função objetivo e finalmente os de segunda ordem necessitam do cálculo das segundas derivadas da função objetivo.

Dizemos que um determinado problema é de otimização de forma quando fazemos a extremização de uma função objetivo variando-se a forma do contorno da estrutura. Desse modo, as variáveis do processo de otimização são parâmetros de controlam a geometria da estrutura. Nessa classe de problemas usualmente aplicamos algoritmos de primeira ordem, cujas primeiras derivadas das funções envolvidas são conhecidas como sensibilidades à mudança de forma.

A função a ser minimizada no nosso problema está expressa na Eq. 4.2, sendo a função $f(z)$ expressa pela Eq. 2.1. Podemos reescrever aquelas equações de uma forma mais completa, destacando o gradiente e as sensibilidades, como

$$\mathfrak{B}(z) = w \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^2 \left[(\varphi_{ik} - \hat{\varphi}_{ik})^2 \right] + \Re \sum_{j=1}^L \sum_{i=1}^P \left[\frac{1}{C_j(z_i)} \right] \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{B}(z)}{\partial z} = 2w \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^2 (\varphi_{ik} - \hat{\varphi}_{ik}) \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \Re \sum_{j=1}^L \left[\frac{1}{C_j^2(z)} \frac{\partial C_j(z)}{\partial z} \right] \quad (5.2)$$

na qual $\partial\varphi/\partial z$ são as sensibilidades.

Sendo $\hat{\varphi}$ na Eq. 2.1 deslocamento, deformação ou tensão, o correspondente valor calculado $\varphi = Az$ na Eq. 2.1 também deve ser deslocamento, deformação ou tensão. A derivada de $f(z)$ necessária no processo de otimização, Eq. 4.19, é chamada de sensibilidade de $f(z)$ em relação ao parâmetro z . Conseqüentemente, ao derivar $f(z)$ na Eq. 4.2 em relação a z , obtemos a Eq. 5.2 e, portanto, necessitaremos da derivada $\partial\varphi/\partial z_i$, que é a sensibilidade, em relação às variáveis de projeto z_i , da grandeza φ (deslocamento, deformação ou tensão), que no MEC podem ser calculados a partir dos valores $\{U\}$ e $\{T\}$ da Eq. 3.31.

Começamos com a diferenciação da Eq. 3.31, em relação às variáveis de projeto, z . Obtemos que

$$[F]\{U\}_{,z} + [F]_{,z}\{U\} = [G]\{T\}_{,z} + [G]_{,z}\{T\} \quad (5.3)$$

onde $(,z)$ é a diferenciação com relação à z ; e os elementos de $[U]_{,z}$ e $[T]_{,z}$ são $u_{k,z}(x)$ e $t_{k,z}(x)$, respectivamente.

Observamos que o vetor z contém parâmetros geométricos relativos à definição de contorno, parâmetros estes que podem ser modificados a fim de se obter o mapa adequado de deslocamentos, deformações ou tensões que minimiza $F(z)$.

O cálculo das sensibilidades $\{U\}_{,z}$ e $\{T\}_{,z}$ num modelo discretizado em elementos de contorno, como aquele expresso pela Eq. 3.31, pode ser desenvolvido basicamente de três maneiras: diferenças finitas, semi-analítico e analítico. No método das diferenças finitas as sensibilidades são aproximadas utilizando-se uma relação entre a análise da forma da estrutura com geometria original e a análise da geometria perturbada. No método semi-analítico as derivadas das matrizes $[G]$ e $[F]$ são calculadas usando-se um esquema de diferenças finitas. Já no método analítico as derivadas das matrizes de rigidez são

determinadas de forma mais exata, ou seja, na Eq. 5.3, as matrizes $[G]$ e $[F]$ já foram previamente calculadas pois foram usadas no cálculo de $\{U\}$ e $\{T\}$, incógnitas de deslocamentos e trações.

Neste caso as matrizes $[F]_{,z}$ e $[G]_{,z}$ são calculadas de forma mais exata e expressas em termos das derivadas das soluções fundamentais, $u_{ij}^*(\xi, x)$ e $p_{ij}^*(\xi, x)$ (BEZERRA, 1993), em relação às variáveis de projeto. Os elementos de $[F]_{,z}$ e $[G]_{,z}$ podem ser calculados da diferenciação das Eqs. 3.32 e 3.33, ou seja,

$$G_{pq,z} = \sum_{q=1}^{N(Ne)} \int_0^{+1} \{ [t_{ij,z}^*][h]J + [t_{ij}^*][h]J_{,z} \} d\rho \quad (5.4)$$

$$F_{pq,z} = \sum_{q=1}^{N(Ne)} \int_0^{+1} \{ [u_{ij,z}^*][h]J + [u_{ij}^*][h]J_{,z} \} d\rho \quad (5.5)$$

onde a derivada do Jacobiano ($J_{,z}$) é dada por

$$J_{,z} = J^{-1}(x_{1,\rho z} + x_{2,\rho z}) \quad (5.6)$$

As expressões $u_{ij,z}^* = u_{ij,z}^*(\xi, x)$ e $p_{ij,z}^* = p_{ij,z}^*(\xi, x)$ são as sensibilidades das soluções fundamentais, ou sensibilidades dos *kernels*, e podem ser também calculadas.

5.2 Sensibilidade dos kernels

Nas Eqs. 5.4 e 5.5, as derivadas dos kernels u_{ij}^* e t_{ij}^* , com relação ao vetor z , são:

$$u_{ij,z}^*(\xi, x) = c_1 \left[c_2 \delta_{ij} \frac{R_{,z}}{R} - \frac{1}{R^2} (Y_{i,z} Y_j + Y_i Y_{j,z}) + \frac{2}{R^3} Y_i Y_j R_{,z} \right] \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} t_{ij,z}^*(\xi, x) = & \frac{c_3 c_4}{R^2} (n_j Y_{i,z} + n_{j,z} Y_i - n_i Y_{j,z} - n_{i,z} Y_j) \\ & + \frac{c_3}{R^4} \left[2 Y_i Y_j (Y_{k,z} n_k + Y_k n_{k,z}) + 2 (Y_{i,z} Y_j + Y_i Y_{j,z}) Y_k n_k - \frac{8}{R} Y_i Y_j Y_k n_{k,z} \right] \\ & - \frac{2c_3}{R^3} \left[c_4 (n_j Y_i - n_i Y_j) - \left(c_4 \delta_{ij} + \frac{2Y_i Y_j}{R^2} \right) \right] R_{,z} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Para o caso bidimensional, $R_{,z} = R^{-1} Y_k Y_{k,z}$.

As derivadas das normais perpendiculares ao contorno são escritas como

$$n_{1,z} = -J^{-2} J_{,z} x_{2,z} + J^{-1} x_{2,z} \quad (5.9)$$

$$n_{2,z} = J^{-2} J_{,z} x_{1,z} + J^{-1} x_{1,z} \quad (5.10)$$

Nas Eqs. 5.4 e 5.5, as derivadas da função interpoladora h , com relação a z , não são necessárias já que h não depende de z .

Conhecendo-se as matrizes $[F]_{,z}$ e $[G]_{,z}$, e usando-se a Eq. 5.3, obtemos

$$[F]\{U\}_{,z} = [G]\{T\}_{,z} + \{r\} \quad (5.11)$$

$$\{r\} = [G]_{,z}\{T\}_{,z} - [F]_{,z}\{U\}_{,z} \quad (5.12)$$

A Eq. 5.11 pode ser reescrita, depois de aplicadas as condições de contorno, como

$$[A]\{v\}_{,z} = \{d\} + \{r\} \quad (5.13)$$

onde $\{v\}_{,z}$ contém as derivadas dos deslocamentos $\{U\}_{,z}$ e trações $\{T\}_{,z}$ nodais (do contorno). Os valores de $\{T\}$ e $\{U\}$ na Eq. 5.3 já foram previamente também calculados através da Eq. 3.31, e a matriz A na Eq. 5.13 é a mesma da Eq. 3.37.

As sensibilidades $\{U\}_{,z}$ e $\{T\}_{,z}$ são portanto obtidas resolvendo-se a Eq. 5.13, impondo-se os deslocamentos e trações do contorno previamente conhecidos. As sensibilidades de deslocamentos e trações são portanto obtidas com a resolução do sistema 5.13 em termos de $\{U\}_{,z}$.

Para o caso onde as tensões são as quantidades medidas, as sensibilidades das tensões são obtidas diferenciando-se a Eq. 3.17. Temos, portanto

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,z}^*(\xi) = & \int_{\Gamma} \left[\varepsilon_{ijk,z}^*(\xi,x) t_k(x) + \varepsilon_{ijk}^*(\xi,x) t_{k,z}(x) \right] d\Gamma(x) \\ & - \int_{\Gamma} \left[\sigma_{ijk,z}^*(\xi,x) u_k(x) + \sigma_{ijk}^*(\xi,x) u_{k,z}(x) \right] d\Gamma(x) \\ & + \int_{\Gamma} \left[\varepsilon_{ijk}^*(\xi,x) t_k(x) - \sigma_{ijk}^*(\xi,x) u_k(x) \right] \frac{\partial d\Gamma(x)}{\partial z} \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde as derivadas dos *kernels* das deformações $\varepsilon_{ijk,z}^*$ e das tensões $\sigma_{ijk,z}^*$ são, respectivamente,

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{ijk,z}^*(\xi, x) = & -4 \left(\frac{a_{3l,z}^n Y}{R^2} \right) \left(\frac{a_{3ll,z}^n Y}{R^4} \right) \left(\frac{a_{3lll,z}^n Y R}{R^5} \right) \left[2a_2 \delta_{ij}^Y k + 2v \left(\delta_{ik}^Y j + \delta_{jk}^Y i \right) \right. \\
 & \left. \frac{8Y Y Y}{i j k} \frac{Y}{R^2} + \left(\frac{a_{3ll}^n Y}{R^4} \right) \left[2a_2 \delta_{ij}^Y k_{,z} + 2v \left(\delta_{ik}^Y j_{,z} + \delta_{jk}^Y i_{,z} \right) - \frac{8Y_{i,z} Y_{j,k}}{R^2} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{8Y Y_{j,z} Y_k}{R^2} - \frac{8Y Y_{i,k} Y_{j,z}}{R^2} + \frac{16Y Y_{i,j} Y_{k,z} R}{R^3} \right] \right. \\
 & \left. - \left(\frac{2a_3 R_{,z}}{R^3} \right) \left[n_i \left(2v \frac{Y_j Y_k}{R^2} + a_2 \delta_{jk} \right) + n_j \left(2v \frac{Y_i Y_k}{R^2} + a_2 \delta_{ik} \right) \right] \right. \\
 & \left. + \left(\frac{a_3}{R^2} \right) \left[n_{i,z} \left(2v \frac{Y_j Y_k}{R^2} + a_2 \delta_{jk} \right) + 2v n_i \left(\frac{Y_{j,z} Y_k}{R^2} + \frac{Y_{j,k} Y_z}{R^2} - 2 \frac{Y_{j,k} Y_{,z}}{R^3} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + n_{j,z} \left(2v \frac{Y_i Y_k}{R^2} + a_2 \delta_{ik} \right) + 2v n_j \left(\frac{Y_{i,z} Y_k}{R^2} + \frac{Y_{i,k} Y_z}{R^2} - 2 \frac{Y_{i,k} Y_{,z}}{R^3} \right) \right] \right. \\
 & \left. - \left(\frac{2a_3 R_{,z}}{R^3} \right) \left[n_k \left(2a_2 \frac{Y_{ij}}{R^2} - a_4 \delta_{ij} \right) \right] + \left(\frac{a_3}{R^2} \right) \left[n_{k,z} \left(2a_2 \frac{Y_{ij}}{R^2} - a_4 \delta_{ij} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2a_2 n_k \left(\frac{Y_{i,z} Y_j}{R^2} + \frac{Y_{i,j} Y_z}{R^2} - 2 \frac{Y_{i,j} Y_{,z}}{R^3} \right) \right] \right] \quad (5.15)
 \end{aligned}$$

e

$$\sigma_{ijk,z}^*(\xi, x) = \left(\frac{a_1 R_{,z}}{R^2} \right) \left[\frac{a_2}{R} \left(\delta_{ik}^Y j + \delta_{jk}^Y i - \delta_{ij}^Y k \right) + \frac{2Y Y Y}{i j k} \frac{Y}{R^3} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{a}{R} \right) \left[\frac{a}{R^2} \left(\delta_{ik} Y_j + \delta_{jk} Y_i - \delta_{ij} Y_k \right) + \frac{a}{R} \left(\delta_{ik} Y_{j,z} + \delta_{jk} Y_{i,z} - \delta_{ij} Y_{k,z} \right) \right. \\
& \left. + \frac{2Y_{i,z} Y_j Y_k}{R^3} + \frac{2Y_{j,z} Y_i Y_k}{R^3} + \frac{2Y_{i,j} Y_k}{R^3} - \frac{6Y_{i,j} Y_k}{R^4} \right] \quad (5.16)
\end{aligned}$$

Quando as deformações forem as quantidades medidas, precisaremos dos valores das sensibilidades das deformações, no processo de minimização. Sabendo-se os valores das sensibilidades das tensões, obtemos os valores das sensibilidades das deformações através de

$$\varepsilon_{ij,z}(\xi) = \frac{\sigma_{ij,z}(\xi)}{2\mu} - \frac{\lambda \delta_{ij} \sigma_{ll,z}(\xi)}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} \quad (5.17)$$

Uma das vantagens da diferenciação implícita, além da maior precisão, é o aproveitamento dos cálculos dos valores de $[G]$, $[F]$, $\{U\}$ e $\{T\}$ já feitos anteriormente para a solução da Eq. 3.37. Estes valores são usados para a montagem da Eq. 5.13. Este fato, de ter calculado $[G]$, $[F]$, $\{U\}$ e $\{T\}$ e armazenado seus valores para uso na Eq. 5.13, é bastante significativo, pois a otimização numérica é um processo iterativo e requer muitas análises para a obtenção da solução do problema e a reutilização de $[G]$, $[F]$, $\{U\}$ e $\{T\}$ resulta em considerável economia de esforço computacional.

5.3 Análise das singularidades

Utilizamos para o cálculo das sensibilidades desenvolvido no parágrafo anterior, um método analítico chamado Método da Derivação Implícita. Este método é mais exato, e

requer a integração de uma nova classe de sensibilidade de soluções fundamentais ou *sensitivity kernels*, surgidas a partir da expressão discretizada do MEC derivada, em relação à variável de projeto z , conforme foi mostrado na Eq. 5.3.

Este procedimento foi detalhado no início deste capítulo, sem contudo termos nos preocupado com as possíveis singularidades dos novos *sensitivity kernels* obtidos (Eqs. 5.7 e 5.8). Faremos a seguir uma análise dessas singularidades, notamos entretanto que este tópico foi muito bem estudado por SAIGAL et al. (1989).

Observando as Eqs. 5.4 e 5.5 notamos que $G_{pq,z}$ e $F_{pq,z}$ dependem dos *sensitivity kernels* expressos nas Eqs. 5.8 e 5.7, respectivamente. Nas Eqs. 5.7 e 5.8 observamos que as singularidades são diferentes das respectivas Eqs. 3.9 e 3.10. As novas singularidades nos *sensitivity kernels* podem ser estudadas a partir das derivadas dos termos singulares das Eqs. 3.9 e 3.10.

Portanto, se G_{pq} apresentava uma singularidade fraca no termo $\log(R)$ (ver Eq. 3.9), quando $R \rightarrow 0$, no caso de $G_{pq,z}$ podemos estudar a nova singularidade; SAIGAL et al. (1989) tomaram o limite da derivada parcial de $\log(R)$ em relação à variável de projeto z e que naturalmente aparecem em $G_{pq,z}$. SAIGAL et al. (1989) mostraram que o limite expresso pela Eq. 5.18 existe e, conseqüentemente, não temos singularidades fortes na matriz $G_{pq,z}$.

$$\lim_{R \rightarrow 0} \left[\frac{\partial(\log R)}{\partial z} \right] = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{(\partial R / \partial z)}{R} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{R_{,z}}{R} = \text{valor finito} \quad (5.18)$$

A matriz F_{pq} apresentava singularidades fortes nos termos diagonais F_{ss} , conforme já vimos anteriormente. Estes termos apresentam singularidades fortes do tipo $(1/r)^\alpha$ (com $\alpha \geq 2$) que também aparecerão na matriz $F_{pq,z}$. Tais singularidades fortes não poderão ser levantadas através de integração numérica. Para determinarmos os termos diagonais de $F_{ss,z}$ utilizamos novamente a técnica de movimento de corpo rígido, da mesma maneira como

foi usada com as Eqs. 3.35 e 3.36. Uma unidade de deslocamento é, portanto, aplicada simultaneamente a todos os nós do modelo em elementos de contorno, primeiro na direção x_1 e depois na direção x_2 . Estes vetores deslocamentos podem ser escritos como

$$\{U\}_{x_1} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \{U\}_{x_2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.19)$$

Esta técnica de movimento de corpo rígido pode ser aplicada a qualquer objeto, independentemente das variáveis de projeto. Neste caso, embora o vetor $\{U\}$ seja diferente de zero, o vetor $\{U\}_{,z}$ tem valor zero. Correspondentemente a esse movimento de corpo rígido, o vetor tração $\{T\}$ e sua derivada $\{T\}_{,z}$ têm também valor zero. Com esses resultados, colocados na Eq. 5.3 com movimento de corpo rígido em uma das direções x_i (x_1 ou x_2), podemos ainda escrever

$$[F]_{,z} \{U\}_{x_i} = 0 \quad (5.20)$$

Expandindo esta equação podemos obter

$$\sum_{j=1,3,\dots}^{n-1} F_{ij,z} = 0; \quad \sum_{j=2,4,\dots}^n F_{ij,z} = 0; \quad \text{para cada } i, \quad (5.21)$$

logo, obtemos os termos diagonais da matriz $[F]_{,z}$.

Portanto, a matriz de sensibilidades via elementos de contorno, $[F]_{,z}$, obedece o mesmo critério observado anteriormente para a matriz $[F]$. As equações acima são, portanto, análogas às Eqs. 3.35 e 3.36, estudadas no Capítulo 3.

Em particular, neste trabalho utilizamos um método de otimização de primeira ordem, ou seja, a matriz Hessiana (H) não é calculada analiticamente, mas apenas aproximada pela equação (4.11). Observamos que para a aplicação de um método de otimização de segunda ordem, o cálculo analítico de H causaria o aparecimento de singularidades fortes na matriz G e hipersingularidades na matriz F .

6.1 *Introdução*

Neste capítulo aplicaremos as idéias e formulações desenvolvidas até aqui neste trabalho a alguns problemas simples de determinação da topologia ideal, em estruturas bidimensionais em campo elastostático. Lembramos que a formulação desenvolvida baseou-se no Método dos Elementos de Contorno e num algoritmo de otimização (BFGS); as sensibilidades dos deslocamentos, deformações e tensões em relação às variáveis de projeto (z) foram consideradas neste trabalho através do Método da Derivação Implícita.

Os programas com o desenvolvimento da formulação descrita nos capítulos precedentes foram escritos em linguagem FORTRAN-77. Utilizamos o compilador Visual Workbench V 1.00, instalado num micro-computador pessoal IBM-compatível, com microprocessador Pentium-166MHz, e demais periféricos.

O procedimento de execução de todas as rotinas implementadas ou usadas neste trabalho de tese, integrando os programas que foram usados nestas análises, podem ser melhor visualizados com o auxílio dos diagramas de blocos, apresentados no Apêndice 2. As constantes características do material podem ser modificadas a fim de satisfazer valores práticos normalmente adotados em análise estrutural. A simulação dos dados de referência podem ser obtidos, na prática, em campo ou em laboratório, entretanto, usou-se o programa MEC-direto para se obter estes valores. Os dados de saída do MEC-direto para a configuração esperada são usados como dados de referência. Portanto, podemos executar o programa MEC-inverso - que partindo de uma geometria “qualquer” chegará a uma geometria da estrutura que reproduza os dados de referência nos pontos de referência.

Diversos exemplos simples são rodados neste capítulo. O primeiro exemplo trata da caracterização de uma viga simplesmente apoiada, no qual comparamos os resultados com as respostas apresentadas por SAIGAL et al. (1989), quanto aos valores das sensibilidades de deslocamentos.

No segundo exemplo estudamos algumas variações do problema de determinação da geometria de um painel retangular, sob tração constante. Apresentamos quatro casos para ilustração da eficiência da formulação aqui proposta.

No terceiro exemplo temos o resultado da análise de concordância de raios aplicada em um *lug* simétrico, com duas e três variáveis de projeto e diferentes funções de especificação da forma de evolução da geometria.

O quarto problema é bastante parecido com um exemplo apresentado por BARRA (1990), sendo que a análise atual mostra-se mais rigorosa e com maior quantidade de dados observados, uma vez que modelamos o corpo inteiro (e não apenas seu quarto simétrico como feito por BARRA (1990)), e trabalhamos com as sensibilidades exatas.

O quinto e último exemplo trata da configuração de um filete tracionado, simétrico. Modelamos sua metade superior e conseguimos resultados semelhantes aos obtidos por outros pesquisadores (BARRA, 1990 e HAUG et al., 1984), entretanto, com enfoque diferente daqueles autores. Utilizamos um método heurístico para a implementação das funções de restrição das variáveis de projeto, o que foi de importância fundamental para a conclusão do exemplo.

6.2 *Viga sob carregamento uniforme*

Este exemplo trata da aplicação da formulação apresentada a um problema simples de viga de seção reta retangular, simplesmente apoiada, conforme mostrado na Fig. 6.1. Os dados utilizados para caracterizar o material são: módulo de elasticidade $E = 30 \times 10^6$ psi (2.1×10^4 Kgf/cm²), e coeficiente de Poisson $\nu=0.3$. Observamos que estudar esta viga pelo MEC é o mesmo que estudar rigorosamente (sem as aproximações da resistência dos materiais), a viga pela teoria da elasticidade.

Os dados da geometria inicial podem ser observados também na Fig. 6.1. As medidas adotadas são 40 in (101.60 cm) de comprimento, 10 in (25.4 cm) de altura e espessura 1 (unidade).

A viga está sujeita a um carregamento uniformemente distribuído de valor 100 psi (0.07031 Kgf/cm²), ao longo de sua parte superior, e assumimos que esta viga corresponde a um estado plano de tensões. Observando sua simetria da direção x_1 , modelamos metade da viga, usando diferentes quantidades de elementos quadráticos (*mesh*). Usamos “m” elementos para discretizar o lado menor e “n” elementos para discretizar o lado maior-longitudinal. As condições de contorno podem ser observadas também na Fig. 6.2, onde ilustramos apenas a metade da viga que foi modelada.

As soluções analíticas das sensibilidades para deslocamentos nos pontos A e B do contorno (ver Fig. 6.2), dadas por TIMOSHENKO & GOODIER (1970), e as fornecidas por SAIGAL et al. (1989), são disponíveis na literatura e podem ser comparadas com as respectivas sensibilidades obtidas neste trabalho, a proporção que se varia a malha utilizada (m x n), ver Tabela 6.1.

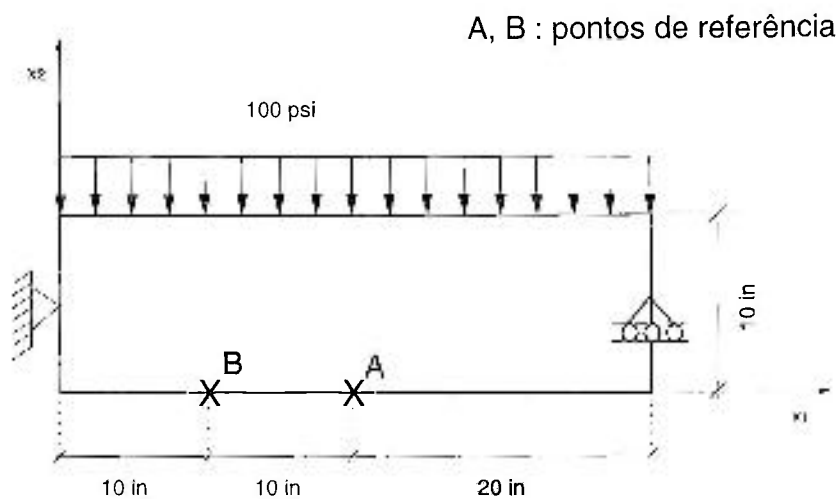


Figura 6.1 Metade de uma viga simplesmente apoiada com carregamento uniformemente distribuído.

O objetivo principal deste exemplo é testar a precisão da formulação proposta mormente em relação ao cálculo das sensibilidades.

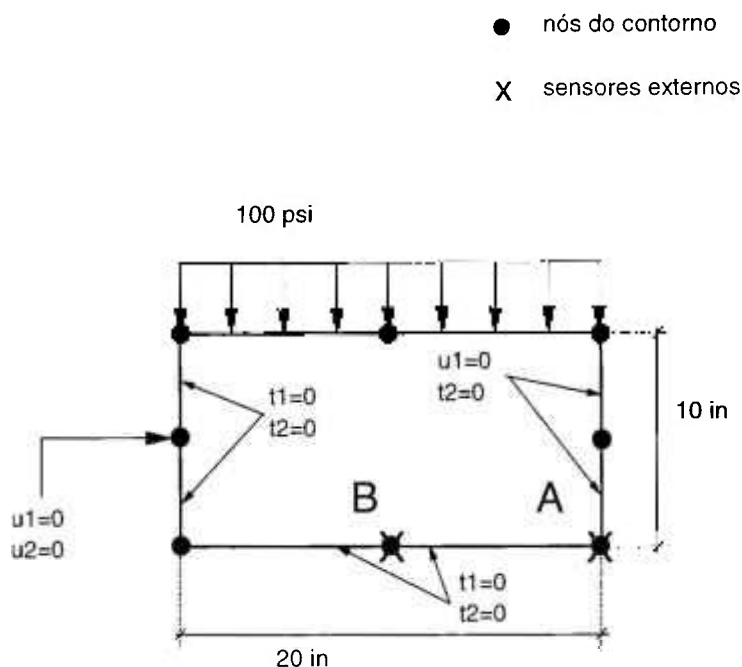


Figura 6.2 Malha ($m=1$, $n=1$), condições de contorno e geometria do exemplo 1.

Observando a Tabela 6.1 nota-se que a precisão dos nossos deslocamentos é igual a obtida por SAIGAL et al. (1989), e mesmo com uma malha refinada ($m=5$ e $n=10$) nossa formulação mostra-se mais rígida que a formulação analítica desenvolvida por TIMOSHENKO & GOODIER (1970) que advém da resolução de uma equação bi-harmônica em estado plano de tensões e considera o efeito de cisalhamento (esta não é a hipótese considerada pela teoria da resistência dos materiais).

No que diz respeito ao cálculo das sensibilidades nosso resultado foi mais preciso que aquele apresentado por SAIGAL et al. (1989) e com uma malha ($m=5$ e $n=10$) coincide (até a quarta casa decimal) com o valor analítico obtido por TIMOSHENKO & GOODIER (1970).

Tabela 6.1 Análise da sensibilidade dos deslocamentos da viga simplesmente apoiada.

<i>Mesh</i> (m x n)	Deslocamento Vertical (SAIGAL et al., 1989) $ u_2 \times 10^{-3} $	Sensibilidade do deslocamento Vertical (SAIGAL et al., 1989) $ u_{2,z} \times 10^{-4} $	Deslocamento Vertical (deste trabalho) $ u_2 \times 10^{-3} $	Sensibilidade do deslocamento Vertical (deste trabalho) $ u_{2,z} \times 10^{-4} $	Deslocamento Vertical. Resultados analíticos [†] $ u_2 \times 10^{-3} $	Sensibilidade do deslocamento Vertical. Resultados analíticos [†] $ u_{2,z} \times 10^{-4} $
1 x 2	1.4795	4.0113	1.4795	4.0719		
3 x 6	1.5322	4.1744	1.5322	4.1574	1.5563	4.1631
5 x 10	1.5514	4.1716	1.5514	4.1603		
1 x 2	1.0601	2.8636	1.0601	2.9278		
3 x 6	1.1074	2.9810	1.1074	2.9723	1.0925	2.9732
5 x 10	1.1271	2.9791	1.1271	2.9732		

[†] (TIMOSHENKO & GOODIER, 1970)

6.3 Painel retangular sob tração constante

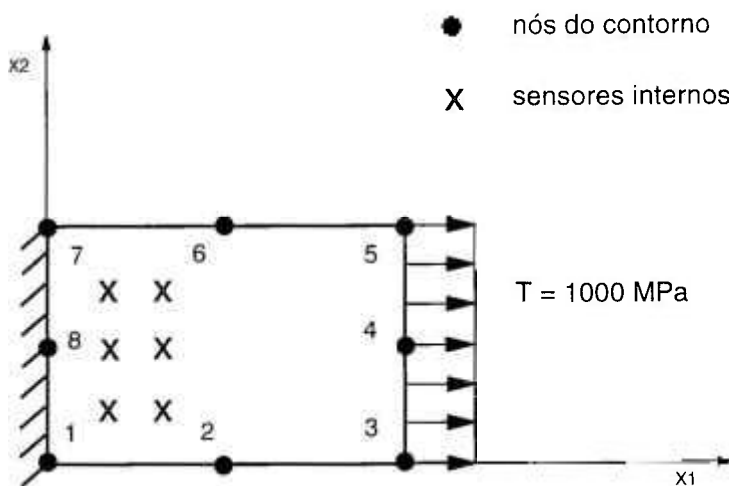


Figura 6.3 Configuração inicial do exemplo 2 (geometria exata).

Este segundo exemplo é um de teste simples para o algoritmo inverso implementado no programa MEC-inverso. Neste exemplo a geometria de um objeto será determinada a fim de que valores de referência (dados por sensores internos representados em forma de X) sejam satisfeitos nos seis pontos de referência.

Na Fig. 6.3 vemos a geometria final a que se quer chegar. A modelagem feita com 4 elementos quadráticos, ou seja, um total de apenas 8 nós no contorno do corpo. O lado esquerdo está engastado, deslocamentos nas direções x_1 e x_2 iguais a zero, e há tração constante ao longo da direção x_1 agindo na face da direita. Os valores característicos do material (fictício) são: $E=1000.0$ MPa, $\nu=0.3$ e $\rho=0.0$.

As Figs. 6.4, 6.5, 6.6 e 6.7 ilustram alguns valores iniciais dados à geometria do objeto. Estas configurações iniciais, na prática, podem representar formas quaisquer que um projetista deseja que seja devidamente modificada até que os valores de referência (nos pontos de referência) sejam satisfeitos.

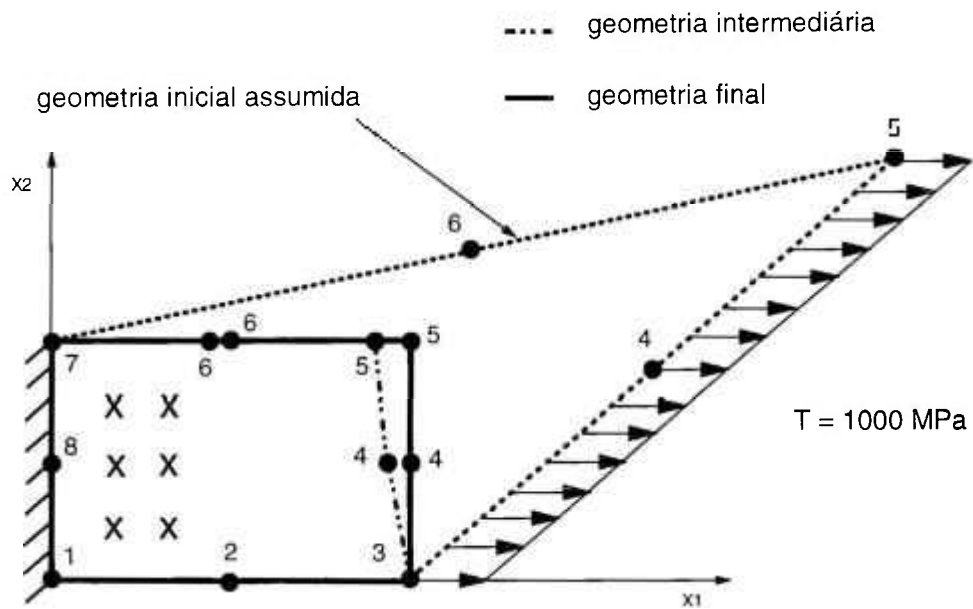


Figura 6.4 Convergência da análise da 1ª. variação geométrica do exemplo 2.

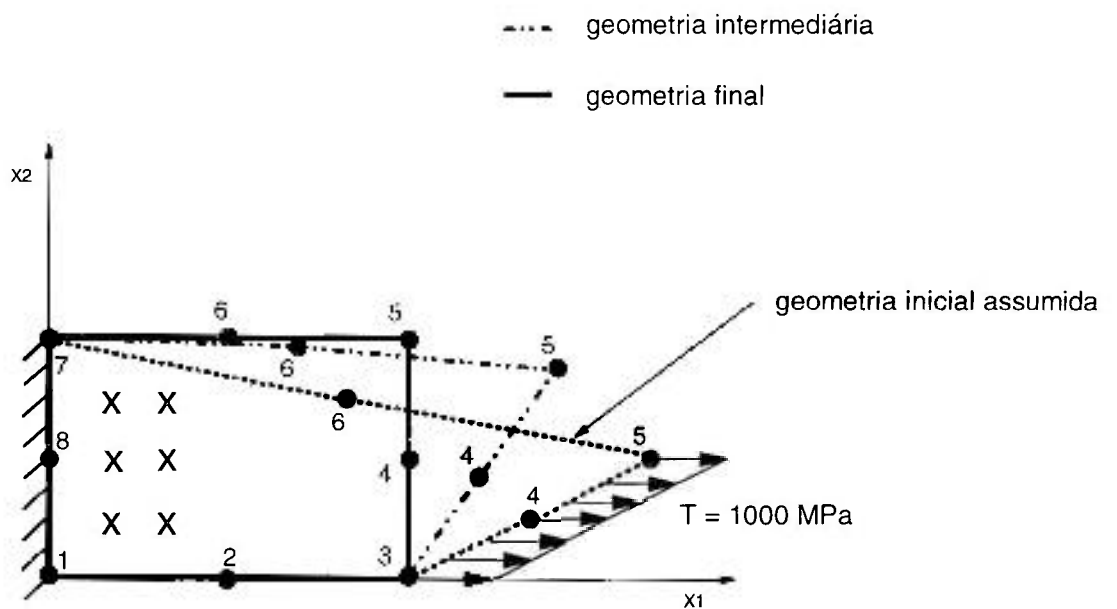


Figura 6.5 Convergência da análise da 2ª. variação geométrica do exemplo 2.

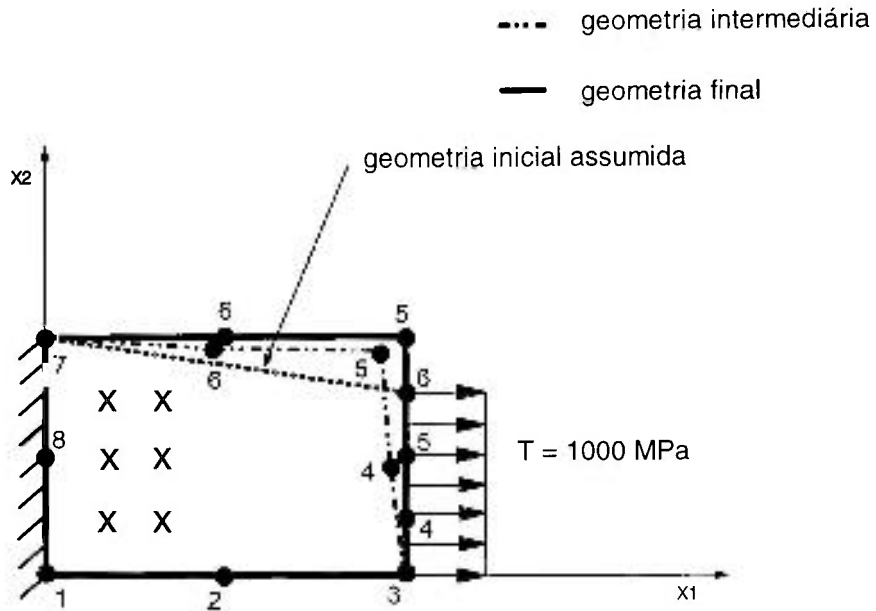


Figura 6.6 Convergência da análise da 3^a. variação geométrica do exemplo 2.

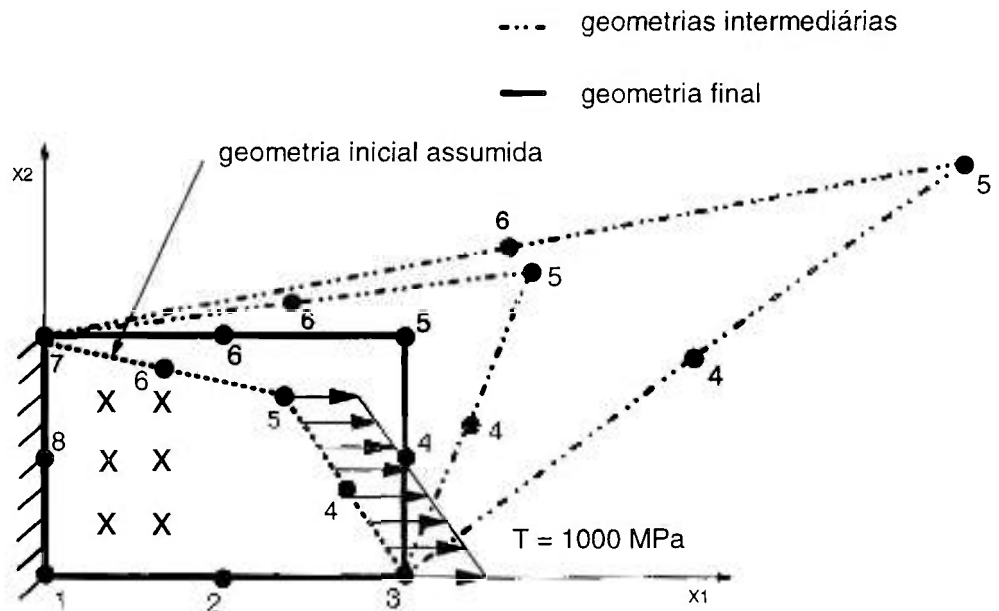


Figura 6.7 Convergência da análise da 4^a. variação geométrica do exemplo 2.

Os resultados para os quatro casos aqui estudados estão apresentados na Tabela 6.2. Podemos observar a eficiência da formulação aqui proposta através da convergência rápida e da precisão das soluções obtidas.

As posições final e exata estão relacionadas ao valor das coordenadas do nó geométrico 5. Tomamos como variáveis de projeto para o processo de otimização os valores das coordenadas em x_1 e x_2 do nó 5 e parametrizamos as coordenadas dos nós adjacentes 4 e 6. Os valores das variações destes nós 4 e 6 não estão tabelados, contudo seus valores finais assumiram as posições exatas esperadas, conforme ilustra a evolução entre geometria inicial e final representada nas Figs. 6.4, 6.5, 6.6 e 6.7.

Tabela 6.2 Resultados obtidos para o exemplo 2.

Exemplo 2 Variação #	Número de iterações	Posição Inicial	Posição Final	Posição Exata	f final ($\times 10^{-3}$)
1	10	$x_1=14.000$ $x_2= 7.000$	$x_1= 6.013$ $x_2= 4.000$		0.34
2	3	$x_1=10.000$ $x_2= 2.000$	$x_1= 6.038$ $x_2= 3.999$	$x_1= 6.000$ $x_2= 4.000$	0.34
3	10	$x_1= 6.000$ $x_2= 2.000$	$x_1= 6.001$ $x_2= 4.000$		0.34
4	10	$x_1= 4.000$ $x_2= 3.000$	$x_1= 6.003$ $x_2= 4.000$		0.35

Estes exemplos simples aqui estudados demonstram que a formulação proposta e aqui implementada de forma acadêmica pode, portanto, vir a ser um instrumento para uso em projetos mais complexos, quando o objetivo for achar qual a melhor forma de uma peça para que determinados valores de referência sejam satisfeitos.

Neste exemplo utilizamos o fator de penalização $\mathfrak{R} = 1.0 \times 10^3$ em todos os casos rodados.

6.4 *Concordância de raios em lug*

O objetivo deste exemplo é identificar uma forma apropriada de um *lug* observando-se o mapa de deslocamentos presente em pontos de referência. A Fig. 6.8 mostra a topologia exata do *lug* e o mapa de deslocamentos foi gerado a partir de sensores localizados no domínio do corpo. O *lug* é simétrico em relação à reta $x = y$.

Foram testadas implementações com até 32 sensores internos, contudo optamos ao final por apenas 16 sensores posicionados como ilustrado na Fig. 6.8, os quais fornecem dados de referência para o processo de otimização. As Tabelas 6.3 e 6.4 contém dados sobre a convergência da implementação.

A face esquerda do *lug* está engastada e são aplicadas forças de tração de 1.0 MPa na parte superior e na face direita do *lug*, como pode ser visualizado na Fig. 6.8. O *lug* também está apoiado na parte inferior. Realizamos estudos de variação da geometria no contorno curvilíneo do corpo, visando caracterizar este raio de curvatura. O *lug* foi discretizado em 22 elementos quadráticos.

Para se estudar a eficiência do algoritmo implementado, diversas configurações iniciais, diferentes da configuração esperada representada na Fig. 6.8 foram testadas.

No caso 1 usamos três variáveis de projeto, representadas pelas coordenadas x_1 dos nós 22, 23 e 24. As geometrias iniciais assumidas e as geometrias finais estão ilustradas nas Figs. 6.9 e 6.10. Foram utilizados em todos os casos estudados materiais com as seguintes propriedades: $E=100.0$ MPa, $\nu=0.3$.

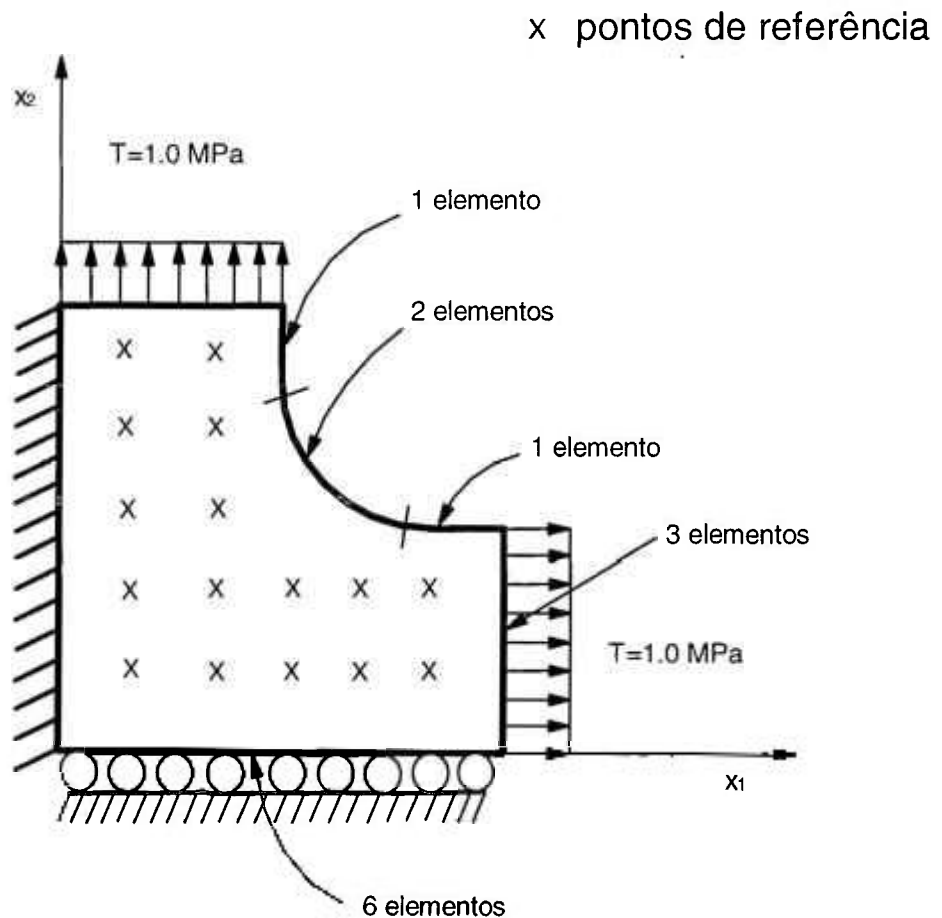


Figura 6.8 Condições de contorno e geometria do exemplo 3.

Observamos na Figs. 6.9 e 6.10 duas configurações iniciais diferentes. As Tabelas 6.3 e 6.4 representam três variações para o caso-1 e caso-2. Observa-se que em todos os casos analisados houve convergência. No caso-1 trabalhamos com dois graus de liberdade, já no caso-2 com três graus de liberdade.

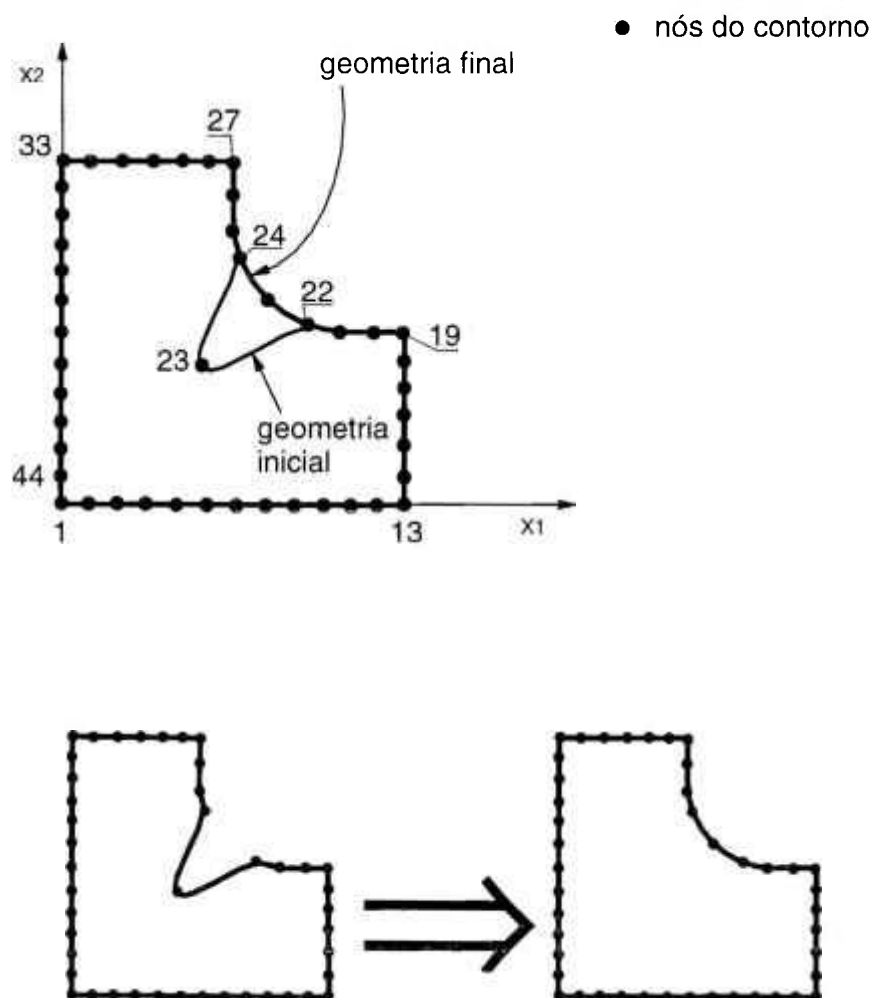


Figura 6.9 Geometrias inicial e final para o caso-1 do exemplo 3.

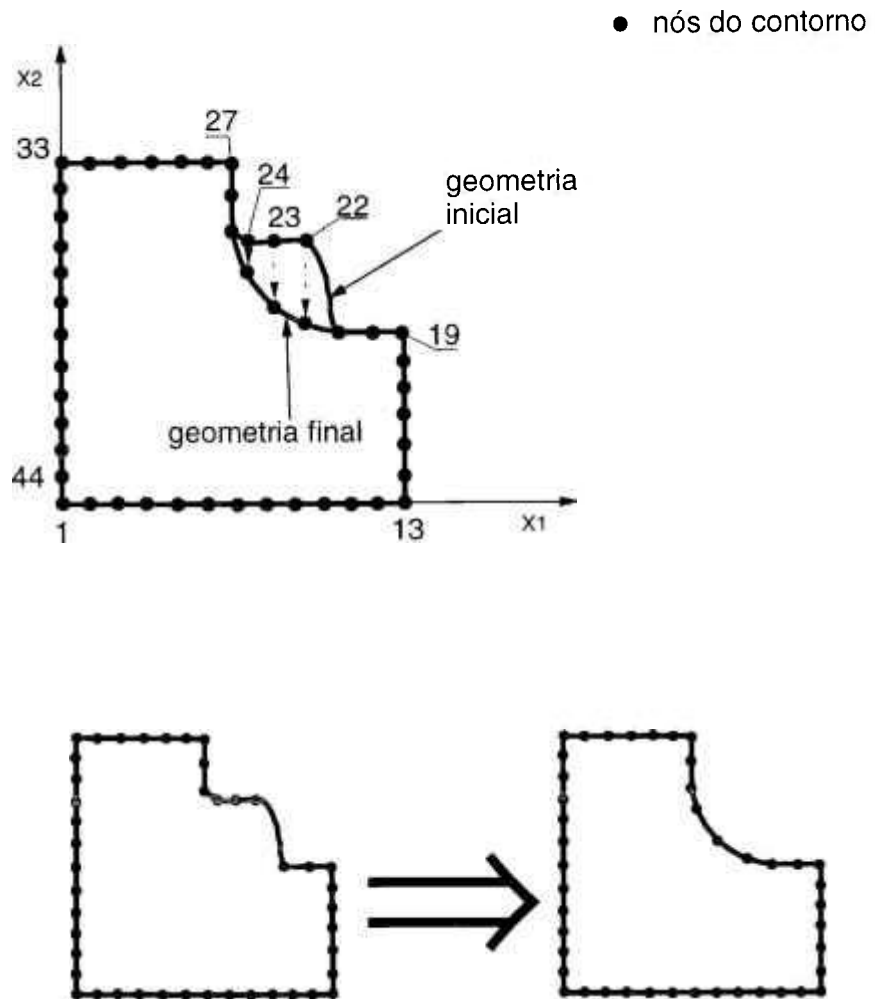


Figura 6.10 Geometrias inicial e final para o caso-2 do exemplo 3.

Tabela 6.3 Resultados obtidos para o exemplo 3, caso-1.

Exemplo 3 Caso 1 Variação #	Número de iterações	Posição Inicial	Posição Final	Posição Exata	f final ($\times 10^{-3}$)
1	42	$x_1 = 2.5$ $x_2 = 2.5$	$x_1 = 3.5595$ $x_2 = 3.5651$		0.34
2	44	$x_1 = 2.8$ $x_2 = 2.8$	$x_1 = 3.5604$ $x_2 = 3.5641$	$x_1 = 3.5624$ $x_2 = 3.5624$	0.34
3	21	$x_1 = 3.2$ $x_2 = 3.2$	$x_1 = 3.5592$ $x_2 = 3.5652$		0.34

Tabela 6.4 Resultados obtidos para o exemplo 3, caso-2.

Exemplo 3 Caso 2 Variação #	Número de iterações	Posição Inicial	Posição Final	Posição Exata	f final ($\times 10^{-3}$)
1	44	$x_1 = 4.5$ $x_2 = 4.5$ $x_3 = 4.5$	$x_1 = 3.1283$ $x_2 = 3.5721$ $x_3 = 4.2111$		0.34
2	30	$x_1 = 4.3$ $x_2 = 4.3$ $x_3 = 4.3$	$x_1 = 3.1442$ $x_2 = 3.4865$ $x_3 = 4.3456$	$x_1 = 3.1308$ $x_2 = 3.5624$ $x_3 = 4.2224$	0.34
3	39	$x_1 = 4.1$ $x_2 = 4.1$ $x_3 = 4.1$	$x_1 = 3.1441$ $x_2 = 3.4922$ $x_3 = 4.3366$		0.34

6.5 Chapa tracionada com furo circular

A proposta deste exemplo é a determinação do lugar geométrico ótimo para um furo circular, de raio 0.7 m, localizando numa chapa tracionada quadrada de lado 10m. As constantes do material são $E=3000.0$ MPa, $\nu=0.3$ e as tensões de superfície atuantes em torno da placa são $T=1.0$ MPa.

A Fig. 6.11 ilustra o contorno geométrico exato, destacando os 16 nós do primeiro caso testado e a localização dos pontos internos de referência representados por um "x". A Fig. 6.12 mostra um detalhe da malha adotada para o furo.

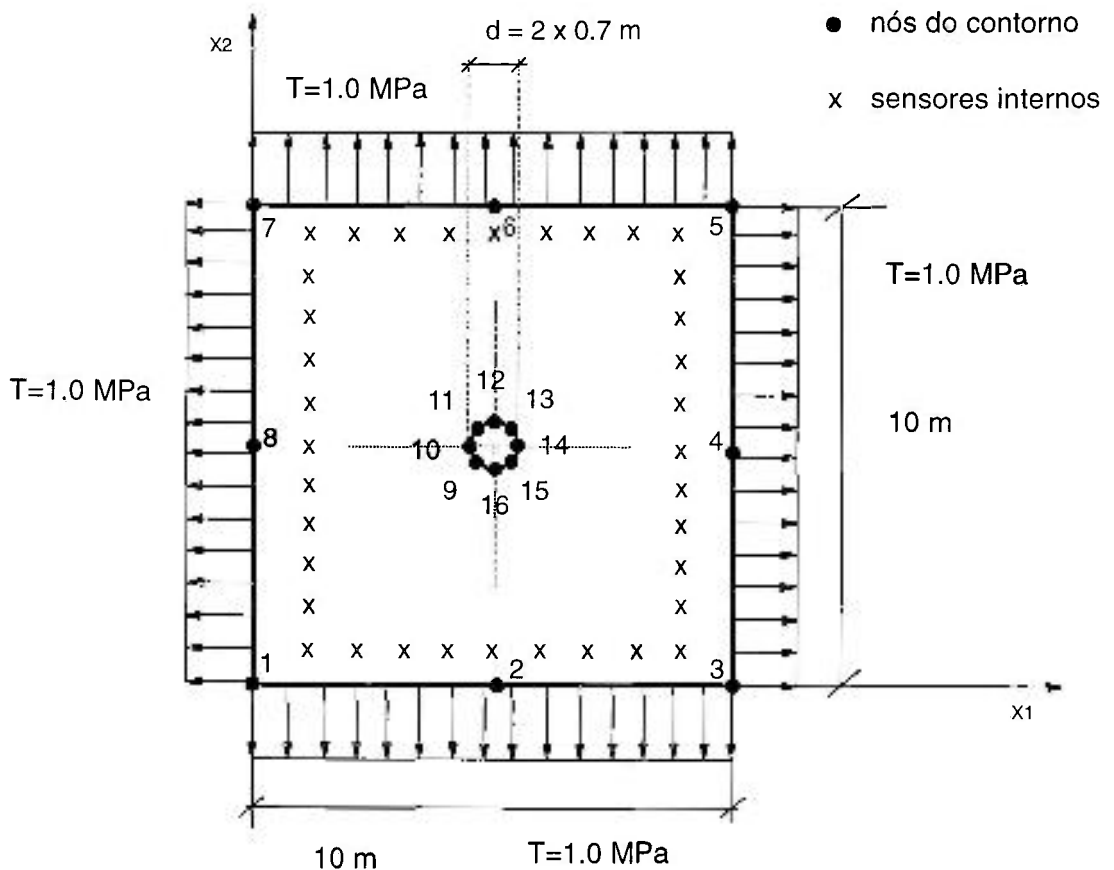


Figura 6.11 Condições de contorno e geometria do exemplo 4.

Inicialmente o furo foi mantido com o mesmo diâmetro da solução final esperada variando-se apenas a posição do centróide. A Fig. 6.13 mostra uma posição inicial onde o centróide do furo era de $(x_1=6$ e $x_2=4)$. Observa-se também naquela figura o processo evolutivo entre a posição inicial e solução final obtida. Neste caso as variáveis de projeto eram x_1 e x_2 .

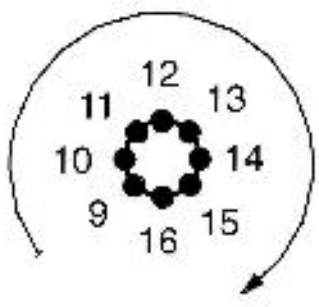


Figura 6.12 Numeração dos nós do contorno interno, com sentido horário, do furo circular interno da chapa quadrada, do exemplo 4.

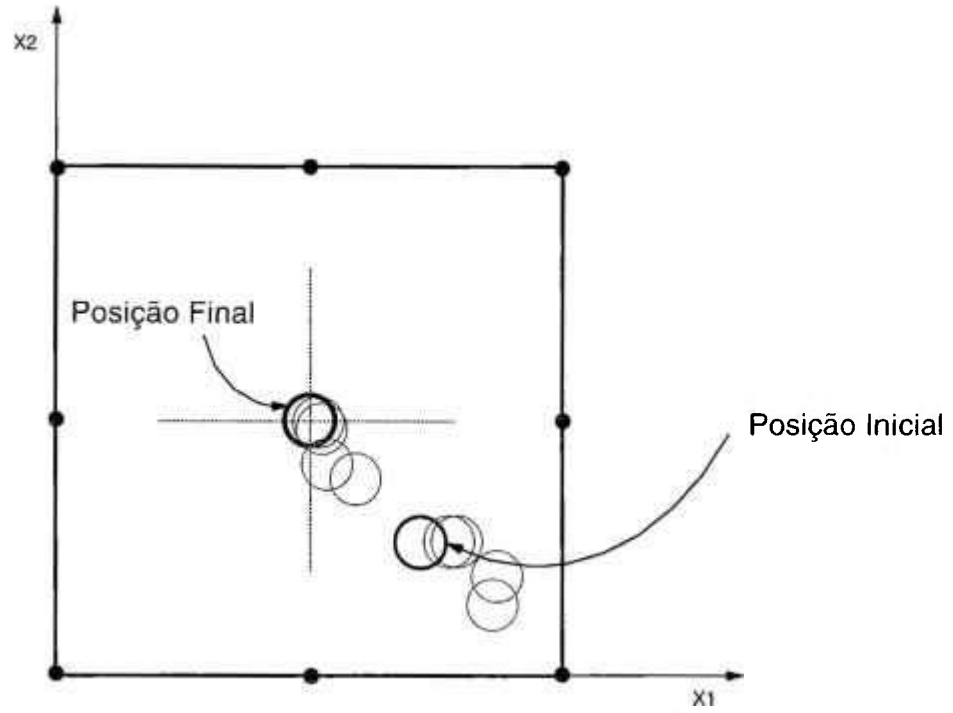


Figura 6.13 Convergência do problema de determinação da posição do furo circular - exemplo 4, $x_{1, inicial} = 6.0$, $x_{2, inicial} = 4.0$.

Foram assumidos diversos valores para x_1 e x_2 e dessa forma testar os algoritmos. Os valores assumidos para x_1 e x_2 obedecem a tolerância dos limites preestabelecidos para as condições de restrição. Nota-se também que o valor do parâmetro de penalidade usado em todas as variações deste caso foi $\mathfrak{R} = 1.0 \times 10^3$ (ver Eq. 4.2). Este valor, como foi explicado anteriormente, é gradativamente diminuído até se tornar 10^{-3} . O número de pontos internos de referência foi de 36, conforme ilustrado nas Figs. 6.11 e 6.12.

A Tabela 6.5 mostra os resultados para diversas configurações iniciais do centróide do furo usando-se sempre uma malha com 16 nós, correspondendo a apenas quatro elementos discretizando a periferia do quadrado e quatro elementos discretizando o furo.

Tabela 6.5 Resultados obtidos para o caso da determinação da posição do furo circular, para o exemplo 4.

# nós	# variáveis de projeto	Valores Iniciais	Valores Finais	Valores Exatos	# iterações	f final ($\times 10^{-3}$)
16	2	$x_1 = 6.000$ $x_2 = 4.000$	$x_1 = 5.000$ $x_2 = 5.000$		19	0.35
16	2	$x_1 = 3.000$ $x_2 = 7.000$	$x_1 = 5.000$ $x_2 = 4.999$	$x_1 = 5.000$ $x_2 = 5.000$	48	0.34
16	2	$x_1 = 7.000$ $x_2 = 3.000$	$x_1 = 5.000$ $x_2 = 5.000$		28	0.34
16	2	$x_1 = 7.000$ $x_2 = 7.000$	$x_1 = 4.989$ $x_2 = 5.011$		24	0.34

Também foi testado o caso com três variáveis de projeto (x_1 , x_2 , d), sendo " x_1 " e " x_2 " as coordenadas do centróide e " d " o diâmetro do furo. A Fig. 6.14 mostra a evolução quando a configuração inicial do furo é de (3; 7; 0.84) e converge para a posição final esperada (5; 5; 1.4). Aqui também foi utilizada uma malha diferente com maior número de elementos na periferia da placa.

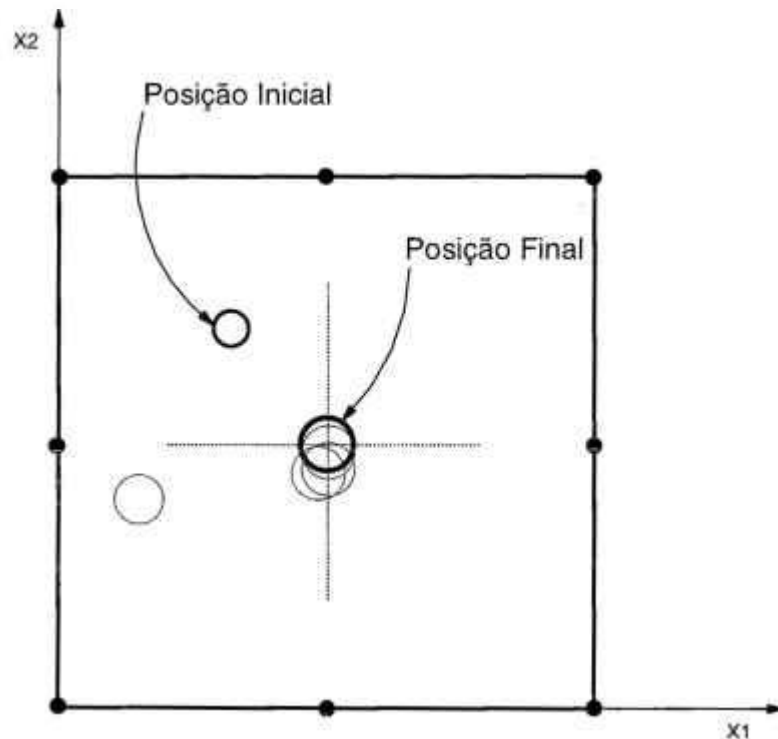


Figura 6.14 Convergência do problema de determinação da posição e do raio do furo circular - exemplo 4, $x_{1,\text{inicial}} = 3.0$, $x_{2,\text{inicial}} = 7.0$, $r_{\text{inicial}} = 0.42\text{m}$ ($d=0.84$).

Tabela 6.6 Resultados obtidos para o caso da determinação do raio e da posição do furo circular, para o exemplo 4.

# nós	# variáveis de projeto	Valores Iniciais	Valores Finais	Valores Exatos	# iterações	f final ($\times 10^{-3}$)
16	3	$x_1 = 3.000$ $x_2 = 7.000$ $d = 0.84$	$x_1 = 5.002$ $x_2 = 4.998$ $d = 1.4000$		32	0.34
24	3	$x_1 = 3.000$ $x_2 = 7.000$ $d = 1.4$	$x_1 = 4.983$ $x_2 = 5.016$ $d = 1.4012$	$x_1 = 5.000$ $x_2 = 5.000$ $d = 1.4$	18	0.35
24	3	$x_1 = 3.000$ $x_2 = 7.000$ $d = 2.38$	$x_1 = 5.020$ $x_2 = 4.980$ $d = 1.4000$		35	0.35
24	3	$x_1 = 3.500$ $x_2 = 6.500$ $d = 0.84$	$x_1 = 4.939$ $x_2 = 5.061$ $d = 1.4056$		19	0.34

Foram assumidos diversos valores iniciais para as três variáveis de projeto (x_1 , x_2 , d). O valor do parâmetro de penalidade usado em todas as variações deste 2º. caso foi $\mathfrak{R} = 1.0 \times 10^3$. O número de sensores permaneceu igual a 36, conforme ilustrado na Fig. 6.11. A primeira variação deste caso (1ª. linha da tabela acima), está ilustrada na Fig. 6.14.

Nota-se que este exemplo ilustra que a formulação aqui proposta também pode ser utilizada na detecção (diagnóstico) de vazios dentro de objetos baseado em medidas obtidas nos sensores. Um aperfeiçoamento desta formulação permitiria que a mesma fosse usada como uma ferramenta auxiliar de detecção de falhas dentro de estruturas a partir de observações feitas em pontos de referências quando tal estrutura em análise estivesse sob um carregamento específico (conhecido).

6.6 Filete tracionado

Neste exemplo tratamos do estudo da configuração da união entre duas peças sob tração unidas por filetes de solda. Por se tratar de uma união simétrica o problema foi modelado apenas pela metade. Este exemplo e modelo adotado é semelhante ao estudo feito por BARRA (1990) e por HAUG et al. (1984). A Fig. 6.15 ilustra o exemplo, o trecho AB representa o filete.

As características geométricas iniciais do filete de solda podem ser observadas na mesma Fig. 6.15, onde também estão ali localizados os pontos de referência (um total de 91 sensores com medições de deslocamentos distribuídos ao longo da linha Γ^*). Devido ao tipo de esforços atuantes nas duas peças o filete modelado está predominantemente sujeito a forças de tração nas faces verticais. A peça com face à esquerda tem os valores de tração (distribuídos uniformemente) iguais a metade dos valores aplicados a peça com face à direita. Chamamos Γ_1 a parte do contorno que será variada, e A e B pontos fixos que limitam aquele contorno.

A discretização foi feita através de 25 elementos quadráticos, totalizando 50 nós no contorno do objeto. Para este problema foram adotados $E = 3000$ MPa, $\nu = 0.3$ e $P = 1$ MPa.

Os resultados do processo de otimização estão ilustrados na Fig. 6.16 e na Tabela 6.7, onde observamos a convergência dos valores obtidos.

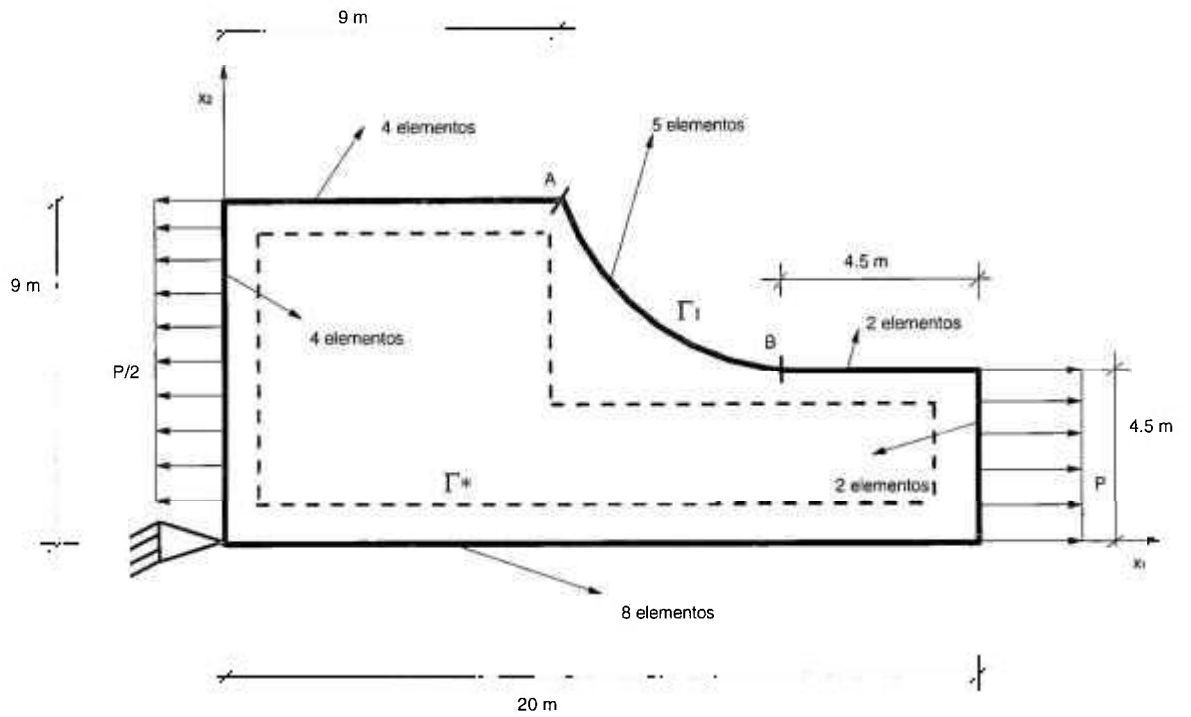


Figura 6.15 Condições de contorno e geometria inicial do exemplo 5.

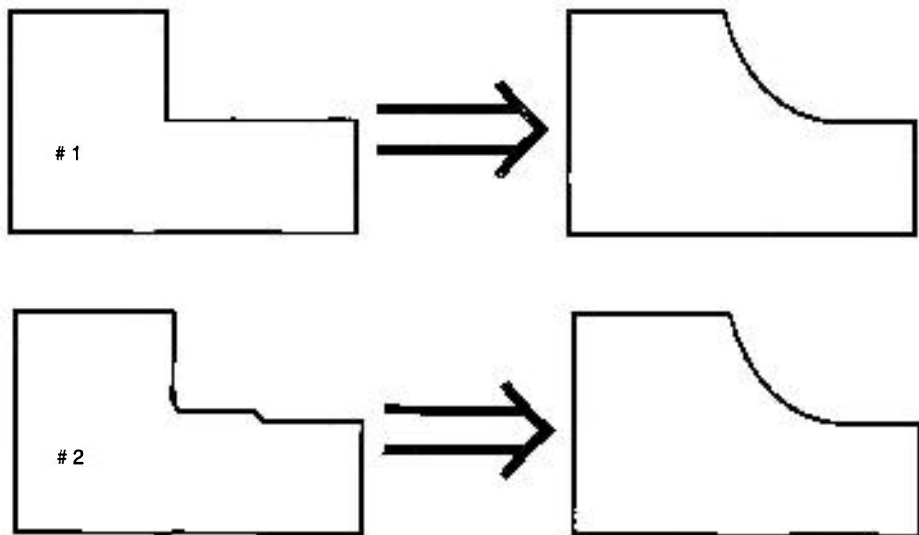


Figura 6.16 Geometrias iniciais e finais para o problema do filete tracionado.

Tabela 6.7 Resultados obtidos para o exemplo 5.

#	# nós	# variáveis de projeto	Valores Iniciais	Valores Finais	Valores Exatos	# iterações	f final ($\times 10^{-3}$)
1	50	9	$x_1=4.4$ $x_2=4.5$ $x_3=4.5$ $x_4=4.5$ $x_5=4.5$ $x_6=4.4$ $x_7=4.5$ $x_8=4.5$ $x_9=4.5$	$x_1=4.5556$ $x_2=4.7372$ $x_3=4.8466$ $x_4=5.3386$ $x_5=5.6330$ $x_6=5.8307$ $x_7=6.4615$ $x_8=7.0730$ $x_9=7.1019$		56	0.34
2	50	9	$x_1=5.0$ $x_2=5.0$ $x_3=5.0$ $x_4=5.0$ $x_5=5.0$ $x_6=5.0$ $x_7=5.0$ $x_8=5.0$ $x_9=5.0$	$x_1=4.5456$ $x_2=4.7162$ $x_3=4.8836$ $x_4=5.1178$ $x_5=5.4326$ $x_6=6.0017$ $x_7=6.1903$ $x_8=6.6801$ $x_9=6.9490$	$x_1=4.5729$ $x_2=4.7078$ $x_3=4.9038$ $x_4=5.1595$ $x_5=5.4732$ $x_6=5.8426$ $x_7=6.2652$ $x_8=6.7380$ $x_9=7.2579$	86	0.34
3	50	9	$x_1=5.5$ $x_2=5.5$ $x_3=5.5$ $x_4=5.5$ $x_5=5.5$ $x_6=5.5$ $x_7=5.5$ $x_8=5.5$ $x_9=5.5$	$x_1=4.5587$ $x_2=4.6946$ $x_3=4.9129$ $x_4=5.0868$ $x_5=5.4783$ $x_6=6.0434$ $x_7=6.1780$ $x_8=7.0449$ $x_9=7.1052$		62	0.34

7 CONCLUSÕES FINAIS E SUGESTÕES

7.1 *Conclusões*

Apresentamos a seguir as conclusões e alguns comentários sobre o trabalho realizado e os resultados obtidos. O problema tratado neste trabalho pode ser classificado como um problema inverso de identificação de forma em campo elastostático. Neste tipo de problema, parte do domínio de um dado objeto é identificado mediante o conhecimento prévio de um conjunto de dados experimentais, em pontos discretos (chamados pontos de observação). Estes dados experimentais foram aqui simulados por meio de uma análise direta através do programa MEC-direto, tais dados são também conhecidos como dados de referência.

O domínio a ser identificado foi escrito em termos de variáveis de projeto. A função objetivo (que é minimizada no processo de otimização da resposta da estrutura em relação aos dados de referência), foi tomada como sendo o quadrado da diferença entre os dados de referência e as respectivas quantidades calculadas pelo Método dos Elementos de Contorno. O processo de otimização, por ser de primeira ordem, exigiu o cálculo das sensibilidades, que é feito através do Método da Derivação Implícita e não de forma aproximada por diferenças finitas como comumente encontrado na literatura.

As restrições geométricas inerentes às variáveis de projeto do problema de identificação de forma foram escritas como inequações matemáticas e foram consideradas no problema por meio da função objetivo aumentada com um termo de penalização. Desta forma o problema com restrições pode ser tratado como um problema sem restrições. Entretanto, a fim de se forçar que os valores assumidos pelas variáveis de projeto estejam sempre na região factível, o passo unidirecional no processo de minimização é controlado de forma heurística.

A resolução dos exemplos propostos tem início com um valor inicial assumido para o vetor das variáveis de projeto (ou seja, uma forma inicial), que descreve o domínio interno desconhecido ou a fronteira desconhecida que se quer achar e é o objetivo principal deste trabalho. Por meio de iterações sucessivas o domínio inicial (a forma inicial) vai gradativamente se modificando até que a minimização da função objetivo seja alcançada, obtendo-se, portanto, a solução final. Observamos, dos casos numéricos estudados, que a formulação proposta conduz a bons resultados. Tais *performances*, embora limitadas a casos simples, são conseqüências também do uso das sensibilidades exatas, via derivação das soluções fundamentais, tendo em vista que na literatura consultada algumas formulações com cálculo de sensibilidade por diferenças finitas não resultam em bons algoritmos.

Notamos a boa precisão alcançada nos exemplos simples implementados, o que nos faz acreditar na aplicação desta formulação com elementos de contorno e técnicas de otimização a problemas de otimização de formas (*shape optimization*) mais complexos. Destacamos a facilidade da entrada dos dados, assim como a manipulação destes dados durante a alternância de casos (com diferentes geometrias e condições de carregamentos iniciais). Ainda, durante o processo iterativo de mudança da topologia do corpo estudado, verificamos a facilidade de atualização da malha formada pelos elementos de contorno.

Portanto, o algoritmo numérico-computacional apresentado neste trabalho sugere que a formulação proposta tem potencialidade para ser empregada na identificação de geometrias. Em particular, nossos exemplos mostraram a identificação de geometria de chapas, determinação da posição e raio de um furo circular num painel, determinação de raio ideal para *lugs* e estudo da forma ideal de um filete tracionado. Em especial, o exemplo da determinação da posição e raio de um furo circular possibilita o uso da formulação proposta como ferramenta auxiliar, de testes não destrutivos (exames, monitoração e diagnóstico), para determinação de falhas estruturais em componentes ou sistemas estruturais.

Em resumo, as principais contribuições deste trabalho foram:

a) a utilização de uma formulação alternativa baseada no Método dos Elementos de Contorno em conjunto com técnicas de otimização, para resolução de problemas inversos de identificação de domínios internos e de fronteiras, em objetos em campo elastostático.

b) a utilização do cálculo mais exato das sensibilidades (obtidos por derivação implícita das equações do Método dos Elementos de Contorno).

c) a reutilização das matrizes G e F , quando, num passo posterior, temos que calcular $U_{,z}$ e $T_{,z}$. Esse procedimento gera uma economia de tempo computacional.

d) a utilização de regras heurísticas simples na determinação das restrições geométricas, atuando no tamanho do passo unidirecional do problema de minimização equivalente (unidimensional), em concomitância com o uso de funções penalizadoras aumentadas na função objetivo a ser minimizada.

e) a utilização dos dados de referência em deslocamentos. A utilização de dados de referência em tensões tornaria este trabalho mais interessante do ponto de vista prático, devendo ser este um objetivo a ser testado em trabalhos futuros.

f) a identificação de domínios especificados através de múltiplas variáveis de projeto. Notamos da literatura consultada (TANAKA et al., 1988) que, com outras formulações, não foi possível obter convergência mesmo em exemplos com poucas variáveis de projeto.

g) a utilização de elementos quadráticos apresentou bom desempenho para o problema inverso de identificação de forma formulado nesta dissertação.

h) verificou-se que o algoritmo de otimização pode conduzir o processo a “falsos ótimos”. O aumento do número de variáveis de projeto tende a elevar a complexidade do problema de otimização, tornando a convergência mais difícil.

7.2 Sugestões para trabalhos futuros

A formulação apresentada neste trabalho não pretendeu esgotar o assunto da resolução de problemas inversos de identificação de formas em campo elastostático, mas apenas ser uma contribuição inicial e alternativa em relação a outras formulações encontradas na literatura (que encontraram dificuldades maiores em termos de convergência). Sugerimos algumas modificações e algumas aplicações que não se concretizaram por motivos alheios ao trabalho realizado.

Testar outros algoritmos de otimização, principalmente algoritmos não-determinísticos a fim de se poder evitar mínimos locais.

Ampliação da formulação proposta, incluindo também problemas em regime transiente. Isto tornaria o trabalho mais abrangente, tornando possível a investigação de uma quantidade maior de aplicações práticas.

Implementação de outros tipos de funções de especificação que acreditamos poderiam trazer melhorias na modelagem da estrutura estudada, procurando desta forma configurações mais próximas das exigidas na prática.

Implementação da minimização através de dados de referência em deformações ou em tensões, o que tornaria mais prática a formulação apresentada.

8 APÊNDICE 1

OBTENÇÃO DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DA ELASTOSTÁTICA

Em elasticidade linear, o problema se resolve quando se encontram as seguintes incógnitas:

- a) três deslocamentos: u_1, u_2, u_3 ;
- b) seis tensões: $\sigma_{11}, \sigma_{12} = \sigma_{21}, \sigma_{13} = \sigma_{31}, \sigma_{22}, \sigma_{23} = \sigma_{32}, \sigma_{33}$;
- c) seis deformações: $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}, \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}, \varepsilon_{33}$;

tendo sido dado, *a priori*, as seguintes quantidades:

- i) forças de corpo específicas: b_1, b_2, b_3 ;
- ii) forças ou tensões de superfície no contorno: $\sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i$;
- iii) deslocamentos de superfície no contorno: $u_i = \bar{u}_i$.

Num problema clássico de valores de contorno bem-postulado, em elasticidade linear, para cada direção de coordenada, ou o deslocamento ou a tração de superfície deve ser especificado, e a outra quantidade, tensão de superfície ou deslocamento é uma incógnita. Dos itens a, b e c acima conclui-se que num problema de elasticidade linear teremos um total de 15 incógnitas interrelacionadas com as quantidades i, ii e iii, pelas seguintes equações:

- 1) $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ (equação de compatibilidade; 6 equações)
- 2) $\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}$ (Lei de Hooke; 6 equações)
- 3) $\sigma_{ij,j} + b_i = 0$ (equação de equilíbrio; 3 equações)

Temos portanto um total de 15 incógnitas e de 15 equações disponíveis para resolver o problema.

Para diminuir a dimensão do problema podemos proceder da seguinte forma:

Seja a equação de equilíbrio $\sigma_{ij,j} + b_i = 0$ e a equação da lei de Hooke, $\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}$, substituindo-se a última equação na equação de equilíbrio, obtemos:

$$\left(\lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \right)_{,j} + b_i = 0 \quad , \text{ ou, já que para } i = j = k \text{ , } \delta_{kk} = 1 \text{ ,}$$

$$2\mu \varepsilon_{ij,j} + \lambda \varepsilon_{kk,j} + b_i = 0$$

Mas, $\varepsilon_{ij,j} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})_{,j}$, portanto,

$$2\mu \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} + \lambda \frac{1}{2} (u_{k,k} + u_{k,k})_{,i} + b_i = 0$$

ou,

$$\mu (u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} + \lambda u_{k,k,i} + b_i = 0$$

Mas, $u_{j,ij} = u_{j,ji}$, logo,

$$\mu (u_{i,jj} + u_{j,ji}) + \lambda u_{k,k,i} + b_i = 0$$

Portanto: $\mu u_{i,jj} + (\mu + \lambda) u_{j,ji} + b_i = 0$ (**Equação de Navier da Elasticidade**)

Sabendo que $\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$ ou $\bar{\nabla}(\bullet) = (\bullet)_{,j} \bar{l}_j$, podemos escrever a

Equação de Navier na sua forma vetorial:

$$\mu \nabla^2 \bar{u} + (\mu + \lambda) \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{u}) + b_i = 0 .$$

A boa notícia sobre a equação de Navier é que as 15 equações anteriores foram manipuladas e resultaram em apenas 3 equações diferenciais parciais de segunda ordem, em termos de apenas 3 incógnitas de deslocamento u_i , o que diminui consideravelmente as dimensões do problema. A notícia ruim sobre as equações de Navier é que elas são equações acopladas. A desvantagem das equações acopladas é que não é possível resolver uma delas trabalhando só com uma equação isoladamente.

A solução de sistemas acoplados de equações é feita procurando-se uma maneira de torná-las menos dependentes umas das outras, ou seja, desacoplá-las. Com as equações de Navier da elasticidade isto será feito através do vetor de Galerkin.

A resolução da equação de Navier para um meio infinito, em elastostática, submetido a uma carga unitária e pontual nos dá as soluções fundamentais. O desenvolvimento destas soluções é devido a Kelvin.

Considere novamente a equação:

$$\mu u_{i,jj} + (\mu + \lambda) u_{j,ji} + b_i = 0$$

Dividindo tudo por μ , obtemos:

$$u_{i,jj} + \frac{(\mu + \lambda)}{\mu} u_{j,ji} + \frac{b_i}{\mu} = 0$$

Note ainda que a constante de Lamé λ pode ser escrita como:

$$\lambda = \frac{2\nu\mu}{1-2\nu}$$

E que neste caso a quantidade $(\mu + \lambda)$ vale:

$$\mu + \lambda = \frac{2\nu\mu}{1-2\nu} + \frac{\mu(1-2\nu)}{1-2\nu} = \frac{2\nu\mu + \mu - 2\mu\nu}{1-2\nu} = \frac{\mu}{1-2\nu}$$

Portanto,

$$\frac{\mu + \lambda}{\mu} = \frac{1}{1-2\nu}, \text{ ou seja, podemos escrever a equação de Navier como:}$$

$$u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu} u_{j,ji} + \frac{b_i}{\mu} = 0$$

A solução de Kelvin para esta equação é obtida considerando-se uma carga unitária aplicada no ponto l , e na direção i , do vetor unitário l_i , ou seja, considere $b_i = \Delta' l_i$, onde Δ' é o delta de Dirac no ponto l .

A equação de Navier acima pode ser transformada numa equação diferencial parcial bi-harmônica (cuja solução é conhecida), fazendo-se a seguinte substituição em termos do vetor de Galerkin $G = (G_1, G_2, G_3)$, com as componentes $G_k = G_{ik} e_i$ ($e_i =$ vetor base), onde $G_{ik} = G e_i l_k = \delta_{ik} G$. Note que G_{ik} é a componente k do vetor de Galerkin quando a carga pontual e unitária está aplicada no ponto l na direção i .

$$u_i = G_{i,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{m,ii}$$

Substituindo-se esta expressão para u_i na equação de Navier, teremos

$$u_{i,jj} = G_{i,mmjj} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{m,imjj}$$

$$u_{j,ji} = G_{j,mmji} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{m,jmji}$$

E, portanto, a equação $u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu} u_{j,ji} + \frac{\Delta'}{\mu} l_i = 0$ se transforma em:

$$G_{i,mmjj} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{m,imjj} + \frac{1}{1-2\nu} G_{j,mmji} - \frac{1}{2(1-\nu)(1-2\nu)} G_{m,jmji} + \frac{\Delta'}{\mu} l_i = 0$$

$$\left(-\frac{1}{2(1-\nu)} + \frac{1}{1-2\nu} - \frac{1}{2(1-\nu)(1-2\nu)} \right) G_{m,imjj} + G_{i,mmjj} + \frac{\Delta'}{\mu} l_i = 0$$

$$\text{Mas } -\frac{1}{2(1-\nu)} + \frac{1}{1-2\nu} - \frac{1}{2(1-\nu)(1-2\nu)} = \frac{-1+2\nu+2-2\nu-1}{2(1-\nu)(1-2\nu)} = 0$$

Portanto,

$$G_{i,mmjj} + \frac{\Delta'}{\mu} l_i = 0 \quad , \text{ ou,}$$

$$\nabla^2(\nabla^2 G_i) + \frac{\Delta'}{\mu} l_i = 0 \quad (\text{equação bi-harmônica})$$

Seja $F_i = \nabla^2 G_i$, então podemos ainda transformar a equação bi-harmônica em

$$\nabla^2(F_i) + \frac{\Delta'}{\mu} l_i = 0 \quad , \text{ na qual } \Delta' \text{ é a função delta de Dirac, aplicada no ponto } l \quad ,$$

$$\text{ou seja, } \Delta' = \Delta(x' - x) \quad , \quad (\Delta' = 0 \text{ para } x \neq x') .$$

Note que a equação $\nabla^2(F_i) + \frac{\Delta'}{\mu} l_i = 0$ é análoga a equação utilizada para problemas potenciais, para a qual temos as seguintes soluções:

$$\nabla^2 u^* + \Delta' = 0$$

$$u^* = \frac{1}{4\pi r}, \text{ para 3D e}$$

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right), \text{ para 2D}$$

r é a distância entre o ponto x^l de aplicação da função delta de Dirac, até o ponto onde se quer calcular u .

A diferença que existe em relação a equação $\nabla^2 u^* + \Delta^l = 0$, resolvida para problemas potenciais, é que agora temos um conjunto de 3 equações $F_i \equiv (F_1, F_2, F_3)$, e temos a constante $\frac{1}{\mu}$. Portanto, considerando-se devidamente estas transformações, as soluções para $\nabla^2(F_i) + \frac{\Delta^l}{\mu} l_i = 0$ serão:

$$F_i = \frac{1}{4\pi r \mu} l_i, \text{ para 3D (espaço tridimensional)}$$

$$F_i = \frac{1}{2\pi \mu} \ln\left(\frac{1}{r}\right) l_i, \text{ para 2D (espaço bidimensional)}$$

Considerando que $F_i = \nabla^2 G_i$, teremos

$$\nabla^2 G_i = \frac{1}{4\pi \mu} l_i \Rightarrow G_i = \frac{1}{8\pi \mu} r l_i \text{ ou } G_i = G l_i, \text{ com } G = \frac{1}{8\pi \mu} r \text{ para 3D}$$

$$\Delta^2 G_i = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) l_i \Rightarrow G_i = \frac{1}{8\pi \mu} r^2 \ln\left(\frac{1}{r}\right) l_i \text{ ou } G_i = G l_i, \text{ com } G = \frac{1}{8\pi \mu} r^2 \ln\left(\frac{1}{r}\right) \text{ para 2D}$$

Como escrito anteriormente, podemos escrever $G_{ik} = G \delta_{ik}$, na qual G_{ik} é a componente k do vetor de Galerkin em qualquer ponto, quando uma carga unitária é aplicada num ponto l , na direção i .

De forma análoga, temos para os deslocamentos

$$u^*_{ik} = u^*_{il} l_j$$

u^*_{ik} é o deslocamento em qualquer ponto na direção k , quando a unidade de carga é aplicada em l , na direção i .

De acordo com as mudanças de variáveis, através do vetor de Galerkin, temos

$$u^*_i = G_{i,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{m,jm}$$

Para as componentes u_{ik} , vale a expressão análoga,

$$u^*_{ik} = G_{ik,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{mk,jm}$$

Considerando os valores do tensor de Galerkin G_{ik} para os casos 3D e 2D, dentro desta última equação, com as respectivas derivadas, temos que

$$u^*_{ik} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} \left[(3-4\nu)\delta_{ik} + r_j r_{,k} \right], \text{ para 3D e}$$

$$u^*_{ik} = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu)\delta_{ik} \ln\left(\frac{1}{r}\right) + r_j r_{,k} \right], \text{ para 2D}$$

Nas quais,

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} \quad ; \quad r_{,i} = \frac{r_i}{r} \quad ; \quad r_{,ii} = \frac{r^2 - r_i}{r^3}$$

Portanto, a equação de Navier (desacoplada através do vetor de Galerkin) nos permitiu calcular a expressão dos deslocamentos,

$$u_{ik}^* = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} \left[(3-4\nu)\delta_{ik} + r_i r_k \right] \quad \text{para o caso 3D}$$

$$u_{ik}^* = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu)\delta_{ik} \ln\left(\frac{1}{r}\right) + r_i r_k \right] \quad \text{para o caso 2D.}$$

Com o valor dos deslocamentos, pode-se agora calcular o valor das deformações e, através da Lei de Hooke, as tensões:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad , \text{ ou,}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{1}{2} (u_{k,k} + u_{k,k}) + 2\mu \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad , \text{ ou,}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}).$$

$$\text{Mas, } u_{i,i}^* = G_{i,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{m,im}$$

$$u_{i,k}^* = G_{i,mmk} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{m,imk}$$

$$u_{i,j}^* = G_{i,mnj} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{m,imj}$$

$$u_{j,i}^* = G_{j,mni} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{m,jmi}$$

Logo,

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} G_{k,sskk} + \mu [G_{j,ssij} + G_{i,ssji}] - \frac{1}{2(1-\nu)} \left\{ \lambda \delta_{ij} G_{m,mm} + \mu [G_{m,imj} + G_{m,jmi}] \right\}$$

Tomando $\sigma^*_{kj} = \sigma^*_{ikj} l_j$ e $p^*_{ik} = \sigma^*_{ijk} n_j$, podemos escrever:

$$p^*_{ik} = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ik} + 3r_{,i}r_{,k}] + (1-2\nu)(n_i r_{,k} - n_k r_{,i}) \right\}, \text{ para 3D e}$$

$$p^*_{ik} = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ik} + 2r_{,i}r_{,k}] + (1-2\nu)(n_i r_{,k} - n_k r_{,i}) \right\}, \text{ para 2D.}$$

9 APÊNDICE 2

FLUXOGRAMAS E ALGORITMOS

Foram implementados e/ou usados, neste trabalho, dois programas principais. O primeiro faz a análise direta do problema, em campo elastostático, com o uso do Método dos Elementos de Contorno. O segundo programa faz a análise inversa do problema, utilizando-se para isso o Método dos Elementos de Contorno em conjunto com técnicas de otimização de primeira ordem, penalização inversa das funções de restrições e cálculo de sensibilidades via Método da Derivação Implícita.

Programa MEC-direto

Para a análise convencional em elastostática, pelo Método dos Elementos de Contorno, mantivemos o esquema original do programa desenvolvido por BANERJEE & BUTTERFIELD (1981), na Universidade de New York, que é direcionado para aplicação em problemas de análise de tensões em meio isotrópico e homogêneo, em 2D. Nota-se ainda, que esta formulação utiliza o método da subdivisão para o tratamento das singularidades da matriz G , subdividindo as regiões vizinhas à singularidade e efetuando integração por Gauss. Neste programa, que serviu de base para este trabalho, muitas modificações foram feitas a fim de adaptá-lo à resolução específica do problema inverso de determinação de forma tratado nesta dissertação de mestrado.

A finalidade do MEC-direto é resolver o problema de forma direta, ou seja, os valores de referência são calculados em posições preestabelecidas, simulando dados medidos em laboratório.

Notamos que, apesar de necessárias para o *start* do segundo programa, o MEC-direto tem que, de alguma maneira, estar atuante enquanto ocorrem as iterações de

mudança de forma do problema inverso investigado. Desse modo, podemos dizer que o programa de análise inversa contém o MEC-direto, mais as subrotinas de cálculo de sensibilidade e de otimização.

Uma descrição sintética das subrotinas do MEC-direto será feita posteriormente, quando apresentarmos o fluxograma do programa inverso. A seguir mostramos o fluxograma geral do MEC-direto.

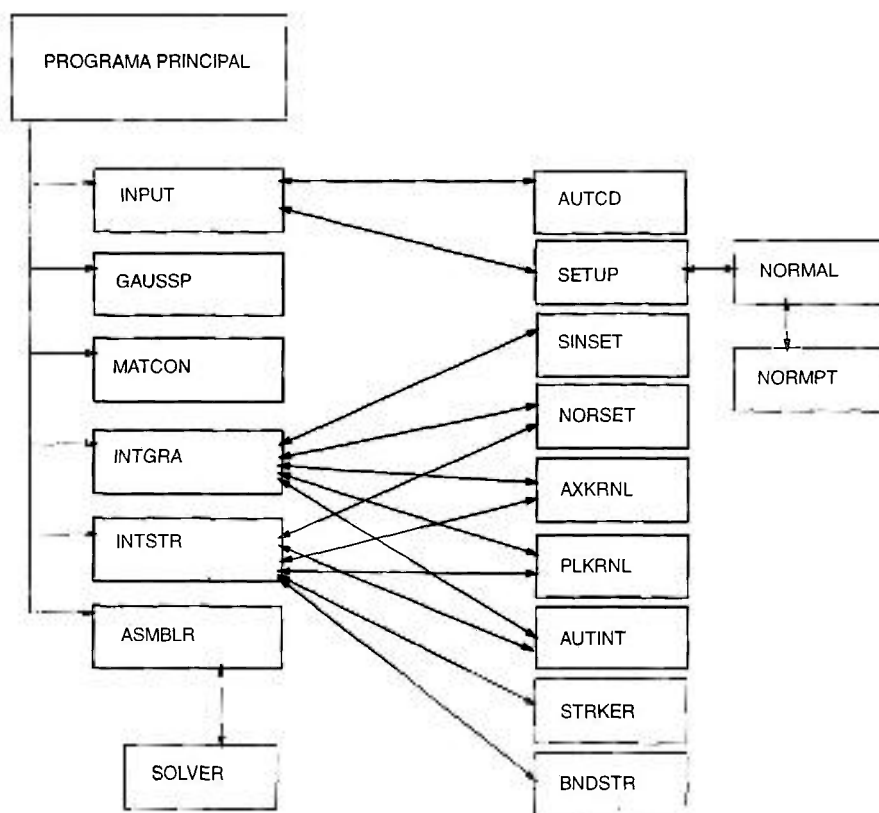


Figura 9.1 Fluxograma do programa MEC-direto.

Programa MEC-inverso

Este programa faz a análise inversa, calculando as sensibilidades de forma analítica, através do Método da Derivação Implícita. O fluxograma completo inclui além do MEC-direto ilustrado nas Fig. 9.1, subrotinas de otimização e de sensibilidades.

As principais subrotinas são a seguir descritas com mais detalhes, para facilidade de interpretação do algoritmo geral.

INPUT :

Faz a leitura dos dados, em ASC-II, que consistem em: número de elementos da discretização , número de nós, número de pontos internos e suas coordenadas, número dos diferentes contornos (se existirem), pontos de referência e, apenas para o MEC-inverso, os números de pontos, os dados de referência e a região da fonteira que será modificada no processo de otimização.

GAUSSP :

Define os pontos de Gauss e seus respectivos pesos, para conseqüente operação de integração.

MATCON :

Define as constantes características do material.

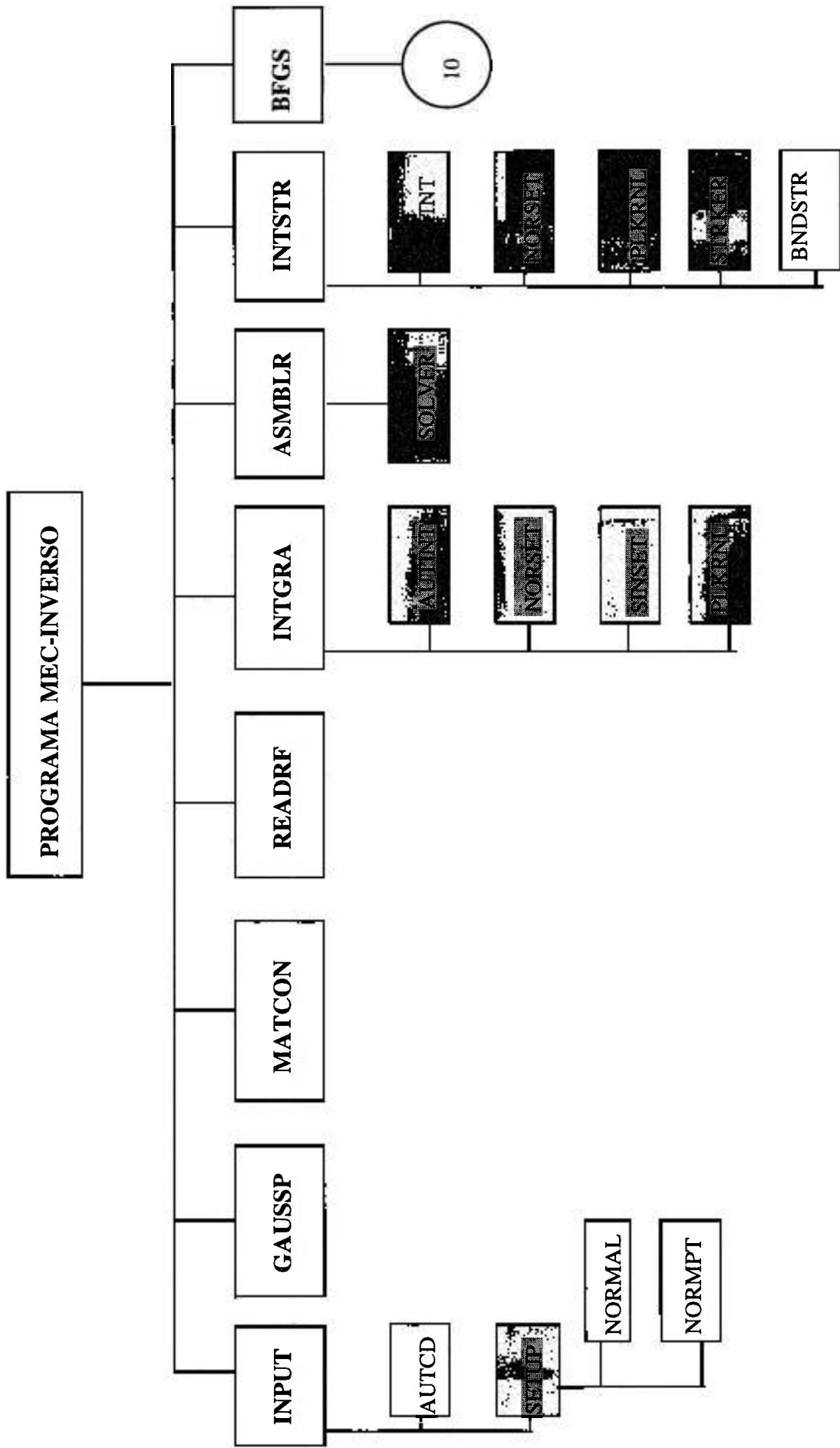


Figura 9.3 Fluxograma do programa MEC-inverse.

10

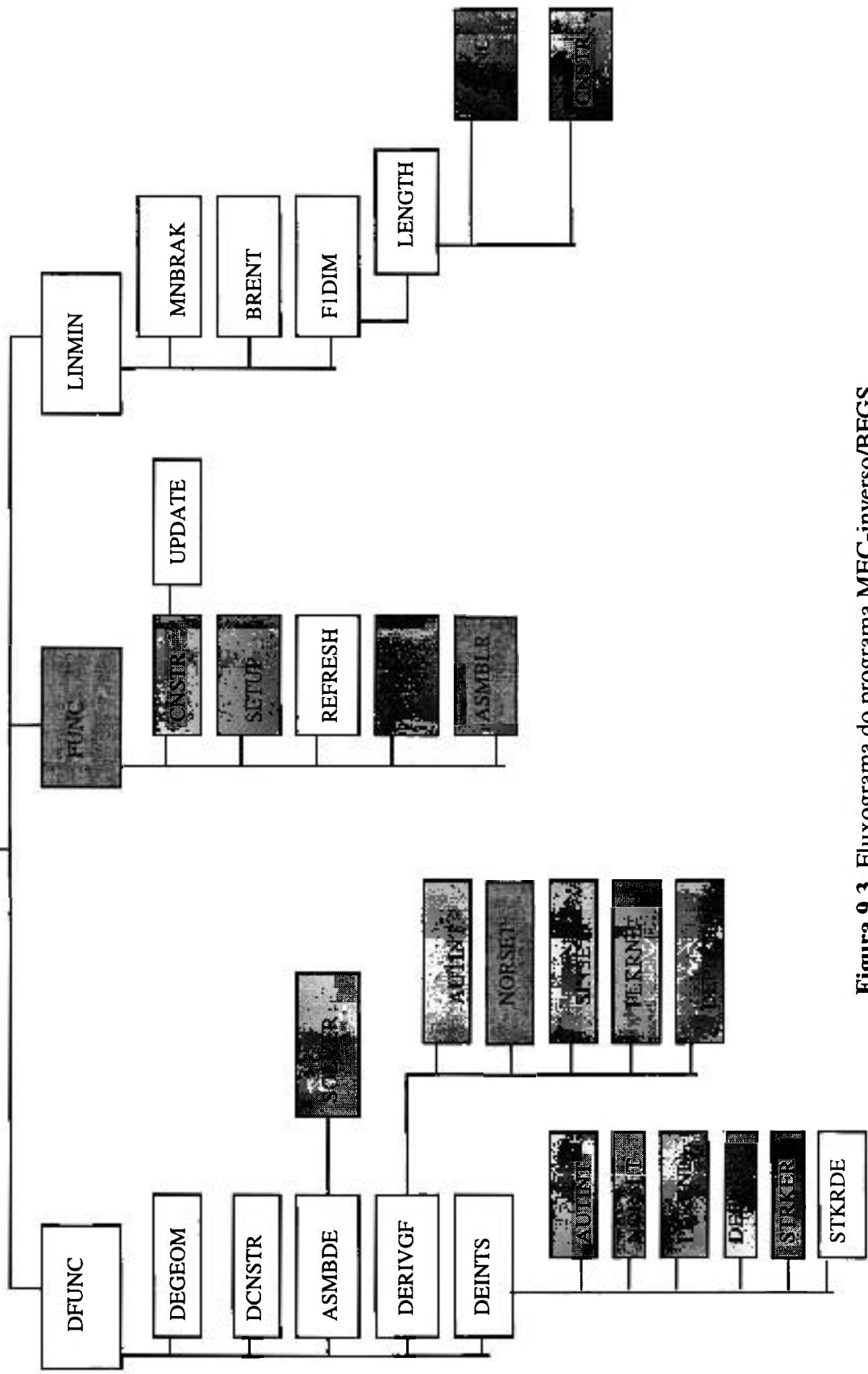


Figura 9.3 Fluxograma do programa MEC-inverso/BFGS.

READRF :

Armazena os dados do contorno e lê os dados de referência, em deslocamentos, deformações ou tensões.

INTGRA :

Faz a operação de integração direta e montagem das matrizes $[F]$ e $[G]$.

ASMBLR :

Faz a montagem do sistema matricial, do vetor direito, e a resolução deste sistema.

INTSTR :

Faz os cálculos de tensões e deslocamentos dos pontos internos.

BFGS :

Faz a otimização através do método da métrica variável. Dado um ponto inicial (p) , que é um vetor de tamanho (n) , a variante BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) do método DFP (Davidon-Fletcher-Powell) é implementada através da função $(FUNC)$, usando o gradiente calculado pela função $(DFUNC)$. A convergência requerida pela função é dada por $(ftol)$. Os valores retornados são (p) = o mínimo da função, $(iter)$ = número de iterações que foram necessárias para localizar o mínimo, e $(fret)$ = o valor da função calculado no mínimo. A subrotina LINMIN é chamada para fazer a minimização linear unidimensional, para cada direção escolhida. A subrotina BFGS é essencial para o MEC-inverso, devendo o leitor encontrar maiores detalhes de sua implementação nos textos sobre otimização citados ao longo deste trabalho.

10 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ASME, Section III, Rules for Construction of Nuclear Power Plant Components, Division 1, Subsection NB, Class 1 Components. *The American Society of Mechanical Engineers*. New York, NY, 1989.
- BANERJEE, P.K.; BUTTERFIELD, R. *Boundary Element Methods in Engineering Science*. London: McGraw-Hill, 1981.
- BANKS, H.T.; KOJIMA, F. Boundary shape identification problems in two dimensional domains related to thermal testing of materials. *ICASE Report No. 88-23*, NASA Langley Research Center, 1988.
- BARONE, M. R.; CAULK, D. A. Optimal arrangement of holes in a two-dimensional heat conductor by a special boundary integral method. *Int. J. Num. Methods Eng.* .V.18: 675-685, 1982.
- BAUMEISTER, J. *Stable Solution of Inverse Problem*. Friedr. Vieweg., Braunschweig, 1981.
- BARRA, L.P.da S. Cálculo de Sensibilidades - Uma aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Otimização de Forma *Tese M.Sc.*, Universidade Federal do Rio de Janeiro. COPPE, 1990.
- BECK, J.V.; BLACKWELL, B.; CLAIR JR., C.R.ST. *Inverse Heat Conduction - Ill-posed Problems*. Wiley-Interscience Publication, New York, 1985.
- BETTI, E. *Theoria della Elasticità*. Il Nuovo Cimento, 7-10, 1872.

- BEZERRA, L.M. .Inverse Elastostatics Solutions With Boundary Elements.
Ph.D. Thesis, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, 1993.
- BEZERRA, L.M.; SAIGAL, S. .A boundary element formulation for the inverse elastostatics problem (IESP) of flaw detection. *Int. J. Num. Methods in Eng.*, 1992.
- BREBBIA, C.A.; TELLES, J.C.F.; WROBEL, L.C. .*Boundary Elements Techniques - Theory and Applications in Engineering*. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
- BURCZYNSKI, T.; ADAMCZYK, T. .The boundary element formulation for multiparameter structure shape optimization. *Applied Math. Model.* V.9: 195-200, 1985.
- BURGGRAF, O.R. .An exact solution of the inverse problem in heat conduction theory and applications. *J. Heat Transfer*. V.86C: 373-382, 1964.
- CALLADINE, C.R. .*Engineering Plasticity*. Oxford: Pergamon Press, 1969.
- COHEN, B.L. .*The Nuclear Energy Option - an alternative for the 90's*. Plenum Press, New York, 1990.
- CRUSE, T.A. .Numerical solutions in three dimensional elastostatics. *Int. J. Solids Structures*. V.5: 1259-1274, 1969.
- CRUSE, T.A. .An application of the boundary-integral equation method to three-dimensional stress analysis. *Computers & Structures*. V.3: 509-527, 1973.
- CRUSE, T.A. .An improved boundary-integral equation method for three-dimensional elastic stress analysis. *Computers & Structures*. V.4: 741-754, 1974.

- DORRI, B. .Solution of inverse heat conduction problems using boundary integral method. *General Electric CR&D Report*, 1987.
- EIZADIAN, D. .Optimal integral equation method. *Ph.D. Thesis*, National Institute of Applied Science of Lyon, 1984.
- FLETCHER, R.; POWELL, M.J.D. .A rapidly convergent descent method for minimization. *Computer J.* V.6: 163-168, 1963.
- FOX, R.L. .*Optimization Method for Engineering Design*. Massachusetts: Addison-Wesley, 1971.
- FRANK, I. .An application of the least-square method to the solution of the inverse problem of heat conduction. *Trans. ASME*, nov., 1963.
- FUTAGAMI, T. .Boundary element method coupled with linear programming for optimal control of distributed parameter systems. Em: *Boundary Elements*. Editado por: C.A. Brebbia, Berlin: Springer-Verlag, 891-900, 1983.
- GILL, P.E.; MURRAY, W.; WRIGHT, M.H. .*Practical Optimization*. London: Academic Press Inc., 1981.
- HADAMARD, J. .*Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. London: Yale University Press, 1923.
- HAUG, E.J.; CHOI, K.K.; YOO, Y.M. .A Variational Method for Shape Optimal Design of Elastic Structures. Em: *New Directions in Optimum Structural Design*. Editado por: E. Atrek, R.H. Gallagher, K.M. Ragsdell, O.C. Zienkiewicz. John Wiley & Sons Ltd, 1984.

- HENSEL, E. *Inverse Theory and Applications for Engineers*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1991.
- IMBER, M.; KHAN, J. Prediction of transient temperature distributions with embedded thermocouples. *AIAA J.* V.10: 784-789, 1972.
- INGHAM, D.B.; WROBEL, L.C. *Boundary Integral Formulation for Inverse Analysis - Advances in Boundary Element Series*. Computational Mechanics Publication, 1997.
- JASWON, M.A.; PONTER, A. R. An integral equation solution of the torsion problem. *Proc. Royal Soc.* V.273: 237-246, 1963.
- KANE, J. H. *Boundary Element Analysis*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1994.
- KANE, J.H.; SAIGAL, S. Design sensitivity analysis of solids using BEM. *J. Eng. Mech. Div. ASCE*. V.114: 1703-1722, 1988.
- KOLMOGOROV, A.N.; FOMIN, S.V. *Introduction to Real Analysis*. New York: Dover, 1970.
- KUBO, S. Inverse problems related to the mechanics and fracture of solids and structures. *JSME Int. J.* V.31: 157-166, 1988.
- LAURICHELLA, G. Sur l'integration de l'equation relative a l'equilibre des plaques elastiques encastrees. *Acta Math.* V.32: 1909.
- LEAL, R. P. Boundary elements in bidimensional elasticity, *M.Sc. Thesis*, Technical University of Lisbon, 1985.

- MANIATTY, A., ZABARAS, N.; STELSON, K. .Finite element analysis of some inverse elasticity problems. *J. of Eng. Mech.*. V.115: 1303-1317, 1989.
- MELNIKOV, Y.A.; TITARENKO, S.A. .Green's function BEM for 2-D optimal shape design. *Eng. An. with B. EL.* V.15: 1-10, 1995.
- MERIC, R. A. .Boundary elements for static optimal heating of solids. *J. Heat Transfer ASME*. V.106: 876-880, 1984.
- MOTA SOARES, C. M.; RODRIGUES, H. C.; OLIVEIRA FARIA, L. M.; HAUG, E. J. .Optimization of the geometry of shafts using boundary elements. *J. Mech. Transm. Automat. Des.*. V.106: 199-203, 1984a.
- MOTA SOARES, C. A.; RODRIGUES, H. C.; CHOI, K. K. .Shape optimal structural design using boundary elements and minimum compliance techniques. *J. Mech. Transm. Automat. Des.*. V.106: 518-523, 1984b.
- MOTA SOARES, C. M.; RODRIGUES, H. C.; OLIVEIRA FARIA, L. M.; HAUG, E. J. .Boundary elements in shape design of shafts. Em: *Optimization in Computer Aided Design*. Editado por: J. S. Gero, Amsterdam: North-Holland, 155-175, 1985.
- NOVAK, A.O. .BEM approach to inverse thermal problems. Em: *Boundary Integral Formulation for Inverse Analysis - Advances in Boundary Element Series*. Editado por: Ingham, D.B. e Wrobel, L.C.. Computacional Mechanics Publications, 1997.
- PIRONNEAU, O. .*Optimal Shape Design for Elliptical Systems*. Berlin: Springer-Verlag, 1984.

PRESS, W.H.; FLANNERY, B.P.; TEUKOLSKY, S.A.; VETTERLING, W.T.
Numerical Recipes. New York: Cambridge University Press, 1986.

REKLAITIS, G.V.; RAVINDRAN, A.; RAGSDALL, K.M. *Engineering Optimization- Methods and Applications*. New York: Wiley, 1983.

RICKETTS, R.E.; ZIENKIEWICZ, O.C. .Shape Optimization of Continuum Structures. Em: *New Directions in Optimum Structural Design*. Editado por: E. Atrek, R.H. Gallagher, K.M. Ragsdell, e O.C. Zienkiewicz; John Wiley & Sons Ltd, 1984.

RIZZO, F.J. .An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. *Quart. Appl. Math.*. V.25: 83-95, 1967.

RIZZO, F.J.; SHIPPY, D.J. .A Method for Stress Determination in Plane Anisotropic Elastic Bodies. *J. Composite Materials*. V.4: 36-60, 1970.

ROMANOV, V.G. *Inverse Problems of Mathematical Physics*. Utrecht, The Netherlands: VNU Science Press, 1987.

SAIGAL, S.; AITHAL, R.; KANE, J.H. .Conforming Boundary Elements in Plane Elasticity for Shape Design Sensitivity. *Int. Journal Num. Methods Eng.*. V.28: 2795-2811, 1989.

SCALES, J.A.; GERSZTENKORN, A. .Robust methods in inverse problems. *Inverse Problems*. V.4: 1071-1091, 1988.

SCHMIT, L.A.Jr. .Structural Optimization - Some New Ideas and Insights. Em: *New Directions in Optimum Structural Design*. Editado por: E. Atrek, R.H. Gallagher, K.M. Ragsdell, e O.C. Zienkiewicz; John Wiley & Sons Ltd, 1984.

- SCHNUR, D.S.; ZABARAS, N. .Finite element solution of two-dimensional inverse elastic problems using spatial smoothing *Int. J. Num. Methods in Eng.*. V.30: 57-75, 1990.
- SCHNUR, D.S.; ZABARAS, N. .An inverse method for determining elastic material properties and a material interface. *Int. J. Num. Methods in Eng.*. V.33: 2029-2057, 1992.
- SOMIGLIANA, C. *Il Nuovo Cimento*, 17-20, 1885.
- STELTZER, J.F. .Two Applications of Optimum Structural Design in the Nuclear Field. Em: *New Directions in Optimum Structural Design*. Editado por: E. Atrek, R.H. Gallagher, K.M. Ragsdell, e O.C. Zienkiewicz; John Wiley & Sons Ltd, 1984.
- TANAKA, M.; MASUDA, Y. .Boundary element method applied to some inverse problems. *Engineering Analysis*. V.3: 138-143, 1986.
- TANAKA, M.; NAKAMURA, M. ; NAKANO, T. .Defect shape identification by means of elastodynamics boundary element analysis and optimization technique. Em: *Advances in Boundary Elements*. Editado por: C.A. Brebbia. Berlin: Springer-Verlag. V.3: 183-194, 1988.
- TIKHONOV, A.N.; ARSENIN, V.Y. *Solutions of Ill-posed Problems*. New York: John Wiley, 1977.
- TIKHONOV, A.N.; GONCHARSKY, A.V. *Ill-posed Problems in the Natural sciences*. Moscow: MIR Publishers, 1987.
- TIMOSHENKO, S.P.; GOODIER, J.N. *Theory of Elasticity*. New York: McGraw-Hill, 1970.

- VANDERPLAATS, G.N. .Numerical Methods for Shape Optimization: An Assessment of the State of the Art. Em: *New Directions in Optimum Structural Design*. Editado por: E. Atrek, R.H. Gallagher, K.M. Ragsdell, e O.C. Zienkiewicz; John Wiley & Sons Ltd, 1984.
- ZABARAS, N.; MORELLES, V.; SCHNUR, D. .Spatially regularized solution of inverse elasticity problems using the BEM. *Comm. in Applied Num. Methods*. V.5: 547-553, 1989a.
- ZABARAS, N.; MUKHERJEE, S.; RICHMOND, O. .An analysis of inverse heat transfer problems with phase changes using an integral method. *Transaction of ASME*. V.110: 554-560, 1989b.
- 17 ZOCHOWSKI, A.; MIZUKAMI, K. .A comparison of BEM and FEM in minimum weight design. Em: *Boundary Elements*. Editado por: C. A. Brebbia. Berlin: Springer-Verlag, 901-911, 1983.