SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE LINEAR, MONOENERGÉTICA EM MULTIREGIÕES COM ESPALHAMENTO ANISOTRÓPICO ATRAVÉS DO MÉTODO F_N*

ELIZABETH MAY BRAGA DULLEY PONTEDEIRO**

E

JOSÉ RUBENS MAIORINO

CENTRO DE ENGENHARIA NUCLEAR

ÁREA DE FÍSICA DE REATORES

INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES

SÃO PAULO - SP

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo a resolução da equação de transporte linear, monoenergética, com espalhamento anisotrópico, em multiregiões, através do método F_N. A análise matemática utilizada por este método consiste em utilizar parcialmente o método de expansão em autofunções singulares, ou método de Case, para derivar um conjunto de equações integrais acopladas para as distribuições angulares nos contornos e interfaces, e então aproximar' estas distribuições por polinomios de ordem N, para derivar, com o uso das condições de contorno e continuidade nas interfaces, um conjunto de equações algébricas para os coeficientes da aproximação polinomial. Com o conhecimento desses coeficientes, em primeiro lugar, pode-se então calcular os fluxos' angulares nos contornos e nas interfaces, bem como grandezas integrais, como o albedo e o fator de transmissão. Consequentemente, os fluxos total e angular, e a corrente, podem então ser calculados para qualquer valor das variáveis espaciais e angulares. Com o intuito de obter-se resultados numéricos , desenvolveu-se um programa (FNAM-1) com opções no número de regiões, tipo de condições de contorno, ordem de aproximação F_N. Resultados numéricos foram então obtidos para vários problemas amostras e comparados com os resultados' publicados na literatura com o objetivo de demonstrar a precisão e aplicabilidade do método F_N.

---

* Este trabalho é baseado na dissertação de Mestrado de um dos autores (EMBDP) apresentada ao IPEN.

** Atualmente estagiando na CNEN, RJ

I . INTRODUÇÃO

A evolução da função distribuição de velocidades de partículas no espaço-tempo pode ser descrita matematicamente pelo conjunto de equações integro-diferenciais não lineares, introduzidas originalmente, em 1872, por Boltzmann. Estas equações constituem-se no modelo básico para a descrição da difusão de moléculas, íons etc. Entretanto, na descrição matemática do processo de transporte de partículas não carregadas, possuindo densidades várias ordens de magnitude inferiores ao do meio, as equações de Boltzmann podem ser reduzidas à apenas uma equação íntegro-diferencial linear descrevendo o transporte dessas partículas, conhecida genericamente como equação de transporte linear.

A equação de transporte linear, tem sido a equação básica na descrição da transferência de radiação luminosa e calor por radiação (transferência radiativa /1/). Com a descoberta do nêutron e o interesse no desenvolvimento de reatores nucleares, esta equação tem sido exaustivamente aplicada na descrição matemática do processo de transporte de nêutrons e gamas, visando o projeto do caroço de reatores nucleares, e, principalmente, para a solução de problemas de penetração profunda (blindagem).

Vários métodos aproximados tem sido propostos para a solução da equação de transporte, sendo os mais antigos desenvolvidos principalmente pelos pesquisadores envolvidos com transferência radiativa. Um dos métodos mais populares é o baseado na expansão da dependência angular, da função distribuição, em esféricos harmonicos, conhecido como método P_N/2/. Com o desenvolvimento dos computadores digitais, várias técnicas numéricas tem sido desenvolvidas visando a obtenção da solução da equação de transporte. Dentre várias, cumpre destacar o método S_N/3/, o qual, basicamente, consiste numa discretização das variáveis, espacial, angular e energética, da equação de transporte, tendo resultado no desenvolvimento de vários códigos computacionais amplamente usados pela comunidade nuclear internacional, tais como o DTF-IV, ANISN, DOT, TWOTRAN etc. Finalmente, cumpre salientar, que técnicas analíticas, tais como o método de expansão em auto-funções singulares /4/, só tem sido aplicadas com sucesso na solução da equação de transporte em problemas simples e idealizados, visando principalmente a obtenção de resultados padrões (benchmark) para comparação e avaliação dos métodos aproximados.

O método F_N (F= Facil) foi introduzido recentemente por Siewert /5,6/, e desde então tem sido extensivamente aplicado em vários tipos de problemas em transferência radiativa /7,8,9/ e teoria de transporte de

nêutrons /10,11,12,13/. A vantagem deste método é principalmente devido a facilidade com que grandezas na superfície do meio, tais como albedo, fator de transmissão e fluxo emergente, podem ser calculadas sem a necessidade de calcular parâmetros internamente ao meio, o que o torna atrativo, principalmente, na solução de problemas de penetração profunda (blindagem).

Neste trabalho utiliza-se o método F_N para solucionar a equação de transporte monoenergética em multiregiões com espalhamento anisotrópico, com um formalismo generalizado que permite o uso de várias opções de condições de contorno, fontes externas por região etc, e portanto possibilitando aplicações em vários tipos de problemas de interesse em blindagem e transferência radiativa.

II. FORMULAÇÃO E ANÁLISE

Seja um meio consistindo de K regiões planas, conforme ilustrado na figura 1, com cada região (i) caracterizada pelo número de partículas secundárias por colisão, $\omega_i = \sigma_{si}/\sigma_{ti}$, com σ_{si} e σ_{ti} as secções de choque macroscópicas de espalhamento e total, respectivamente, com uma espessura ótica* x_i, e uma lei de espalhamento caracterizada por coeficientes $f_{i,\ell}$ da expansão da função transferência $f_i(\underline{\Omega}' \to \underline{\Omega})$ em polinomios de Legendre, $P_\ell(\mu_0)$, $\mu_0 = \underline{\Omega}\cdot\underline{\Omega}'$, até a ordem de anisotropia L_i. Desta forma as equações descrevendo o transporte de partículas (nêutrons ou fótons) em cada região, assumindo o modelo de um grupo, ou uma frequência, são dadas por /4/.

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} I_i(x,\mu) + I_i(x,\mu) = \frac{\omega_i}{2} \sum_{\ell=0}^{L_i} (2\ell+1) f_{i,\ell} P_\ell(\mu) \int_{-1}^{1} P_\ell(\mu') I_i(x,\mu') d\mu'$$

$$+ \frac{S_i}{4\pi}, \quad i = 1, 2, \ldots, K, \qquad (1)$$

com x a variável ótica, μ o cosseno diretor da direção de propagação da radiação, $I_i(x,\mu)$ o fluxo angular e S_i a intensidade de fonte externa, isotrópica, na região (i). Obviamente, nas interfaces das regiões os fluxos angulares devem satisfazer as condições de continuidade da-

---

* A variável ótica é a medida adimensional da espessura do meio em termos de números de livres caminhos médio de interação $x_i = \sigma_{ti} z_i$, z_i em unidades de comprimento).

INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES
I. P. E. N.

das por :

$$I_i(\tau_i,\mu) = I_{i+1}(\tau_i,\mu),\ \mu\in(-1,1),\ \mu\neq 0 \text{ e } i=1,2,\ldots,(K-1), \quad (2.a)$$

com

$$\tau_i = \sum_{j=1}^{i} x_j \,. \quad (2.b)$$

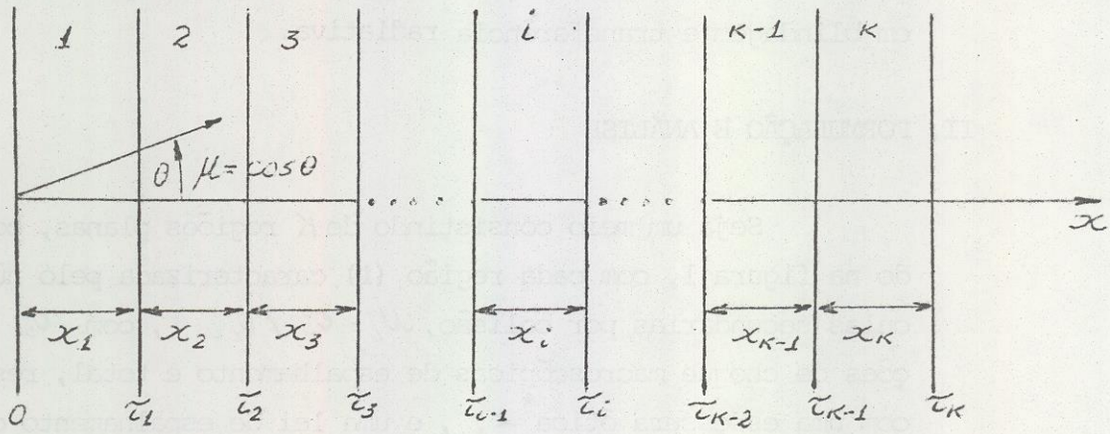


Figura 1 : Geometria do problema de multiregiões

As condições de contorno, aqui consideradas, são dadas por :

$$I(0,\mu) = f_0(\mu) + \frac{\lambda_1}{2\pi} I(0,-\mu) + \frac{\lambda_2}{2\pi}\int_0^1 I(0,-\mu')\,d\mu',\ \mu>0, \quad (3.a)$$

$$I(\tau_K,-\mu) = f_K(\mu) + \frac{\lambda_1'}{2\pi} I(\tau_K,\mu) + \frac{\lambda_2'}{2\pi}\int_0^1 I(\tau_K,\mu')\,d\mu',\ \mu>0, \quad (3.b)$$

onde λ_1 e λ_1' representam os coeficientes, ou albedos, de refletividade especular, λ_2 e λ_2' os de refletividade difusa, e as funções $f_0(\mu)$ e $f_K(\mu)$ as incidências de radiação nos contornos, sendo que neste trabalho, são consideradas as seguintes possibilidades :

i.) incidência monodirecional, $f_0(\mu) = \frac{\alpha_1}{2\pi\mu_0}\delta(\mu-\mu_0),\ \mu_0>0,\ \alpha_1 = 0 \text{ ou } 1$

ii.) superfície livre, $f_0(\mu)$ e/ou $f_K(\mu) = 0$

iii.) incidência isotrópica, $f_o(\mu)$ e/ou $f_K(\mu) = 1$

iv.) incidência cossenoidal, $f_o(\mu) = \sum_{\beta=0}^{N1} d_\beta \mu^\beta$, e/ou

$$f_K(\mu) = \sum_{\beta=0}^{N2} c_\beta \mu^\beta \ .$$

O problema como aqui formulado, permite sua aplicação tanto em transporte de nêutrons e fótons, como em transferência de calor por radiação em meios participantes.

A solução formal das equações (1) podem ser obtidas, através do método de expansão em auto funções singulares, como /4/ :

$$I_i(x,\mu) = \sum_{\beta=0}^{\mathcal{K}_i-1} \Big\{ A(\nu_{i,\beta})\,\phi_i(\nu_{i,\beta},\mu)\exp\left[-x/\nu_{i,\beta}\right]$$

$$+ A(-\nu_{i,\beta})\,\phi_i(-\nu_{i,\beta},\mu)\exp\left[+x/\nu_{i,\beta}\right] + \int_{-1}^{1} A_i(\nu)\,\phi_i(\nu,\mu)\exp\left[-x/\nu\right]d\nu$$

$$+ \frac{S_i}{4\pi(1-\omega_i)} \ , \quad x \in [\tau_{i-1}, \tau_i] \ , \ i = 1,2,\ldots,K \ , \tag{4}$$

onde as auto funções $\phi_i(\pm\nu_{i,\beta},\mu)$ e $\phi_i(\nu,\mu)$, possuem expressões explícitas /4/; $\mathcal{K}_i$ é o número de pares (+ ou -) de auto valores, $\nu_{i,\beta} > 1$ /4/, e os coeficientes $A(\xi)$, $\xi \in \{\pm\nu_{i,\beta} \cup (-1,1)$ devem ser encontrados para a solução geral do problema.

Ao invés de determinar os coeficientes $A(\xi)$ usando-se as propriedades de ortogonalidade das auto funções, como no método de expansão em auto funções singulares, e então determinar a solução geral do problema, no método F_N, a eq. (4) é escrita para valores de x nos contornos e interfaces, para então as equações resultantes serem multiplicadas por $\mu\,\phi_i(-\xi,\mu)$ ou $\mu\,\phi_i(\xi,\mu)$ e integradas em $\mu \in (-1,1)$, para se obter, após o uso das propriedades de ortogonalidade das auto funções, um sistema de equações integrais acopladas para as distribuições nas interfaces, ou seja,

$$\int_0^1 \mu \left[\phi_1(-\xi,\mu)\, I_1(0,\mu) - \phi_1(\xi,\mu)\, I_1(0,\mu) \right] d\mu$$

$$+ e^{-\Delta_1/\xi} \int_0^1 \mu \left[\phi_1(\xi,\mu)\, I_1(\tau_1,-\mu) - \phi_1(-\xi,\mu)\, I_1(\tau_1,\mu) \right] d\mu =$$

$$\frac{S_1}{4\pi(1-\omega_1)} \left(e^{-\Delta_1/\xi} - 1 \right) \int_{-1}^1 \mu\, \phi_1(-\xi,\mu)\, d\mu, \quad \xi \in P_1, \tag{5.a}$$

$$\int_0^1 \mu \left[\phi_1(-\xi,\mu)\, I_1(\tau_1,-\mu) - \phi_1(\xi,\mu)\, I_1(\tau_1,\mu) \right] d\mu$$

$$+ e^{-\Delta_1/\xi} \int_0^1 \mu \left[\phi_1(\xi,\mu)\, I_1(0,\mu) - \phi_1(-\xi,\mu)\, I_1(0,-\mu) \right] d\mu =$$

$$\frac{S_1}{4\pi(1-\omega_1)} \left(e^{-\Delta_1/\xi} - 1 \right) \int_{-1}^1 \mu\, \phi_1(\xi,\mu)\, d\mu, \quad \xi \in P_1, \tag{5.b}$$

$$\int_0^1 \mu \left[\phi_i(-\xi,\mu)\, I_i(\tau_{i-1},\mu) - \phi_i(\xi,\mu)\, I_i(\tau_{i-1},\mu) \right] d\mu$$

$$- e^{-\Delta_i/\xi} \int_0^1 \mu \left[\phi_i(-\xi,\mu)\, I_i(\tau_i,\mu) - \phi_i(\xi,\mu)\, I_i(\tau_i,-\mu) \right] d\mu =$$

$$\frac{S_i}{4\pi(1-\omega_i)} \left(1 - e^{-\Delta_i/\xi} \right) \int_{-1}^1 \mu\, \phi_i(-\xi,\mu)\, d\mu, \quad \xi \in P_i, \quad i = 2,3,\ldots,(K-1), \tag{5.c}$$

$$\int_0^1 \mu \left[\phi_i(-\xi,\mu)\, I_i(\tau_i,-\mu) - \phi_i(\xi,\mu)\, I_i(\tau_i,\mu) \right] d\mu$$

$$+ e^{-\Delta_i/\xi} \int_0^1 \mu \left[\phi_i(\xi,\mu)\, I_i(\tau_{i-1},\mu) - \phi_i(-\xi,\mu)\, I_i(\tau_{i-1},\mu) \right] d\mu =$$

$$\frac{S_i}{4\pi(1-\omega_i)} \left(e^{-\Delta_i/\xi} - 1\right) \int_{-1}^1 \mu\, \phi_i(\xi,\mu)\, d\mu \,, \quad \xi \in P_i \,, \quad i = 2,3,\ldots,(K-1), \tag{5.d}$$

$$\int_0^1 \mu \left[\phi_K(\xi,\mu)\, I_K(\tau_{K-1},-\mu) - \phi_K(-\xi,\mu)\, I_K(\tau_{K-1},\mu) \right] d\mu$$

$$+ e^{-\Delta_K/\xi} \int_0^1 \mu \left[\phi_K(-\xi,\mu)\, I_K(\tau_K,\mu) - \phi_K(\xi,\mu)\, I_K(\tau_K,-\mu) \right] d\mu =$$

$$\frac{S_K}{4\pi(1-\omega_K)} \left(e^{-\Delta_K/\xi} - 1\right) \int_{-1}^1 \mu\, \phi_K(-\xi,\mu)\, d\mu \,, \quad \xi \in P_K \,, \tag{5.e}$$

e

$$\int_0^1 \mu \left[\phi_K(-\xi,\mu)\, I_K(\tau_K,-\mu) - \phi_K(\xi,\mu)\, I_K(\tau_K,\mu) \right] d\mu$$

$$+ e^{-\Delta_K/\xi} \int_0^1 \mu \left[\phi_K(\xi,\mu)\, I_K(\tau_{K-1},\mu) - \phi_K(-\xi,\mu)\, I_K(\tau_{K-1},-\mu) \right] d\mu =$$

$$\frac{S_K}{4\pi(1-\omega_K)} \left(e^{-\Delta_K/\xi} - 1\right) \int_{-1}^1 \mu\, \phi_K(\xi,\mu)\, d\mu \,, \quad \xi \in P_K \,, \tag{5.f}$$

onde, $\Delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$, e P_i o intervalo espectral no qual as eqs. (5) são válidas, i.e., $P_i = \{\delta_{i,\beta} \cup (0,1)\}$; $i = 1,2,\cdots,K$; $\beta = 1,2,\cdots,\aleph-1$.

Para solucionar as equações integrais para as distribuições angulares emergentes e nas interfaces, o método F_N usa as condições de contorno, dadas pelas eqs. (3), e aproxima as distribuições desconhecidas, por

$$I_i(\tau_i,-\mu) = \sum_{\alpha=0}^{N} a_{i,\alpha}\mu^{\alpha}, \quad \mu>0, \quad i = 0,1,\cdots(K-1) \tag{6.a}$$

e

$$I_i(\tau_i,\mu) = \frac{\alpha_1}{2\pi\mu_0}\delta(\mu-\mu_0) + \sum_{\alpha=0}^{N} b_{i,\alpha}\mu^{\alpha}, \quad \mu>0, \quad i = 1,2,\cdots,K, \tag{6.b}$$

para obter,

$$\sum_{\alpha=0}^{N}\left\{a_{0,\alpha}\left[\frac{\lambda_1}{2\pi}A_{\alpha}^{(1)}(\xi) + \frac{\lambda_2}{2\pi(\alpha+2)}A_0^{(1)}(\xi) - B_{\alpha}^{(1)}(\xi)\right]\right.$$

$$\left. + e^{-\Delta_1/\xi}\left[a_{1,\alpha}B_{\alpha}^{(1)}(\xi) - b_{1,\alpha}A_{\alpha}^{(1)}(\xi)\right]\right\} = -\frac{S_1}{2\pi\omega_1}(1-e^{-\Delta_1/\xi})$$

$$+ \frac{\alpha_1}{\pi\xi\omega_1}\phi_1(-\xi,\mu_0)e^{-\Delta_1(1/\xi+1/\mu_0)} - \frac{2}{\omega_1\xi}R_0(\xi), \tag{7.a}$$

$$\sum_{\alpha=0}^{N}\left\{e^{-\Delta_1/\xi}a_{0,\alpha}\left[\frac{\lambda_1}{2\pi}B_{\alpha}^{(1)}(\xi) + \frac{\lambda_2}{2\pi(\alpha+2)}B_0^{(1)}(\xi) - A_{\alpha}^{(1)}(\xi)\right]\right.$$

$$\left. + a_{1,\alpha}A_{\alpha}^{(1)}(\xi) - b_{1,\alpha}B_{\alpha}^{(1)}(\xi)\right\} = -\frac{S_1}{2\pi\omega_1}(1-e^{-\Delta_1/\xi})$$

$$- \frac{\alpha_1}{\pi\xi\omega_1}(e^{-\Delta_1/\xi} - e^{-\Delta_1/\mu_0})\phi_1(-\xi,\mu_0), \tag{7.b}$$

$$\sum_{\alpha=0}^{N}\left\{ b_{i-1,\alpha}\, A_\alpha^{(i)}(\xi) - a_{i-1,\alpha}\, B_\alpha^{(i)}(\xi) + e^{-\Delta_i/\xi}\left[a_{i,\alpha}\, B_\alpha^{(i)}(\xi) \right.\right.$$

$$\left.\left. - b_{i,\alpha}\, A_\alpha^{(i)}(\xi)\right]\right\} = -\frac{S_i}{2\pi\omega_i}\left[1 - e^{-\Delta_i/\xi}\right] - \frac{\alpha_1}{\pi\xi\omega_i}\,\phi_i(-\xi,\mu_0)\left[e^{-\tau_{i-1}/\mu_0} \right.$$

$$\left. - e^{-\Delta_i/\xi - \tau_i/\mu_0}\right], \quad i = 2, 3, \cdots, (K-1), \tag{7.c}$$

$$\sum_{\alpha=0}^{N}\left\{\left[a_{i,\alpha}\, A_\alpha^{(i)}(\xi) - b_{i,\alpha}\, B_\alpha^{(i)}(\xi) + e^{-\Delta_i/\xi}\left[b_{i-1,\alpha}\, B_\alpha^{(i)}(\xi) - a_{i-1,\alpha}\, A_\alpha^{(i)}(\xi)\right]\right]\right\}$$

$$= -\frac{S_i}{2\pi\omega_i}\left(1 - e^{-\Delta_i/\xi}\right) - \frac{\alpha_1}{\pi\xi\omega_i}\,\phi_i(\xi,\mu_0)\left[e^{-\Delta_i/\xi - \tau_{i-1}/\mu_0} - e^{-\tau_i/\mu_0}\right], \quad i = 2, \cdots (K-1), \tag{7.d}$$

$$\sum_{\alpha=0}^{N}\left\{ b_{K,\alpha}\left[B_\alpha^{(K)}(\xi) - \frac{\lambda_1}{2\pi}\, A_\alpha^{(K)}(\xi) - \frac{\lambda_2}{2\pi(\alpha+2)}\, A_0^{(K)}(\xi)\right] + e^{-\Delta_K/\xi}\left[a_{K-1,\alpha}\, A_\alpha^{(K)}(\xi) \right.\right.$$

$$\left.\left. - b_{K-1,\alpha}\, B_\alpha^{(K)}(\xi)\right]\right\} = \frac{S_K}{2\pi\omega_K}\left(1 - e^{-\Delta_K/\xi}\right) - \frac{\alpha_1}{\pi\xi\omega_K}\,\phi_K(\xi,\mu_0)\left[e^{-\Delta_K/\xi - \tau_{K-1}/\mu_0} \right.$$

$$\left. - e^{-\tau_K/\mu_0}\right] + \frac{\lambda_2'}{2\pi}\,\frac{\alpha_1}{2\pi}\, A_0^{(K)}(\xi) + \frac{2}{\xi\omega_K}\, S_K(\xi), \tag{7.e}$$

e

$$\sum_{\alpha=0}^{N}\left\{ a_{K-1,\alpha}\, B_\alpha^{(K)}(\xi) - b_{K-1,\alpha}\, A_\alpha^{(K)}(\xi) + e^{-\Delta_K/\xi}\, b_{K,\alpha}\left[A_\alpha^{(K)}(\xi) \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\lambda_1'}{2\pi}\, B_\alpha^{(K)}(\xi) - \frac{\lambda_2'}{2\pi(\alpha+2)}\, B_0^{(K)}(\xi)\right]\right\} = \frac{S_K}{2\pi\omega_K}\left(1 - e^{-\Delta_K/\xi}\right) + \frac{\alpha_1}{\pi\xi\omega_K}\,\phi_K(-\xi,\mu_0)\left[e^{-\tau_{K-1}/\mu_0} \right.$$

$$\left. - e^{-\tau_K/\mu_0 - \Delta_K/\xi}\right] + \frac{\lambda_2'}{2\pi}\,\frac{\alpha_1}{2\pi}\, e^{-\Delta_K/\xi}\, B_0^{(K)}(\xi) + \frac{2}{\xi\omega_K}\, R_K(\xi), \tag{7.f}$$

onde as funções $A_\alpha^{(i)}(\xi)$ e $B_\alpha^{(i)}(\xi)$, definidas como momentos das auto funções, podem ser calculadas por relações de recorrência /14/, e as funções $R_0(\xi)$, $R_K(\xi)$ e $S_0(\xi)$, $S_K(\xi)$ podem ser calculadas, dependendo do tipo de condição de contorno /14/. Para encontrar os 2K(N+1)' coeficientes $a_{i,\alpha}$ e $b_{i,\alpha}$ das aproximações polinomiais dadas pelas eqs.' (6), o método F_N usa o fato que as eqs. (7) são válidas para qualquer' valor $\xi \in P_i$ e portanto escolhendo-se (N+1) valores de ξ no espectro $\xi \in P_i$, pode-se gerar $2K(N+1)$ equações lineares, as quais quando solucionadas fornecem os coeficientes $a_{i,\alpha}$ e $b_{i,\alpha}$, e consequentemente' os fluxos angulares nos contornos e interfaces, e o albedo e fator de transmissão, os quais são definidos por :

$$A(albedo) = \frac{\int_0^1 I_1(0,-\mu)\mu\, d\mu}{\int_0^1 I_1(0,\mu)\mu\, d\mu} \qquad (8.a)$$

e

$$T(transmissão) = \frac{\int_0^L I_K(0,\mu)\mu\, d\mu}{\int_0^1 I_1(0,\mu)\mu\, d\mu} \qquad (8.b)$$

Finalmente, a solução geral, $I_i(x,\mu)$, pode ser encontrada, usando-se as propriedades de ortogonalidade das auto funções, conforme' discutido na referência 14, e desta forma grandezas como o fluxo total, corrente etc podem ser calculadas.

III. RESULTADOS NUMÉRICOS

Com o objetivo de obter-se resultados numéricos, foi feito um programa de computador (FNAM-1/14/), o qual possibilita um número de 20 regiões, ordem máxima de aproximação, 10, ordem de espalhamento, em cada região, 30, e sendo as condições de contorno permitida (em ambos' contornos): superfície livre, incidência cossenoidal,e isotropica re - fletividade difusa e especular com albedo especificado, e incidência ' monodirecional.

Como ilustração, da precisão do FNAM-1, resultados numéricos são apresentados e comparados com outros resultados encontrados na literatura especializada, ou obtidos por outros códigos, tais como o ANISN /15/. Nas figuras 2, são ilustrados os problemas amostras considerados neste trabalho. O problema 1, (Fig. 2.a), consiste de um problema típico de penetração profunda (espessura da região de 20 livres caminhos médios), com espalhamento isotrópico, e incidência isotrópica em x=0, e superfície livre em x= τ . Na tabela 1 os resultados obtidos pelo FNAM-1, para o albedo e o fator de transmissão, são mostrados e comparados com os resultados publicados por Ponti/16/.

TABELA 1 - Resultados do Problema 1 (Penetração Profunda)

Método	Albedo	Fator de Transmissão
F_4	0.1465	2.672×10^{-9}
ANISN	0.1470	2.630×10^{-9}
Monte Carlo	-	2.618×10^{-9} + - 1%
"Exato"	0.1465	-

O problema 2 (Fig.2.b) consiste de um problema de 6 regiões com espalhamento anisotrópico de ordem 8*, e incidência cosseinodal (μ^{β}) no contorno esquerdo. Os resultados para o albedo e fator de transmissão, obtidos pelo FNAM-1, são mostrados na tabela 2, e comparados com os publicados por Devaux et alli /17/.

TABELA 2 - Resultados do Problema 2 (6 regiões)

	Albedo			Fator de Transmissão		
	F_4	exato	ANISN	F_4	Exato	ANISN
1	0.08058	0.08058	0.08059	0.8543(-4)	0.8543(-4)	0.8512(-4)
3	0.07051	0.07052	0.07051	0.9307(-4)	0.9307(-4)	0.9274(-4)

* A lei de espalhamento (fi,θ) é fornecida na referência 17.

O problema 3 (Fig. 2.c) consiste de um meio com duas regiões com fonte externa na região 1, incidência isotropica em X=0 e espalhamento isotrópico. Os resultados, para a distribuição de fluxo e corrente, são mostrados na tabela 3 e comparados com os obtidos por um programa que utiliza o método P_N (MPN-1/18/).

TABELA 3 - Resultados do Problema 3 (Fonte Externa)

x	FLUXO TOTAL		CORRENTE TOTAL	
	MPN-1	F-6	MPN-1	F-6
0.0	2.7532	2.7436	-0.3803	-0,3799
0.5	3.3679	3.3652	-0.1929	-0.1925
1.0	3.5602	3.5653	-0.0415	-0.0406
1.5	3.5227	3.5118	0.1026	0.1042
2.0	3.2529	3.2267	0.2617	0.2649
2.5	2.5791	2.5794	0.4642	0.4641
3.1	1.7078	1.7079	0.3390	0.3390
3.7	1.1182	1.1187	0.2532	0.2532
4.3	0.7989	0.7989	0.1944	0.1944
4.9	0.5006	0.5006	0.1557	0.1557
5.5	0.2244	0.2230	0.1337	0.1337

O problema 4 (Fig. 2.d) consiste de um meio com 4 regiões com diferentes leis de espalhamento em cada região. e incidência monodirecional no contorno esquerdo. Na tabela 4; mostra-se os resultados para a distribuição de fluxo e corrente junto com os resultados obtidos pelo MPN-1/18/. Salienta-se que os resultados obtidos pelo MPN-1 não são precisos, na medida em que no método P_N não é possível representar adequadamente a componente penetrante por uma expansão finita de polinomios de Legendre, enquanto que na análise aqui desenvolvida a aproximação proposta, eq. 6.b, leva em conta esta componente.

Finalmente, o problema 5 (Fig 2.e) consiste de um meio com duas regiões com incidência cossenoidal, sendo que os resultados para a distribuição de fluxo (tabela 5) obtidos pelo MNAM-1 foram comparados com resultados "exatos" /20/, publicados na literatura, com o objetivo de demons - t

trar que o método F_N é capaz de produzir resultados tão precisos quanto os obtidos por métodos analíticos.

TABELA 4 - Resultados do problema 4 (incidência monodirecional)

	FLUXO TOTAL		CORRENTE TOTAL	
X	MPN-1	F-6	MPN-1	F-6
0.0	1.3656	1.3233	0.4226	0.4222
0.5	0.5810	0.6049	0.2025	0.1859
1.0	0.2775	0.2808	0.997(-1)	0.843(-1)
1.5	0.1340	0.1485	0.506(-1)	0.498(-1)
2.0	0.674(-1)	0.7841 (-1)	0.264(-1)	0.255(-1)
2.5	0.373(-1)	0.401(-1)	0.139(-1)	0.102(-1)
3.0	0.251(-1)	0.270(-1)	0.967(-2)	0.864(-2)
3.5	0.162(-1)	0.182(-1)	0.681(-2)	0.550(-2)
4.5	0.860(-2)	0.905(-2)	0.260(-2)	0.243(-2)
5.5	0.641(-2)	0.732(-2)	0.184(-2)	0.182(-2)
6.5	0.463(-2)	0.490(-2)	0.129(-2)	0.126(-2)
8.0	0.318(-2)	0.356(-2)	0.100(-2)	0.094(-2)
9.5	0.165(-2)	0.175(-2)	0.783(-3)	0.654(-3)
10.1	0.128(-2)	0.138(-2)	0.761(-3)	0.632(-3)

TABELA 5 - Resultados do Problema 5

X	FLUXO TOTAL			
	CASO 1*		CASO 2**	
	Exato	F_6	Exato	F_6
0.0	2.1129	2.1128	2.0932	2.0932
0.2	2.1605	2.1609	2.1329	2.1329
0.4	2.0167	2.0168	1.9823	1.9821
0.8	1.6350	1.6350	1.5866	1.5866
1.0	1.4221	1.4224	1.3662	1.3662
1.4	0.9832	0.9832	0.9719	0.9719
1.8	0.6286	0.6286	0.6468	0.6468
2.0	0.4389	0.4389	0.4675	0.4675

* Caso 1 : $f_{2,1} = 0.0$

** Caso 2 : $f_{2,1} = 0.513$

IV. CONCLUSÕES

Os resultados numéricos apresentados, demonstram a capacidade do método F_N em fornecer resultados com uma precisão de cerca de 4 algarismos significativos usando-se ordens relativamente baixa da aproximação. Além disso, o método F_N fornece as grandezas emergentes do meio de uma maneira relativamente imediata, sem a necessidade de se calcular parâmetros internos ao meio, o que o torna atrativo para aplicações em problemas de penetração profunda. Como continuidade deste trabalho, sugere-se uma extensão para o modelo multigrupo, o que poderia facilmente ser realizado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS :

1 . Chandrasekhars, S. Radiative Transfer, London, Oxford University Press, 1950.

2 . Mark, J.C. The Spherical Harmonic Method, Atomic Energy Project, Division of Research, National Research, 1957.

3 . Carlson, B. G. Solution of Transport Equation by SN approximation, Los Alamos, N. Mex., Los Alamos Scientific Laboratory, 1953 (LA.1599).

4 . Case, K. M. & Zweifel, P. F. Linear Transport Theory, Mass., Addison-Wesley, 1967.

5 . Siewert, C. E. & Benoist, P., The F_N Method in Neutron Transport Theory. Part I : Theory and Applications. Nucl. Sci. Eng. 69 : 156-160, 1979.

6 . Grandjean; P. & Siewert, C. E. The F_N Method in Neutron Transport Theory. Part II : Applications and Numerical Results. Nucl. Sci. Eng. 69 : 161-169, 1979.

7 . Siewert, C. E. & Maiorino, J. R. A Point Source in a Finite Sphere, J. Quant. Spec. Rad. Transf. 22 : 435-439; 1979.

8 . Siewert, C. E., Maiorino, J. R. & Ozisik, M. N., The Use of the F_N Method for Radiative Transfer Problems with Reflective Boundary Conditions, J. Quant. Spec. Rad. Transf. 23, 565-573, 1980.

9 . Maiorino, J. R., & Siewert, C. E. The F_N Method for Polarization Studies. Part II : Numerical Results. J. Quant. Spec. Rad. Transf. 24:159-165,1980.

10 . Neshat, K., & Maiorino, J.R. The F_N Method for Solving the Critical Problem for a Slab with Finite Reflector. Ann. Nucl. Energy, 7: 79-81, 1980.

11 . Maiorino, J. R., & Siewert, C. E. On Multi-Media Calculations in the theory of Neutron Diffusion, Ann. Nucl. Energy, 7, 535-539, 1980.

12 . Maiorino, J. R. The F_N Method in Radiative Transfer and Neutron Transport Theory. Proceedings of the International Topical Meeting on Advances in Mathematical Methods for the Solution of Nuclear Engineering Problems - Munique, 1: 221, 1981.

13 . Garcia, R. D. M., & Siewert, C. E. A Multiregion Calculation in the Theory of Neutron Diffusion, Nucl. Sci. Eng., 76 : 53-57, 1980.

14 . Pontedeiro, E. M. B. D, Solução da Equação de Transporte Linear, Monoenergética em Multiregiões com Espalhamento Anisotrópico através do Método F_N, Dissertação de Mestrado, IPEN-SP, 1982.

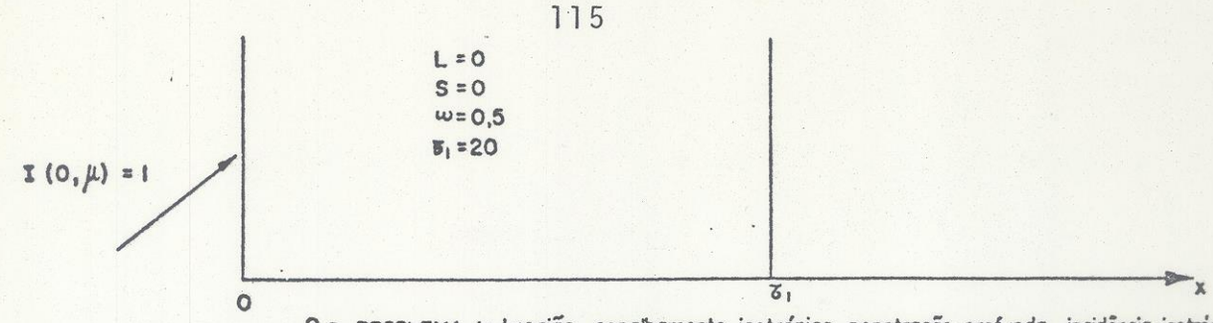
15 . Engle, W. W. Jr. ANISN, a One Dimensional Discrete Ordinates Transport Code with Anisotropic Scatteing, Oak Ridge National Laboratories, K-1693, 1967.

INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES
I. P. E. N.

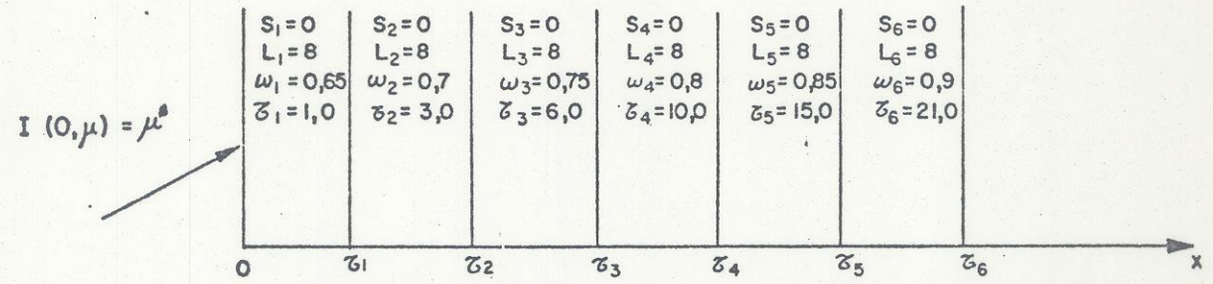
16 . Ponti, A. A Test Problem Solved with ANISN. Newsletter 17 : 49-57, 1974.

17 . Devaux, C., Grandjean, P., Ishiguro. Y., & Siewert, C. E. On Multiregion Problems in Radiative Transfer, Astrophys. Space Sci, 62: 225-233, 1979.

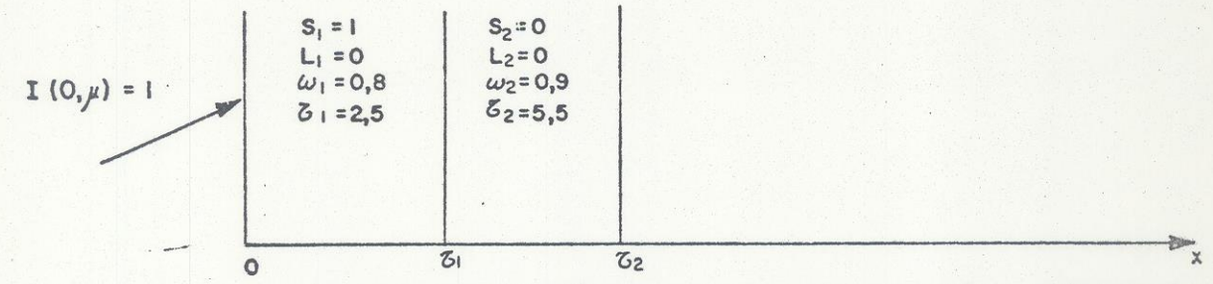
18 . Yamaguchi, M. & Maiorino, J. R. MPN-1 : Um Módulo de Computação para a Solução da Equação de Transporte em Multiregiões através do Método P_N. Informação IPEN, 10, 1981.



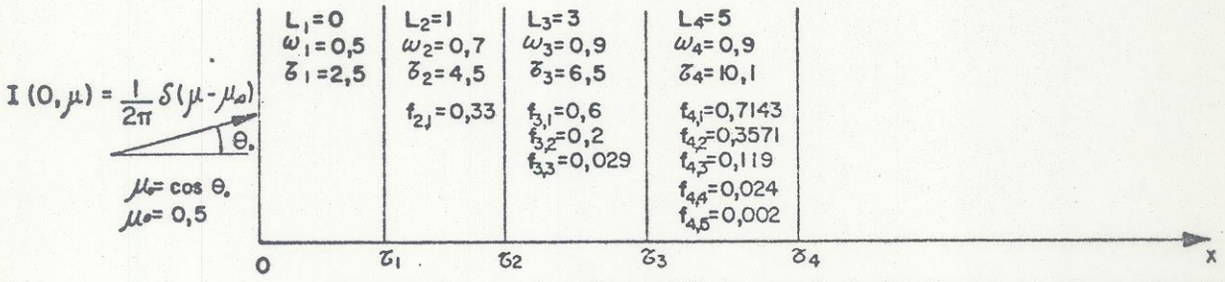
2.a. PROBLEMA 1: 1 região, espalhamento isotrópico, penetração profunda, incidência isotrópica.



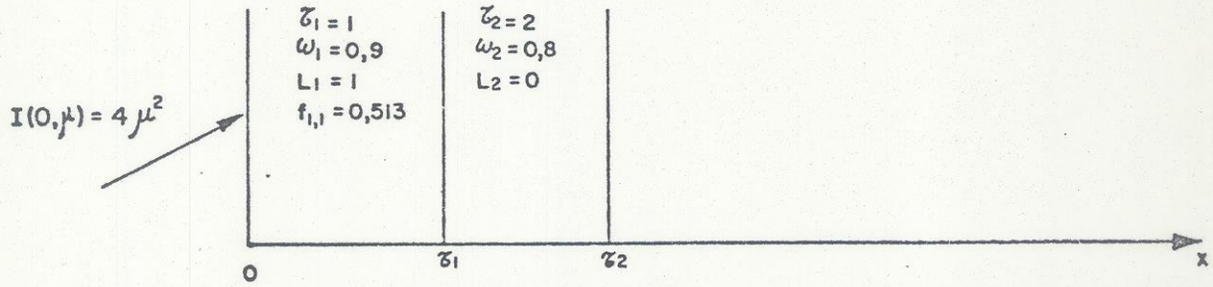
2.b. PROBLEMA 2: 6 regiões, ordem de anisotropia (8), incidência cossenoidal.



2.c. PROBLEMA 3: 2 regiões, fonte externa, espalhamento isotrópico, incidência isotrópica.



2.d. PROBLEMA 4: 4 regiões, incidência monodirecional, diferentes leis de espalhamento.



2.e. PROBLEMA 5: 2 regiões, incidência cossenoidal, comparação com resultados exatos.

Figura 2: Geometria e Parâmetros dos Problemas Amostras.