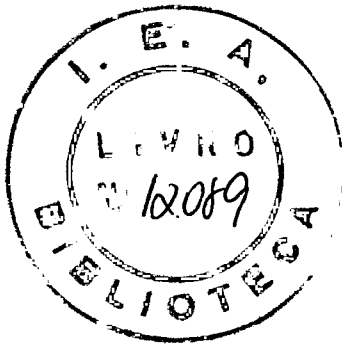


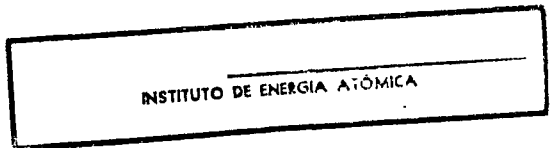
CENTRO DE PESQUISAS FÍSICAS DA
UNIVERSIDADE DO RIO GRANDE DO SUL

CONTRIBUIÇÃO À TEORIA DAS FUNÇÕES

Tese apresentada no concurso para Docência Livre
da cadeira de Matemática da Escola de Agronomia e
Veterinária da Universidade do Rio Grande do Sul



Engº. ERNESTO BRUNO COSSI



PÔRTO ALEGRE
1957

A MEUS PROFESSÔRES

OBJETIVO

Introduzimos, neste trabalho, uma condição na definição de limite de uma função e estudamos, face a essa situação, alguns teoremas da teoria dos limites, bem como constatamos que outros deixam de valer.

Estudamos, outrossim, a oscilação da função no entorno de um ponto e mostramos que se torna contínua quando são satisfeitas certas condições, entre as quais, a acima referida, o que, em geral, não ocorre quando a eliminamos.

Na conceituação de W-limite — assim foi chamado o limite satisfazendo a condição introduzida — fomos levados a trabalhar com a variável, tendendo a um ponto, para o qual existe um entorno contido no derivado do campo de existência da função, que foi chamado ponto de saturação do campo e estudado no início.

A notação que usamos é a generalizada nos livros.

Assim:

- ϵ e \notin — sinais de pertinência e não pertinência, respectivamente;
- \emptyset — conjunto vazio;
- $\{a\}$ — conjunto formado pelo elemento a ;
- $C(A)$ — complementar do conjunto A na reta;
- C' — derivado do conjunto C ;
- \dot{C} — interior de C ;
- \bar{C} — aderência de C ;
- $\{x; x \text{ satisfaz } P\}$ — conjunto cujos elementos x satisfazem a propriedade P ;
- $\text{máx}(a, b)$ e $\text{mín}(a, b)$ — maior e menor dos números a e b , respectivamente;

- \mathfrak{C} e \aleph_0 — cardinais transfinitos do contínuo e do numerável, respectivamente;
- $f(C)$ — imagem de C pela aplicação f ;
- \cup e \cap — sinais de reunião e intersecção de conjuntos, respectivamente;
- \supseteq e \subseteq — sinais de inclusão de conjuntos;
- $\not\supseteq$ e $\not\subseteq$ — sinais de não inclusão;
- \supset e \subset — sinais de inclusão própria; no caso particular de entornos suporemos que as extremidades não coincidam.

Externamos aqui, nossos agradecimentos ao Conselho Técnico-Científico do Centro de Pesquisas Físicas da Universidade do Rio Grande do Sul e a seu diretor professor Dr. Ary Nunes Tietböhl por nos haverem facilitado os meios materiais para a impressão deste trabalho.

Agosto de 1957.

PONTO DE SATURAÇÃO DE UM CONJUNTO

1. - Definição

"Dado um conjunto linear C , um ponto a será dito ponto de saturação de C , se existe um entôrno ω de a contido no derivado de C ; se ω é entôrno à direita ou à esquerda de a , o ponto será chamado de saturação à esquerda ou à direita de C , respectivamente."

Exemplos:

a) Se $C = \mathbb{R}$ ou a reta racional, qualquer ponto finito ou elemento infinito é ponto de saturação de C . Esse exemplo mostra que um ponto de saturação de um conjunto não lhe pertence necessariamente.

b) Se $C = [a, b]$ ou (a, b) , todo ponto interno a C é ponto de saturação; a e b são respectivamente pontos de saturação à esquerda e à direita, não sendo, porém, pontos de saturação.

c) Se C é o intervalo irracional $[a, b]$, todo ponto do intervalo (a, b) é ponto de saturação, valendo para a e b o que foi dito no exemplo acima.

2. - Lema

"Um conjunto admite ponto de saturação se, e somente se, o interior de seu derivado não é vazio."

Suponhamos que $\hat{C}' \neq \emptyset$, existe então ao menos um ponto a interno a C' e portanto um entôrno ω de a contido em C' e assim a é ponto de saturação. Reciprocamente, se a é ponto de saturação, existe um entôrno ω de a que está contido em C' ; se a é finito, $a \in \hat{C}'$ e $\hat{C}' \neq \emptyset$; se a é elemento infi-

nito, tomemos um ponto finito $x \in \omega$, como ω é aberto existe um entôrno α de x contido em ω e logo $x \in \alpha \subseteq \omega \subseteq C'$, donde $x \in C'$ e $C' \neq \emptyset$.

3. - Proposição

"Um conjunto admite ponto de saturação se, e sòmente se, não é não-denso."

De fato, se C não é não-denso, existe um intervalo aberto ω tal que qualquer outro intervalo aberto $I \subseteq \omega$ satisfaz a $I \cap C \neq \emptyset$. Dado $x \in \omega$ e um entôrno α qualquer de x , existe um intervalo aberto $I \subseteq \alpha \cap \omega$ tal que $x \notin I$, como $I \subseteq \omega$, existe $y \in C$ que pertence também a I , logo é diferente de x ; como $I \subseteq \alpha$, α possui um ponto $y \in C$ e distinto de x , donde $x \in C'$ e $\omega \subseteq C'$, e portanto $C' \neq \emptyset$ e pelo lema anterior, C admite ponto de saturação.

Reciprocamente, se C admite ponto de saturação, ... $C' \neq \emptyset$, logo existe $\omega \subseteq C'$ e se I é qualquer intervalo aberto contido em ω então $I \subseteq C'$ e dado $x \in I$, como $x \in C'$ e I é entôrno de x , existe em I pontos de C , donde $I \cap C \neq \emptyset$ e C não é não-denso.

4. - Ponto de saturação e ponto de acumulação

Sabemos que um ponto de acumulação à direita ou à esquerda é um ponto de acumulação; tal não acontece entretanto necessariamente com os pontos de saturação, isto é, um ponto de saturação à direita ou à esquerda não é obrigatoriamente um ponto de saturação, como vimos no exemplo b do número anterior.

Propriedade

"Todo ponto de saturação de um conjunto é ponto de acumulação do mesmo."

Seja a ponto de saturação de C ; se a é real, temos $a \in \omega \subseteq C'$, donde a é ponto de acumulação, e reparemos que a é tanto à direita como à esquerda, pois do contrário existiria num entôrno à esquerda ou à direita sem pontos de C distintos de a e a não seria ponto de saturação. Se a é elemento

infinito, dado um entôrno α qualquer de a , se $x \in \alpha \cap \omega$, vem $x \in C'$ pois $\omega \subseteq C'$, como $x \in \alpha$ e α é aberto, existe um entôrno β de x contido em α e, portanto, ao menos um $y \in C$, distinto de x pertence a β e logo a α . Existe entãõ nesse caso, em qualquer entôrno α de a , um ponto $y \in C$ e a é ponto de acumulaçãõ de C .

A recíproca dessa propriedade não é verdadeira. Por exemplo, se

$$C = \left\{ \pm \frac{1}{n}; n = 1, 2, \dots \right\}$$

o 0 é ponto de acumulaçãõ, mas não pode ser de saturaçãõ, visto que $C' = \emptyset$.

5. - Ponto de saturaçãõ e ponto de condensaçãõ

Um ponto de saturaçãõ não é, necessariamente, ponto de condensaçãõ e reciprocamente, segundo podemos ver com os exemplos abaixo:

a) Seja

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \right) \cup \left(-\frac{1}{2n-1}, -\frac{1}{2n} \right) \right];$$

vemos que 0 é ponto de condensaçãõ de C , pois dado um entôrno $\alpha = (p, q)$ qualquer de 0, sendo

$$n > \frac{1}{2 \text{ máx} (|p|, q)} + \frac{1}{2},$$

temos os intervalos

$$\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \right) \quad \text{ou} \quad \left(-\frac{1}{2n-1}, -\frac{1}{2n} \right)$$

contidos em α , visto que da condiçãõ acima vem

$$\frac{1}{2n-1} < \text{máx} (|p|, q)$$

e portanto

$$\frac{1}{2n-1} < q \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{2n-1} > p;$$

logo o cardinal de $C^{q\alpha}$ é C . Entretanto 0 não é ponto de saturação, aliás não o é nem à direita, nem à esquerda, visto que em quaisquer entornos $(p, 0]$ e $[0, q)$, para

$$n > \frac{1}{2 \max(|p|, q)},$$

os intervalos

$$\left[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n} \right] \quad e \quad \left[-\frac{1}{2n}, -\frac{1}{2n+1} \right]$$

contidos respectivamente em $[0, q)$ e $(-p, 0]$ não têm pontos de C e portanto não estão contidos em C' .

b) Seja C a reta racional; já vimos que qualquer ponto da reta é ponto de saturação, mas nenhum é ponto de condensação, pois que em todo entorno de qualquer ponto de R temos \aleph_0 pontos de C somente.

6. - Conjunto saturado de um conjunto

"O conjunto S dos pontos de saturação finitos de um conjunto C será dito saturado de C' ."

É claro que $S \subseteq C'$ e que, pelo exposto no lema do nº 2, o saturado de um conjunto coincide com o interior de seu derivado; é, portanto, aberto, vindo como consequência que se C' não é vazio, nem coincide com a reta, $S \subset C'$.

Se S não é vazio, o cardinal de S e portanto de C é \aleph_0 . O saturado de R ou da reta racional ou da irracional é R ; o saturado dos intervalos abertos ou fechados, reais, racionais ou irracionais é o intervalo aberto com as mesmas extremidades.

Observemos que não há qualquer relação geral de inclusão entre C e S . Efetivamente, se $C = [a, b]$, $C \supset S$; se C é a reta racional, $C \subset S$; se C é o intervalo racional $[a, b]$, não vale qualquer das relações: $C \supset S$, $C \subset S$, $C = S$. Entretanto se C é fechado, $C \supseteq S$, pois $C \supseteq C'$; e se ainda C não é vazio nem coincide com a reta, $C \supset S$.

7. - Proposição

"Se C é um conjunto aberto, então C está contido em seu saturado S e $S - C$ é um conjunto discreto e, portanto, finito ou enumerável."

Se C é aberto, é uma reunião finita ou enumerável de intervalos abertos I_n , limitados ou ilimitados, e disjuntos dois a dois; se $x \in C$, $x \in I_n$ para certo n e como I_n é intervalo aberto, limitado ou ilimitado, é pois um conjunto aberto e existe um entôrno ω de x contido em I_n , isto é, $x \in \omega \subseteq I_n$, mas $I_n \subseteq C'$, donde $x \in \omega \subset C'$ e $x \in S$, vindo $C \subseteq S$.

Mostremos que $S - C$ é discreto; ora, além dos pontos de C , só podem ser pontos de S os pontos da reta que separam dois intervalos I_n , isto é, pontos que são extremidades comuns a dois I_n , visto que, em primeiro lugar, se y é um desses pontos e separa I_n e I_m ,

$$I_n \cup \{y\} \cup I_m$$

é um entôrno de y contido em C' e logo $y \in S - C$; e em segundo lugar, se z não separa dois intervalos, ou é extremidade de apenas um ou é interno ao complementar de C , e em qualquer caso não pode ser ponto de saturação de C , pois não há entôrno ω de z contido em C' . Assim sendo, como $I_n \subset C$ e portanto

$$I_n \cap (S - C) = \phi,$$

temos que $S - C$ é discreto pois os pontos $y \in S - C$ serão isolados. Do exposto, concluímos também que S é um conjunto aberto cujos intervalos abertos componentes, se existir mais de um, são separados por intervalos fechados e nunca por pontos, pois

$$S = (\cup I_n) \cup \{y; y \text{ separa dois } I_n\}.$$

8. - Considerações

a) A propriedade da proposição anterior não caracteriza o saturado de um conjunto aberto, isto é, se C é aberto,

$C \subseteq T$ e $T - C$ é discreto, T não é necessariamente o saturado S de C ; basta mostrar que um fechado diferente de \emptyset e de R pode satisfazer as condições acima; é, por exemplo, o que acontece com $C = (a, b)$ e $T = [a, b]$.

b) Também aquela propriedade não caracteriza os abertos, isto é, se C está contido em seu saturado S e se $S - C$ é discreto, C não é necessariamente um aberto, como podemos ver mediante o seguinte exemplo:

Seja

$$C = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right) \cup \left(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1} \right) \right] \right) \cup \{0\};$$

C não é aberto pois $0 \in C$ e não é interno a C pois qualquer entorno α de 0 não está contido em C , visto que 0 sendo ponto de acumulação dos pontos $\pm \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, α conterá pontos desse tipo os quais não pertencem a C . Ainda $C' = [-1, 1]$ e como pelo nº 6, $S = C' = (-1, 1)$, vem então que $C \subset S$ e

$$S - C = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\left\{ \frac{1}{n} \right\} \cup \left\{ -\frac{1}{n} \right\} \right)$$

que mostra ser $S - C$ discreto. Vale, entretanto, a recíproca quando $S - C$ é discreto finito, como mostra a proposição seguinte.

9. - Proposição

"Se C está contido em seu saturado S e $S - C$ é finito, então C é aberto."

Basta ver que, estando C contido em S , $C = S - (S - C)$, e sendo S saturado de C , S é aberto, mas como $S - C$ é finito, C é obtido de um aberto, retirando-se um número finito de pontos, logo C é aberto.

10. - Proposição

"Se A é um conjunto aberto que contem C e $A - C$ é discreto, então os saturados de A e C coincidem."

É suficiente mostrar que $A' \subseteq C'$, pois é imediato que $A' \supseteq C'$ vindo então $A' = C'$ e $\tilde{A}' = \tilde{C}'$. Admitamos que um ponto x pertença a A' e não a C' ; se $x \notin C'$, existe um entôrno α de x tal que

$$(\alpha - \{x\}) \cap C = \phi.$$

Como $x \in A'$, em α existe um $y \in A$, $y \neq x$, e sendo A aberto,

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

e $y \in I_n$ para certo n . Ponhamos $J = \alpha \cap I_n$, como $J \subseteq \alpha$ temos

$$J - \{x\} \subseteq \alpha - \{x\}$$

e portanto

$$(J - \{x\}) \cap C = \phi;$$

mas $J \subseteq I_n \subseteq A$, donde $J - \{x\} \subseteq A - C$ e $A - C$ não é discreto, contrariando a hipótese.

11. - Propriedades

a) "O saturado da reunião de conjuntos contém a reunião dos saturados desses conjuntos."

Ponhamos $S(A)$ para o saturado de A ; temos pois que mostrar a inclusão

$$\bigcup_{\alpha \in \Omega} S(A_\alpha) \subseteq S\left(\bigcup_{\alpha \in \Omega} A_\alpha\right),$$

onde Ω é um conjunto de índices α .

Seja

$$x \in \bigcup_{\alpha \in \Omega} S(A_\alpha),$$

daí $x \in S(A_\alpha)$ para algum $\alpha \in \Omega$ e existe então ω tal que $x \in \omega \subseteq A'_\alpha$, como

$$A_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Omega} A_\alpha$$

vem

$$A'_\alpha \subseteq \left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \right)', \quad \text{donde} \quad x \in \omega \subseteq \left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \right)'$$

e portanto

$$x \in S\left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \right).$$

b) "O saturado da intersecção de conjuntos está contido na intersecção dos saturados desses conjuntos."

Devemos mostrar que

$$S\left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \right) \subseteq \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} S(A_\alpha).$$

Seja

$$x \in S\left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \right), \quad \text{então} \quad x \in \omega \subseteq \left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \right)',$$

mas

$$\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} A \subseteq A_\alpha$$

para qualquer $\alpha \in \mathcal{A}$, logo

$$\left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} A \right)' \subseteq A'_\alpha,$$

donde $x \in \omega \subseteq A'_\alpha$, $x \in S(A_\alpha)$ e

$$x \in \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} S(A_\alpha).$$

c) "O saturado do saturado de um conjunto A está contido no saturado de A e coincide com esse, se A é aberto."

Para a primeira parte, basta observarmos que, pelo nº 6, $S(A)$ é aberto e pela proposição do nº 8, $S(A) \subseteq S(S(A))$. A segunda parte vem como consequência do exposto no mesmo número: se A é aberto $S(A)$ é uma reunião finita ou enumerável de intervalos abertos finitos ou infinitos separados por intervalos fechados e, portanto, só podem ser pontos de $S(S(A))$ os pontos de $S(A)$, isto é, $S(S(A)) \subseteq S(A)$, donde $S(S(A)) = S(A)$. Podemos, pois, ainda dizer que para A qualquer

$$S^{(n)}(A) = S^{(2)}(A)$$

se $n \geq 3$.

d) "Os saturados de dois conjuntos seguem a inclusão dos mesmos, se essa existir."

Se $A \subseteq B$ e se $x \in S(A)$ então $x \in \omega \subseteq A'$, mas $A' \subseteq B'$ donde $x \in \omega \subseteq B'$ e portanto $x \in S(B)$, isto é, $S(A) \subseteq S(B)$.

12. - Considerações

a) Na propriedade a) do número anterior não vale necessariamente a igualdade, como vemos pelo seguinte exemplo:

Sejam $A = (a, b)$ e $B = (b, c)$, então

$$S(A) = (a, b) \quad , \quad S(B) = (b, c)$$

e

$$S(A) \cup S(B) = (a, c) - \{b\};$$

ainda

$$A \cup B = (a, c) - \{b\} \quad e \quad S(A \cup B) = (a, c),$$

donde

$$S(A) \cup S(B) \neq S(A \cup B).$$

b) Na propriedade b) também nem sempre vale a igualdade:

Seja A o conjunto dos racionais e B o dos irracionais, temos $S(A) = \mathbb{R}$ e $S(B) = \mathbb{R}$, donde

$$S(A) \cap S(B) = \mathbb{R};$$

mas

$$A \cap B = \emptyset \quad e \quad S(A \cap B) = \emptyset,$$

que dá

$$S(A \cap B) \neq S(A) \cap S(B).$$

c) Na propriedade c) vimos que se A é aberto, $S(S(A)) = S(A)$, entretanto não é necessário que A seja aberto para que se verifique essa igualdade, isto é, essa igualdade não implica que A seja aberto, como mostra o seguinte caso:

Seja $A = (a, b]$, A não é aberto, $S(A) = (a, b)$,
 $S(S(A)) = (a, b)$ vindo $S(S(A)) = S(A)$.

d) Não há qualquer relação geral de inclusão entre o complementar do saturado de um conjunto e o saturado do complementar do mesmo. Vamos apresentar dois exemplos com inclusões opostas.

1) Seja $A = (a, b)$, então
 $C(A) = (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$

e

$$S(C(A)) = (-\infty, a) \cup (b, +\infty);$$

e

$S(A) = (a, b)$ vindo $C(S(A)) = (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$,
que mostra

$$S(C(A)) \subset C(S(A)).$$

2) Seja A o conjunto dos racionais, então $S(A) = \mathbb{R}$
e $C(S(A)) = \emptyset$; e $C(A)$ é o conjunto dos irracionais vindo
 $S(C(A)) = \mathbb{R}$ donde $C(S(A)) \subset S(C(A))$.

W-LIMITE DE UMA FUNÇÃO

13. - Definição

"Dada uma função $f(x)$ real da variável real, definida num campo C do qual a é ponto de saturação, diremos que b é o W-limite da $f(x)$ quando x tende para a e indicaremos por

$$b = W \lim_{x \rightarrow a} f(x),$$

se existe um entorno β_0 de b tal que, a qualquer par (γ, β) de entornos de b satisfazendo a inclusão $\gamma \subset \beta \subseteq \beta_0$, corresponda um conveniente par (ν, α) de entornos de a que satisfaçam as condições:

- 1ª) $\nu \subset \alpha \subseteq C$;
2ª) $f(C \cap (\alpha - \{a\})) \subseteq \beta$;
3ª) $f(C \cap (\alpha - \bar{\nu})) \subseteq \beta - \bar{\gamma}$."

Vemos, pois, que quando existe o W-limite, também existe o limite e são iguais; portanto, se o W-limite existe e é finito, é único.

Podemos empregar numa técnica análoga a dos "positivos" fazendo as correspondentes adaptações. Assim se b é finito, podemos substituir β_0 pelo par $(\mathcal{E}'_0, \mathcal{E}''_0)$ com $\mathcal{E}'_0 > 0$ e $\mathcal{E}''_0 > 0$ tais que

$$\beta_0 = (b - \mathcal{E}'_0, b + \mathcal{E}''_0);$$

o par (γ, β) pelos pares $(\mathcal{G}', \mathcal{E}')$ e $(\mathcal{G}'', \mathcal{E}'')$ com

$$0 < \mathcal{G}' < \mathcal{E}' \leq \mathcal{E}'_0 \quad \text{e} \quad 0 < \mathcal{G}'' < \mathcal{E}'' \leq \mathcal{E}''_0,$$

tais que

$$\gamma = (b - \mathcal{G}', b + \mathcal{G}'') \quad \text{e} \quad \beta = (b - \mathcal{E}', b + \mathcal{E}'');$$

se b é ∞ , podemos substituir β_0 por $(\mathcal{E}'_0, \mathcal{E}''_0)$ com $\mathcal{E}'_0 < \mathcal{E}''_0$

tais que

$$\beta_0 = (-\infty, \varepsilon'_0) \cup (\varepsilon''_0, +\infty)$$

e o par (γ, β) pelos pares (ζ', ε') e (ζ'', ε'') com
 $\zeta' < \varepsilon' \leq \varepsilon'_0$ e $\zeta'' > \varepsilon'' \geq \varepsilon''_0$

tais que

$$\gamma = (-\infty, \zeta') \cup (\zeta'', +\infty) \quad \text{e} \quad \beta = (-\infty, \varepsilon') \cup (\varepsilon'', +\infty);$$

se $b = +\infty$ ou $-\infty$, basta um ε_0 tal que

$$\beta_0 = (\varepsilon_0, +\infty) \quad \text{ou} \quad \beta_0 = (-\infty, \varepsilon_0)$$

respectivamente e para (γ, β) bastam ζ e ε com

$$\varepsilon_0 \leq \varepsilon < \zeta \quad \text{ou} \quad \varepsilon_0 \geq \varepsilon > \zeta$$

respectivamente e tais que

$$\gamma = (\zeta, +\infty) \quad \text{e} \quad \beta = (\varepsilon, +\infty)$$

ou

$$\gamma = (-\infty, \zeta) \quad \text{e} \quad \beta = (-\infty, \varepsilon)$$

respectivamente; se a é finito, substituímos o par (ν, α) pe
los pares (ζ', δ') e (ζ'', δ'') com

$$0 < \zeta' < \delta' \quad \text{e} \quad 0 < \zeta'' < \delta''$$

tais que

$$\alpha = (a - \delta', a + \delta'') \quad \text{e} \quad \nu = (a - \zeta', a + \zeta'');$$

se a é ∞ , (ν, α) é substituído por (ζ', δ') e (ζ'', δ'') ,
 $\zeta' < \delta'$ e $\zeta'' > \delta''$ tais que

$$\alpha = (-\infty, \delta') \cup (\delta'', +\infty) \quad \text{e} \quad \nu = (-\infty, \zeta') \cup (\zeta'', +\infty);$$

se a é $+\infty$ ou $-\infty$, basta o par (ζ, δ) com $\delta < \zeta$ ou $\delta > \zeta$
respectivamente, tais que

$$\alpha = (\delta, +\infty) \quad \text{e} \quad \nu = (\zeta, +\infty)$$

ou

$$\alpha = (-\infty, \delta) \quad \text{e} \quad \nu = (-\infty, \zeta)$$

respectivamente.

14. - Exemplos e contra-exemplos

a) Seja $f(x) = x^2$, definida em \mathbb{R} da qual 1 é ponto de saturação. Tomemos $\mathcal{E}'_0 = \mathcal{E}''_0 = 1$; dados os pares $(\mathcal{G}', \mathcal{E}')$ e $(\mathcal{G}'', \mathcal{E}'')$ com

$$0 < \mathcal{G}' < \mathcal{E}' \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 < \mathcal{G}'' < \mathcal{E}'' \leq 1,$$

vemos que para

$$x \in \alpha = (\sqrt{1 - \mathcal{G}'}, \sqrt{1 + \mathcal{E}''})$$

temos

$$1 - \mathcal{E}' < f(x) < 1 + \mathcal{E}'' \quad \text{ou} \quad f(x) \in \beta$$

e para $x \in \alpha - \bar{\nu}$, sendo

$$\bar{\nu} = (\sqrt{1 - \mathcal{G}'}, \sqrt{1 + \mathcal{G}''}),$$

temos $f(x) > 1 + \mathcal{G}''$ ou $f(x) < 1 - \mathcal{G}'$ e portanto $f(x) \in \beta - \bar{\nu}$. Logo

$$\text{W } \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1.$$

b) Seja

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

definida na semi-reta positiva da qual $+\infty$ é ponto de saturação. Vamos mostrar que

$$\text{W } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1;$$

como $f(x) > 1$ no campo considerado, basta tomarmos um: $\mathcal{E}'_0 > 0$ e um par qualquer $(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ com $0 < \mathcal{G} < \mathcal{E} \leq \mathcal{E}'_0$; para

$$x \in \alpha = \left(\frac{1}{\mathcal{E}}, +\infty\right),$$

temos $f(x) < 1 + \mathcal{E}$, donde $f(x) \in \beta$ e para $x \in \alpha - \bar{\nu}$, sendo $\bar{\nu} = \left(\frac{1}{\mathcal{G}}, +\infty\right)$ temos $f(x) > 1 + \mathcal{G}$, donde $f(x) \in \beta - \bar{\nu}$.

c) Seja

$$f(x) = \frac{1}{|x|}$$

definida nas semi-retas positiva e negativa de que 0 é ponto de saturação. Temos

$$W \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty,$$

pois tomando um $\mathcal{E}_0 > 0$, qualquer que seja o par $(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ com $\mathcal{E}_0 \leq \mathcal{E} < \mathcal{G}$, vemos que para $x \in (\alpha - \{0\})$, onde

$$\alpha = \left(-\frac{1}{\mathcal{E}}, \frac{1}{\mathcal{E}}\right)$$

temos $f(x) > \mathcal{E}$, donde $f(x) \in \beta$ e para $x \in \alpha - \bar{v}$, onde

$$v = \left(-\frac{1}{\mathcal{G}}, \frac{1}{\mathcal{G}}\right)$$

temos $f(x) < \mathcal{G}$, donde $f(x) \in \beta - \bar{\delta}$.

d) Qualquer função cujo limite não existe quando x tende para a , ponto de saturação do campo de definição, é exemplo de função cujo W-limite não existe.

e) A função constante definida na reta admite limite em qualquer ponto, finito ou infinito, mas não admite W-limite.

f) Seja a função $f(x)$ assim definida em $(-1, 1)$:

$$f(x) = \frac{1}{n+1}, \quad \text{para } x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right),$$

$n = 1, 2, \dots$; $f(0) = 0$ e $f(x) = f(-x)$ para $-1 < x < 0$. É, pois, uma função não negativa. Temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0,$$

pois dado $\mathcal{E} > 0$, para

$$x \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \quad \text{com } n > \frac{1}{\mathcal{E}},$$

se $x > 0$, existe um inteiro m tal que

$$\frac{1}{m+1} \leq x < \frac{1}{m},$$

com $m \geq n$, donde

$$f(x) = \frac{1}{m+1} < \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$

e se $x < 0$, $-x > 0$ e $-x < \frac{1}{n}$ vindo $f(-x) < \varepsilon$, mas
 $f(x) = f(-x)$, donde $f(x) < \varepsilon$ e logo

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Veamos agora que o W -limite não existe quando x tende para 0; basta mostrar que não pode ser 0. Com efeito, tomemos qualquer

$$0 < \varepsilon_0 \leq \frac{1}{2}$$

e seja qualquer $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$; seja n o maior inteiro tal que

$$\varepsilon \leq \frac{1}{n},$$

n é pois maior ou igual a 2, tomando-se agora

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon < \varepsilon,$$

vemos que para o par $(\varepsilon, \varepsilon)$ não existe $x > 0$ tal que
 $\varepsilon < f(x) < \varepsilon$, isto é, tal que $f(x) \in \beta - \bar{\beta}$, pois para termos $f(x) < \varepsilon$, x deve ser menor que $\frac{1}{n}$, visto que se

$$x \geq \frac{1}{n}, \quad x \in \left[\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m} \right)$$

com $m+1 \leq n$, o que dá

$$f(x) = \frac{1}{m+1} \geq \frac{1}{n} \geq \varepsilon.$$

Então se $x < \frac{1}{n}$, pelo que vimos acima

$$f(x) = \frac{1}{m+1}$$

com $m \geq n$, logo

$$f(x) \leq \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

e portanto o W -limite não existe quando x tende para 0. Não foi preciso considerarmos $x < 0$ devido à simetria da função: $f(x) = f(-x)$; também só usamos um ε_0 pois $f(x) \geq 0$.

15. - Considerações

a) Na definição de W-limite não usamos entornos simétricos, não para expressar-nos em linguagem mais geral, mas porque perderíamos funções bastante comuns, como x^2 por exemplo, quanto à existência do W-limite.

Vejamos o caso de x^2 quando x tende para 1. Empregando a técnica dos "positivos" deveremos ter para um par qualquer (ϵ, δ) com $0 < \epsilon < \delta \leq \epsilon_0 \leq 1$ um par (ζ, δ') com $0 < \zeta < \delta'$, tal que para $|x - 1| < \delta'$ tenhamos

$$|x^2 - 1| < \epsilon$$

e para $\zeta < |x - 1| < \delta'$,

$$|x^2 - 1| > \epsilon.$$

Temos porém

$$\epsilon < |x^2 - 1| < \epsilon,$$

só para

$$\sqrt{1 + \epsilon} < x < \sqrt{1 + \epsilon}$$

se $x > 1$, e para

$$\sqrt{1 - \epsilon} < x < \sqrt{1 - \epsilon}$$

se $x < 1$, portanto ζ e δ' deverão satisfazer as relações:

$$\delta' \leq \min(\sqrt{1 + \epsilon} - 1, 1 - \sqrt{1 - \epsilon})$$

e

$$\zeta \geq \max(\sqrt{1 + \epsilon} - 1, 1 - \sqrt{1 - \epsilon}).$$

Como

$$\min(\sqrt{1 + \epsilon} - 1, 1 - \sqrt{1 - \epsilon}) = \sqrt{1 + \epsilon} - 1$$

e

$$\max(\sqrt{1 + \epsilon} - 1, 1 - \sqrt{1 - \epsilon}) = 1 - \sqrt{1 - \epsilon},$$

a questão reduz-se à compatibilidade das relações:

$$\delta' \leq \sqrt{1 + \epsilon} - 1 \tag{1},$$

$$\zeta \geq 1 - \sqrt{1 - \epsilon} \tag{2},$$

$$0 < \delta < \delta \quad (3)$$

e

$$0 < \epsilon < \epsilon = 1 \quad (4).$$

De (1), (2) e (3) vem

$$1 - \sqrt{1 - \epsilon} < \sqrt{1 + \epsilon} - 1,$$

donde, desenvolvendo,

$$\epsilon^2 + 2(4 + \epsilon)\epsilon + \epsilon^2 - 8\epsilon < 0,$$

valendo essa desigualdade no caso só para

$$0 < \epsilon < 4\sqrt{1 + \epsilon} - 4 - \epsilon \quad (5).$$

Sendo entretanto neste caso

$$4\sqrt{1 + \epsilon} - 4 - \epsilon < \epsilon,$$

a desigualdade (5) contraria a (4), pois ϵ pode assumir qualquer valor positivo menor que ϵ .

b) Ainda na definição de W-limite usamos um entorno β_0 e tomamos sempre entornos contidos em β_0 , a fim de não serem excluídas todas as funções limitadas..

16. - W-limite sobre conjunto parcial

Assim como falamos em limite sobre conjunto parcial, podemos falar em W-limite sobre conjunto parcial $C_1 \subset C$, desde que o ponto a continue ponto de saturação de C_1 e para x variando em C_1 as condições impostas na definição de W-limite sejam satisfeitas. Usaremos a notação

$$b = W \lim_{x \rightarrow a (C_1)} f(x).$$

Na teoria dos limites é conhecido o teorema que diz: «se C é esgotado em dois conjuntos C_1 e C_2 , excetuado eventualmente o ponto a , ponto de acumulação de C , se a continua ponto de acumulação de C_1 e C_2 e se os limites sobre C_1 e C_2 existem e são iguais, então o limite existe e coincide com o limite comum sobre os dois conjuntos parciais»; no exemplo a seguir vamos mostrar que isso não subsiste se substituirmos,

nó enunciado acima, a palavra limite por W-limite e ponto de acumulação por ponto de saturação.

Seja a função não negativa definida em \mathbb{R} do seguinte modo: $f(x) = a_1|x|$ para x racional e $f(x) = a_2|x|$ para x irracional, sendo $0 < a_1 < a_2$. Chamando C_1 e C_2 respectivamente o conjunto dos racionais e dos irracionais, temos que 0 é ponto de saturação de C_1 e C_2 e que êsses conjuntos esgotam \mathbb{R} . É fácil ver que

$$W \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad W \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0,$$

$(C_1) \qquad \qquad \qquad (C_2)$

pois sôbre C_1 , por exemplo, tomado um $\varepsilon_0 > 0$, e dado um par qualquer (σ, ε) com $0 < \sigma < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, para

$$x \in \alpha = \left(-\frac{\varepsilon}{a_1}, \frac{\varepsilon}{a_1}\right)$$

vem

$$|x| < \frac{\varepsilon}{a_1} \quad \text{e} \quad f(x) < \varepsilon$$

e para $x \in \alpha - \sqrt{\quad}$ onde

$$\sqrt{\quad} = \left(-\frac{\sigma}{a_1}, \frac{\sigma}{a_1}\right),$$

e sempre sôbre C_1 , vem

$$|x| > \frac{\sigma}{a_1} \quad \text{e} \quad f(x) > \sigma;$$

de modo análogo procedemos para o segundo W-limite sôbre C_2 .

Vamos ver, agora, que o W-limite, quando x tende para 0 não existe, apesar de existirem os W-limites sôbre C_1 e C_2 e serem iguais; bastará mostrar que o mesmo não é 0 , pois das duas últimas igualdades acima concluímos que o limite é 0 . Seja tomado qualquer $\varepsilon_0 > 0$ e seja (σ, ε) qualquer par com $0 < \sigma < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Em qualquer entorno μ de 0 ,

$$\mu \notin \left(-\frac{\varepsilon}{a_2}, \frac{\varepsilon}{a_2}\right), \quad \text{existe um irracional} \quad x_2 \in \mu - \left(-\frac{\varepsilon}{a_2}, \frac{\varepsilon}{a_2}\right)$$

$$\text{e portanto} \quad |x_2| > \frac{\varepsilon}{a_2} \quad \text{ou} \quad f(x) > \varepsilon,$$

logo $\alpha \subseteq (-\frac{\epsilon}{a_2}, \frac{\epsilon}{a_2})$.

Para qualquer entorno ρ de 0,

$\rho \not\subseteq (-\frac{\epsilon}{a_1}, \frac{\epsilon}{a_1})$, temos um racional $x_1 \in (-\frac{\epsilon}{a_1}, \frac{\epsilon}{a_1}) - \rho$

e portanto $|x_1| < \frac{\epsilon}{a_1}$ ou $f(x_1) < \epsilon$, logo

$$\rho \supseteq (-\frac{\epsilon}{a_1}, \frac{\epsilon}{a_1}).$$

Como α deve conter ρ , devemos ter

$$\frac{\epsilon}{a_1} < \frac{\epsilon}{a_2} \quad \text{ou} \quad \epsilon < \frac{a_1}{a_2} \epsilon,$$

mas sendo $\frac{a_1}{a_2} \epsilon < \epsilon$,

vemos que para um par (ϵ, ϵ) com $\frac{a_1}{a_2} \epsilon \leq \epsilon < \epsilon$

não existem os entornos α e ρ satisfazendo as condições para a existência do W-limite, logo o W-limite não existe.

Veremos a seguir que o teorema acima citado vale quando são impostas certas condições, mas, para isso, vamos previamente estabelecer os seguintes resultados.

17. - Lema

"Se $\tau_1 < \sigma_1$, $\tau_2 < \sigma_2$ e

$$\max(\tau_1, \tau_2) < \min(\sigma_1, \sigma_2),$$

então

$$(\tau_1, \sigma_1) \cap (\tau_2, \sigma_2) = (\max(\tau_1, \tau_2), \min(\sigma_1, \sigma_2))."$$

É fácil ver que um ponto

$$x \in (\max(\tau_1, \tau_2), \min(\sigma_1, \sigma_2))$$

pertence à intersecção, pois

$$\max(\tau_1, \tau_2) < x < \min(\sigma_1, \sigma_2)$$

donde, por ser

$$\zeta_1 \leq \max(\zeta_1, \zeta_2) \quad , \quad \zeta_2 \leq \max(\zeta_1, \zeta_2),$$

$$\delta_1 \geq \min(\delta_1, \delta_2) \quad e \quad \delta_2 \geq \min(\delta_1, \delta_2),$$

vem

$$\zeta_1 < x < \delta_1 \quad e \quad \zeta_2 < x < \delta_2,$$

donde

$$x \in (\zeta_1, \delta_1) \quad e \quad x \in (\zeta_2, \delta_2)$$

e

$$x \in (\zeta_1, \delta_1) \cap (\zeta_2, \delta_2).$$

Recíprocamente se

$$x \in (\zeta_1, \delta_1) \cap (\zeta_2, \delta_2),$$

vem

$$\zeta_1 < x < \delta_1 \quad e \quad \zeta_2 < x < \delta_2,$$

donde

$$\max(\zeta_1, \zeta_2) < x < \min(\delta_1, \delta_2)$$

e

$$x \in (\max(\zeta_1, \zeta_2), \min(\delta_1, \delta_2)).$$

18. - Lema

"São válidas as seguintes igualdades:

$$\min(-a, -b) = -\max(a, b);$$

$$\max(-a, -b) = -\min(a, b);$$

$$\min(a + c, a + b) = a + \min(c, b)$$

e

$$\max(a + c, a + b) = a + \max(c, b)."$$

a) Seja

$$\min(-a, -b) = -a,$$

então $-a \leq -b$ e $a \geq b$ donde

$$\text{máx}(a, b) = a \quad \text{e} \quad \text{mín}(-a, -b) = -\text{máx}(a, b).$$

Se

$$\text{mín}(-a, -b) = -b,$$

reduz-se ao mesmo caso por simetria.

b) Aplicando o resultado obtido acima a $-a$ e $-b$ vem,

$$\text{mín}(a, b) = -\text{máx}(-a, -b),$$

donde

$$\text{máx}(-a, -b) = -\text{mín}(a, b).$$

c) Seja

$$\text{mín}(c, b) = c,$$

então $c \leq b$, donde $a + c \leq a + b$ e

$$\text{mín}(a + c, a + b) = a + c$$

ou

$$\text{mín}(a + c, a + b) = a + \text{mín}(c, b).$$

Se

$$\text{mín}(c, b) = b,$$

resolve-se por simetria.

d) Aplicando os resultados anteriores podemos escrever

$$\begin{aligned} -\text{máx}(a + c, a + b) &= \text{mín}(-a - c, -a - b) = \\ &= -a + \text{mín}(-c, -b) = -a - \text{máx}(c, b), \end{aligned}$$

donde

$$\text{máx}(a + c, a + b) = a + \text{máx}(c, b).$$

19. - Lema

"Se $\sigma_1 < \delta_1$, $\sigma_2 < \delta_2$ e

$$\text{máx}(\sigma_1, \sigma_2) < \text{mín}(\delta_1, \delta_2),$$

então

$$(-d_1, -e_1) \cap (-d_2, -e_2) = (-\min(d_1, d_2), -\max(e_1, e_2))."$$

Com efeito, recaímos na proposição do nº 17, pois $e_1 < d_1$, $e_2 < d_2$ e

$$\max(e_1, e_2) < \min(d_1, d_2)$$

dão

$$-d_1 < -e_1 \quad , \quad -d_2 < -e_2$$

e

$$\max(-d_1, -d_2) = -\min(d_1, d_2) < -\max(e_1, e_2) = \min(-e_1, -e_2).$$

20. - Lema

"Se $e_1 < d_1$, $e_2 < d_2$ e

$$\max(e_1, e_2) < \min(d_1, d_2),$$

então para qualquer a valem as igualdades

$$(a + e_1, a + d_1) \cap (a + e_2, a + d_2) = \\ = (a + \max(e_1, e_2), a + \min(d_1, d_2))$$

e

$$(a - d_1, a - e_1) \cap (a - d_2, a - e_2) = \\ = (a - \min(d_1, d_2), a - \max(e_1, e_2))."$$

Basta ver primeiro, que

$$a + e_1 < a + d_1 \quad , \quad a + e_2 < a + d_2$$

e

$$\max(a + e_1, a + e_2) < \min(a + d_1, a + d_2)$$

donde

$$(a + e_1, a + d_1) \cap (a + e_2, a + d_2) = \\ = (\max(a + e_1, a + e_2), \min(a + d_1, a + d_2)) = \\ = (a + \max(e_1, e_2), a + \min(d_1, d_2));$$

e em segundo lugar

$$a - d_1 < a - c_1 \quad , \quad a - d_2 < a - c_2,$$

vindo de

$$\max(c_1, c_2) < \min(d_1, d_2),$$

como antes,

$$\max(-d_1, -d_2) < \min(-c_1, -c_2),$$

donde

$$\max(a - d_1, a - d_2) < \min(a - c_1, a - c_2)$$

e portanto

$$\begin{aligned} (a - d_1, a - c_1) \cap (a - d_2, a - c_2) &= \\ &= (\max(a - d_1, a - d_2), \min(a - c_1, a - c_2)) = \\ &= (a + \max(-d_1, -d_2), a + \min(-c_1, -c_2)) = \\ &= (a - \min(d_1, d_2), a - \max(c_1, c_2)). \end{aligned}$$

21. - Proposição

"Se C_1 e C_2 esgotam um conjunto linear, excetuado eventualmente um ponto a de saturação de C_1 e C_2 , se os W-limites de uma função $f(x)$ sobre C_1 e C_2 quando x tende para a existem e são iguais a b e se para qualquer par (γ, β) de entornos de b , com

$$\gamma \subset \beta \subseteq \beta_0 \subseteq \beta_0(C_1) \cap \beta_0(C_2),$$

os pares (c_1', d_1') e (c_1'', d_1'') correspondentes ao W-limite sobre C_1 e os pares (c_2', d_2') e (c_2'', d_2'') correspondentes ao W-limite sobre C_2 podem resultar tais que

$$\max(c_1', c_2') < \min(d_1', d_2')$$

e

$$\max(c_1'', c_2'') < \min(d_1'', d_2''),$$

então o W-limite da $f(x)$ quando x tende para a existe e é igual ao W-limite comum b sobre os conjuntos parciais."

Com efeito, dado um par (γ, β) de entornos de b com

$$\gamma \subset \beta \subseteq \beta_0 \subseteq \beta_0(C_1) \cap \beta_0(C_2),$$

como $\beta \subset \beta_0(C_1)$, para

$$x \in C_1 \cap (\alpha_1 - \{a\}), \quad \text{onde} \quad \alpha_1 = (a - \delta_1', a + \delta_1''),$$

vem $f(x) \in \beta$ e para

$$x \in C_1 \cap (\alpha_1 - \bar{V}_1), \quad \text{onde} \quad V_1 = (a - \zeta_1', a + \zeta_1''),$$

vem $f(x) \in \beta - \bar{f}$; também como $\beta \subset \beta_0(C_2)$, para

$$x \in C_2 \cap (\alpha_2 - \{a\}), \quad \text{onde} \quad \alpha_2 = (a - \delta_2', a + \delta_2''),$$

vem $f(x) \in \beta$ e para

$$x \in C_2 \cap (\alpha_2 - \bar{V}_2), \quad \text{onde} \quad V_2 = (a - \zeta_2', a + \zeta_2''),$$

vem $f(x) \in \beta - \bar{f}$. Devido ao último lema temos

$$\begin{aligned} (a + \zeta_1'', a + \delta_1'') \cap (a + \zeta_2'', a + \delta_2'') &= \\ &= (a + \max(\zeta_1'', \zeta_2''), a + \min(\delta_1'', \delta_2'')) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e \\ (a - \delta_1', a - \zeta_1') \cap (a - \delta_2', a - \zeta_2') &= \\ &= (a - \min(\delta_1', \delta_2'), a - \max(\zeta_1', \zeta_2')) \end{aligned}$$

e pondo

$$\alpha = (a - \min(\delta_1', \delta_2'), a + \min(\delta_1'', \delta_2'')),$$

$$V = (a - \max(\zeta_1', \zeta_2'), a + \max(\zeta_1'', \zeta_2''))$$

vemos que $\alpha \subseteq \alpha_1$, pois se $z \in \alpha$,

$$a - \min(\delta_1', \delta_2') < z < a + \min(\delta_1'', \delta_2'')$$

donde

$$a - \delta_1' < z < a + \delta_1''$$

ou seja $z \in \alpha_1$; análogamente mostraríamos que $\alpha \subseteq \alpha_2$. Pa
ra

$$x \in C \cap (\alpha - \{a\})$$

vem $x \in C$, $x \in \alpha$ e $x \neq a$, mas como C_1 e C_2 esgotam C , x pertence ao menos a C_1 ou C_2 ; digamos $x \in C_1$ e como $\alpha \subseteq \alpha_1$, vem

$$x \in C_1 \cap (\alpha_1 - \{a\})$$

donde $f(x) \in \beta$, análogo é o raciocínio se $x \in C_2$. Mostremos agora que $V_1 \subseteq V$; se $z \in V_1$ então

$$a - \varepsilon_1' < z < a + \varepsilon_1'',$$

donde

$$a - \max(\varepsilon_1', \varepsilon_2') < z < a + \max(\varepsilon_1'', \varepsilon_2'')$$

ou seja $z \in V$; análogamente mostraríamos que $V_2 \subseteq V$. Para

$$x \in C \cap (\alpha - \bar{v})$$

vem $x \in C$, $x \in \alpha$ e $x \notin \bar{v}$ donde x pertence ao menos a C_1 ou C_2 , x pertence a α_1 e a α_2 e não pertence nem a \bar{v}_1 nem a \bar{v}_2 , pois de $V_1 \subseteq V$ e $V_2 \subseteq V$ vem $\bar{v}_1 \subseteq \bar{v}$ e $\bar{v}_2 \subseteq \bar{v}$ respectivamente; logo x pertence ao menos a um dos conjuntos

$$C_1 \cap (\alpha_1 - \bar{v}_1) \quad \text{ou} \quad C_2 \cap (\alpha_2 - \bar{v}_2)$$

e logo $f(x) \in \beta - \bar{v}$. Portanto

$$b = W \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

22. - Existência de funções que satisfazem as condições da proposição anterior

Vamos construir uma função $f(x)$ definindo-a em \mathbb{R} do seguinte modo:

$$f(x) = x \quad \text{para} \quad 0 \leq x \neq \frac{1}{n},$$

$$n = 1, 2, \dots, \quad , \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n}$$

e

$$f(x) = f(-x) \quad \text{para} \quad x < 0;$$

$f(x)$ é pois não negativa. Representemos por C_1 e C_2 respectivamente as retas racional e irracional. Dados um ε_0 , no caso qualquer, e um par (σ, ε) , com $0 < \sigma < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, temos sobre C_2 , para

$$0 < |x| < \varepsilon \quad , \quad f(x) < \varepsilon$$

e para

$$\delta < |x| < \epsilon, \quad \delta < f(x) < \epsilon,$$

donde podemos tomar $\delta_2 = \delta$, $\delta_2 = \epsilon$ e dizer que

$$\forall \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Sobre C_1 , para $0 < |x| < \epsilon$ temos $f(x) < \epsilon$ e para

$$\max(\delta, \frac{1}{m}) < |x| < \epsilon,$$

onde m é o menor inteiro tal que $\frac{1}{m} < \epsilon$, temos

$$\max(\delta, \frac{1}{m}) < f(x) < \epsilon$$

e portanto $\delta < f(x) < \epsilon$, donde podemos tomar

$$\delta_1 = \max(\delta, \frac{1}{m})$$

e $\delta_1 = \epsilon$ e dizer que

$$\forall \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Mostremos que fica satisfeita a desigualdade do teorema anterior: ora

$$\max(\delta_1, \delta_2) = \max(\delta, \frac{1}{m}), \quad \min(\delta_1, \delta_2) = \delta$$

e então

$$\max(\delta_1, \delta_2) < \min(\delta_1, \delta_2)$$

e podemos concluir pela proposição anterior que

$$\forall \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

23. - W-limites à direita e à esquerda

Se a for ponto de saturação à direita (à esquerda) de C podemos conceituar W-limite à esquerda (à direita), apenas tomando entornos φ e α à esquerda (à direita) de a e exigindo que fiquem satisfeitas as condições do nº 13. Indicaremos tal W-limite por

$$W \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \left(W \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right).$$

É claro que, se a é ponto de saturação e

$$W \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

também são iguais a b os W -limites à esquerda e à direita, pois basta respectivamente tomarmos os entornos

$$\alpha' = \alpha \cap (-\infty, a] \quad , \quad \varphi' = \varphi \cap (-\infty, a]$$

e

$$\alpha'' = \alpha \cap (a, +\infty) \quad , \quad \varphi'' = \varphi \cap [a, +\infty)$$

para satisfazermos as condições.

Recíproca

"Se

$$W \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = W \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b,$$

então

$$W \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b."$$

De fato, a é ponto de saturação pois o é à direita e à esquerda e seja

$$\beta_a = \beta_{01} \cap \beta_{02},$$

onde β_{01} e β_{02} são os entornos iniciais de b correspondentes aos W -limites à esquerda e à direita, e seja (γ, β) qualquer par de entornos de b tais que $\gamma \subset \beta \subseteq \beta_a$. Como

$$\gamma \subset \beta \subseteq \beta_{01} \quad \text{e} \quad \gamma \subset \beta \subseteq \beta_{02},$$

existem respectivamente os pares (γ_1, α_1) e (γ_2, α_2) de entornos à esquerda e à direita de a , tais que

$$\gamma_1 \subset \alpha_1 \subseteq C' \quad , \quad \gamma_2 \subset \alpha_2 \subseteq C',$$

$f(x) \in \beta$ para

$$x \in C \cap (\alpha_1 - \{a\}) \quad \text{e para} \quad x \in C \cap (\alpha_2 - \{a\}),$$

e $f(x) \in \beta - \bar{\beta}$ para,
 $x \in C \cap (\alpha_1 - \bar{v}_1)$ e $x \in C \cap (\alpha_2 - \bar{v}_2)$.

Pondo agora

$$\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2 \quad \text{e} \quad \mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2,$$

temos que α e \mathcal{V} são entornos de a e satisfazem a

1º) $\mathcal{V} \subset \alpha \subseteq C'$;

2º) $f(x) \in \beta$ para $x \in C \cap (\alpha - \{a\})$,

pois sendo $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$ vem $x \in C$, $x \in \alpha_1$ ou $x \in \alpha_2$ e $x \neq a$, logo x pertence a

$$C \cap (\alpha_1 - \{a\}) \quad \text{ou} \quad C \cap (\alpha_2 - \{a\});$$

3º) $f(x) \in \beta - \bar{\beta}$ para $x \in C \cap (\alpha - \bar{\mathcal{V}})$,

pois sendo

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 \quad \text{vem} \quad \bar{\mathcal{V}} = \overline{\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2} = \bar{\mathcal{V}}_1 \cup \bar{\mathcal{V}}_2$$

e se $x \notin \bar{\mathcal{V}}$, temos $x \notin \bar{\mathcal{V}}_1$ e $x \notin \bar{\mathcal{V}}_2$ e logo x pertence a

$$C \cap (\alpha_1 - \bar{\mathcal{V}}_1) \quad \text{ou} \quad C \cap (\alpha_2 - \bar{\mathcal{V}}_2).$$

24. - Considerações

a) A função constante, definida em qualquer campo do qual a seja ponto de saturação não admite W -limite e, por conseguinte, se êsse existe para alguma função, essa não é constante em seu campo. Todavia a existência do W -limite é compatível com a constância da função num entorno do ponto de saturação, como podemos ver mediante o exemplo que se segue.

Definamos em \mathbb{R} a função $f(x)$ pondo

$$f(x) = x + 1 \quad \text{para} \quad x \leq -1,$$

$$f(x) = 0 \quad \text{para} \quad -1 < x < 1$$

e

$$f(x) = x + 1 \quad \text{para} \quad x \geq 1.$$

Essa função é constante num entorno de 0 e no entanto

$$W \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0,$$

pois dados os pares (ϵ', δ') e (ϵ'', δ'') , com

$$0 < \epsilon' < \delta' \leq \epsilon'_0, \quad 0 < \epsilon'' < \delta'' \leq \epsilon''_0,$$

ϵ'_0 e ϵ''_0 positivos quaisquer no caso, para

$$x \in \alpha = (-1 - \epsilon', 1 + \epsilon''),$$

temos, se

$$-1 - \epsilon' < x \leq -1, \quad -\epsilon' < f(x) \leq 0;$$

se

$$-1 < x < 1, \quad f(x) = 0$$

e se

$$1 \leq x < 1 + \epsilon'', \quad 0 \leq f(x) < \epsilon'',$$

e portanto para $x \in \alpha$,

$$-\epsilon' < f(x) < \epsilon''.$$

Para $x \in \alpha - \bar{V}$, sendo

$$\bar{V} = (-1 - \epsilon', 1 + \epsilon''),$$

temos ou $x < -1 - \epsilon'$ ou $x > 1 + \epsilon''$; no primeiro caso, $f(x) < -\epsilon'$ e no segundo $f(x) > \epsilon''$ e portanto está verificado o W-limite acima.

Se restringirmos o campo de definição a
 $C_1 = (-1, 1)$, já não mais existe o W-limite, mesmo permanecendo O ponto de saturação; isso nos faz concluir que existindo o W-limite, nem sempre existe o W-limite num conjunto parcial para a mesma função. No estudo que se segue vamos encontrar uma condição necessária e suficiente, que resolve o caso e que reside essencialmente na questão da constância no entôron do ponto.

b) Antes porém, demos um exemplo simples mostrando que, ao se reduzir o campo de definição onde não havia W-limite para uma função, pode êle existir no menor.

Seja $f(x) = x$ para x racional e $f(x) = 1$ para x irracional; chamando C_1 o conjunto dos racionais, é claro que

$$W \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1, \quad (C_1)$$

ao passo que

$$W \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

não existe pois em qualquer $\alpha - \bar{v}$ existem irracionais. Também serve para o caso, o exemplo do nº 16.

25. - Lema

"Se $f(x)$ não é constante em

$$C \cap (\mu - \{a\}),$$

onde μ é qualquer entôrno à direita de a , ponto de acumulação à esquerda de C , e se

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b,$$

dado qualquer entôrno α_0 à direita de a , existe um entôrno β_0 de b tal que a todo entôrno β de b , contido em β_0 , os entornos α à direita de a que lhe correspondem pela definição de limite estão contidos em α_0 ."

Suponhamos que não valha o afirmado no enunciado, dado então qualquer entôrno β_0 de b , existe um entôrno β de b , $\beta \subseteq \beta_0$, ao qual corresponde um entôrno α à direita de a que contem α_0 ; seja x' um ponto qualquer pertencente a

$$C \cap (\alpha_0 - \{a\}),$$

então $x' \in \alpha$ pois $x' \in \alpha_0$ e $\alpha_0 \subseteq \alpha$, e sendo $x' \neq a$,

$$x' \in C \cap (\alpha - \{a\}),$$

donde $f(x') \in \beta$; se tomarmos

$$\beta_0 = (b - \varepsilon, b + \varepsilon),$$

temos também

$$\beta \subseteq (b - \varepsilon, b + \varepsilon) \quad \text{e logo} \quad |f(x') - b| < \varepsilon,$$

como ε pode ser arbitrário positivo, pois β_0 é qualquer, vem $f(x') = b$ e a função é constante em $C \cap (\alpha_0 - \{a\})$ contra a hipótese.

26. - Lema

"Se $f(x)$ não é constante em

$$c \cap (\mu - \{a\}) \quad e \quad c \cap (\rho - \{a\}),$$

onde μ e ρ são quaisquer entornos à direita e à esquerda de a , e se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

dado qualquer entôrno α_0 de a , existe um entôrno β_0 de b , tal que a todo entôrno β de b , contido em β_0 , os entornos α de a que lhe correspondem pela definição de limite estão contidos em α_0 ."

Seja α_0 um entôrno de a e sejam

$$\alpha_{01} = \alpha_0 \cap (-\infty, a] \quad e \quad \alpha_{02} = \alpha_0 \cap [a, +\infty).$$

Pelo lema anterior existem entornos β_{01} e β_{02} de b tais que a quaisquer

$$\beta_1 \subseteq \beta_{01} \quad e \quad \beta_2 \subseteq \beta_{02},$$

os entornos α_1 à esquerda e α_2 à direita de a que lhes correspondem estão contidos em α_{01} e α_{02} respectivamente. Pondo

$$\beta_0 = \beta_{01} \cap \beta_{02},$$

a qualquer entôrno β de b contido em β_0 , os entornos α correspondentes devem estar contidos em α_0 , pois se α é um deles, pondo

$$\alpha_1 = \alpha \cap (-\infty, a] \quad e \quad \alpha_2 = \alpha \cap [a, +\infty),$$

α_1 e α_2 são entornos à esquerda e à direita correspondentes a

$$\beta \subset \beta_{01} \cap \beta_{02},$$

isto é,

$$\beta \subset \beta_{01} \quad e \quad \beta \subset \beta_{02},$$

donde

$$\alpha_1 \subseteq \alpha_{01} \quad e \quad \alpha_2 \subseteq \alpha_{02}$$

$$\alpha_1 \cup \alpha_2 \subseteq \alpha_{01} \cup \alpha_{02}$$

ou

$$[\alpha \cap (-\infty, a]] \cup [\alpha \cap [a, +\infty)] \subseteq \\ \subseteq [\alpha_0 \cap (-\infty, a]] \cup [\alpha_0 \cap [a, +\infty)]$$

donde

$$\alpha \subseteq \alpha_0.$$

27. - Proposição

"Se

$$W \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

a condição necessária e suficiente para que o W-limite sobre qualquer conjunto parcial $C_1 \subset C$, do qual a é ainda ponto de saturação, é que $f(x)$ não seja constante em nenhum entôrno à direita e em nenhum entôrno à esquerda de a , excluído esse ponto."

A condição é suficiente, pois a sendo ponto de saturação de C_1 , existe um entôrno α_0 contido em C_1^i e considerado esse entôrno, existe pelo lema anterior um entôrno β_0 de b , tal que para qualquer $\beta \subseteq \beta_0$, os entornos α de a que lhe correspondem estão contidos em α_0 . Então dado qualquer par $(\bar{\beta}, \beta)$ de entornos de b , com $\bar{\beta} \subset \beta \subseteq \beta_0$, existe o par $(\bar{\nu}, \alpha)$ de entornos de a com $\bar{\nu} \subset \alpha \subseteq \alpha_0$ tal que para

$$x \in C \cap (\alpha - \{a\}) \quad , \quad f(x) \in \beta$$

e para

$$x \in C \cap (\alpha - \bar{\nu}) \quad , \quad f(x) \in \beta - \bar{\beta};$$

ora como $C_1 \subset C$, virá para

$$x \in C_1 \cap (\alpha - \{a\}) \quad , \quad f(x) \in \beta$$

e para

$$x \in C_1 \cap (\alpha - \bar{\nu}) \quad , \quad f(x) \in \beta - \bar{\beta},$$

havendo pontos de C_1 em α e em $\alpha - \bar{\nu}$ pois $\alpha \subseteq \alpha_0 \subseteq C_1^i$.

A condição é, também, necessária pois, se existe um

entorno μ à direita ou ρ à esquerda de a onde, excluído a , $f(x)$ é constante, tomado um $C_1 \subset C$ tal que à direita ou à esquerda de a fique contido em μ ou ρ respectivamente, não existe o W -limite à direita ou à esquerda correspondente e portanto não existe o W -limite.

28. - Lema

"Se

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

é elemento infinito, dado qualquer entorno α_0 à direita de a , existe um entorno β_0 desse elemento tal que para todo entorno β do mesmo contido em β_0 , os entornos α_0 que lhe correspondem pela definição de limite estão contidos em α_0 ."

Se não vale a afirmativa do enunciado, e supondo que o limite seja $+\infty$, dado qualquer entorno β_0 de $+\infty$, existe um entorno β de $+\infty$ contido em β_0 , ao qual corresponde um entorno à direita α de a que contém α_0 ; seja x' um ponto qualquer pertencente a

$$C \cap (\alpha_0 - \{a\}),$$

então $x' \in \alpha_0$, e como $\alpha_0 \subseteq \alpha$, $x' \in \alpha$, logo

$$x \in C \cap (\alpha - \{a\})$$

pois $x' \neq a$, donde $f(x') \in \beta$; se tomarmos $\beta_0 = (K, +\infty)$ com K qualquer pois β_0 é qualquer, vem já que $\beta \subseteq \beta_0$, $f(x') > K$ o que não é possível para K arbitrário.

29. - Lema

"Se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

é elemento infinito, dado qualquer entorno α_0 de a , existe um entorno β_0 desse elemento tal que todo entorno β do mesmo contido em β_0 , os entornos α de a que lhe correspondem pela definição de limite, estão contidos em α_0 ."

A demonstração segue o mesmo raciocínio do nº 26.

30. - Proposição

"Se

$$W \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

é elemento infinito, então sôbre qualquer conjunto parcial C_1 contido em C , do qual a é ainda ponto de saturação, o W -limite da $f(x)$ é o mesmo elemento."

A demonstração segue argumento análogo ao da proposição do nº 27.

31. - Proposição

"Se

$$W \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

e se β_0 é o entôrno inicial de b , ao menos um dos conjuntos

$$\beta_0 \cap (-\infty, b] \quad \text{ou} \quad \beta_0 \cap [b, +\infty)$$

está contido no derivado da imagem de C e portanto b é ao menos ponto de saturação de $f(C)$ à esquerda ou à direita."

Suponhamos que ambos os conjuntos

$$\beta_0 \cap (-\infty, b] \quad \text{e} \quad \beta_0 \cap [b, +\infty)$$

não estejam contidos em $(f(C))'$; existem então pontos c e d em cada um, que não pertencem a $(f(C))'$. Se $c \notin (f(C))'$, existe um intervalo aberto μ tal que

$$\mu \subseteq \beta_0 \cap (-\infty, b')$$

com $b' < b$, $b' \in \beta_0$ e $\mu \cap f(C) = \emptyset$; pelo mesmo motivo existe um intervalo aberto ρ tal que

$$\rho \subseteq \beta_0 \cap (b'', +\infty)$$

com $b'' > b$, $b'' \in \beta_0$ e $\rho \cap f(C) = \emptyset$, portanto temos

$$[\mu \cap f(C)] \cup [\rho \cap f(C)] = \emptyset$$

donde

$$[\mu \cup \rho] \cap f(c) = \phi.$$

Sejam agora β e $\bar{\beta}$ dois entornos de b tais que $\bar{\beta} \subset \beta$ e
 $\beta - \bar{\beta} \subseteq \mu \cup \rho$, como $\rho \subseteq \beta_0$ existem α e $\bar{\alpha}$ tais que para

$$x \in C \cap (\alpha - \bar{\alpha}),$$
$$f(x) \in \beta - \bar{\beta} \quad \text{ou} \quad f(x) \in \mu \cup \rho,$$

que contraria

$$[\mu \cup \rho] \cap f(c) = \phi.$$

32. - Lema

"Se $f(x)$ é crescente em C , se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

e se x_1 e x_2 pertencem a C , $x_1 < a < x_2$ implica

$$f(x_1) < b < f(x_2)."$$

Pelo teorema fundamental das funções monótonas temos

$$b = \sup \{f(x); x \in C, x < a\} = \inf \{f(x); x \in C, x > a\},$$

logo

$$f(x_1) \leq b \leq f(x_2);$$

mas não podemos ter $f(x_1) = b$ pois para os pontos x de C tais que $x_1 < x < a$, os quais existem pois a é ponto de acumulação de C , devemos ter $f(x_1) < f(x)$ ou $b < f(x)$ quando b é o extremo superior. De maneira análoga podemos mostrar que $f(x_2) \neq b$, donde

$$f(x_1) < b < f(x_2).$$

33. - Proposição

"Se $f(x)$ é crescente em C do qual a é ponto de saturação, se

$$W \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

e se β_0 é o entorno inicial de b , então β_0 está contido no derivado da imagem de C e portanto b é ponto de saturação de $f(C)$."

Com efeito, se β_0 não está contido no derivado de $f(C)$, existe ao menos um intervalo aberto $\mu \subseteq \beta_0$ tal que $\mu \cap f(C) = \emptyset$; podemos ainda supor que $b \notin \mu$. Seja agora um par (δ, β) de entornos de b tais que

$$\delta \subset \beta \subseteq \beta_0 \quad \text{e} \quad \beta - \delta \subseteq \mu \cap \rho;$$

onde $\rho \subseteq \beta_0$ é qualquer intervalo aberto acima ou abaixo de b conforme μ está abaixo ou acima desse ponto. Existe então o par (ν, α) de entornos de a tais que

$$\nu \subset \alpha \subseteq C' \quad \text{e} \quad f(x) \in \beta - \bar{\delta}$$

para $x \in C \cap (\alpha - \bar{\nu})$; consideremos agora dois pontos x_1 e x_2 pertencentes a $C \cap (\alpha - \bar{\nu})$ e satisfazendo a $x_1 < a < x_2$, para tais pontos que existem pois $\alpha \subseteq C'$, temos que $f(x_1)$ e $f(x_2)$ pertencem a $\beta - \bar{\delta}$, mas como

$$\beta - \bar{\delta} \subseteq \mu \cup \rho \quad \text{e} \quad \mu \cap f(C) = \emptyset,$$

vem que $f(x_1)$ e $f(x_2)$ pertencem a ρ e então ou

$$f(x_1) < b \quad \text{e} \quad f(x_2) < b$$

ou

$$f(x_1) > b \quad \text{e} \quad f(x_2) > b,$$

o que contraria a desigualdade

$$f(x_1) < b < f(x_2)$$

estabelecida no lema anterior.

34. - Considerações

a) Na proposição acima, não podemos apenas admitir a existência do limite, pois aquela não subsiste, como mostra o exemplo a seguir.

Seja $f(x) = x$ para $x \in (-1, 0]$ e

$$f(x) = \frac{n+1}{2(2n-1)}x + \frac{n-1}{2n(2n-1)} \quad \text{para } x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right),$$

$n = 1, 2, \dots$. A $f(x)$ está definida em $(-1, 1)$ do qual 0 é ponto de saturação e seu gráfico à direita de 0 é formado por segmentos que unem os pontos

$$\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{2n} \right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2n-1} \right)$$

ficando êsse último excluído, e é crescente nesse intervalo pois:

1º) é crescente em $(-1, 0]$;

2º) dados $x' \in (-1, 0]$ e $x'' \in (0, 1)$, $f(x') \leq 0 < f(x'')$;

3º) dados x' e x'' pertencentes a um mesmo

$$\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right),$$

se $x' < x''$, é claro que $f(x') < f(x'')$;

4º) dados

$$x' \in \left[\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m} \right) \quad \text{e} \quad x'' \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right),$$

com $m \neq n$, se $x' < x''$, como

$$\frac{1}{m+1} \leq x' < \frac{1}{m}, \quad \text{vem} \quad \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n+1},$$

donde $m > n$; ora

$$f(x') < \frac{1}{2m-1}, \quad f(x'') \geq \frac{1}{2n} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2m-1} < \frac{1}{2n},$$

donde $f(x') < f(x'')$.

Vamos ver que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0;$$

pela esquerda tal é imediato, e à direita dado $\epsilon > 0$ tomemos um x qualquer menor que $\frac{1}{n}$, com

$$n > 1 + \frac{1}{2\epsilon};$$

temos

$$f(x) < f\left(\frac{1}{n}\right)$$

e como

$$n > 1 \quad , \quad \frac{1}{n} \in \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1} \right)$$

e

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{2(2(n-1)-1)} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n-2}{2(n-1)(2(n-1)-1)} = \frac{1}{2(n-1)}$$

e portanto $f(x) < \varepsilon$ que mostra ser 0 o limite à direita por ser $f(x)$ crescente e por ser $f(x) > 0$ à direita de 0.

Mostremos que 0 não é ponto de saturação de $f(C)$. Com efeito, para $x \leq 0$, $f(x) \leq 0$ e para

$$x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right) \quad , \quad \frac{1}{2n} \leq f(x) < \frac{1}{2n-1}$$

logo

$$\left[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n} \right) \cap f(C) = \emptyset$$

para qualquer n e assim qualquer entôrno β de 0 contém intervalos que não têm pontos pertencentes a $f(C)$ e por conseguinte β não pode estar contido em $(f(C))'$ e 0 não é ponto de saturação de $f(C)$.

b) Êsse mesmo exemplo, considerando que

$$\lim_{y \rightarrow 0} f^{-1}(y) = 0,$$

mostra que o limite de uma função crescente pode ser ponto de saturação da imagem do campo de definição, sem que a variável tenda para um ponto de saturação dêsse campo.

c) Ainda, a $f(x)$ estudada mostra que se b é o limite de uma função crescente, o W -limite pode não existir quando x tende para o mesmo ponto, pois no caso 0 não é ponto de saturação de $f(C)$ como exigiria a proposição do nº 33. Entretanto introduzindo a hipótese de ser b ponto de saturação de $f(C)$, o W -limite existirá e será igual a b como mostra a proposição seguinte.

35. - Proposição

"Se $f(x)$ é crescente em C , se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

e se a e b são pontos de saturação de C e $f(C)$ respectivamente, então

$$\forall \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b."$$

Se a e b são pontos de saturação de C e $f(C)$, existem dois entornos ω e β'_0 desses pontos contidos em C' e $(f(C))'$ respectivamente; existe também pela definição de limite um entorno α'_0 de a tal que para

$$x \in C \cap (\alpha'_0 - \{a\}) \quad , \quad f(x) \in \beta'_0.$$

Ponhamos $\alpha_0 = \alpha'_0 \cap \omega$ e tomemos r_0 e s_0 pontos de C em α_0 tais que $r_0 < a < s_0$, os quais existem pois $\alpha_0 \subseteq \omega \subseteq C'$; pelo lema do nº 32, $f(r_0) < b < f(s_0)$ e como r_0 e s_0 são diferentes de a e pertencem a $\alpha_0 \subseteq \alpha'_0$, $f(r_0)$ e $f(s_0)$ pertencem a β'_0 , vem, pondo

$$\beta_0 = (f(r_0), f(s_0)),$$

que

$$\beta_0 \subseteq \beta'_0 \subseteq (f(C))'.$$

Consideremos agora qualquer par (γ, β) de entornos de b satisfazendo a condição $\gamma \subset \beta \subseteq \beta_0$ e sejam $\gamma = (p, q)$ e $\beta = (m, n)$; tomemos quatro pontos y_1, y_2, y_3 e y_4 de $f(C)$ tais que

$$m < y_1 < y_2 < p \quad \text{e} \quad q < y_3 < y_4 < n$$

os quais existem pois

$$\beta \subseteq \beta_0 \subseteq (f(C))'$$

e sejam

$$\begin{aligned} x_1 = f^{-1}(y_1) & \quad , \quad x_2 = f^{-1}(y_2), \\ x_3 = f^{-1}(y_3) & \quad \text{e} \quad x_4 = f^{-1}(y_4), \end{aligned}$$

como

$$f(r_0) \leq m \quad , \quad n \leq f(s_0) \quad e \quad p < b < q$$

vem

$$r_0 < x_1 < x_2 < a < x_3 < x_4 < s_0.$$

Pondo $\alpha = (x_1, x_4)$ e $\bar{v} = (x_2, x_3)$, para
 $x \in C \cap (\alpha - \{a\})$

temos $x_1 < x < x_4$ e

$$f(x_1) < f(x) < f(x_4) \quad \text{ou} \quad y_1 < f(x) < y_4$$

donde $f(x) \in \beta$ e para $x \in C \cap (\alpha - \bar{v})$ temos $x_1 < x < x_2$
ou $x_3 < x < x_4$ que acarreta

$$f(x_1) < f(x) < f(x_2) \quad \text{ou} \quad f(x_3) < f(x) < f(x_4),$$

donde

$$y_1 < f(x) < y_2 \quad \text{ou} \quad y_3 < f(x) < y_4,$$

e portanto $f(x) \in \beta - \bar{f}$.

36. - Proposição

"Para tãda função crescente em C , do qual a é ponto de saturação, e cujo limite b existe quando x tende para a , as afirmações « b é o W -limite quando x tende para a » e « b é ponto de saturação da imagem de C » são equivalentes."

É conseqüência da proposição acima e da proposição do nº 33.

37. - Proposição sãbre o W -limite da função inversa

"Se $f(x)$ é crescente em C e se

$$W \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

entã

$$W \lim_{y \rightarrow b} f^{-1}(y) = a."$$

Com efeito, sabemos que a $f(x)$ crescente em C admi

te função inversa $f^{-1}(y)$ crescente em $f(C)$ e pela proposição do nº 33 podemos afirmar que b é ponto de saturação de $f(C)$, pois $\beta_0 \subseteq (f(C))'$. Como

$$\lim_{y \rightarrow b} f^{-1}(y) = a,$$

existe um entôrno β^* de b tal que para

$$y \in f(C) \cap (\beta^* - \{b\}) \quad , \quad f^{-1}(y) \in \omega,$$

sendo ω um entôrno de a contido em C' . Ponhamos agora

$$\beta_1 = \beta^* \cap \beta_0$$

e tomemos $f(r_0)$ e $f(s_0)$ pertencentes a β_1 tais que

$$f(r_0) < b < f(s_0),$$

Êsses pontos existem pois

$$\beta_1 \subseteq \beta_0 \subseteq (f(C))';$$

pelo lema do nº 32 aplicado a $f^{-1}(y)$, $r_0 < a < s_0$ e como $f(r_0)$ e $f(s_0)$ são diferentes de b e pertencendo a β_1 pertencem também a β^* , temos r_0 e s_0 em ω . Seja $\alpha_0 = (r_0, s_0)$ e consideremos qualquer par (γ, α) de entornos de a tais que $\gamma \subset \alpha \subseteq \alpha_0$; sejam também $\gamma = (p, q)$ e $\alpha = (m, n)$ e tomemos quatro pontos x_1, x_2, x_3 e x_4 de C tais que

$$m < x_1 < x_2 < p \quad \text{e} \quad q < x_3 < x_4 < n,$$

então como

$$r_0 \leq m \quad , \quad n \leq s_0 \quad \text{e} \quad p < a < q$$

vem,,

$$f(r_0) < f(x_1) < f(x_2) < b < f(x_3) < f(x_4) < f(s_0).$$

Pondo

$$\gamma = (f(x_2), f(x_3)) \quad \text{e} \quad \beta = (f(x_1), f(x_4)),$$

γ e β são entornos de b satisfazendo a

$$\gamma \subset \beta \subseteq (f(C))' \quad \text{pois} \quad \beta \subseteq \beta_1 \subseteq (f(C))'$$

e tais que 1º) para

$$y \in f(C) \cap (\beta - \{b\}) \quad \text{vem} \quad f^{-1}(y) \in \alpha,$$

pois se

$$y = f(x) \quad , \quad f(x_1) < f(x) < f(x_4),$$

donde

$$x_1 < f^{-1}(y) < x_4 \quad e \quad f^{-1}(y) \in \alpha;$$

2ª) para

$$y \in f(C) \cap (\beta - \bar{\delta}) \quad \text{vem} \quad f^{-1}(y) \in \alpha - \bar{\delta},$$

pois se $y = f(x)$, ou

$$f(x_1) < f(x) < f(x_2) \quad \text{ou} \quad f(x_3) < f(x) < f(x_4),$$

donde ou

$$x_1 < f^{-1}(y) < x_2 \quad \text{ou} \quad x_3 < f^{-1}(y) < x_4,$$

e portanto •

$$f^{-1}(y) \in \alpha - \bar{\delta}.$$

38. Lema

"Se $f(x)$ e $g(z)$ são funções definidas em C e em $B \supseteq f(C)$ respectivamente, então

$$(g \circ f)(A) = g(f(A))$$

para qualquer $A \subseteq C$."

Basta ver primeiro que, se

$$y \in (g \circ f)(A) \quad , \quad y = (g \circ f)(x)$$

para algum $x \in A$, donde

$$y = g(f(x)) \quad \text{sendo} \quad f(x) \in f(A)$$

e portanto

$$y \in g(f(A));$$

e segundo que, se

$$y \in g(f(A)) \quad , \quad y = g(\varphi)$$

para um $\varphi \in f(A)$ e portanto $\varphi = f(x)$ para um $x \in A$, donde

$$y = g(f(x)) = (g \circ f)(x) \quad e \quad y \in (g \circ f)(A).$$

39. - Proposição sobre o W-limite de função composta

"Dadas as funções reais $f_i(\xi_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ das variáveis reais ξ_i respectivamente definidas em C_1 , tais que

$$C_i \supseteq (f_{i-1} \circ \dots \circ f_1)(C_1),$$

se 1º) a_1 é ponto de saturação de

$$(f_{i-1} \circ \dots \circ f_1)(C_1);$$

2º)

$$W \lim_{\xi_i \rightarrow a_i} f_i(\xi_i) = a_{i+1};$$

3º) posto

$$D_i = \{\xi_i; (f_i \circ \dots \circ f_1)(\xi_i) = a_{i+1}\},$$

$i = 1, 2, \dots, n-1$, a_1 ainda é ponto de saturação de

$$C_1 - \bigcup_{i=1}^{n-1} D_i;$$

4º) caso a_{i+1} seja finito, $i = 1, 2, \dots, n$, a $f_i(\xi_i)$ não é constante em nenhum entôrno à direita e em nenhum entôrno à esquerda de a_i , excluído êsse ponto, ou a $f_i(\xi_i)$ não é constante em nenhum entôrno de $+\infty$ ou $-\infty$, se a_i é $+\infty$ ou $-\infty$ respectivamente; então o W-limite da função composta

$$(f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1)(\xi_1) \quad \text{sobre} \quad C_1 - \bigcup_{i=1}^{n-1} D_i$$

existe e vale a_{n+1} , isto é,

$$W \lim_{\xi_1 \rightarrow a_1} ((f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1)(\xi_1)) = a_{n+1}."$$

$$(C_1 - \bigcup_{i=1}^{n-1} D_i)$$

Vamos demonstrar por indução e supomos, primeiramente, $n = 2$. Notemos, inicialmente, que devido à hipótese feita se a_3 é finito, temos

$$W \lim_{\xi_2 \rightarrow a_2} f_2(\xi_2) = a_3.$$

$$\xi_2 \rightarrow a_2 \quad (f_1(C_1))$$

Sejam β_{02} e β_{03} os entornos iniciais de a_2 e a_3 respectivamente, sendo o último correspondente a $f_2(\xi_2)$ sobre $f(C_1)$ e ω_1 um entorno de a_1 contido em $(C_1 - D_1)'$; como

$$\lim_{\xi_1 \rightarrow a_1} f_1(\xi_1) = a_2 \quad \text{e} \quad \lim_{\xi_2 \rightarrow a_2} f_2(\xi_2) = a_3$$

e $f_1(\xi_1)$ e $f_2(\xi_2)$ satisfazem a 4ª condição caso a_2 e a_3 sejam finitos, existe um entorno β_2 de a_2 tal que a qualquer entorno $\beta^{(2)}$ de a_2 contido em β_2 , correspondem pela definição de limite entornos $\alpha^{(1)}$ de a_1 que satisfazem a $\alpha^{(1)} \subseteq \omega_1$ e existe também um entorno β_3 de a_3 tal que a qualquer entorno $\beta^{(3)}$ de a_3 contido em β_3 , os entornos $\alpha^{(2)}$ de a_2 que lhe correspondem pela definição de limite satisfazem a

$$\alpha^{(2)} \subseteq \beta_{02} \cap \beta_2; \quad \text{ponhamos} \quad \beta'_{03} = \beta_{03} \cap \beta_3$$

e consideremos qualquer par $(\gamma^{(3)}, \beta^{(3)})$ de entornos de a_3 tais que

$$\gamma^{(3)} \subseteq \beta^{(3)} \subseteq \beta'_{03}, \quad \text{como} \quad \beta^{(3)} \subseteq \beta'_{03} \subseteq \beta_{03}$$

existe um par $(\gamma^{(2)}, \alpha^{(2)})$ de entornos de a_2 tais que

$$\gamma^{(2)} \subset \alpha^{(2)} \subseteq (f_1(C_1))',$$

$$f_2(f_1(C_1) \cap (\alpha^{(2)} - \{a_2\})) \subseteq \beta^{(3)}$$

$$\text{e} \quad f_2(f_1(C_1) \cap (\alpha^{(2)} - \overline{\gamma^{(2)}})) \subseteq \beta^{(3)} - \overline{\gamma^{(2)}};$$

ainda como

$$\beta^{(3)} \subseteq \beta'_{03} \subseteq \beta_3 \quad \text{vem} \quad \alpha^{(2)} \subseteq \beta_{02} \cap \beta_2.$$

Ao par $(\gamma^{(2)}, \alpha^{(2)})$ de entornos de a_2 , como

$$\alpha^{(2)} \subseteq \beta_{02} \cap \beta_2 \subseteq \beta_{02}$$

corresponde então o par $(\gamma^{(1)}, \alpha^{(1)})$ de entornos de a_1 tais que

$$\gamma^{(1)} \subset \alpha^{(1)} \subseteq \omega_1 \subseteq (C_1 - D_1)',$$

$$f_1(C_1 \cap (\alpha^{(1)} - \{a_1\})) \subseteq \alpha^{(2)}, \quad (1)$$

e

$$f_1(C_1 \cap (\alpha^{(1)} - \overline{\nu^{(1)}})) \subseteq \alpha^{(2)} - \overline{\nu^{(2)}}, \quad (2).$$

Na inclusão (1) podemos substituir $\alpha^{(2)}$ por $\alpha^{(2)} - \{a_2\}$ se substituirmos C_1 por $C_1 - D_1$ e vem

$$f_1((C_1 - D_1) \cap (\alpha^{(1)} - \{a_1\})) \subseteq \alpha^{(2)} - \{a_2\}$$

donde também

$$f_1((C_1 - D_1) \cap (\alpha^{(1)} - \{a_1\})) \subseteq f_1(C_1) \cap (\alpha^{(2)} - \{a_2\})$$

e pelo lema anterior,

$$\begin{aligned} (f_2 \circ f_1)((C_1 - D_1) \cap (\alpha^{(1)} - \{a_1\})) &\subseteq \\ &\subseteq f_2(f_1(C_1) \cap (\alpha^{(2)} - \{a_2\})) \subseteq \beta^{(3)}; \end{aligned}$$

da inclusão (2) vem

$$\begin{aligned} f_1((C_1 - D_1) \cap (\alpha^{(1)} - \overline{\nu^{(1)}})) &\subseteq \\ &\subseteq f_1(C_1 \cap (\alpha^{(1)} - \overline{\nu^{(1)}})) \subseteq f_1(C_1) \cap (\alpha^{(2)} - \overline{\nu^{(2)}}) \end{aligned}$$

donde pelo lema anterior,

$$\begin{aligned} (f_2 \circ f_1)((C_1 - D_1) \cap (\alpha^{(1)} - \overline{\nu^{(1)}})) &\subseteq \\ &\subseteq f_2(f_1(C_1) \cap (\alpha^{(2)} - \overline{\nu^{(2)}})) \subseteq \beta^{(3)} - \overline{\nu^{(3)}}. \end{aligned}$$

Suponhamos válida a proposição para o caso $n - 1$. Temos então

$$W \lim_{\xi_1 \rightarrow a_1} (f_{n-1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1)(\xi_1) = a_n, \\ (C_1 - \bigcup_{i=1}^{n-2} D_i)$$

e a função $(f_{n-1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1)(\xi_1)$ caso a_n seja finito, não é constante em nenhum entôrno referido na 4ª condição, pois do contrário D_{n-1} conteria no mínimo ou um entôrno à esquerda ou um entôrno à direita de a_1 , excluído êsse ponto, ou um entôrno de $+\infty$ ou de $-\infty$ caso a_1 seja $+\infty$ ou $-\infty$ respectivamente, visto que tendo-se

$$\lim_{\xi_1 \rightarrow a_1} (f_{n-1} \circ \dots \circ f_1)(\xi_1) = a_n,$$

o valor constante de $(f_{n-1} \circ \dots \circ f_1)(\xi_1)$ seria a_n , e em qualquer hipótese a_1 deixaria de ser ponto de saturação de

$$C_1 - \bigcup_{i=1}^{n-1} D_i,$$

contra a 3ª condição da hipótese. Então como as funções

$$(f_{n-1} \circ \dots \circ f_1)(\xi_1) \quad \text{e} \quad f_n(\xi_n)$$

satisfazem as condições do caso $n = 2$ e como a_1 é ainda ponto de saturação de

$$(C_1 - \bigcup_{i=1}^{n-2} D_i) - D_{n-1},$$

vem

$$W \lim_{\xi_1 \rightarrow a_1} (f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1)(\xi_1) = a_{n+1}.$$

$$(C_1 - \bigcup_{i=1}^{n-1} D_i)$$

40. - Corolários

Na proposição acima podemos escrever simplesmente o W-limite da função composta nos seguintes casos:

a) Se os a_i , $i = 2, \dots, n$, são elementos infinitos: pois sendo $(f_i \circ \dots \circ f_1)(\xi_1)$ real, $D_i = \emptyset$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, e por conseguinte

$$\bigcup_{i=1}^{n-1} D_i = \emptyset.$$

b) Se $f_1(\xi_1)$ e a restrição de $f_i(\xi_i)$ a

$$(f_{i-1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1)(C_1)$$

$$i = 2, 3, \dots, n-1,$$

são aplicações biunívocas: pois neste caso

$$(f_i \circ \dots \circ f_2 \circ f_1)(\xi_1)$$

é biunívoca e cada D_i tem no máximo um elemento, pois se ξ_1^i e

ξ_1'' pertencem a D_i , vem

$$(f_i \circ \dots \circ f_2 \circ f_1)(\xi_1') = (f_i \circ \dots \circ f_2 \circ f_1)(\xi_1'') = a_{i+1}$$

e como a $f_i \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$ é uma aplicação biunívoca de C_1 sobre $(f_i \circ \dots \circ f_2 \circ f_1)(C_1)$ temos $\xi_1' = \xi_1''$; portanto

$$\bigcup_{i=1}^{n-1} D_i$$

tem no máximo $n - 1$ elementos e podemos na demonstração aci ma tomar ω_1 disjunto de

$$\bigcup_{i=1}^{n-1} D_i.$$

41. - Proposição

"Se

$$W \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

então

$$W \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + c) = b + c,$$

isto é,

$$W \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + c) = W \lim_{x \rightarrow a} f(x) + c."$$

Dados os pares (σ', ε') e $(\sigma'', \varepsilon'')$ com $0 < \sigma' < \varepsilon' \leq \varepsilon'_0$ e $0 < \sigma'' < \varepsilon'' \leq \varepsilon''_0$,

existe o par (ν, α) de entornos de a , tais que para

$$x \in C \cap (\alpha - \{a\}) \quad , \quad b - \varepsilon' < f(x) < b + \varepsilon''$$

e para

$$x \in C \cap (\alpha - \bar{\nu}),$$

ou $f(x) > b + \sigma'$ ou $f(x) < b - \sigma''$; como para os respectivos x essas desigualdades implicam

$$(b + c) - \varepsilon' < f(x) + c < (b + c) + \varepsilon''$$

e, ou $f(x) + c > (b + c) + \varepsilon'$ ou $f(x) + c < (b + c) - \varepsilon''$, está verificada a proposição. Reparemos que ε'_0 e ε''_0 podem ser tomados como positivos iniciais de $f(x) + c$.

42. - Proposição

"Se

$$W \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty,$$

então

$$W \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + c) = +\infty."$$

Dado o par $(\mathcal{G}, \varepsilon)$ com $\varepsilon_0 + c \leq \varepsilon < \mathcal{G}$, e considerando o par $(\mathcal{G} - c, \varepsilon - c)$, como $\mathcal{G} - c > \varepsilon - c \geq \varepsilon_0$, existe o par (\mathcal{V}, α) tal que $f(x) > \varepsilon - c$, para

$$x \in \mathcal{C} \cap (\alpha - \{a\}) \quad \text{e} \quad f(x) < \mathcal{G} - c,$$

para $x \in \mathcal{C} \cap (\alpha - \bar{\nu})$; essas desigualdades implicam para os respectivos x , $f(x) + c > \varepsilon$ e $f(x) + c < \mathcal{G}$. Vemos, no caso, que o ε_{01} inicial de $f(x) + c$ é $\varepsilon_{01} = \varepsilon_0 + c$.

43. - Proposição

"Se

$$W \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

então

$$W \lim_{x \rightarrow a} (-f(x)) = -b,$$

isto é,

$$W \lim_{x \rightarrow a} (-f(x)) = - W \lim_{x \rightarrow a} f(x)."$$

Dados os pares $(\mathcal{G}', \varepsilon')$ e $(\mathcal{G}'', \varepsilon'')$ com $0 < \mathcal{G}' < \varepsilon' \leq \varepsilon'_0$ e $0 < \mathcal{G}'' < \varepsilon'' \leq \varepsilon''_0$,

existe o par (ν, α) tal que

$$b - \varepsilon'' < f(x) < b + \varepsilon' \quad \text{para} \quad x \in C \cap (\alpha - \{a\})$$

e, ou $b + \varepsilon' < f(x)$ ou $f(x) < b - \varepsilon''$ para

$$x \in C \cap (\alpha - \bar{\nu});$$

como essas desigualdades implicam para os respectivos x ,
 $-b - \varepsilon' < -f(x) < -b + \varepsilon''$ e, ou $-f(x) < -b - \varepsilon'$ ou
 $-b + \varepsilon'' < -f(x)$, está verificada a proposição. Notemos que
os positivos de $-f(x)$, no caso, são $\varepsilon''_{01} = \varepsilon''_0$ e $\varepsilon'_{01} = \varepsilon'_0$.

44. - Proposição

"Se

$$W \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty,$$

então

$$W \lim_{x \rightarrow a} (-f(x)) = -\infty."$$

Dado o par $(\varepsilon, \varepsilon_0)$ com

$$\varepsilon < \varepsilon_0 < -\varepsilon_0, \quad \text{como} \quad -\varepsilon > -\varepsilon_0 > \varepsilon_0,$$

temos

$$f(x) > -\varepsilon \quad \text{para} \quad x \in C \cap (\alpha - \{a\})$$

e

$$f(x) < -\varepsilon_0 \quad \text{para} \quad x \in C \cap (\alpha - \bar{\nu});$$

essas desigualdades implicam para os respectivos x ,

$$-f(x) < \varepsilon \quad \text{e} \quad -f(x) > \varepsilon_0.$$

O ε_{01} inicial é no caso $\varepsilon_{01} = -\varepsilon_0$.

45. - Proposição

"Se $c \neq 0$ e

$$W \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

então

$$W \lim_{x \rightarrow a} (c f(x)) = cb,$$

isto é,

$$W \lim_{x \rightarrow a} (c f(x)) = c W \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

(ϵ'' , ϵ'') Suponhamos $c > 0$; dados os pares (ϵ' , ϵ') e ...
com

$$\epsilon' < \epsilon' \leq c \epsilon'_0 \quad \text{e} \quad \epsilon'' < \epsilon'' < c \epsilon''_0,$$

como

$$\frac{\epsilon'}{c} < \frac{\epsilon'}{c} \leq \epsilon'_0 \quad \text{e} \quad \frac{\epsilon''}{c} < \frac{\epsilon''}{c} \leq \epsilon''_0$$

temos

$$b - \frac{\epsilon'}{c} < f(x) < b + \frac{\epsilon''}{c} \quad \text{para} \quad x \in C \cap (\alpha - \{a\})$$

e, ou

$$f(x) < b - \frac{\epsilon'}{c} \quad \text{ou} \quad f(x) > b + \frac{\epsilon''}{c} \quad \text{para} \quad x \in C \cap (\alpha - \bar{v});$$

essas desigualdades implicam para os respectivos x ,

$$cb - \epsilon' < c f(x) < cb + \epsilon''$$

e, ou

$$c f(x) < cb - \epsilon' \quad \text{ou} \quad c f(x) > cb + \epsilon''.$$

Reparemos que os positivos iniciais para $c f(x)$ são, no caso, $\epsilon'_{01} = c \epsilon'_0$ e $\epsilon''_{01} = c \epsilon''_0$.

Se $c < 0$, temos pela proposição do nº 43,

$$\begin{aligned} W \lim_{x \rightarrow a} (c f(x)) &= W \lim_{x \rightarrow a} (-c (-f(x))) = \\ &= -c W \lim_{x \rightarrow a} (-f(x)) = \\ &= -c (-W \lim_{x \rightarrow a} f(x)) = c W \lim_{x \rightarrow a} f(x). \end{aligned}$$

Podemos neste caso tomar como iniciais $\mathcal{E}'_{01} = -c \mathcal{E}_0$
e $\mathcal{E}''_{01} = -c \mathcal{E}'_0$.

46. - Proposição

"Se $c \geq 0$ e

$$\forall \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty,$$

então

$$\forall \lim_{x \rightarrow a} (c f(x)) = \pm\infty."$$

Suponhamos $c > 0$ e seja $(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ tal que

$$\mathcal{G} > \mathcal{E} \geq c \mathcal{E}_0, \quad \text{como} \quad \frac{\mathcal{G}}{c} > \frac{\mathcal{E}}{c} \geq \mathcal{E}_0$$

temos

$$f(x) > \frac{\mathcal{E}}{c} \quad \text{para} \quad x \in \mathcal{C} \cap (\alpha - \{a\})$$

e

$$f(x) < \frac{\mathcal{G}}{c} \quad \text{para} \quad x \in \mathcal{C} \cap (\alpha - \bar{v});$$

essas desigualdades implicam para os respectivos x ,

$$c f(x) > \mathcal{E} \quad \text{e} \quad c f(x) < \mathcal{G}.$$

O inicial \mathcal{E}_{01} , no caso, é $\mathcal{E}_{01} = c \mathcal{E}_0$.

Se $c < 0$ basta tomar $(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ tal que $\mathcal{G} < -\mathcal{E} \leq c \mathcal{E}_0$.

47. - Proposição

"Se

$$\forall \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

então

$$\forall \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |b|."$$

Suponhamos, primeiramente, $b > 0$ e ponhamos

$$(p, q) = \beta'_0 = \beta_0 \cap \{x; x > 0\};$$

dados os pares (ϵ', ϵ') e (ϵ'', ϵ'') com

$$0 < \epsilon' < \epsilon' \leq b - p \quad \text{e} \quad 0 < \epsilon'' < \epsilon'' \leq q - b,$$

como $b - p \leq \epsilon'_0$ e $q - b = \epsilon''_0$, existe um par (ϑ, α) de entornos de a tais que para

$$x \in C \cap (\alpha - \{a\}) \quad , \quad b - \epsilon' < f(x) < b + \epsilon''$$

e para

$$x \in C \cap (\alpha - \bar{\vartheta}),$$

ou

$$f(x) < b - \epsilon' \quad \text{ou} \quad f(x) > b + \epsilon'';$$

tendo em vista que $b - \epsilon' \geq p \geq 0$, podemos substituir $f(x)$ por $|f(x)|$ e como b é positivo, substituí-lo por $|b|$. No caso, os positivos iniciais para $|f(x)|$ são $\epsilon'_{01} = b - p$ e $\epsilon''_{01} = \epsilon''_0$.

Se $b < 0$, procedemos análogamente, tomamos

$$(p, q) = \beta'_0 = \beta_0 \cap \{x; x < 0\}$$

e os pares (ϵ', ϵ') e (ϵ'', ϵ'') com

$$0 < \epsilon' < \epsilon' \leq q - b \quad \text{e} \quad 0 < \epsilon'' < \epsilon'' < b - p,$$

e vem $b - \epsilon'' < f(x) < b + \epsilon'$ para

$$x \in C \cap (\alpha - \{a\})$$

e, ou $f(x) < b - \epsilon''$ ou $f(x) > b + \epsilon'$ para

$$x \in C \cap (\alpha - \bar{\vartheta});$$

tendo em vista que $b + \epsilon' \leq q \leq 0$, para êsses x podemos por $f(x) = -|f(x)|$, e as desigualdades anteriores dão

$$b - \epsilon'' < -|f(x)| < b + \epsilon',$$

$$-|f(x)| < b - \epsilon'' \quad , \quad -|f(x)| > b + \epsilon',$$

ou

$$|b| - \epsilon' < |f(x)| < |b| + \epsilon'',$$

$$|f(x)| > b + \epsilon'' \quad , \quad |f(x)| < |b| - \epsilon'.$$

Os positivos iniciais no caso, são $\epsilon'_{01} = \epsilon'_0$, $\epsilon''_{01} = q - b$.

Finalmente, se $b = 0$, como $|f(x)| \geq 0$, bastar dar um par (δ, ϵ) , com

$$0 < \delta < \epsilon < \min(\epsilon'_0, \epsilon''_0)$$

e temos para

$$x \in C \cap (\alpha - \{a\}), \quad -\epsilon < f(x) < \epsilon,$$

e para

$$x \in C \cap (\alpha - \bar{v}),$$

ou $f(x) > \delta$ ou $f(x) < -\delta$, donde para esses respectivos x vem,

$$|f(x)| < \epsilon \quad \text{e} \quad |f(x)| > \delta;$$

neste caso, o positivo inicial para $|f(x)|$ é

$$\epsilon_{01} = \min(\epsilon'_0, \epsilon''_0).$$

48. - Proposição

"Se

$$W \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty,$$

então

$$W \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty."$$

Sendo $|f(x)| \geq 0$, tomemos um par (δ, ϵ) com $\delta > \epsilon \geq \max(-\epsilon_0, 0)$;

como $-\delta < -\epsilon \leq \epsilon_0$, para

$$x \in C \cap (\alpha - \{a\})$$

temos $f(x) < -\epsilon$ e para

$$x \in C \cap (\alpha - \bar{v}),$$

$f(x) > -\delta$, donde para os respectivos x ,

$$|f(x)| > \epsilon \quad \text{e} \quad |f(x)| < \delta.$$

O inicial para $|f(x)|$ no caso, é $\epsilon_{01} = \max(-\epsilon_0, 0)$.

49. - Considerações

a) A soma ou o produto de duas funções cujos W-limites existem quando x tende para a , não admite necessariamente W-limite quando x tende para esse ponto. Assim, por exemplo, se o W-limite de $f_1(x)$ existe e é finito, existe também e é finito, pelas proposições dos n.ºs 43 e 41, o de

$$f_2(x) = 1 - f_1(x),$$

entretanto a função

$$f_1(x) + f_2(x) = 1$$

não admite W-limite. Ainda se

$$f_1(x) = x \quad , \quad x \in (0, +\infty),$$

o W-limite de $f_1(x)$ existe quando x tende para 1, bem como o de

$$f_2(x) = \frac{1}{x} \quad ; \quad x \in (0, +\infty),$$

entretanto a função $f_1(x) \cdot f_2(x) = 1$ não admite W-limite.

b) Vamos apresentar, agora, para os casos da soma e do produto, exemplos não triviais como os acima apontados.

Sejam as funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$ definidas em $\dots (-1, 1)$ do seguinte modo:

$$f_1(x) = |x| \quad \text{e} \quad f_2(x) = y_n = \frac{2(2n-1)}{n+1}x + \frac{1-n}{n(n+1)}$$

para

$$x \in \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \right) \quad , \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$f_2(x) = 0 \quad \text{para} \quad x \in \{0\} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n} \right] \right)$$

e

$$f_2(x) = f_2(-x) \quad \text{para} \quad x \in (-1, 0).$$

Reparemos inicialmente que o gráfico da $f_2(x)$ em

$$\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right)$$

é o segmento que une os pontos

$$\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{n+1}\right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{2n-1}, \frac{1}{n}\right)$$

excluídas as extremidades e que em

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right)$$

a $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ é crescente, pois é soma de duas funções crescentes.

É claro que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = 0,$$

e vamos mostrar o mesmo resultado para $f_2(x)$. Ponhamos $\epsilon_0 = 1$ e tomemos um par qualquer (ζ, ϵ) , com $0 < \zeta < \epsilon \leq 1$. Façamos a hipótese de existir um $n = 1, 2, \dots$, tal que

$$\zeta < \frac{1}{n} \leq \epsilon$$

e escrevamos

$$\rho = \max\left(\frac{1}{n+1}, \zeta\right), \quad \delta = \frac{1}{2n-1}$$

e

$$\zeta = \left(\rho - \frac{1-n}{n(n+1)}\right) \frac{n+1}{2(2n-1)};$$

ρ é menor que $\frac{1}{n}$ e δ e ζ são as imagens inversas de $\frac{1}{n}$ e ρ respectivamente, pela y_n considerada definida na reta, logo $\delta > \zeta$; para $0 < x < \delta$, isto é,

$$0 < x < \frac{1}{2n-1},$$

se

$$x \in \left(\frac{1}{2i}, \frac{1}{2i-1}\right), \quad i = n, n+1, \dots,$$

temos

$$f(x) < \frac{1}{i} \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon$$

e se

$$x \in \left[\frac{1}{2i+1}, \frac{1}{2i} \right], \quad i = n, n+1, \dots,$$

$f(x) = 0 < \varepsilon$ e portanto para $0 < x < \delta$ vem, $f(x) < \varepsilon$; para $\zeta < x < \delta$ temos

$$\frac{1}{2n} \leq \zeta < x < \frac{1}{2n-1}, \quad \text{donde} \quad f(x) = y_n > \rho \geq \varepsilon.$$

Se não existe o n da hipótese acima, existe então um tal que

$$(\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right)$$

e chamando δ e ζ as imagens inversas de ε e ε pela y_n , encontramos o par (ζ, δ) procurado. Portanto

$$\text{W} \lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = 0.$$

Mostremos agora que o W-limite de $f_1(x) + f_2(x)$ quando x tende para 0 não existe. Com efeito, $f_1(x) + f_2(x) = x$ para

$$x \in \left[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n} \right], \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$f_1(x) + f_2(x) = x + \frac{2(2n-1)}{n+1} x + \frac{1-n}{n(n+1)} = \frac{5n-1}{n+1} x + \frac{1-n}{n(n+1)} = \rho_n$$

para

$$x \in \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

$f(0) = 0$, e para

$$x \in (-1, 0) \quad , \quad f_1(x) + f_2(x) = f_1(-x) + f_2(-x).$$

Ora

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2) \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \right) \right) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (f_1 + f_2) \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \right) = \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{2n(n+1)}, \frac{3n-1}{n(2n-1)} \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \end{aligned}$$

onde

$$J_n = \left(\frac{3n+1}{2n(n+1)}, \frac{3n-1}{n(2n-1)} \right)$$

e seja um intervalo K_m da forma

$$\left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{2m+1}, \frac{1}{m+1} + \frac{1}{2m} \right),$$

isto é

$$K_m = \left(\frac{3m+2}{(m+1)(2m+1)}, \frac{3m+1}{(m+1)2m} \right), \quad m = 1, 2, \dots;$$

K_m é disjunto a

$$(f_1 + f_2) \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \right) \right),$$

pois se $n = m$,

$$J_m \cap K_m = \emptyset;$$

se $n < m$, como

$$\frac{3n+1}{2n(n+1)}$$

é decrescente,

$$\frac{3n+1}{2n(2n+1)} > \frac{3m+1}{2m(m+1)}$$

e portanto

$$J_n \cap K_m = \emptyset,$$

e finalmente, se $n > m$, basta supor $n = m+1$, visto que

$$\frac{3n-1}{n(2n-1)}$$

é decrescente; para $n = m+1$,

$$\frac{3n-1}{n(2n-1)} = \frac{3m+2}{(m+1)(2m+1)}, \quad \text{donde} \quad J_{m+1} \cap K_m = \emptyset$$

e portanto ainda

$$J_n \cap K_m = \emptyset.$$

Dado agora qualquer ϵ_0 , sempre existe m tal que

$$\frac{3m+1}{(m+1)2m} \leq \epsilon_0,$$

e considerando o par

$$\left(\frac{3m+2}{(m+1)(2m+1)}, \frac{3m+1}{(m+1)2m} \right)$$

que anotaremos por (σ, ϵ) , não há pelo visto nenhum

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \right)$$

tal que $\sigma < f(x) < \epsilon$; também não há qualquer

$$x' \in \left[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n} \right]$$

tal que $\sigma < f(x') < \epsilon$, pois se houver vem,

$$\frac{3m+2}{(m+1)(2m+1)} < x' \leq \frac{1}{2n} \quad (1);$$

para qualquer

$$x \in \left(\frac{1}{2n+2}, \frac{1}{2n+1} \right) \quad \text{temos,} \quad f(x) > \frac{1}{n+2}$$

e como (1) dá

$$\frac{1}{n+2} > \frac{6m+4}{2m^2+15m+9}$$

e a partir de um certo m vale

$$\frac{6m+4}{2m^2+15m+9} > \frac{3m+1}{(m+1)2m}$$

vem, $f(x) > \epsilon$, logo o W -limite da soma não existe quando x tende para 0, apesar de existir o limite, pois dado $\epsilon > 0$ qualquer, para

$$|x| < \frac{1}{2n-1}$$

e pertence a

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \right)$$

onde $f_1(x) + f_2(x)$ é crescente e n tal que

$$\frac{3n-1}{n(2n-1)} \leq \varepsilon,$$

temos, considerando que $\frac{1}{n}$ é decrescente, $f(x) < \varepsilon$ e o limite existe sobre

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \right)$$

e como sobre

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n} \right]$$

também existe, está verificada a existência do limite.

c) Para o caso do produto, tomamos as mesmas fun-
ções, $f_1(x)$ e $f_2(x)$ do exemplo anterior, e então

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = \frac{2(2n-1)}{n+1} x^2 + \frac{1-n}{n(n+1)} x$$

para

$$x \in \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \right), \quad f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$$

para

$$x \in \{0\} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n} \right] \right)$$

e

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = f_1(-x) \cdot f_2(-x) \quad \text{para} \quad x \in (-1, 0).$$

Ora

$$(f_1 \cdot f_2) \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \right) \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n(n+1)}, \frac{1}{n(2n-1)} \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$$

onde

$$J_n = \left(\frac{1}{2n(n+1)}, \frac{1}{n(2n-1)} \right).$$

Pondo

$$K_m = \left(\frac{1}{(m+1)(2m+1)}, \frac{1}{2m(m+1)} \right),$$

vemos que, se $n = m$,

$$K_m \cap J_m = \emptyset;$$

como

$$\frac{1}{2n(n+1)}$$

é decrescente, para $n < m$ vem

$$K_m \cap J_n = \emptyset;$$

finalmente se $n > m$, basta supor $n = m + 1$ pois que

$$\frac{1}{n(2n-1)}$$

é decrescente e para $n = m + 1$,

$$\frac{1}{n(2n-1)} = \frac{1}{(m+1)(2m+1)},$$

logo

$$K_m \cap J_{m+1} = \emptyset;$$

e ainda vale, portanto,

$$K_m \cap J_n = \emptyset.$$

Então, dado qualquer $\epsilon_0 > 0$, como existe m tal

$$\frac{1}{2m(m+1)} \leq \epsilon_0$$

e lembrando que $f_1(x) \cdot f_2(x) \geq 0$, vemos que o W-limite do produto não existe quando x tende para 0, apesar de existir o limite, pois a $f_1(x) \cdot f_2(x)$ em

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \right)$$

é crescente e dado $\varepsilon > 0$, para

$$|x| < \frac{1}{2n-1},$$

onde n é tal que

$$\frac{1}{n(2n-1)} \leq \varepsilon,$$

vem $f(x) < \varepsilon$.

50. - Proposição

"Se

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = b_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = b_2,$$

se para $x \neq a$,

$$(f_1(x) - b_1)(f_2(x) - b_2) > 0,$$

se $\varepsilon'_{01}, \varepsilon''_{01}$, $i = 1, 2$, são os positivos iniciais, e se dados quaisquer pares $(\varepsilon', \varepsilon'')$ e $(\varepsilon''', \varepsilon''')$, onde

$$0 < \varepsilon' < \varepsilon'' < \varepsilon'''_{01} + \varepsilon'''_{02},$$

existem positivos $e_i^{(n)}$ e $s_i^{(n)}$ tais que

$$s_i^{(n)} < e_i^{(n)} \leq \varepsilon'_{0i},$$

$$e_1^{(n)} + e_2^{(n)} \leq \varepsilon''_{00},$$

$$s_1^{(n)} + s_2^{(n)} \geq \varepsilon'''_{00},$$

e cujos

$$\mathcal{Z}_i^{(n)}(s_i^{(n)}, e_i^{(n)}) \quad \text{e} \quad \mathcal{D}_i^{(n)}(s_i^{(n)}, e_i^{(n)})$$

possam resultar tais que

$$\max(\mathcal{Z}_1^{(n)}(s_1^{(n)}, s_2^{(n)}), \mathcal{Z}_2^{(n)}(s_2^{(n)}, e_2^{(n)})) <$$

$$< \min(\delta_1^{(v)}(s_1^{(v)}, e_1^{(v)}), \delta_2^{(v)}(s_2^{(v)}, e_2^{(v)}))$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + f_2(x)) = b_1 + b_2.$$

Com efeito, dados os pares (ϵ', ϵ') e (ϵ'', ϵ'') nas condições do enunciado, temos os pares (s_1', e_1') e $\dots (s_1'', e_1'')$ tais que se

$$x \in C \cap [(a - \delta_1'(s_1', e_1'), a + \delta_1''(s_1'', e_1'')) - \{a\}],$$

$$b_1 - e_1' < f_1(x) < b_1 + e_1'' \text{ e se}$$

$$x \in C \cap [(a - \delta_2'(s_2', e_2'), a + \delta_2''(s_2'', e_2'')) - \{a\}],$$

$$b_2 - e_2' < f_2(x) < b_2 + e_2'', \text{ e então para}$$

$$x \in C \cap [(a - \min(\delta_1'(s_1', e_1'), \delta_2'(s_2', e_2')), a + \min(\delta_1''(s_1'', e_1''), \delta_2''(s_2'', e_2'')))] - \{a\}]$$

temos

$$b_1 + b_2 - (e_1' + e_2'') < f_1(x) + f_2(x) < b_1 + b_2 + (e_1'' + e_2')$$

donde

$$b_1 + b_2 - \epsilon' < f_1(x) + f_2(x) < b_1 + b_2 + \epsilon''.$$

Ainda, para

$$x \in C \cap (a + \zeta_1''(s_1'', e_1''), a + \delta_1''(s_1'', e_1''))$$

ou para

$$x \in C \cap (a - \delta_1'(s_1', e_1'), a - \zeta_1'(s_1', e_1'))$$

temos, ou

$$f_1(x) > b_1 + s_1'' \tag{1}$$

ou

$$f_1(x) < b_1 - s_1' \tag{2}$$

e para

$$x \in C \cap (a + \zeta_2''(s_2'', e_2''), a + \delta_2''(s_2'', e_2''))$$

ou

$$x \in C \cap (a - \delta_2^1(s_2^1, e_2^1), a - \zeta_2^1(s_2^1, e_2^1))$$

temos, ou

$$f_2(x) > b_2 + s_2'' \tag{3}$$

ou

$$f_2(x) < b_2 - s_2^1 \tag{4}$$

e portanto para

$$x \in C \cap (a + \max(\zeta_1''(s_1'', e_1''), \zeta_2''(s_2'', e_2'')), a + \min(\delta_1''(s_1'', e_1''), \delta_2''(s_2'', e_2'')))$$

ou para

$$x \in C \cap (a - \min(\delta_1^1(s_1^1, e_1^1), \delta_2^1(s_2^1, e_2^1)), a - \max(\zeta_1^1(s_1^1, e_1^1), \zeta_2^1(s_2^1, e_2^1)))$$

temos, já que (1) e (2) implicam respectivamente (3) e (4),

$$f_1(x) + f_2(x) > b_1 + b_2 + s_1'' + s_2'' \geq b_1 + b_2 + \epsilon''$$

ou

$$f_1(x) + f_2(x) < b_1 + b_2 - (s_1^1 + s_2^1) \leq b_1 + b_2 - \epsilon'.$$

Os positivos iniciais no caso, são

$$\epsilon_0' = \epsilon_{01}' + \epsilon_{02}' \quad \text{e} \quad \epsilon_0'' = \epsilon_{01}'' + \epsilon_{02}''$$

e os entornos α e ν , os intervalos

$$(a - \min(\delta_1^1(s_1^1, e_1^1), \delta_2^1(s_2^1, e_2^1)), a + \min(\delta_1''(s_1'', e_1''), \delta_2''(s_2'', e_2'')))$$

e

$$(a - \max(\zeta_1^1(s_1^1, e_1^1), \zeta_2^1(s_2^1, e_2^1)), a + \max(\zeta_1''(s_1'', e_1''), \zeta_2''(s_2'', e_2'')))$$

respectivamente.

51. - Existência de funções que satisfazem as condições da proposição anterior

Sejam as funções $f_1(x) = |x|$ e $f_2(x) = x^2$ definidas em $[-1, 1]$; temos, por certo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = 0$$

e podemos tomar como positivos iniciais $\epsilon_{01} = \epsilon_{02} = 1$. Consideremos o par (ϵ, δ) com $0 < \delta < \epsilon \leq 2$ e os positivos

$$e_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\epsilon}}{2}, \quad s_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\delta}}{2},$$

$$e_2 = \frac{1 + 2\epsilon - \sqrt{1 + 4\epsilon}}{2} \quad \text{e} \quad s_2 = \frac{1 + 2\delta - \sqrt{1 + 4\delta}}{2},$$

tais positivos satisfazem as condições acima.

Primeiro: como $\epsilon \leq 2$, vem $e_1 \leq \epsilon_{01}$ e $e_2 \leq \epsilon_{02}$; segundo: $s_1 < e_1$ e $s_2 < e_2$, visto que $0 < \delta < \epsilon$ e a função

$$\frac{1 + 2x - \sqrt{1 + 4x}}{2}$$

é crescente na semi-reta positiva; terceiro: $e_1 + e_2 = \epsilon$ e $s_1 + s_2 = \delta$; quarto: podemos tomar

$$\zeta_1(s_1, e_1) = s_1, \quad \delta_1(s_1, e_1) = e_1;$$

$$\zeta_2(s_2, e_2) = \sqrt{s_2} = s_1, \quad \delta_2(s_2, e_2) = \sqrt{e_2} = e_1,$$

donde

$$\max(\zeta_1(s_1, e_1), \zeta_2(s_2, e_2)) = s_1$$

e

$$\min(\delta_1(s_1, e_1), \delta_2(s_2, e_2)) = e_1$$

e finalmente

$$\max(\zeta_1(s_1, e_1), \zeta_2(s_2, e_2)) < \min(\delta_1(s_1, e_1), \delta_2(s_2, e_2));$$

quinto:

$$(f_1(x) - 0)(f_2(x) - 0) > 0 \quad \text{para} \quad x \neq 0.$$

52. - Considerações

a) É conhecido, para os limites, o seguinte teorema: «se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

elemento infinito e se $g(x)$ é uma função limitada, então

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = b \gg;$$

vamos ver que para os W-limites esse teorema não se mantém.

Seja

$$f(x) = \frac{1}{|x|} \quad \text{para} \quad x \neq 0;$$

é claro que

$$W \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$$

e seja $g(x)$ a função de Dirichlet $D(x)$ definida na reta, isto é, $D(x) = 0$ se x é irracional e $D(x) = 1$ se x é racional. A função a considerar é pois

$$h(x) = \frac{1}{|x|} + D(x) \quad \text{para} \quad x \neq 0.$$

Dado o par (σ, ε) com

$$1 \leq \varepsilon_0 \leq \varepsilon < \sigma < \varepsilon + 1,$$

só temos $h(x) > \varepsilon$ num entorno à direita de 0, se a extremidade desse entorno fôr um ponto

$$\eta \leq \frac{1}{\varepsilon},$$

pois, primeiro se

$$x < \eta \leq \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{vem} \quad \frac{1}{x} + 0 > \varepsilon$$

e com maior razão

$$\frac{1}{x} + 1 > \varepsilon, \quad \text{donde} \quad \frac{1}{x} + D(x) = h(x) > \varepsilon;$$

segundo, se a extremidade fôr um ponto

$$\eta > \frac{1}{\varepsilon},$$

podemos tomar um irracional x' tal que

$$\eta > x' > \frac{1}{\epsilon},$$

vindo então

$$\frac{1}{x'} < \epsilon,$$

mas $D(x') = 0$, donde $h(x') < \epsilon$.

Temos, por outra, $h(x) > \sigma$ à direita de um ponto, só se esse ponto é um

$$\xi \geq \frac{1}{\sigma - 1},$$

pois, primeiro se

$$x > \xi \geq \frac{1}{\sigma - 1}, \quad \text{vem} \quad \frac{1}{x} + 1 < \sigma$$

e com maior razão

$$\frac{1}{x} + 0 < \sigma, \quad \text{donde} \quad \frac{1}{x} + D(x) = h(x) < \sigma;$$

segundo, se o ponto ξ acima referido fôr menor que

$$\frac{1}{\sigma - 1},$$

podemos tomar um racional x'' tal que

$$\xi < x'' < \frac{1}{\sigma - 1}, \quad \text{donde} \quad \frac{1}{x''} + 1 > \sigma$$

e como

$$D(x'') = 1, \quad \text{vem} \quad \frac{1}{x''} + D(x'') = h(x'') > \sigma;$$

mas

$$x > \frac{1}{\sigma - 1},$$

implica, já que $\sigma < \epsilon + 1$,

$$x > \frac{1}{\epsilon}$$

e portanto não existem os entornos η e α que a definição exige.

b) É, também, conhecido, na teoria dos limites, o teorema: « se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

e se $g(x)$ é limitada, então

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = 0 \gg;$$

tal teorema não se mantém para os W-limites como podemos ver com o seguinte exemplo.

Sejam $f(x) = |x|$ e $g(x) = D(x)$; pondo

$$f(x) \cdot g(x) = h(x) \quad \text{vem} \quad h(x) = |x| D(x);$$

o W-limite de $f(x)$ quando x tende para 0 é 0 e o limite de $h(x)$ é 0, por conseguinte, se existe o W-limite de $h(x)$, esse só poderá ser 0; entretanto não é 0, pois dado qualquer par (σ, ϵ) , quaisquer que sejam os entornos $\sqrt{\sigma}$ e α de 0, $\sqrt{\sigma} \subset \alpha$, temos sempre pontos irracionais x' em $\alpha - \sqrt{\sigma}$ e portanto $h(x') = 0$ que não poderá ser maior que $\sigma > 0$; logo o W-limite de $h(x)$ não existe.

c) Outro teorema que não se mantém quando passamos aos W-limites, é o seguinte: « se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

e se $g(x) \geq m > 0$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty \gg.$$

Para mostrar isso, consideremos a função

$$f(x) = \frac{1}{|x|},$$

para $x \neq 0$ e $g(x) = 1$, se x é racional e $g(x) = 2$, se x é irracional; é claro que

$$W \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad g(x) \geq 1 > 0.$$

Dado qualquer par (σ, ϵ) com $0 < \epsilon < \sigma < 2\epsilon$, só temos $h(x) > \epsilon$ num entorno à direita de 0, se a extremidade dêsse

entorno é um ponto

$$\eta \leq \frac{1}{\varepsilon},$$

pois, primeiro, para

$$x < \eta \leq \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{vem} \quad \frac{1}{x} > \varepsilon$$

e com maior razão

$$\frac{2}{x} > \varepsilon, \quad \text{donde} \quad h(x) > \varepsilon;$$

segundo, se a extremidade fôsse um ponto

$$\eta > \frac{1}{\varepsilon},$$

existe um racional x' tal que

$$\eta > x' > \frac{1}{\varepsilon},$$

implicando

$$\frac{1}{x'} < \varepsilon, \quad \text{donde} \quad h(x') < \varepsilon.$$

Temos, por outra, $h(x) < \sigma$ à direita de um ponto ξ , só se esse ponto é maior ou igual a $\frac{2}{\sigma}$, pois, primeiro, se

$$x > \xi \geq \frac{2}{\sigma}, \quad \text{vem} \quad \frac{2}{x} < \sigma$$

e com maior razão

$$\frac{1}{x} < \sigma, \quad \text{donde} \quad h(x) < \sigma;$$

segundo, se o ponto acima referido fôr um ξ menor que $\frac{2}{\sigma}$, e existe um irracional x'' tal que

$$\xi < x'' < \frac{2}{\sigma}, \quad \text{donde} \quad \frac{2}{x''} < \sigma'' \quad \text{e logo} \quad h(x'') > \sigma;$$

mas

$$x > \frac{2}{\sigma},$$

implica, já que $\mathcal{G} < 2\mathcal{E}$,

$$x > \frac{1}{\mathcal{E}}$$

e portanto não existem os entornos α e ν que a definição exige.

Com essas considerações concluímos que os teoremas de "arrastamento" da teoria dos limites, não valem para os W-limites.

d) Não vale para os W-limites o critério do confronto, isto é, se

$$W \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = W \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = b$$

e se

$$f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x),$$

não podemos concluir, em geral, a existência do W-limite da $g(x)$ quando x tende para a , como mostra o seguinte exemplo:

Sejam $f_1(x) = a_1|x|$, $f_2(x) = a_2|x|$ e $g(x)$ definidas na reta, sendo $g(x)$ a função do nº 16, isto é, $g(x) = a_1|x|$ para x racional, $g(x) = a_2|x|$ para x irracional, onde $0 < a_1 < a_2$; é claro que

$$W \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = W \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = 0$$

e que

$$f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x)$$

e no entanto o W-limite de $g(x)$ quando x tende para 0 não existe como já vimos.

53. - Proposição

"Se $f(x)$ está definida em \mathcal{C} , do qual a é ponto de saturação à esquerda, e é crescente em

$$\mathcal{C} \cap (a, +\infty)$$

e se dado qualquer par $(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ com $0 < \mathcal{G} < \mathcal{E} = \mathcal{E}_0$, existem δ e ζ satisfazendo a

$$0 < \zeta < \delta \quad \text{e} \quad (a, a + \delta) \subseteq \mathcal{C}'$$

e tais que para x_1 e x_2 pertencentes a

$$C \cap (a, a + \delta),$$

com $x_1 < x_2$, implique

$$f(x_2) - f(x_1) < \varepsilon$$

e para os mesmos pontos, com $x_2 - x_1 > \zeta$, implique

$$f(x_2) - f(x_1) > \zeta,$$

então existe o W-limite da $f(x)$ quando x tende para a pela direita."

Pelo teorema de convergência de Cauchy, existe o limite b de $f(x)$ quando x tende para a pela direita. Vamos mostrar que b é também W-limite; dado qualquer par (ζ, ε) com $0 < \zeta < \varepsilon = \varepsilon_0$, consideremos o par (ζ, ε^*) com $\zeta < \varepsilon^* < \varepsilon$, ao qual correspondem por hipótese os positivos δ e ζ^* ; temos então para x_1 e x_2 pertencentes a

$$C \cap (a, a + \delta),$$

com $x_1 < x_2$,

$$f(x_2) - f(x_1) < \varepsilon^* \quad \text{ou} \quad f(x_1) \geq f(x_2) - \varepsilon^*$$

e portanto, como podemos tomar

$$b = \inf \{ f(x); x \in C \cap (a, x_2) \}, \quad b \geq f(x_2) - \varepsilon^*,$$

donde para qualquer

$$x_2 \in C \cap (a, a + \delta) \quad \text{temos} \quad f(x_2) - b \leq \varepsilon^* < \varepsilon.$$

Seja agora um ζ tal que $\zeta^* < \zeta < \delta$ e sejam x_1 e x_2 dois pontos quaisquer de C tais que

$$0 < x_1 - a < \zeta - \zeta^* \quad \text{e} \quad \zeta < x_2 - a < \delta,$$

como $x_2 - x_1 > \zeta^*$, temos

$$f(x_2) - f(x_1) > \zeta, \quad \text{donde} \quad f(x_2) - b > \zeta$$

para qualquer

$$x_2 \in C \cap (a + \zeta, a + \delta).$$

54. - Considerações

a) Sabemos, pelo teorema da convergência de Cauchy, que, se

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b,$$

a oscilação $\Omega(\delta)$ da $f(x)$ em

$$C \cap (a, a + \delta)$$

tende para 0 quando δ tende a 0 pela direita e portanto que $\Omega(\delta)$ é limitada num entôrno à direita de 0; pondo $\Omega(0) = 0$, a $\Omega(\delta)$ é contínua no ponto 0 à direita, entretanto, como podemos ver nos exemplos abaixo, não é, em geral, contínua num entôrno à direita de 0.

a) Seja

$$f(x) = \frac{1}{n+1} \quad \text{para} \quad x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right],$$

$n = 1, 2, \dots$, pelo que vimos no exemplo f) do nº 14, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0.$$

Para

$$\delta \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right],$$

$$\Omega(\delta) = \sup \{ |f(x') - f(x'')|; x', x'' \in C \cap (0, \delta) \} =$$

$$= \sup \left\{ \frac{1}{n+1} - f(x''); x'' \in C \cap (0, \delta) \right\} =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \inf \{ f(x''), x'' \in C \cap (0, \delta) \} = \frac{1}{n+1}$$

e $\Omega(\delta)$ não é contínua, com a definição acima adotada no ponto 0, em qualquer entôrno à direita dêsse, pois dado qualquer entôrno à direita de 0 existe um n tal que

$$\frac{1}{n+1}$$

é interno ao mesmo e então

$$\lim_{\delta \rightarrow \frac{1}{n+1}^+} \Omega(\delta) = \frac{1}{n+1} \quad \text{e} \quad \lim_{\delta \rightarrow \frac{1}{n+1}^-} \Omega(\delta) = \frac{1}{n+2}$$

sendo assim $\Omega(\delta)$ descontínua no dito entôrno.

b) No exemplo anterior, a imagem do campo de definição não é um intervalo; no que segue, essa imagem é um intervalo e ainda assim não é possível um entôrno à direita de 0 em que $\Omega(\delta)$ seja contínua.

Seja

$$f(x) = -nx + 1 \quad \text{para} \quad x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right),$$

$n = 1, 2, \dots$, e ponhamos $-nx + 1 = y_n$; o gráfico de $f(x)$ é formado por segmentos que unem os pontos

$$\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1} \right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{n}, 0 \right),$$

excluído esse. É claro que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0,$$

pois dado $\epsilon > 0$ e tomado n tal que

$$\frac{1}{n+1} < \epsilon,$$

vem para

$$x \in \left(0, \frac{1}{n} \right) = \bigcup_{m=n}^{\infty} \left[\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m} \right) \quad \text{ou seja} \quad x \in \left[\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m} \right)$$

para algum

$$m \geq n, \quad y_m(x) = \frac{1}{m+1} \leq \frac{1}{n+1} < \epsilon.$$

Ainda

$$\begin{aligned} f((0, 1)) &= f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right)\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f\left(\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right)\right) = \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n+1} \right] = \left(0, \frac{1}{2} \right], \end{aligned}$$

isto é, a imagem do campo de definição é um intervalo, entretanto a oscilação não é contínua em qualquer entorno à direita de 0, como passamos a mostrar. Para

$$\delta \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right],$$

$$\begin{aligned} \Omega(\delta) &= \sup \{ |f(x') - f(x'')|; x', x'' \in C \cap (0, \delta) \} = \\ &= \sup \left\{ \frac{1}{n+1} - f(x''); x'' \in C \cap (0, \delta) \right\} = \\ &= \frac{1}{n+1} - \inf \{ f(x''); x'' \in C \cap (0, \delta) \} = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

e concluímos como no exemplo anterior, que em qualquer entorno à direita de 0 a $\Omega(\delta)$ não é contínua.

Notemos que em ambos os casos

$$f(x) \geq b = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x),$$

condições que empregaremos a seguir.

55. - Lema

"Se $f(x) \geq b$ e $f(x) - b \leq \lambda$ em $C \cap (a, a + \delta)$, então $\Omega(\delta) \leq \lambda$."

Admitamos que $\Omega(\delta) > \lambda$, existem então

$$x', x'' \in C \cap (a, a + \delta)$$

tais que

$$|f(x') - f(x'')| > \lambda$$

e supondo $f(x') \geq f(x'')$, vem

$$f(x') - f(x'') > \lambda \quad \text{donde} \quad f(x') - b > \lambda,$$

contra a hipótese.

56. - Lema

"Se

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b,$$

para quaisquer x_1 e δ tais que

$$x_1 \in C \cap (a, a + \delta), \quad \text{vale} \quad \Omega(\delta) \geq |f(x_1) - b|."$$

De fato,

$$\Omega(\delta) = \sup \left\{ |f(x') - f(x'')|; \right. \\ \left. x', x'' \in C \cap (a, a + \delta) \right\} \geq |f(x') - f(x_1)|$$

para

$$x' \in C \cap (a, a + \delta), \quad \text{donde} \quad f(x') \geq f(x_1) - \Omega(\delta)$$

e passando ao limite

$$b \geq f(x_1) - \Omega(\delta),$$

e ainda

$$f(x') \leq f(x_1) + \Omega(\delta)$$

donde, passando ao limite

$$b \leq f(x_1) + \Omega(\delta) \quad \text{e} \quad \Omega(\delta) \geq |f(x_1) - b|.$$

57. - Proposição

"Se $f(x) \geq b$ num entôrno α_0 à direita de a , excluído êsse ponto, e se

$$W \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b,$$

então a oscilação $\Omega(\delta)$ de $f(x)$, pondo $\Omega(0) = 0$, é contínua num entôrno à direita de 0."

Sendo $\Omega(0) = 0$, a $\Omega(\delta)$ é contínua à direita em 0. Se $f(x)$ é constante em algum entôrno à direita de a , excluído a , a proposição é imediata. Se tal não acontece, ainda temos que b é o W -limite de $f(x)$ quando x tende para a pela direita em

$$C \cap \alpha_0, \quad \text{pois} \quad a \in \omega \subseteq C'$$

implica

$$a \in \omega \cap \alpha_0 \subseteq C' \cap \alpha_0 \subseteq (C \cap \alpha_0)'$$

e sejam $\alpha_0 = [a, a + \delta_0)$ e ε_{01} o positivo inicial da $f(x)$ correspondente a $C \cap \alpha_0$. Admitamos que $\Omega(\delta)$ não seja con

tínua em qualquer entôrno à direita de 0, então 0 é ponto de acumulação à esquerda de pontos de descontinuidade de $\Omega(\delta)$; como $\Omega(\delta)$ é contínua à direita em 0, dado $\varepsilon_{01} > 0$ existe um entôrno $[0, \eta)$ onde $\Omega(\delta) < \varepsilon_{01}$; agora seja $\delta'_1 > 0$ um ponto de descontinuidade de $\Omega(\delta)$ tal que $\delta'_1 < \eta$, então $\Omega(\delta'_1) < \varepsilon_{01}$.

Como $\Omega(\delta)$ é não decrescente existem os

$$\lim_{\delta \rightarrow \delta'_1-} \Omega(\delta) = \Omega' \quad \text{e} \quad \lim_{\delta \rightarrow \delta'_1+} \Omega(\delta) = \Omega''$$

e são finitos pois $\Omega(\delta)$ é limitada em $[0, \eta)$ e ainda

$$\Omega' \leq \Omega(\delta'_1) \leq \Omega'',$$

mas como δ'_1 é ponto de descontinuidade, ao menos uma das desigualdades

$$\Omega' < \Omega(\delta'_1) \quad , \quad \Omega(\delta'_1) < \Omega''$$

deve ser verificada.

Suponhamos $\Omega' < \Omega(\delta'_1)$ e tomemos um par (δ, ε) com

$$\Omega' < \delta < \varepsilon < \min(\Omega(\delta'_1), \varepsilon_{01}),$$

então devido a existência do W-limite sôbre $C \cap \alpha_0$, existe o par $(\bar{c}, \bar{\delta})$ onde $\bar{\delta} \neq \delta'_0$, tal que para

$$x \in C \cap (a, a + \bar{\delta}) \quad , \quad f(x) < b + \varepsilon$$

e para

$$x \in C \cap (a + \bar{c}, a + \bar{\delta}), \quad f(x) > b + \delta.$$

Façamos agora duas hipóteses: 1ª) $\delta'_1 < \bar{\delta}$; como pelo lema do nº 55, $\Omega(\delta) \leq \varepsilon$ para $0 < \delta < \bar{\delta}$ visto que $\bar{\delta} \neq \delta'_0$, passando ao limite quando δ tende a δ'_1 pela direita, o que é possível dentro da hipótese que estamos fazendo, obtemos

$$\Omega'' \leq \varepsilon < \Omega(\delta'_1),$$

quando sabemos que $\Omega'' \geq \Omega(\delta'_1)$; 2ª) $\bar{\delta} \leq \delta'_1$; consideremos um δ^* tal que $\bar{c} < \delta^* < \bar{\delta}$, pelo lema do nº 55 vem

$$\Omega(\delta^*) \geq |f(x_1) - b| \quad \text{para} \quad x_1 \in C \cap (a + \bar{c}, a + \delta^*),$$

mas como $\delta^* < \bar{\delta} \leq \delta'_0$, vem $f(x_1) \geq b + \varepsilon$

$$\Omega(\delta^*) = f(x_1) - b \quad \text{donde} \quad \Omega(\delta^*) > \epsilon;$$

passando ao limite quando δ tende a δ_1 pela esquerda, o que é possível em virtude de hipótese em estudo e do fato de ser $\Omega(\delta)$ não decrescente, temos $\Omega' > \epsilon > \Omega'$, o que é um absurdo.

Se supusermos $\Omega(\delta_1) < \Omega''$ raciocinamos do mesmo modo, tomando,

$$\Omega(\delta_1) < \epsilon < \epsilon < \min(\Omega'', \epsilon_{01})$$

e chegamos com a primeira hipótese ao absurdo $\Omega'' < \Omega''$ e com a segunda a $\Omega' > \Omega(\delta_1)$ quando sabemos que $\Omega' \leq \Omega(\delta_1)$.

58. - Lema

"Se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \quad \text{se} \quad f(x) \geq b$$

num entôrno α_0 de a , excluído êsse ponto, e se $\Omega'(\delta)$ e $\Omega''(\delta)$ são as oscilações de $f(x)$ em

$$C \cap (a - \delta, a) \quad \text{e} \quad C \cap (a, a + \delta)$$

respectivamente, existe um entôrno α tal que para

$$(a - \delta, a + \delta) \subseteq \alpha,$$

a oscilação $\Omega(\delta)$ em

$$C \cap (a - \delta, a + \delta) - \{a\}$$

é igual a

$$\max(\Omega'(\delta), \Omega''(\delta))."$$

Seja α_1 um entôrno de a onde $f(x)$ é limitada, então pondo $\alpha = \alpha_0 \cap \alpha_1$, para δ tal que

$$(a - \delta, a + \delta) \subseteq \alpha,$$

$\Omega(\delta)$, $\Omega'(\delta)$ e $\Omega''(\delta)$ são finitas e temos a igualdade buscada, pois, primeiro,

$$\Omega(\delta) \geq \max(\Omega'(\delta), \Omega''(\delta))$$

visto que

$$\begin{aligned} & \{ |f(x_1) - f(x_2)|; x_1, x_2 \in C \cap (a - \delta, a + \delta) - \{a\} \} \supseteq \\ & \supseteq \{ |f(x_1) - f(x_2)|; x_1, x_2 \in C \cap (a - \delta, a) \} \cup \\ & \cup \{ |f(x_1) - f(x_2)|; x_1, x_2 \in C \cap (a, a + \delta) \}, \end{aligned}$$

e segundo, $\Omega(\delta)$ não é maior que

$$\max(\Omega'(\delta), \Omega''(\delta));$$

supondo que $\Omega''(\delta) \geq \Omega'(\delta)$, admitamos que $\Omega(\delta) > \Omega''(\delta)$, existem então dois pontos

$$x_1, x_2 \in C \cap (a - \delta, a + \delta) - \{a\}$$

tais que

$$|f(x_1) - f(x_2)| > \Omega''(\delta)$$

e é claro que x_1 e x_2 não podem pertencer simultaneamente a

$$C \cap (a - \delta, a) \quad \text{ou} \quad C \cap (a, a + \delta)$$

pois

$$|f(x_1) - f(x_2)| > \Omega''(\delta) \geq \Omega'(\delta);$$

digamos pois que

$$x_1 \in C \cap (a - \delta, a) \quad \text{e} \quad x_2 \in C \cap (a, a + \delta)$$

e que

$$f(x_2) \geq f(x_1), \quad \text{então} \quad f(x_2) - b \geq f(x_2) - f(x_1),$$

e vem pelo lema do nº 56,

$$\Omega''(\delta) \geq f(x_2) - b \geq |f(x_1) - f(x_2)| > \Omega''(\delta)$$

o que é uma contradição; se

$$f(x_2) < f(x_1), \quad , \quad f(x_1) - b > f(x_1) - f(x_2)$$

e

$$\Omega'(\delta) \geq f(x_1) - b > |f(x_1) - f(x_2)| > \Omega''(\delta)$$

quando

$$\Omega'' \geq \Omega'(\delta),$$

portanto

$$\Omega(\delta) = \max(\Omega'(\delta), \Omega''(\delta)).$$

59. - Lema

"Se $a_1 < b_1$ e $a_2 < b_2$, então
 $\text{máx}(a_1, a_2) < \text{máx}(b_1, b_2)$."

Se $\text{máx}(a_1, a_2)$ e $\text{máx}(b_1, b_2)$ são a_1 e b_1 ou a_2 e b_2 respectivamente, é imediato. Se

$$\text{máx}(a_1, a_2) = a_1 \quad \text{e} \quad \text{máx}(b_1, b_2) = b_2,$$

temos

$$a_1 < b_1 \leq \text{máx}(b_1, b_2) = b_2;$$

o quarto caso recai nesse último por simetria.

60. - Lema

"Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções definidas num mesmo campo C e contínuas em a , então $\text{máx}(f(x), g(x))$ também o é."

Dado $\varepsilon > 0$ existem δ_1 e δ_2 positivos tais que para

$$x \in C \cap (a - \delta_1, a + \delta_1) \quad , \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

e para

$$x \in C \cap (a - \delta_2, a + \delta_2) \quad , \quad |g(x) - g(a)| < \varepsilon.$$

Dessas relações vem para

$$x \in C \cap (a - \text{mín}(\delta_1, \delta_2), a + \text{mín}(\delta_1, \delta_2)),$$

$$f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon \quad \text{e} \quad g(a) - \varepsilon < g(x) < g(a) + \varepsilon,$$

donde pela proposição anterior,

$$\begin{aligned} \text{máx}(f(x), g(x)) &> \text{máx}(f(a) - \varepsilon, g(a) - \varepsilon) = \\ &= \text{máx}(f(a), g(a)) - \varepsilon; \end{aligned}$$

ainda,

$$\begin{aligned} \text{máx}(f(x), g(x)) &< \text{máx}(f(a) + \varepsilon, g(a) + \varepsilon) = \\ &= \text{máx}(f(a), g(a)) + \varepsilon \end{aligned}$$

donde,

$$\text{máx } (f(a), g(a)) - \varepsilon < \text{máx } (f(x), g(x)) < \text{máx } (f(a), g(a)) + \varepsilon$$

ou

$$|\text{máx } (f(x), g(x)) - \text{máx } (f(a), g(a))| < \varepsilon,$$

que mostra ser

$$\text{máx } (f(x), g(x))$$

contínua no ponto a .

61. - Proposição

"Se

$$W \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

e se $f(x) \cong b$ num entôrno de a , excluído êsse ponto, então pondo $\Omega(0) = 0$, a oscilação $\Omega(\delta')$ é contínua num entôrno à direita de 0."

Considerando os W-limites à esquerda e à direita de a , aplicamos a proposição do nº 57, e na intersecção entre o menor dos entornos à direita de 0 proveniente dessa proposição e o entôrno à direita de 0 que podemos tomar para δ' do lema do nº 58, utilizamos êsse e o acima demonstrado.

Observemos que se $f(x)$ é contínua em a podemos evitar a exclusão dêsse ponto para o cálculo de $\Omega(\delta')$, pois se com a inclusão do ponto a tivéssemos uma oscilação $\Omega' > \Omega$, já que para

$$x', x'' \in C \cap (a - \delta', a + \delta') - \{a\},$$
$$|f(x') - f(x'')| \leq \Omega,$$

existe um

$$x' \in C \cap (a - \delta', a + \delta') - \{a\}$$

tal que

$$|f(x') - f(a)| > \Omega;$$

dado

$$\varepsilon = |f(x') - f(a)| - \Omega > 0,$$

como a $f(x)$ é contínua em a , existe um

$$x'' \in \mathbb{C} \cap (a - \delta, a + \delta) - \{a\}$$

tal que

$$|f(x'') - f(a)| < |f(x') - f(a)| - \Omega$$

donde

$$|f(x') - f(x'')| > \Omega,$$

o que não é possível.

62. - Corolário

"Se $f(x)$ é contínua em a , ponto de saturação de \mathbb{C} e ponto de mínimo relativo da $f(x)$, e se o W -limite da $f(x)$ quando x tende para a existe, pondo $\Omega(0) = 0$, a oscilação da $f(x)$, sem excluir a , é contínua num entôrno à direita de 0."

63. - Proposição

"Se $f(x)$ é contínua em a , ponto de saturação de \mathbb{C} , crescente num entôrno α'_0 à direita de a e decrescente num entôrno α''_0 à esquerda dêsse ponto e se existe o W -limite quando x tende para a , existe um homeomorfismo φ entre um intervalo $(0, \eta)$ e o conjunto dos entornos simétricos α de a contidos pròpriamente num entôrno simétrico α^* de a , tal que se representamos $\Omega(\delta)$ por $\Omega(\alpha)$, sendo

$$\alpha = (a - \delta, a + \delta), \text{ temos } \Omega(\varphi(\xi)) = \xi$$

para todo $\xi \in (0, \eta)$."

Com efeito, tomemos $\delta^* > 0$ pertencente ao entôrno de que fala o enunciado da proposição do nº 61 e tal que

$$\alpha^* = (a - \delta^*, a + \delta^*) \subseteq \omega \cap (\alpha'_0 \cap \alpha''_0);$$

pondo $\Omega(\delta^*) = \eta$, é claro que $\eta > 0$, pois do contrário $f(x)$ seria constante em α^* , e que para $0 < \delta < \delta^*$, $0 < \Omega(\delta) < \eta$, pois não pode ser 0 e sendo $\Omega(\delta)$ não decrescente, $\Omega(\delta) \leq \eta$, mas não vale a igualdade pois essa implicaria $\Omega(\delta) = \Omega(\delta^*)$ e como δ^* pertence ao entôrno da pro-

posição do nº 61, vem

$$\text{máx} (\Omega'(\delta), \Omega''(\delta)) = \text{máx} (\Omega'(\delta^*), \Omega''(\delta^*));$$

e se

$$\text{máx} (\Omega'(\delta), \Omega''(\delta)) = \Omega'(\delta)$$

e

$$\text{máx} (\Omega'(\delta^*), \Omega''(\delta^*)) = \Omega''(\delta^*)$$

temos

$$\Omega'(\delta) = \Omega''(\delta^*) \geq \Omega'(\delta^*) \quad \text{donde} \quad \Omega'(\delta) = \Omega'(\delta^*);$$

se os máximos forem respectivamente $\Omega''(\delta)$ e $\Omega'(\delta)$ temos

$$\Omega''(\delta) = \Omega'(\delta^*) \geq \Omega''(\delta^*) \quad \text{donde} \quad \Omega''(\delta) = \Omega''(\delta^*);$$

os outros casos são óbvios, portanto sempre temos ou

$$\Omega'(\delta) = \Omega'(\delta^*) \quad \text{ou} \quad \Omega''(\delta) = \Omega''(\delta^*).$$

Suponhamos esse último caso, então como

$$0 \leq \Omega''((a + \delta, a + \delta^*)) \leq \Omega''(\delta^*) - \Omega''(\delta) = 0$$

vem

$$\Omega''((a + \delta, a + \delta^*)) = 0$$

e a $f(x)$ é constante em

$$C \cap (a + \delta, a + \delta^*) \quad \text{quando} \quad \alpha^* \subset \alpha''.$$

Sendo $\Omega(\delta)$ definida em $[0, \delta^*]$, com $\Omega(0) = 0$, contínua, dado um ξ tal que $0 < \xi < \eta$, existe um $\delta \in (0, \delta^*)$ tal que $\Omega(\delta) = \xi$; temos assim uma aplicação Ω do intervalo $(0, \delta^*)$ sobre o intervalo $(0, \eta)$.

Mostremos que Ω é biunívoca; suponhamos que

$$\Omega(\delta_1) = \Omega(\delta_2),$$

para δ_1 e δ_2 pertencentes a $(0, \delta^*)$ e que $\delta_1 \neq \delta_2$, então temos

$$\text{máx} (\Omega'(\delta_1), \Omega''(\delta_1)) = \text{máx} (\Omega'(\delta_2), \Omega''(\delta_2)),$$

$$\Omega'(\delta_1) \leq \Omega'(\delta_2) \quad \text{e} \quad \Omega''(\delta_1) \leq \Omega''(\delta_2);$$

segundo raciocínio análogo ao acima desenvolvido, concluímos que

$$\Omega(\delta_1) = \Omega(\delta_2)$$

implica ou

$$\Omega'(\delta_1) = \Omega'(\delta_2) \quad \text{ou} \quad \Omega''(\delta_1) = \Omega''(\delta_2).$$

Vejamos que $\delta_1 < \delta_2$ implica

$$\Omega''(\delta_1) < \Omega''(\delta_2) \quad \text{e} \quad \Omega'(\delta_1) < \Omega'(\delta_2):$$

como $\alpha^* \subseteq \omega \subseteq \mathbb{C}$, existem dois pontos m e n de \mathbb{C} tais que

$$a + \delta_1 < m < n < a + \delta_2 \quad (1);$$

e pois que

$$m < a + \delta_2 \quad \text{e} \quad \delta_2 < \delta^* \quad \text{e} \quad \alpha^* \subseteq \alpha''_a,$$

para

$$x \in \mathbb{C} \cap (a, m) \quad \text{temos} \quad f(x) < f(m)$$

donde

$$f(x) - f(a) < f(m) - f(a),$$

e logo pelo lema do nº 55,

$$\Omega''(m - a) \leq f(m) - f(a), \quad (2);$$

como $f(x)$ é contínua em a e

$$n < a + \delta_2 \quad \text{e} \quad \delta_2 < \delta^* \quad \text{e} \quad \alpha^* \subseteq \alpha''_a,$$

temos $f(a) < f(n)$, donde pelo lema do nº 56,

$$f(n) - f(a) = |f(n) - f(a)| \leq \Omega(\delta_2) \quad (3),$$

e portanto de (1), (2) e (3) vem

$$\Omega''(\delta_1) \leq \Omega''(m - a) \leq f(m) - f(a) < f(n) - f(a) \leq \Omega''(\delta_2),$$

donde

$$\Omega''(\delta_1) < \Omega''(\delta_2);$$

de modo análogo viria

$$\Omega'(\delta_1) < \Omega'(\delta_2)$$

e logo

$$\Omega(\delta_1) = \Omega(\delta_2)$$

implica $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ e a Ω é biunívoca. Existe também uma correspondência biunívoca \mathfrak{F} do intervalo $(0, \delta^*)$ sobre o conjunto dos entornos simétricos de a contidos em α^* , e então

$$\varphi = \mathfrak{F} \Omega^{-1}$$

é aplicação biunívoca definida em $(0, \eta)$ sobre esse conjunto de entornos $\alpha \subset \alpha^*$ e satisfaz para todo $0 < \xi < \eta$ a igualdade

$$\Omega(\varphi(\xi)) = \xi.$$

Reparando que Ω é um homeomorfismo e portanto Ω^{-1} também, e que, pondo a distância entre dois entornos

$$\alpha_1 = (a - \delta_1, a + \delta_1) \quad \text{e} \quad \alpha_2 = (a - \delta_2, a + \delta_2)$$

igual a $|\delta_1 - \delta_2|$, a \mathfrak{F} é um homeomorfismo, temos que φ é um homeomorfismo.

64. - Lema

"Se

$$\text{máx}(a', b') \leq c \quad \text{e} \quad \text{mín}(a'', b'') \geq c,$$

então

$$\text{máx}(a'', b'') - \text{mín}(a', b') \geq |a' - b'| + |a'' - b''|."$$

Seja $\text{mín}(a', b') = a'$, então

$$|a' - b'| = b' - a' \leq c - a' = c - \text{mín}(a', b');$$

ainda, seja $\text{máx}(a'', b'') = b''$, então

$$|a'' - b''| = b'' - a'' \leq b'' - c = \text{máx}(a'', b'') - c,$$

donde

$$|a' - b'| + |a'' - b''| \leq \text{máx}(a'', b'') - \text{mín}(a', b').$$

65. - Lema

"Se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

$f(x) \leq b$ num entôrno α'_0 à esquerda de a , excluído êsse ponto, e $f(x) \geq b$ num entôrno α''_0 à direita de a , excluído também êsse ponto, existe um entôrno α de a tal que.

$$\Omega(\delta) = \Omega'(\delta) + \Omega''(\delta),$$

para δ satisfazendo a condição

$$(a - \delta, a + \delta) \subseteq \alpha.$$

Seja α_1 um entôrno onde $f(x)$ é limitada e ponhamos

$$\alpha = \alpha_1 \cap (\alpha'_0 \cup \alpha''_0);$$

já que

$$(a - \delta, a + \delta) \subseteq \alpha'_0 \cup \alpha''_0,$$

pelo lema nº 56, se

$$x \in C \cap (a, a + \delta)$$

temos

$$\Omega''(\delta) \geq |f(x_2) - b| \geq f(x_2) - b$$

e se

$$x_1 \in C \cap (a - \delta, a) \quad \text{temos} \quad \Omega'(\delta) \geq b - f(x_1),$$

donde

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= f(x_2) - f(x_1) = \\ &= f(x_2) - b + b - f(x_1) \leq \Omega''(\delta) + \Omega'(\delta); \end{aligned}$$

se

$$x'_1, x'_2 \in C \cap (a - \delta, a)$$

vem

$$|f(x'_1) - f(x'_2)| \leq \Omega'(\delta) \leq \Omega'(\delta) + \Omega''(\delta),$$

e se

$$x''_1, x''_2 \in C \cap (a, a + \delta)$$

vem

$$|f(x''_1) - f(x''_2)| \leq \Omega''(\delta) \leq \Omega'(\delta) + \Omega''(\delta),$$

portanto para

$$x_1, x_2 \in C \cap (a - \delta, a + \delta) - \{a\},$$

temos

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \Omega'(\delta) + \Omega''(\delta) \quad (1).$$

Dado $\varepsilon > 0$, existem os pontos

$$x_1', x_2' \in C \cap (a - \delta, a) \quad \text{e} \quad x_1'', x_2'' \in C \cap (a, a + \delta)$$

tais que

$$|f(x_1') - f(x_2')| > \Omega'(\delta) - \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$|f(x_1'') - f(x_2'')| > \Omega''(\delta) - \frac{\varepsilon}{2}$$

donde pelo lema anterior

$$\max(f(x_1''), f(x_2'')) - \min(f(x_1'), f(x_2')) \geq$$

$$\geq |f(x_1') - f(x_2')| + |f(x_1'') - f(x_2'')| > \Omega'(\delta) + \Omega''(\delta) - \varepsilon$$

e existem então um

$$x_i' \in C \cap (a - \delta, a) \quad \text{e um} \quad x_j'' \in C \cap (a, a + \delta),$$

$i, j = 1, 2$, tais que

$$|f(x_i') - f(x_j'')| > \Omega'(\delta) + \Omega''(\delta) \quad (2),$$

e (1) e (2) mostram que

$$\Omega'(\delta) + \Omega''(\delta) = \sup \{ |f(x_1) - f(x_2)| ;$$

$$x_1, x_2 \in C \cap (a - \delta, a + \delta) - \{a\} \} = \Omega(\delta).$$

66. - Proposição

"Se

$$W \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

se $f(x) \leq b$ num entôrno à esquerda de a , excluído êsse ponto, e se $f(x) \geq b$ num entôrno à direita de a , excluído também êsse ponto, pondo $\Omega(0) = 0$, existe um entôrno à direita de 0 no qual a oscilação é contínua."

Considerando os W -limites à esquerda e à direita de

a, aplicamos a proposição do nº 57 e na intersecção entre o menor dos entornos à direita de 0 provenientes dessa proposição e o entorno à direita de 0 que podemos tomar para δ , do lema anterior, utilizamos esse e o teorema da soma de duas funções contínuas. Como já vimos, se $f(x)$ é contínua no ponto a, podemos evitar a exclusão do ponto a.

67. - Corolário

"Se $f(x)$ é não decrescente em a, ponto de saturação de C, e se o W-limite existe quando x tende para a, pondo $\Omega(0) = 0$, existe um entorno à direita de 0, onde a oscilação da $f(x)$, sem excluir a, é contínua."

68. - Proposição

"Se $f(x)$ é contínua em a, ponto de saturação de C, e é crescente num entorno α_0 de a, e se o W-limite existe quando x tende para a, existe uma correspondência biunívoca φ de um intervalo $(0, \eta)$ sôbre o conjunto dos entornos simétricos α de a, contidos pròpriamente num entorno simétrico α^* de a tal que

$$\Omega(\varphi(\xi)) = \xi,$$

para todo $\xi \in (0, \eta)$."

Com efeito, tomando $\delta^* > 0$ pertencente ao entorno de que fala a proposição do nº 66 e tal que

$$\alpha^* = (a - \delta^*, a + \delta^*) \subseteq \omega \cap \alpha_0,$$

serve a demonstração da proposição do nº 63 até a conclusão de que Ω é uma aplicação sôbre. Para mostrarmos que Ω é biunívoca, supnhamos

$$\delta_1 < \delta_2 < \delta^*; \quad \text{como} \quad \alpha^* \subseteq \omega \subseteq C',$$

existem pontos m, n, p e q de C tais que

$$a - \delta_2 < m < n < a - \delta_1 \quad \text{e} \quad a + \delta_1 < p < q < a + \delta_2$$

e como $\alpha^* \subseteq \alpha_0$, temos então

$$\Omega([m, q]) = f(q) - f(m) \quad \text{e} \quad \Omega([n, p]) = f(p) - f(n)$$

e ainda como $\alpha^* \subseteq \alpha_0$,

$$\begin{aligned} \Omega(\mathcal{J}_2) &\supseteq \Omega([m, q]) = f(q) - f(m) > f(p) - f(n) = \\ &= \Omega([n, p]) \supseteq \Omega(\mathcal{J}_1), \end{aligned}$$

donde

$$\Omega(\mathcal{J}_1) < \Omega(\mathcal{J}_2)$$

e Ω é biunívoca. O restante da demonstração é igual ao final da proposição do nº 63.

69. - Considerações

a) A recíproca da proposição do nº 57 não vale, isto é, se

$$b = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x),$$

se $f(x) \supseteq b$ num entôrno à direita de a e se, pondo

$$\Omega(0) = 0,$$

a $\Omega(\mathcal{J})$ é contínua num entôrno à direita de 0, não existe necessariamente o W-limite quando x tende para a pela direita, como nos mostra o exemplo seguinte.

Seja

$$f(x) = x D(x),$$

onde $D(x)$ é a função de Dirichlet. É claro que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad f(x) \supseteq 0;$$

vamos ver agora que $\Omega(\mathcal{J})$ é contínua. Ora

$$\begin{aligned} \Omega(\mathcal{J}) &= \sup \{ |x' D(x') - x'' D(x'')|; x', x'' \in (0, \mathcal{J}) \} = \\ &= \sup \{ |x' D(x') - x'' D(x'')|; \\ & \quad x', x'' \in (0, \mathcal{J}), x' \text{ racional}, x'' \text{ irracional} \} = \\ &= \sup \{ x'; x' \in (0, \mathcal{J}), x' \text{ racional} \} = \mathcal{J}, \end{aligned}$$

e portanto $\Omega(\mathcal{J})$ é contínua na reta não negativa pondo

$$\Omega(0) = 0,$$

entretanto pelo que vimos no nº 52, b) o W-limite quando x tende a 0 pela direita não existe.

b) Se retiramos do enunciado das proposições dos nºs 63 e 68 a existência do W-limite, essas proposições já não valem, isto é, φ não é necessariamente um homeomorfismo.

Basta tomar a função do nº 34 como está definida em $[0, 1)$ e por $f(x) = f(-x)$ para $-1 < x < 0$; como $f(x)$ é crescente em $[0, 1)$, pelo lema do nº 58 vem

$$\Omega\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) = \frac{1}{2n-2}, \quad \text{para } n > 1,$$

e para

$$\frac{1}{n+1} \leq \delta < \frac{1}{n}, \quad \Omega(\delta) = \frac{n+1}{2(2n-1)}\delta + \frac{n-1}{2n(2n-1)} - f(0),$$

donde

$$\lim_{\delta \rightarrow \frac{1}{n}^-} \Omega(\delta) = \frac{1}{2n-1} \neq \Omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

portanto $\Omega(\delta)$ não é contínua e φ não será homeomorfismo e não vale a proposição do nº 63.

Se em $(-1, 0)$ pomos $f(x) = -f(-x)$; como a $f(x)$ é crescente, pelo lema do nº 65 vem

$$\Omega\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{2n-2} = \frac{1}{n-1}, \quad \text{para } n > 1$$

e para

$$\frac{1}{n+1} \leq \delta < \frac{1}{n}, \quad \Omega(\delta) = \frac{n+1}{2n-1}\delta + \frac{n-1}{n(2n-1)},$$

donde

$$\lim_{\delta \rightarrow \frac{1}{n}^-} \Omega(\delta) = \frac{1}{2(2n-1)}$$

e como acima, a $\Omega(\delta)$ não é contínua e não vale a proposição do nº 68.

W-CONTINUIDADE

70. - Definição

"Diremos, como é natural, que $f(x)$ é W-contínua em $a \in \mathbb{C}$ e ponto de saturação de \mathbb{C} , se

$$W \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a);$$

se tal vale quando x tende para $a \in \mathbb{C}$, ponto de saturação à esquerda (direita) de \mathbb{C} , pela direita (esquerda), diremos que $f(x)$ é W-contínua à direita (esquerda) no ponto a ."

Os exemplos anteriores de W-limite são exemplos de funções W-contínuas em a .

Da definição de W-continuidade e das proposições anteriores, vêm as seguintes conseqüências:

a) "Se $f(x)$ é W-contínua em a , $f(x) + c$ também o é nesse ponto."

b) "Se $f(x)$ é W-contínua em a e $c \neq 0$, $c f(x)$ também o é nesse ponto."

c) "Se $f(x)$ é W-contínua em a , $|f(x)|$ também o é nesse ponto."

d) "Se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são W-contínuas em a e satisfazem as demais condições da proposição do nº 50,

$$f_1(x) + f_2(x)$$

é W-contínua em a ."

e) "Se $f(x)$ é crescente e contínua em a , ponto de saturação de \mathbb{C} , as afirmações « $f(x)$ é W-contínua em a » e « $f(a)$ é ponto de saturação da imagem de \mathbb{C} » são equivalentes."

f) "Se $f(x)$ é crescente e W -contínua em a , a função inversa $f^{-1}(y)$ é W -contínua em $f(a)$."

g) "Se $f(x)$ é W -contínua em a sobre dois conjuntos C_1 e C_2 que esgotam C , excetuado eventualmente a , e se as demais condições da proposição do nº 21 estão satisfeitas, $f(x)$ é W -contínua em a sobre C ."

h) "Se $f(x)$ é W -contínua à direita e à esquerda de a , é W -contínua nesse ponto."

i) "Se $f(x)$ é W -contínua sobre C , a condição necessária e suficiente para que $f(x)$ seja W -contínua sobre qualquer conjunto parcial $C_1 \subset C$, do qual a ainda é ponto de saturação, é que $f(x)$ não seja constante em nenhum entôrno à direita e em nenhum entôrno à esquerda de a ."

j) "Se na proposição do nº 39, mantidas as demais condições, as

$$f_i(\xi_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

são W -contínuas, a

$$(f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1)(\xi_1)$$

é W -contínua em a_1 ."

k) "Se $f(x)$ é W -contínua em a e se

$$f(x) \geq f(a)$$

num entôrno de a , pondo $\Omega(0) = 0$, a oscilação $\Omega(\mathcal{J})$ é contínua num entôrno à direita de 0 ."

l) "Se $f(x)$ é W -contínua em a , ponto de mínimo relativo da $f(x)$, pondo $\Omega(0) = 0$, existe um entôrno à direita de 0 onde $\Omega(\mathcal{J})$ é contínua."

m) "Se $f(x)$ é W -contínua em a , crescente num entôrno à direita de a e decrescente num entôrno à esquerda do mesmo, existe um homeomorfismo φ entre um intervalo aberto e o conjunto dos entôrnos simétricos de a contidos pròpriamente num entôrno simétrico do mesmo, tal que chamando $(0, \eta)$ o intervalo, se $\xi \in (0, \eta)$, vale $\Omega(\varphi(\xi)) = \xi$."

n) "Se $f(x)$ é W-contínua em a e
 $f(x) \leq f(a)$

num entôrno à esquerda de a e

$$f(x) \geq f(a)$$

num entôrno à direita do mesmo, pondo $\Omega(0) = 0$, a oscilação $\Omega(\rho)$ é contínua num entôrno à direita de 0."

o) "Se $f(x)$ é W-contínua em a e não decrescente nesse ponto, pondo $\Omega(0) = 0$, existe um entôrno à direita de 0 onde $\Omega(\rho)$ é contínua."

p) "Se $f(x)$ é W-contínua em a e crescente num entôrno dêsse ponto, existe um homeomorfismo entre um intervalo $(0, \eta)$ e o conjunto dos entornos simétricos de a , contidos pròpriamente num entôrno simétrico do mesmo, tal que para todo

$$\xi \in (0, \eta), \quad \text{vale} \quad \Omega(\varphi(\xi)) = \xi."$$

—oo0oo—