



AUTARQUIA ASSOCIADA À UNIVERSIDADE
DE SÃO PAULO

ANÁLISE DE SISTEMAS DE MEDIÇÃO DE FLUXO DE NÊUTRONS UTILIZANDO FUNÇÕES ESTATÍSTICAS

EDUARDO WINSTON PONTES

**Tese apresentada como parte dos
requisitos para obtenção do Grau de
Doutor em Ciências na Área de
Reatores Nucleares de Potência e
Tecnologia do Combustível Nuclear.**

**Orientador:
Dr. Ademar Ferreira**

São Paulo

1997

INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES
Autarquia associada à Universidade de São Paulo

**ANÁLISE DE SISTEMAS DE MEDIÇÃO DE FLUXO DE NÊUTRONS
UTILIZANDO FUNÇÕES ESTATÍSTICAS**

EDUARDO WINSTON PONTES

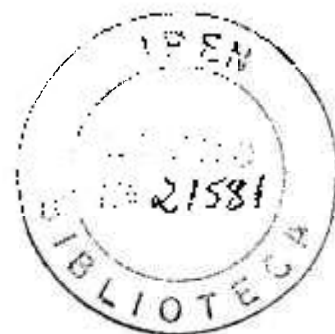
**Tese apresentada como parte dos requisitos
para obtenção do grau de Doutor em
Ciências na Área de Reatores Nucleares de
Potência e Tecnologia do Combustível
Nuclear.**

Orientador :

Dr. Ademar Ferreira

SÃO PAULO

1997



**Aos meus pais
Waldemar e Lúcia**

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Professor Ademar Ferreira por sua orientação. Suas valiosas sugestões e seu incentivo constante foram de principal importância para a realização deste trabalho.

Agradeço ao IPEN e particularmente à Diretoria de Reatores por seu apoio e por sua política de incentivo à formação de pessoal que possibilitaram o desenvolvimento desta tese.

Embora um trabalho teórico necessite de uma infra-estrutura limitada, cumpre-se agradecer aos serviços de biblioteca e de pós-graduação do IPEN e do Departamento de Eletricidade da EPUSP, por sua paciente atenção.

Aos colegas de trabalho, por sua compreensão, durante as fases em que estive dedicado a esta tarefa.

Finalmente, à minha família, principal força de motivação e suporte que acompanhou esta realização.

ANÁLISE DE SISTEMAS DE MEDIÇÃO DE FLUXO DE NÊUTRONS UTILIZANDO FUNÇÕES ESTATÍSTICAS

Eduardo Winston Pontes

RESUMO

Este trabalho desenvolve uma análise integrada para sistemas de medição de fluxo de nêutrons utilizando os conceitos de cumulantes e espectros. Sua principal contribuição é a generalização do teorema de Campbell na forma de espectros no domínio da frequência, e sua aplicação à análise de sistemas de medição de fluxo de nêutrons. O teorema de Campbell, na sua forma generalizada constitui uma ferramenta importante, não apenas para a obtenção dos espectros de frequência de ordem n do detector de radiação, mas também para a análise do sistema. O detector de radiação, uma câmara de ionização sensível à nêutrons, é modelada para as geometrias, cilíndrica, plana e esférica. Os pulsos de corrente do detector são caracterizados por um vetor de parâmetros aleatórios, e cargas associadas, momentos estatísticos e os espectros de frequência da corrente resultante são calculados. Um programa de computador aplica a metodologia desenvolvida. Para realizar uma análise integrada com a eletrônica para o desenvolvimento de sistemas, estuda-se o processador de sinal, considerando configurações analógicas e digitais. Unifica-se a análise por meio do desenvolvimento do conceito de sistemas equivalentes que podem ser utilizados para descrever os cumulantes e espectros de sistemas analógicos e digitais. Realiza-se a análise de ruído do estágio de entrada em termos dos espectros de segunda ordem. Apresentam-se expressões para os cumulantes e espectros até quarta ordem, para casos importantes de posicionamento dos filtros do processador em relação aos espectros do detector. Utilizam-se estimadores não-tendenciosos convencionais, e, para avaliar a precisão e tempo de resposta dos sistemas, desenvolvem-se expressões para suas variâncias. Finalmente, discutem-se algumas possibilidades de obtenção do fluxo de nêutrons em função dos cumulantes. Em resumo, o trabalho propõe um conjunto de ferramentas de análise com o objetivo de viabilizar importantes decisões de projeto para o desenvolvimento de sistemas de medição de fluxo de nêutrons, que apresentariam melhor desempenho que similares anteriores.

ANALYSIS OF NEUTRON FLUX MEASUREMENT SYSTEMS USING STATISTICAL FUNCTIONS

Eduardo Winston Pontes

ABSTRACT

This work develops an integrated analysis for neutron flux measurement systems using the concepts of cumulants and spectra. Its major contribution is the generalization of Campbell's theorem in the form of spectra in the frequency domain, and its application to the analysis of neutron flux measurement systems. Campbell's theorem, in its generalized form, constitutes an important tool, not only to find the n th-order frequency spectra of the radiation detector, but also in the system analysis. The radiation detector, an ionization chamber for neutrons, is modeled for cylindrical, plane and spherical geometries. The detector current pulses are characterized by a vector of random parameters, and the associated charges, statistical moments and frequency spectra of the resulting current are calculated. A computer program is developed for application of the proposed methodology. In order for the analysis to integrate the associated electronics, the signal processor is studied, considering analog and digital configurations. The analysis is unified by developing the concept of equivalent systems that can be used to describe the cumulants and spectra in analog or digital systems. The noise in the signal processor input stage is analysed in terms of second order spectrum. Mathematical expressions are presented for cumulants and spectra up to fourth order, for important cases of filter positioning relative to detector spectra. Unbiased conventional estimators for cumulants are used, and, to evaluate systems precision and response time, expressions are developed for their variances. Finally, some possibilities for obtaining neutron radiation flux as a function of cumulants are discussed. In summary, this work proposes some analysis tools which make possible important decisions in the design of better neutron flux measurement systems.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Apresentação do problema	1
1.1.1	Sistema convencional	1
1.1.2	Sistema Campbell	3
1.1.3	Outros sistemas	4
1.1.4	Deficiências dos sistemas atuais	4
1.2	Apresentação do sistema Campbell	5
1.2.1	Descrição da detecção de radiação numa câmara de ionização sensível a nêutrons	5
1.2.2	Teorema de Campbell aplicado à medição do fluxo de nêutrons	8
1.2.3	Breve histórico	11
1.3	Apresentação do trabalho proposto	12
1.3.1	Motivação	12
1.3.2	Objetivo e breve descrição	13
2	ANÁLISE DO PROCESSO ESTOCÁSTICO DE DETECÇÃO NUCLEAR	16
2.1	Introdução	16
2.2	Estatísticas de um processo estocástico	17
2.3	Generalização do teorema de Campbell	21
2.3.1	Cumulante de ordem n	22
2.3.2	Espectro de ordem n	25
2.4	Estatísticas de um processo estocástico gaussiano	27
2.5	Aplicação a um sistema de medição de fluxo de radiação nuclear	28
2.5.1	Composição do processo estocástico de detecção nuclear	29
2.5.2	Considerações sobre as componentes	30
2.5.3	Expressões dos cumulantes e espectros	33

3 ANÁLISE DO DETECTOR	36
3.1 Introdução	36
3.2 Método para cálculo do pulso de corrente gerado por uma trilha de ionização retilínea em câmaras de ionização	38
3.2.1 Pulso de corrente gerado por um ponto de ionização	38
3.2.2 Pulso de corrente gerado por uma trilha de ionização retilínea	42
3.2.3 Detalhamento do método	43
3.2.3.1 Tempo de coleção e posição do portador de carga	43
3.2.3.2 Geometrias	45
3.2.3.3 Campo elétrico e potencial	46
3.2.3.4 Velocidade do portador de carga	46
3.2.3.5 Poder de freamento, alcance e ionização específica	48
3.2.3.6 Posição inicial da ionização e comprimento da trilha	53
3.3 Comportamento estatístico do detector	55
3.3.1 Equações gerais	55
3.3.2 Vetor P_{rad}	56
3.3.3 Comportamento das respostas do detector e dos espectros	58
3.3.3.1 Comportamento no domínio do tempo	59
3.3.3.2 Comportamento no domínio da frequência	61
3.3.4 Modelo simplificado : câmara de eletrodos próximos	64
3.4 Aplicação	70
4 ANÁLISE DO PROCESSADOR DE SINAL	74
4.1 Introdução	74
4.2 Configurações	76
4.2.1 Expressões para os cumulantes e espectros	78
4.2.1.1 Expressões gerais	79
4.2.1.2 Expressões e sistemas equivalentes	84
4.3 Adaptadores de Sinal	95
4.3.1 Análise de ruído	98

4.4	Filtros	102
4.4.1	Posicionamento dos filtros	102
4.4.1.1	Casos 1 e 2 : contribuições nas regiões planas dos espectros	103
4.4.1.2	Caso 3 : contribuições nas regiões de transição dos espectros	106
4.4.2	Filtros ideais	107
4.4.2.1	Primeiro cumulante	108
4.4.2.2	Cumulantes de ordem $n \geq 2$	108
4.5	Estimadores da taxa de eventos	115
4.5.1	Estimadores dos momentos	115
4.5.2	Estimadores dos cumulantes	117
4.5.3	Estimadores λ_{rad}	118
4.6	Precisão e tempo de resposta	120
4.6.1	Varianças dos estimadores dos cumulantes	121
4.6.1.1	Varianças dos estimadores dos momentos	121
4.6.1.2	Filtros ideais : varianças dos estimadores dos três primeiros cumulantes	124
4.6.2	Análise	129
5	CONCLUSÕES	133
	APÊNDICES	138
A.2	Apêndice do capítulo 2	139
A.2.1	Relações entre momentos e cumulantes	139
A.3	Apêndice do capítulo 3	143
A.3.1	Expressões resultantes da aproximação analítica da velocidade do elétron	143
A.3.2	Relações geométricas	145
A.3.3	Exemplo de aplicação do programa de computador	150
A.4	Apêndice do capítulo 4	153
A.4.1	Análise da influência dos parâmetros de entrada	153

A.4.2	Generalização do teorema da amostragem no domínio multidimensional	154
A.4.3	Filtros ideais : cálculo para o terceiro cumulante	157
A.4.4	Filtros ideais : quarto cumulante	161
A.4.5	Variança do terceiro cumulante	164
SIMBOLOGIA		171
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS		175

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação do problema

Um sistema de medição de fluxo de nêutrons para controle e proteção de um reator nuclear é constituído de várias vias redundantes, sendo utilizado para monitorar o fluxo, aproximadamente proporcional à potência do reator (fissão), desde a faixa de partida até a faixa de potência, num total de 10 a 11 décadas [Harrer e Beckerley, 1973].

Uma via de um sistema de medição ideal consistiria de um único sensor (detector) acoplado a um estágio de processamento de sinal, cobrindo 11 décadas com exatidão melhor que 1%, imune ao ruído gerado na planta nuclear e ao fluxo de gamas gerado no núcleo do reator, e com tempo de resposta adequado para o controle e proteção do reator. O sistema deveria continuar operacional mesmo durante e após condições adversas, padronizadas através dos chamados acidentes básicos de projeto da planta nuclear (ex.: LOCA : "Loss of Cooling Accident").

1.1.1 Sistema convencional

Historicamente, o requisito de faixa ampla de operação tem sido atendido por meio de uma via constituída de três canais eletrônicos de processamento do sinal, cobrindo respectivamente três faixas de operação do reator (faixa fonte ou de partida, intermediária e de potência) (figura 1-1).

Na faixa de partida utiliza-se normalmente um detector proporcional com $^{10}\text{BF}_3$ ou ^{10}B , ou uma câmara de ionização de fissão com ^{235}U . Nesta faixa, pulsos de corrente

isolados são produzidos para cada evento nuclear (interação do nêutron com o detector). A taxa média de pulsos de nêutrons, processada pelo canal eletrônico, é proporcional ao fluxo de nêutrons incidente no detector. Nesta faixa, os pulsos indesejáveis causados por outras radiações presentes, tais como alfa e gama, assim como o ruído e interferência eletrônica, são eliminados utilizando-se um discriminador de amplitude. Os pulsos de nêutrons acima do nível de discriminação são processados por um medidor de taxa de contagem.

Na região inferior da faixa intermediária superposta com a região superior da faixa de partida, a taxa de empilhamento dos pulsos de corrente aumenta, causando não-linearidades no medidor de taxa de contagem. Ultrapassando essa região, a identificação do pulso individual por discriminação de amplitude não pode mais ser realizada. Por isso, na faixa intermediária utiliza-se uma câmara de ionização com ^{10}B e mede-se o valor médio da corrente resultante dos pulsos já empilhados (tipicamente 10^{-11} a 10^{-3} A). Esse valor médio da corrente compõe-se da componente devida aos nêutrons e das componentes indesejáveis, ou seja, a correspondente aos gamas provenientes da atividade dos produtos de fissão e a correspondente à corrente de fuga da câmara e cabos. Como a componente de gamas nessa faixa não é proporcional à potência do reator e pode ser da mesma ordem de grandeza ou superior à componente de nêutrons para fluxos na região inferior intermediária, utiliza-se uma câmara de ionização compensada (CIC) com fator de compensação de 90 a 99%. Para reduzir a componente de fuga utilizam-se técnicas de projeto tais como: “guarding” [Knoll, 1989], amplificadores com baixa impedância de entrada, cabos com alta resistência de isolamento elétrica, etc..

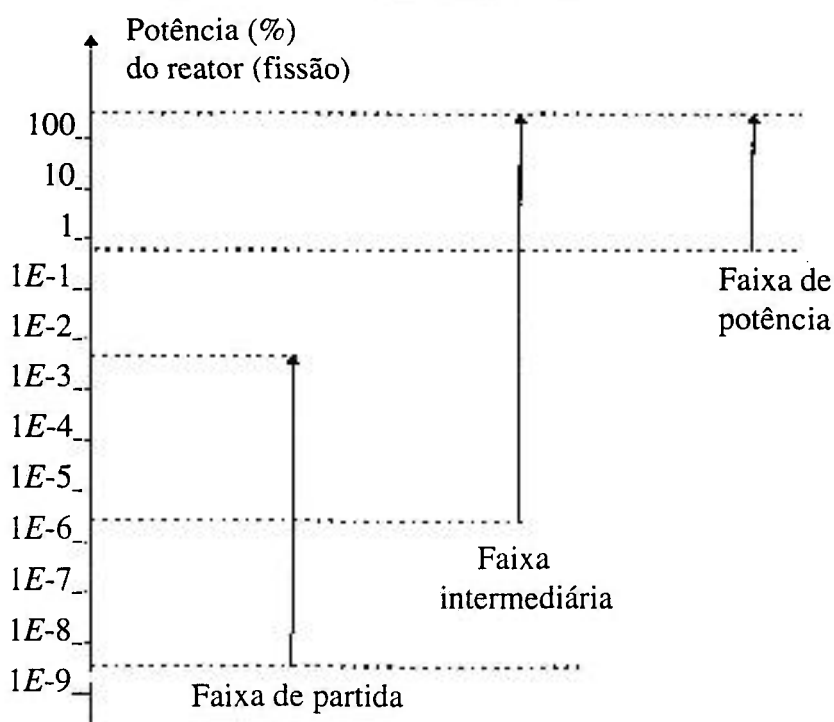


Figura 1-1 : Faixa de operação dos canais nucleares

Na faixa de potência, a componente de gamas é normalmente proporcional à potência do reator e desprezível face à componente dos nêutrons, de modo que se utiliza uma (ou mais) câmara de ionização com ^{10}B não-compensada (CINC) e mede-se também o valor médio da corrente, sendo a corrente de fuga menos crítica nessa faixa. Nos núcleos de grandes dimensões, (ex.: centrais nucleares), pode-se utilizar, para cada canal da faixa de potência, dois ou mais detectores combinados na direção axial com o objetivo de detectar o desvio axial do perfil do fluxo neutrônico (“axial offset”).

Com exceção eventual da faixa de potência, em todas as faixas deve-se medir o período do reator : intervalo de tempo em que o fluxo de nêutrons aumenta por um fator de $e=2,718\dots$.

1.1.2 Sistema Campbell

No final da década de 60 foram introduzidos sistemas de medição empregando o método Campbell [DuBridg e outros,1965; Trenholme e Keefe,1967; Popper e outros, 1967; Thomas e McBride, 1967; Plaige e Quenee, 1967], onde se mede a variância do sinal que é proporcional à taxa média de eventos no detector. Esse método possibilitou a utilização, em várias aplicações, de um único detector (câmara de fissão) para toda a faixa de operação do reator, e reduziu a sensibilidade ao fluxo de gamas por um fator superior a 40 [Popper e Harrer, 1968] em relação aos sistemas convencionais utilizando CIC .

Os sistemas implementados em reatores nucleares empregando o método Campbell realizam tipicamente o seguinte processamento analógico do sinal proveniente da câmara de fissão :

Na faixa de partida mede-se a taxa de contagem com saída logarítmica cobrindo de 5 a 6 décadas, procedimento idêntico ao já descrito para o sistema convencional.

Na faixa intermediária e de potência (aqui denominadas faixa Campbell) mede-se a variância do sinal com saída logarítmica cobrindo 5 a 6 décadas.

Na faixa de potência acrescenta-se um canal linear que mede o valor médio da corrente (em 2 décadas) com o objetivo de obter um valor mais exato do fluxo de nêutrons para controle e proteção do reator.

Também, mede-se o período do reator de forma análoga ao sistema convencional.

1.1.3 Outros sistemas

Outros sistemas para medição do fluxo de nêutrons do reator com apenas um detector foram propostos, mas nenhum deles foi empregado com sucesso em reatores. Entre eles pode-se citar a técnica da câmara de ionização pulsada [Ellis e outros, 1973], baseada no chaveamento da tensão de polarização da câmara e análise do sinal de anodo resultante, e a técnica do nível de discriminação variável [Valentine e outros, 1988], proposta mais recentemente, baseada no ajuste automático do nível de discriminação em função da taxa de contagem.

1.1.4 Deficiências dos sistemas atuais

Apresentam-se as principais deficiências de sistemas típicos (analógicos) do tipo convencional e do tipo Campbell.

a) Sistema convencional

Uma via do sistema convencional utiliza normalmente 3 ou mais detectores. A idéia de reduzir o número de detectores para cobrir toda a faixa de operação do reator é justificável não só pelos custos do detector “qualificado” (validado para utilização na área nuclear) ou da penetração de cabos na contenção do reator, mas também por problemas de espaço para acomodação do detector junto ao núcleo do reator, normalmente um ambiente agressivo de difícil acesso e manutenção complicada.

Também, no sistema convencional, a redução da componente de gamas pela utilização de câmara de ionização compensada em algumas aplicações não é suficiente [Thomas e McBride, 1967], principalmente no caso onde se requer uma partida do reator imediatamente após um desligamento, quando este operou por muito tempo à potência elevada.

Finalmente, o problema de fuga e deriva (“drift”) do nível médio da corrente ocorre sobretudo na região inferior da faixa intermediária (tipicamente ao redor de 10^{-11} A) conforme já mencionado. Deve-se considerar que a evolução tecnológica, representada por detectores e cabos elétricos de alta resistência de isolamento e componentes eletrônicos de baixa deriva, atualmente reduziram razoavelmente esse problema.

b) Sistema Campbell

O sistema Campbell apresenta problemas de calibração na região de superposição de faixas (partida e Campbell) [Endo e outros, 1982]. Este problema é acentuado devido à baixa capacidade de supervisão dos sistemas analógicos e também devido à pequena região linear de superposição das duas faixas de operação dos sistemas típicos.

Também ocorre inexatidão da medida Campbell no limite inferior da faixa devido ao ruído de fontes internas e externas (ao canal) e à componente alfa da câmara de fissão [Popper, 1979]. Este problema afeta também a calibração.

É de interesse mencionar a inexatidão da medida devido à característica logarítmica do sinal de saída e ao seu processamento analógico, com o objetivo de considerar a possibilidade de eliminação do canal linear para a faixa de potência. Este problema também é enfrentado pelos sistemas convencionais analógicos.

1.2 Apresentação do sistema Campbell

1.2.1 Descrição da detecção de radiação numa câmara de ionização sensível a nêutrons

A câmara de fissão é sem dúvida o detector mais adequado para a utilização em sistemas faixa ampla em reatores, empregando o método Campbell. Além da carga elétrica elevada ($\approx 10^{13}$ C) liberada por evento-nêutron e da relação elevada carga-nêutron / carga-gama (≈ 1000) possui também boas características de operação para aplicação em ambientes severos.

A câmara de ionização com ^{10}B não-compensada não pode hoje ser empregada em reatores pelos sistemas Campbell convencionais. Além da dificuldade de discriminar, na faixa de partida, os pulsos de nêutrons ($\approx 5 \times 10^{-15}$ C) dos pulsos de gama ($\approx 10^{-16}$ C) para altos fluxos de gamas, não se obtém o recobrimento adequado da faixa de partida e da faixa Campbell. No entanto, como outras aplicações desta câmara podem ser previstas, descreveremos brevemente aqui os princípios das duas câmaras.

a) Princípio da câmara de ionização

Uma câmara de ionização [Knoll, 1989] é constituída basicamente de dois eletrodos (anodo e catodo normalmente cilíndricos e concêntricos) eletricamente isolados

situados dentro de um invólucro contendo gás (ex.: argônio + nitrogênio). Os eletrodos são devidamente polarizados e acoplados a um circuito de medição conforme representado na figura 1-2.

O princípio de detecção de radiação baseia-se no seguinte :

A presença de uma partícula ionizante (produtos de fissão, alfa, ${}^7\text{Li}$, beta) com determinada energia (velocidade) dentro da câmara de ionização produz uma trilha de pares de íons (íon positivo, elétron) no gás. Sob a influência do campo elétrico entre os eletrodos da câmara, os elétrons e os íons positivos são atraídos para os eletrodos respectivos. O movimento resultante dos elétrons em direção do anodo e dos íons positivos em direção do catodo provocam por indução uma variação das cargas dos eletrodos e portanto um pulso de corrente elétrica no circuito. Este pulso de corrente é formado por duas componentes distintas devido à grande diferença de mobilidade dos íons positivos e elétrons no gás (fator de ≈ 1000), conforme representado na figura 1-3 para uma trilha de ionização e campo elétrico uniformes (aproximação). Esses pulsos de corrente possuem características dependentes do tipo da câmara, mas para dimensionar o problema pode-se estabelecer que tipicamente, as características de grande parte das realizações estão situadas nas faixas :

- Carga do pulso dos elétrons (da ordem de grandeza da carga do pulso dos íons positivos) : 10^{-13} a 10^{-16} C
- Duração do pulso dos elétrons : 0,05 a 1 μs
- Duração do pulso dos íons positivos : 50 a 1000 μs

Deve-se salientar que o pulso de tensão nos eletrodos da câmara é consequência do pulso original de corrente e dependente do circuito de adaptação do sinal, não servindo para o modelamento do sinal da câmara.

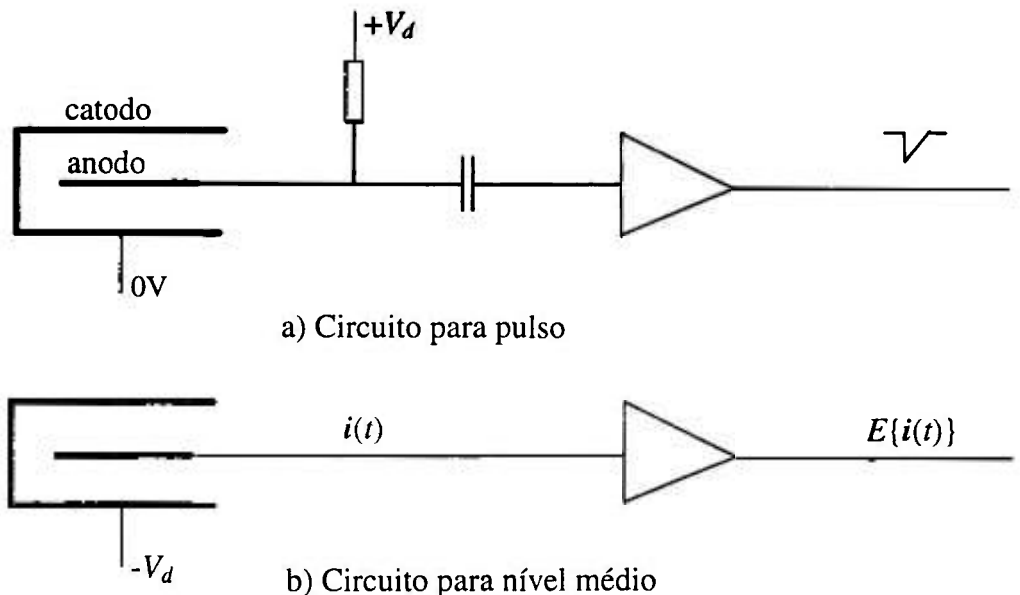


Figura 1-2 : Câmara de ionização e circuito associado

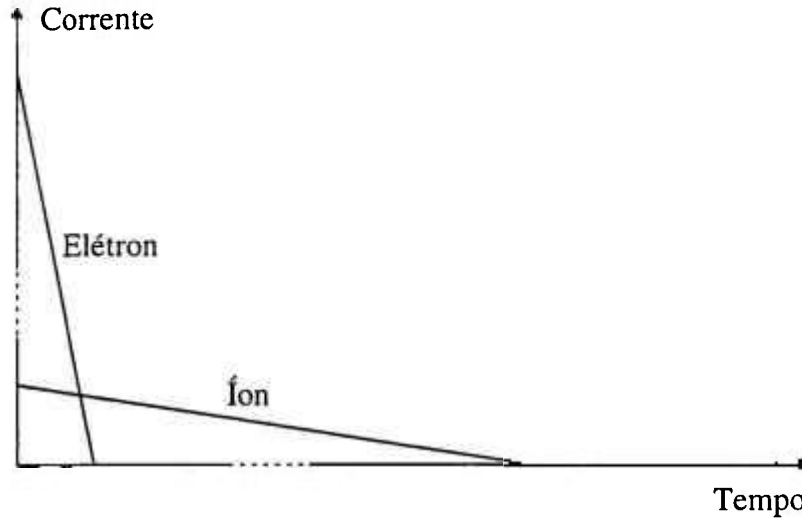
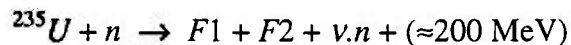


Figura 1-3 : Pulsos de corrente na câmara de ionização para uma trilha de ionização e campo elétrico uniformes

b) Princípio da câmara de fissão

O nêutron não possui capacidade para ionizar diretamente o gás, pois sua interação com a matéria é sobretudo em nível nuclear. Assim, para construir uma câmara de ionização sensível a nêutrons é necessário promover uma reação nuclear cujo produto seja uma radiação ionizante. O produto com maior poder de ionização é o fragmento de fissão. Dessa forma, revestem-se os eletrodos da câmara com uma fina película de material físsil, como o urânio enriquecido com ^{235}U na forma de um óxido (U_3O_8 ou UO_2). A reação nuclear



libera dois fragmentos de fissão $F1$ e $F2$ em sentidos opostos, sendo que apenas um deles deposita sua energia no gás, produzindo uma trilha de ionização retilínea.

Deve-se lembrar que uma câmara de fissão sofre da presença de pulsos devido a radiação alfa resultante da atividade natural dos elementos físséis e fissionáveis presentes (sobretudo do ^{234}U como impureza). Essa atividade produz cerca de $2,4 \times 10^3$ partículas alfa/segundo por mg de material físsil [McKenzie, 1959].

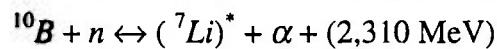
Deve-se ressaltar que a atividade alfa ao lado do ruído eletrônico constituem-se na limitação intrínseca (própria do canal) da medida do fluxo de nêutrons no extremo inferior da faixa Campbell [Popper, 1979]. A atividade resultante dos produtos de fissão e da ativação dos materiais constituintes da câmara tem um efeito secundário na limitação da faixa de operação.

Para dimensionar o problema apresentam-se algumas características típicas de uma câmara de fissão [Popper e outros, 1967; Plaige e outros, 1970] :

- Carga média por pulso-nêutron : 10^{-13} C
- Carga média por pulso-alfa : 10^{-14} C
- Carga média por pulso-gama : 10^{-16} C
- Carga média quadrática por pulso-nêutron : 6×10^{-27} C²
- Carga média quadrática por pulso-alfa : 4×10^{-30} C²
- Carga média quadrática por pulso-gama : não disponível
- Duração do pulso dos elétrons : $\approx 0,1$ μ s
- Duração do pulso dos íons positivos : ≈ 100 μ s

c) Princípio da câmara de ionização com ^{10}B

No caso da câmara de ionização com ^{10}B os eletrodos são revestidos com uma fina película de B enriquecido com ^{10}B , promovendo a reação $^{10}\text{B}(n,\alpha)$. Neste caso, para nêutrons térmicos em 94% dos eventos, tem-se a reação nuclear



produzindo as partículas de ${}^7\text{Li}$ no estado excitado (que decai por meio de gama de 0,48 MeV) e alfa, ambas deslocando-se em sentidos opostos com energias respectivas de $E_{\text{Li}7} = 0,84$ MeV e $E_{\alpha} = 1,47$ MeV. Similarmente à câmara de fissão, para um determinado evento, apenas uma das partículas ioniza o gás, produzindo uma trilha de ionização retilínea.

1.2.2 Teorema de Campbell aplicado à medição do fluxo de nêutrons

Os instantes correspondentes à interação do nêutron com o detector (eventos), e portanto correspondentes à ionização produzida (início do pulso) podem ser considerados como “pontos de Poisson” [Knoll, 1989; Thomas, 1971; Papoulis, 1991], isto é, sendo $n(t)$ o processo estocástico que representa o número de pontos ξ_i (pulsos) no intervalo $[0, t]$, então a probabilidade da ocorrência de k pulsos nesse intervalo é

$$p\{n(t) = k\} = \frac{e^{-\lambda t} \cdot (\lambda \cdot t)^k}{k!} \quad (1.2-1)$$

onde λ é a taxa média de eventos (ou de pulsos).

Os pulsos de corrente provenientes do detector, assim como os pulsos na saída do sistema linear acoplado ao detector, podem ser considerados como a saída de um sistema linear [Shanmugan e Breipohl, 1988; Papoulis, 1991] cuja entrada pode ser representada em primeira aproximação por um trem de impulsos de Poisson (associados aos pontos de

Poisson ξ_i) de amplitudes aleatórias a_i . Portanto, o sistema linear $h(t)$, representando o detector + eletrônica, e seus sinais correspondentes podem ser representados como

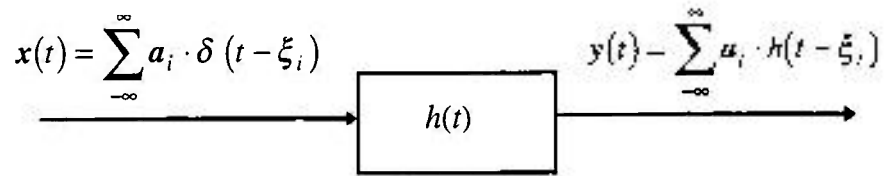


Figura 1-4 : Sistema linear representando detector + eletrônica

onde a_i são variáveis aleatórias identicamente distribuídas com função densidade de probabilidade (fdp) $f(a_i) = f(a)$, independentes entre si e independentes de ξ_i , e $h(t)$ representa a resposta impulsiva do detector + eletrônica.

As variáveis aleatórias a_i representam o caráter aleatório da amplitude do pulso de corrente do detector, sendo $a_i \cdot h(t)$ uma aproximação do pulso à saída, válida em alguns casos, pois em geral a forma do pulso também participa deste caráter aleatório.

As equações acima representam um processo tipo “shot” com estatísticas de primeira e segunda ordem já estudadas em vários textos [Campbell e Francis, 1946; Shanmugan e Breipohl, 1988; Papoulis, 1991].

Têm-se então os seguintes resultados :

Primeiro Teorema de Campbell

$$E\{y(t)\} = \lambda \cdot E\{a\} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) \cdot d\xi \quad (1.2-2)$$

Segundo Teorema de Campbell

$$E\{y^2(t)\} - E^2\{y(t)\} = \lambda \cdot E\{a^2\} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h^2(\xi) \cdot d\xi \quad (1.2-3)$$

onde $E\{\cdot\}$ indica a expectância.

Considerando a sensibilidade S do detector para a radiação de interesse (no caso nêutron), tem-se $\lambda = S \cdot \Phi$ onde Φ é o fluxo da radiação de interesse. Portanto, o primeiro teorema de Campbell mostra que o fluxo da radiação de interesse é proporcional à média $E\{y(t)\}$ de $y(t)$ enquanto o segundo teorema de Campbell mostra que o fluxo é proporcional à variância $E\{y^2(t)\} - E^2\{y(t)\}$ de $y(t)$. Assim, conhecendo-se as constantes $E\{a\}$,

$\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) \cdot d\xi$ ou $E\{a^2\}$, $\int_{-\infty}^{\infty} h^2(\xi) \cdot d\xi$, e estimando-se a média ou a variância do sinal de

saída $y(t)$, obtém-se uma estimativa da taxa média de eventos λ e portanto do fluxo Φ .

O sistema convencional já descrito, que mede a corrente média, utiliza o primeiro teorema de Campbell, e o sistema denominado “sistema Campbell” utiliza o segundo teorema de Campbell.

Considerando agora os processos estocásticos independentes associados às três radiações principais (alfa, gama e nêutron) presentes na câmara de fissão dentro de um reator nuclear, e aplicando os teoremas de Campbell, resulta

Primeiro Teorema de Campbell

$$E\{y(t)\} = \left(\lambda_n \cdot E\{a_n\} + \lambda_\gamma \cdot E\{a_\gamma\} + \lambda_\alpha \cdot E\{a_\alpha\} \right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) \cdot d\xi \quad (1.2-4)$$

Segundo Teorema de Campbell

$$E\{y^2(t)\} - E^2\{y(t)\} = \left(\lambda_n \cdot E\{a_n^2\} + \lambda_\gamma \cdot E\{a_\gamma^2\} + \lambda_\alpha \cdot E\{a_\alpha^2\} \right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h^2(\xi) \cdot d\xi \quad (1.2-5)$$

onde

λ_n , λ_γ e λ_α são as taxas médias de pulsos de nêutrons, gamas e alfas, respectivamente.

$(E\{a_n\}, E\{a_n^2\})$, $(E\{a_\gamma\}, E\{a_\gamma^2\})$ e $(E\{a_\alpha\}, E\{a_\alpha^2\})$ são as amplitudes médias e amplitudes médias quadráticas dos pulsos de nêutrons, gamas e alfas, respectivamente.

Para comparar os sistemas, calcula-se o erro que cada componente indesejável introduz em relação à componente de interesse (nêutron).

Assim, considerando a equação (1.2-2), pode-se escrever para o erro de um sistema empregando o primeiro teorema de Campbell :

$$\text{Erro devido aos gamas : } e1_\gamma = \frac{\lambda_\gamma \cdot E\{a_\gamma\}}{\lambda_n \cdot E\{a_n\}} \quad (1.2-6)$$

$$\text{Erro devido aos alfas : } e1_\alpha = \frac{\lambda_\alpha \cdot E\{a_\alpha\}}{\lambda_n \cdot E\{a_n\}} \quad (1.2-7)$$

$$\text{Erro total : } e1 = \frac{\lambda_\gamma \cdot E\{a_\gamma\} + \lambda_\alpha \cdot E\{a_\alpha\}}{\lambda_n \cdot E\{a_n\}} \quad (1.2-8)$$

Também, considerando a equação (1.2-3), tem-se para o erro de um sistema empregando o segundo teorema de Campbell :

$$\text{Erro devido aos gamas : } e2_\gamma = \frac{\lambda_\gamma \cdot E\{a_\gamma^2\}}{\lambda_n \cdot E\{a_n^2\}} \quad (1.2-9)$$

$$\text{Erro devido aos alfas : } e2_{\alpha} = \frac{\lambda_{\alpha} \cdot E\{a_{\alpha}^2\}}{\lambda_n \cdot E\{a_n^2\}} \quad (1.2-10)$$

$$\text{Erro total : } e2 = \frac{\lambda_{\gamma} \cdot E\{a_{\gamma}^2\} + \lambda_{\alpha} \cdot E\{a_{\alpha}^2\}}{\lambda_n \cdot E\{a_n^2\}} \quad (1.2-11)$$

Comparando agora os sistemas que utilizam o primeiro e segundo teoremas por meio das relações dos erros obtidos para cada componente indesejável e utilizando as características típicas de um câmara de fissão (ver página 8 e Popper e Harrer [1968]), resulta

$$\frac{e2_{\gamma}}{e1_{\gamma}} = \frac{E\{a_{\gamma}^2\}}{E\{a_n^2\}} \cdot \frac{E\{a_n\}}{E\{a_{\gamma}\}} \quad \text{tipicamente} = 1/1000 \quad (1.2-12)$$

$$\frac{e2_{\alpha}}{e1_{\alpha}} = \frac{E\{a_{\alpha}^2\}}{E\{a_n^2\}} \cdot \frac{E\{a_n\}}{E\{a_{\alpha}\}} \quad \text{tipicamente} = 7/1000 \quad (1.2-13)$$

Portanto, *observa-se uma grande redução do efeito das componentes de alfas e gamas no sistema empregando a variância em relação ao sistema que emprega o nível médio.*

1.2.3 Breve histórico

Os trabalhos que viabilizaram o sistema Campbell foram realizados na década de 60 :

- Lichtenstein [1959] (General Electric) obteve uma patente cobrindo os princípios básicos da utilização do método Campbell no lugar da estimativa média do sinal, mas não aplicou os resultados a um sistema faixa ampla.
- Gwinn e Trenholme [1963] (MIT) propõem um canal logarítmico ($\log N$) com medição do período utilizando o método Campbell. Apresentam breve revisão teórica para os teoremas de Campbell e para o cálculo do espectro da densidade de potência (transformada de Fourier da função da autocorrelação). Discutem a estimativa da variância por meio do valor médio do sinal retificado.
- DuBridge e outros [1965] (General Electric) apresentam o desenvolvimento teórico e experimental finais de dois sistemas Campbell faixa ampla : um para instrumentação nuclear interna ao núcleo do reator (“in-core”) e outro para instrumentação nuclear externa (“ex-core”).
- 1967 - Diversos programas de desenvolvimento do sistema Campbell apresentam seus resultados :

- Trenholme e Keefe [1967] (Argonne National Laboratory).
 - Popper e outros [1967] (Argonne National Laboratory).
 - Thomas e McBride [1967] (General Atomic).
 - Plaige e Quenee [1967] (CEA-France).
- Os trabalhos posteriores apresentam uma contribuição secundária no estabelecimento da concepção do sistema Campbell faixa ampla utilizado em reatores. Como exemplo, citam-se : Oda e outros [1976], Endo e outros [1982], Baratte [1987], Flynn e outros [1990], Goodings e Fowler [1990].

1.3 Apresentação do trabalho proposto

1.3.1 Motivação

As expressões (1.2-12) e (1.2-13) demonstram a potencialidade do sistema Campbell na área de detecção nuclear. Considerando a melhora resultante da utilização da variância em relação à média, pode-se prever que o emprego de funções estatísticas de ordem superior a dois possa minimizar ainda mais o efeito dos sinais indesejáveis. DuBridges [1967] já mencionava essa possibilidade em seu trabalho. No entanto, não poderia haver grande motivação na época para desenvolver tal linha de pesquisa, principalmente por duas razões :

- O sistema Campbell já apresentava imunidade gama satisfatória para a maior parte das aplicações.
- A implementação das funções estatísticas de ordem superior por meio de sistemas analógicos resultava em maior complexidade e benefícios limitados.

Hoje, principalmente dois fatos alteram essa situação :

a) Tecnologia digital

O advento dos processadores digitais de uso geral de alto desempenho, e particularmente dos processadores digitais de sinais (“digital signal processors”) de última geração, viabilizam a solução em tempo real da utilização do processamento complexo.

Deve-se ressaltar, entretanto, que a área nuclear tem sido das mais conservadoras em relação à introdução de inovações tecnológicas, principalmente nas funções relacionadas à segurança da planta nuclear. Este fato adiou a implantação dos sistemas com microprocessadores nas funções de segurança até inícios da década de 80, quando, pela

primeira vez, os franceses os adotaram em suas centrais nucleares [Plaige e outros, 1978; Burel e Bruel, 1983]. Esse exemplo foi seguido pelos Estados Unidos, Japão e Alemanha, porém em ritmo lento, principalmente devido à grande polêmica sobre a segurança da nova componente de projeto : o software.

Mais recentemente, o sucesso das técnicas digitais, alcançado não só na área nuclear , como na aeronáutica e espacial, consolidou definitivamente sua aplicação nessas áreas críticas .

b) Estatísticas de ordem superior

Recentemente várias técnicas tem sido desenvolvidas para estatísticas de ordem superior na forma de cumulantes e espectros [Mendel, 1991; Nikias e Mendel, 1993]. Essas estatísticas possibilitam, nas aplicações em geral, vantagens em relação às estatísticas tradicionais de segunda ordem, principalmente em dois pontos :

- A “imunidade” ao ruído gaussiano.
- A obtenção da fase na identificação da resposta do sistema.

Como resultado dos fatos (a) e (b), alguns trabalhos mais recentes começam a explorar a área, podendo-se citar como exemplo, Baratte [1987] que apresenta um sistema Campbell utilizando técnicas digitais e Benomar [1994] que propõe a separação nêutron-gama utilizando as estatísticas de ordem superior e modelos ARMA de identificação de sistemas para a obtenção das variáveis de interesse.

Em contraste, alguns dos trabalhos mais recentes de modernização de instrumentação de reatores seguem ainda a linha conservadora e utilizam um canal Campbell analógico aperfeiçoado [Flynn e outros, 1990; Goodings e Fowler, 1990].

1.3.2 Objetivo e breve descrição

De um modo geral, os fatos apresentados acima criam uma expectativa de desenvolvimento de melhores sistemas para medição de fluxo de nêutrons.

De acordo com essa perspectiva, define-se por objetivo deste trabalho fazer uma análise integrada de tais sistemas utilizando funções estatísticas. Assim, pretende-se desenvolver ferramentas matemáticas que possam ser utilizadas no projeto e avaliação de possíveis sistemas digitais de medição de fluxo de nêutrons. Para cumprir tal objetivo, estruturam-se as componentes da análise conforme o modelo da figura 1-5 :

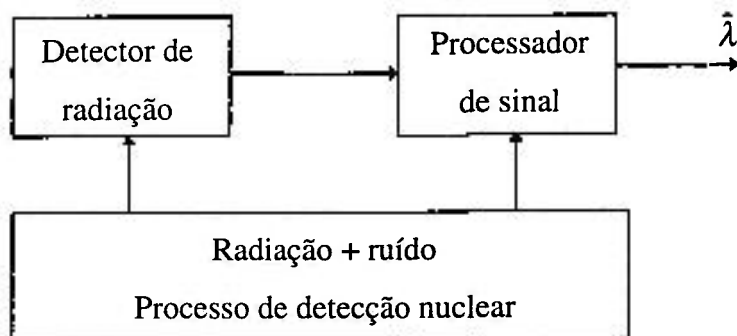


Figura 1-5 : Modelo para análise de sistemas de medição de fluxo de nêutrons

O estudo da componente do processo estocástico de detecção nuclear tem por meta caracterizar os sinais presentes no sistema, ou seja, as radiações nucleares e o ruído. Tendo representado convenientemente esses sinais, é possível analisar o sistema de medição de fluxo de nêutrons, composto basicamente de um detector de radiação e de um processador de sinal.

Neste trabalho, a representação dos sinais do processo estocástico de detecção nuclear é realizada por meio das funções estatísticas conhecidas como “cumulantes” e “espectros”. Utilizando essas funções, desenvolve-se uma metodologia para a caracterização de detectores e sistemas de medição de fluxo de nêutrons, a qual pode ser utilizada não só com o objetivo da determinação da taxa média de eventos da radiação de interesse (nêutron), mas também para estabelecer métodos que permitam a avaliação do funcionamento de detectores e sistemas (ex.: supervisão “on-line”).

Para o desenvolvimento dessa metodologia, primeiramente generaliza-se o teorema de Campbell (de um processo estocástico tipo “shot”) no domínio do tempo na forma de cumulantes de n -ésima ordem e, no domínio da *frequência* na forma de espectros, considerando o pulso caracterizado por um *vetor* de parâmetros aleatórios. A utilização da generalização no domínio da frequência constitui-se numa ferramenta importante, não só para a obtenção dos espectros de frequência de ordem n do detector de radiação, como também para a análise do sistema. Aplicam-se os resultados obtidos a sistemas de medição de fluxo de radiação, particularizando sempre que necessário para os sistemas de medição de fluxo de nêutrons. Considera-se o *processo estocástico de detecção nuclear* composto de componentes de sinal (radiações nucleares) “shot” e componentes de ruído intrínseco gaussiano e ruído extrínseco.

Como não foi encontrado na pesquisa bibliográfica realizada um modelo detalhado dos pulsos de corrente gerados pelo *detector*, câmara de ionização sensível a nêutrons, realiza-se seu modelamento para três geometrias : cilíndrica , plana e esférica. Calculam-se os pulsos de corrente, suas cargas associadas, os momentos estatísticos dessas cargas e os cumulantes e espectros da corrente resultante, levando-se em consideração o espectro de energia da partícula ionizante, sua direção de emissão, sua perda de energia e



Figura 1-5 : Modelo para análise de sistemas de medição de fluxo de nêutrons

O estudo da componente do processo estocástico de detecção nuclear tem por meta caracterizar os sinais presentes no sistema, ou seja, as radiações nucleares e o ruído. Tendo representado convenientemente esses sinais, é possível analisar o sistema de medição de fluxo de nêutrons, composto basicamente de um detector de radiação e de um processador de sinal.

Neste trabalho, a representação dos sinais do processo estocástico de detecção nuclear é realizada por meio das funções estatísticas conhecidas como “cumulantes” e “espectros”. Utilizando essas funções, desenvolve-se uma metodologia para a caracterização de detectores e sistemas de medição de fluxo de nêutrons, a qual pode ser utilizada não só com o objetivo da determinação da taxa média de eventos da radiação de interesse (nêutron), mas também para estabelecer métodos que permitam a avaliação do funcionamento de detectores e sistemas (ex.: supervisão “on-line”).

Para o desenvolvimento dessa metodologia, primeiramente generaliza-se o teorema de Campbell (de um processo estocástico tipo “shot”) no domínio do tempo na forma de cumulantes de n -ésima ordem e, no domínio da *frequência* na forma de espectros, considerando o pulso caracterizado por um *vetor* de parâmetros aleatórios. A utilização da generalização no domínio da frequência constitui-se numa ferramenta importante, não só para a obtenção dos espectros de frequência de ordem n do detector de radiação, como também para a análise do sistema. Aplicam-se os resultados obtidos a sistemas de medição de fluxo de radiação, particularizando sempre que necessário para os sistemas de medição de fluxo de nêutrons. Considera-se o *processo estocástico de detecção nuclear* composto de componentes de sinal (radiações nucleares) “shot” e componentes de ruído intrínseco gaussiano e ruído extrínseco.

Como não foi encontrado na pesquisa bibliográfica realizada um modelo detalhado dos pulsos de corrente gerados pelo *detector*, câmara de ionização sensível a nêutrons, realiza-se seu modelamento para três geometrias : cilíndrica , plana e esférica. Calculam-se os pulsos de corrente, suas cargas associadas, os momentos estatísticos dessas cargas e os cumulantes e espectros da corrente resultante, levando-se em consideração o espectro de energia da partícula ionizante, sua direção de emissão, sua perda de energia e

alcance no depósito sensível a nêutrons e no gás que preenche o detector, sua ionização específica no gás, além das condições de contorno geométricas da câmara.

A generalização do teorema de Campbell combinada com o modelamento do detector são suficientes para caracterizar o comportamento aleatório de tais sistemas. No entanto, os sistemas reais necessitam de uma eletrônica para adequar o sinal gerado pelo detector para a obtenção dos parâmetros de interesse (cumulantes, espectros, taxa média de eventos, fluxo de nêutrons do reator). Portanto, neste trabalho, para complementar a análise integrada proposta, realiza-se também um estudo geral do *processador de sinal*.

Consideram-se as configurações analógicas e digitais do processador e apresentam-se as expressões dos cumulantes e espectros nos diversos pontos do sistema. Unifica-se a análise por meio do desenvolvimento do conceito de sistemas equivalentes que podem ser utilizados para descrever os cumulantes e espectros de sistemas analógicos ou digitais. Realiza-se a análise de ruído do estágio de entrada em termos dos espectros de segunda ordem. Obtêm-se expressões dos cumulantes e espectros para casos de posicionamento dos filtros do processador de sinal em relação aos espectros do detector. Adotam-se filtros ideais como referência e calculam-se os cumulantes até quarta ordem em função de suas frequências limites. Utilizam-se os estimadores não-tendenciosos convencionais para os cumulantes e, para avaliar a precisão e tempo de resposta dos sistemas, desenvolvem-se expressões para suas variâncias. Finalmente, discutem-se algumas possibilidades de obtenção do fluxo da radiação de interesse (nêutron) em função dos cumulantes.

Baseado no objetivo descrito acima, divide-se este trabalho em três partes principais :

- Capítulo 2 : Análise do processo estocástico de detecção nuclear
- Capítulo 3 : Análise do detector
- Capítulo 4 : Análise do processador de sinal

Deve-se ressaltar o aspecto multidisciplinar deste estudo. No capítulo 2 deve-se tratar do modelamento do processo de detecção nuclear utilizando basicamente conceitos de processos estocásticos. No capítulo 3 é necessário realizar o modelamento de uma câmara de ionização sensível a nêutrons considerando aspectos da interação da radiação nuclear com a matéria. Finalmente, no capítulo 4 utiliza-se de forma importante a teoria de processamento digital de sinais. Esse caráter multidisciplinar inerente ao problema gera uma certa heterogeneidade na sequência dos capítulos. No entanto, a caracterização dessas partes na forma de um tratamento matemático único, envolvendo o conceito de cumulantes e espectros, realiza o elo de ligação deste trabalho, integrando a análise e fornecendo uma identidade ao mesmo.

CAPÍTULO 2

ANÁLISE DO PROCESSO ESTOCÁSTICO DE DETECÇÃO NUCLEAR

2.1 Introdução

Este capítulo tem como objetivo realizar a análise do processo estocástico de detecção nuclear. Como tal, envolve o estudo dos sinais componentes do processo (radiações nucleares e ruído eletrônico) e de sua participação na formação do sinal de saída de um *sistema linear*. Deve-se notar que a hipótese do sistema ser linear não causa restrições importantes na descrição de sistemas físicos reais [Nicholson, 1974].

Representa-se o processo estocástico de detecção nuclear por meio de funções estatísticas chamadas de “cumulantes” e seus “espectros”. Essa representação é extremamente útil, não só pelas propriedades inerentes dos cumulantes e pela possibilidade de utilização das técnicas baseadas nessas funções, desenvolvidas para estatísticas de ordem superior [Mendel, 1991; Nikias e Mendel, 1993], *mas pela proporcionalidade obtida, para os processos estocásticos tipo “shot”, entre os cumulantes (espectros) e a taxa média de eventos.*

As componentes correspondentes às radiações nucleares são processos estocásticos tipo “shot” e portanto descritas pelo teorema de Campbell. No entanto, esse teorema, conforme apresentado em diversos textos [Papoulis, 1991; Shanmungan e Breipohl 1988; Thomas, 1971], possui certas limitações para a análise proposta, de modo que procurou-se generalizá-lo para cumprir três objetivos principais : possibilitar a utilização de estatísticas de ordem superior, considerar nos cálculos a forma aleatória dos pulsos e representar o teorema na forma de espectros.

As componentes correspondentes ao ruído eletrônico são classificadas em dois grupos : ruído intrínseco, considerado gaussiano, e ruído extrínseco. Como as estatísticas de primeira e segunda ordem dos processos estocásticos gaussianos são suficientes para sua caracterização, apresenta-se neste estudo apenas um breve resumo de sua representação na forma de cumulantes e espectros. O ruído extrínseco pode ser minimizado, não se fazendo portanto qualquer tentativa para seu modelamento.

Para desenvolver esses assuntos, organiza-se este capítulo da seguinte forma :

Apresenta-se um breve resumo das estatísticas utilizadas neste trabalho para caracterizar um processo estocástico. Após isso, generaliza-se o teorema de Campbell na forma de cumulantes e *espectros* de ordem n , sendo os pulsos caracterizados por um vetor de parâmetros aleatórios, e apresentam-se resumidamente as estatísticas do processo estocástico gaussiano. Aplicam-se, então, esses resultados a um sistema de medição de fluxo de radiação, considerando um processo estocástico com componentes nucleares genéricas $rad1, rad2, \dots, radN$, ruído intrínseco e ruído extrínseco. Finalmente, avalia-se a potencialidade do processamento estatístico de tal sistema.

Cabem algumas notas sobre a simbologia utilizada neste capítulo e seguida no restante da tese. Na parte das funções estatísticas optou-se por uma representação similar a utilizada por Mendel [1991], mas representando as variáveis aleatórias em negrito e distinguindo as funções no tempo-discreto (em colchetes) daquelas no tempo-contínuo (em parêntesis). Também as transformadas de Fourier discretas são identificadas pelo superescrito d (ex.: $H^d(u)$), enquanto as transformadas de Fourier contínuas não utilizam qualquer identificação (ex.: $H(w)$). Optou-se pela representação mnemônica dos sinais e funções (ex.: $y_{rad}(t)$ para o sinal associado à radiação rad). Essa solução auxilia na identificação dos inúmeros símbolos presentes nos desenvolvimentos, mas infelizmente, torna as expressões mais extensas (ver outras notas sobre a simbologia na página 171).

2.2 Estatísticas de um processo estocástico

As definições e propriedades apresentadas nesta secção têm por objetivo facilitar a inteligibilidade do desenvolvimento, podendo ser encontradas, com certa variação de notação e generalidade, em Papoulis [1991], Mendel [1991], Therrien [1992], Nikias e Mendel [1993].

Neste trabalho, apenas são estudados processos estocásticos reais. Além disso, considera-se que as transformadas de Fourier das diversas funções utilizadas convergem.

Um processo estocástico gaussiano é completamente caracterizado por seus

momentos de primeira e segunda ordem. Por outro lado, para caracterizar em detalhes os processos estocásticos não-gaussianos é necessário utilizar seus momentos de ordem superior. O momento de ordem n do processo estocástico $x(t)$ pode ser escrito como

$$M_{n,x}(t_1, t_2, \dots, t_n) = E \{ x_1 \cdot x_2 \dots x_n \} \quad (2.2-1)$$

sendo $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$, ... , $x_n = x(t_n)$ as n variáveis aleatórias e t o tempo-contínuo.

Para o processo estocástico discreto $x[k]$, utiliza-se a mesma definição, mas representa-se o momento por $M_{n,x}[k_1, k_2, \dots, k_n]$, sendo $x_1 = x[k_1]$, $x_2 = x[k_2]$, ... , $x_n = x[k_n]$ e k o tempo-discreto.

Embora os momentos forneçam toda informação necessária para a análise de um processo estocástico, é usualmente preferível utilizar outras funções estatísticas chamadas de “cumulantes”, que exibem mais claramente a informação adicional fornecida pelas estatísticas de ordem superior. Para a análise de segunda ordem, sua adoção corresponde a utilizar a função covariância no lugar da função autocorrelação, removendo o efeito da média [Therrien, 1992].

Os cumulantes podem ser definidos de várias maneiras, sendo que neste trabalho interessa mencionar duas delas. Introduzem-se inicialmente as seguintes definições :

Sejam as n variáveis auxiliares v_1 , v_2 , ... , v_n , o vetor correspondente $V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ e o vetor das variáveis aleatórias $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$. Seja j a unidade imaginária. Definem-se :

- *Primeira função característica de ordem n* do processo estocástico $x(t)$ ou $x[k]$

$$\Phi_{n,x}(v_1, v_2, \dots, v_n) = E \left\{ e^{j(v_1 \cdot x_1 + v_2 \cdot x_2 + \dots + v_n \cdot x_n)} \right\} \quad (2.2-2)$$

ou na notação vetorial

$$\Phi_{n,x}(V) = E \left\{ e^{j \cdot V \cdot X^t} \right\} \quad (2.2-3)$$

- *Segunda função característica de ordem n* do processo estocástico $x(t)$ ou $x[k]$

$$\Psi_{n,x}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \ln(\Phi_{n,x}(v_1, v_2, \dots, v_n)) \quad (2.2-4)$$

ou na notação vetorial

$$\Psi_{n,x}(V) = \ln \left(E \left\{ e^{j \cdot V \cdot X^t} \right\} \right) \quad (2.2-5)$$

Vê-se facilmente que para processos estocásticos independentes $x(t)$ e $y(t)$ ou $x[k]$ e $y[k]$ obtém-se

$$\Psi_{n,x+y}(V) = \Psi_{n,x}(V) + \Psi_{n,y}(V) \quad (2.2-6)$$

Pode-se agora definir de duas maneiras equivalentes [Mendel,1991; Therrien, 1992] o

- *Cumulante de ordem n* do processo estocástico $\mathbf{x}(t)$

a) Definido a partir da segunda equação característica

$$C_{n,x}(t_1, t_2, \dots, t_n) = (-j)^n \left. \frac{\partial^n \Psi_{n,x}(v_1, v_2, \dots, v_n)}{\partial v_1 \cdot \partial v_2 \dots \partial v_n} \right|_{v_1=v_2=\dots=v_n=0} \quad (2.2-7)$$

b) Definido a partir do processo gaussiano $\mathbf{x}_g(t)$ com as mesmas estatísticas de primeira e segunda ordem que $\mathbf{x}(t)$

$$C_{1,x}(t) = M_{1,x_g}(t) \quad (\text{média})$$

$$C_{2,x}(t_1, t_2) = M_{2,x_g}(t_1, t_2) - M_{1,x_g}(t_1) \cdot M_{1,x_g}(t_2) \quad (\text{covariância})$$

$$C_{n,x}(t_1, t_2, \dots, t_n) = M_{n,x}(t_1, t_2, \dots, t_n) - M_{n,x_g}(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

para $n \geq 3$

(2.2-8)

ou seja, os cumulantes medem o desvio do processo estocástico em relação a um processo estocástico gaussiano.

Observe-se que no domínio tempo-discreto as mesmas definições são válidas, bastando substituir os parêntesis por colchetes e os t_i pelos k_i . Como exemplo escreve-se $C_{n,x}[k_1, k_2, \dots, k_n]$ no lugar de $C_{n,x}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ e $M_{n,x}[k_1, k_2, \dots, k_n]$ no lugar de $M_{n,x}(t_1, t_2, \dots, t_n)$.

- *Espectro de ordem $n \geq 2$* do processo estocástico estacionário $\mathbf{x}(t)$ ou $\mathbf{x}[k]$

Pode ser definido como a transformada de Fourier multidimensional do cumulante correspondente :

Para $\mathbf{x}(t)$

$$S_{n,x}(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} C_{n,x}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) \cdot e^{-j(w_1 \cdot \tau_1 + w_2 \cdot \tau_2 + \dots + w_{n-1} \cdot \tau_{n-1})} \cdot d\tau_1 \cdot d\tau_2 \dots \cdot d\tau_{n-1} \quad (2.2-9)$$

sendo

w_1, w_2, \dots, w_{n-1} as frequências associadas ao tempo-contínuo.

$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}$ os atrasos (“lags”) contínuos, utilizados para processos estacionários.

Para $x[k]$

$$S_{n,x}^d(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{l_{n-1}=-\infty}^{\infty} C_{n,x}[l_1, l_2, \dots, l_{n-1}] \cdot e^{-j(u_1 l_1 + u_2 l_2 + \dots + u_{n-1} l_{n-1})} \quad (2.2-10)$$

sendo

u_1, u_2, \dots, u_{n-1} as frequências associadas ao tempo-discreto.

l_1, l_2, \dots, l_{n-1} os atrasos (“lags”) discretos, utilizados para processos estacionários.

▪ Relações para sistemas lineares

Este trabalho utiliza extensivamente as relações entre os espectros (cumulantes) dos processos estocásticos (contínuos ou discretos) da entrada $x(t)$ ou $x[k]$ e da saída $y(t)$ ou $y[k]$ de um sistema linear invariante no tempo de resposta impulsiva $h(t)$ ou $h[k]$, a que corresponde a transformada de Fourier $H(w)$ ou $H^d(u)$, respectivamente. Representa-se o par de respostas como $h(t) \leftrightarrow H(w)$ ou $h[k] \leftrightarrow H^d(u)$.

Assim, designando por $(*)$ a convolução multidimensional, pode-se escrever para os cumulantes e espectros :

Para $x(t)$

$$C_{1,y} = C_{1,x} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) \cdot d\xi \quad (2.2-11a)$$

e para $n \geq 2$

$$C_{n,y}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) = C_{n,x}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) * \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) \cdot h(\xi + \tau_1) \cdot h(\xi + \tau_2) \dots h(\xi + \tau_{n-1}) \cdot d\xi \quad (2.2-11b)$$

$S_{n,y}(w_1, w_2, \dots, w_{n-1})$

$$= S_{n,x}(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) \cdot H(w_1) \cdot H(w_2) \dots H(w_{n-1}) \cdot H(-w_1 - w_2 \dots - w_{n-1}) \quad (2.2-12)$$

Para $x[k]$

$$C_{1,y} = C_{1,x} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] \quad (2.2-13a)$$

e para $n \geq 2$

$$C_{n,y}[l_1, l_2, \dots, l_{n-1}] = C_{n,x}[l_1, l_2, \dots, l_{n-1}] * \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] \cdot h[m + l_1] \cdot h[m + l_2] \dots h[m + l_{n-1}] \quad (2.2-13b)$$

$$\begin{aligned}
S_{n,y}^d(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) \\
= S_{n,x}^d(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) \cdot H^d(u_1) \cdot H^d(u_2) \dots \cdot H^d(u_{n-1}) \cdot H^d(-u_1 - u_2 \dots - u_{n-1})
\end{aligned}
\tag{2.2-14}$$

Embora existam relações entre momentos e cumulantes (ver apêndice A.2.1), de modo que uns possam ser obtidos dos outros, e embora as estimativas dos cumulantes sejam calculadas a partir das estimativas dos momentos, prefere-se utilizar a caracterização por meio dos cumulantes, pois [Mendel, 1991] :

- Os cumulantes de processos estocásticos independentes (contínuos ou discretos) são aditivos. No caso contínuo

$$\boxed{C_{u_1+u_2}(t_1, t_2, \dots, t_n) = C_{u_1}(t_1, t_2, \dots, t_n) + C_{u_2}(t_1, t_2, \dots, t_n)}
\tag{2.2-15}$$

- Os cumulantes do ruído branco (não-gaussiano) são funções impulsivas multidimensionais e seus espectros, planos.
- Os cumulantes de ordem $n > 2$ de processos estocásticos gaussianos são nulos.

Também, particularmente para o processo estocástico tipo “shot”, além de se obterem expressões sintéticas para os cumulantes, estes são proporcionais à taxa média de eventos λ .

2.3 Generalização do teorema de Campbell

Generaliza-se aqui o teorema de Campbell na forma de cumulantes e *espectros* de ordem n , sendo os pulsos caracterizados por um *vetor* de parâmetros aleatórios. Para isso, considera-se o processo estocástico tipo “shot” na saída de um sistema linear com resposta impulsiva função desse vetor de parâmetros aleatórios. Esta generalização cumpre três objetivos :

- Possibilitar a utilização de estatísticas de ordem superior.
- Considerar nos cálculos a forma aleatória dos pulsos.
- Representar o teorema de Campbell na forma de espectros

O primeiro objetivo realiza a proposta de DuBridge [1967] (ver secção 1.3.1). O segundo permite o modelamento *detalhado* dos sensores dos sistemas associados a processos estocásticos tipo “shot”. Finalmente, o terceiro constitui-se numa poderosa ferramenta de análise e projeto, pois permite utilizar as técnicas desenvolvidas para o domínio da frequência.

O teorema de Campbell descreve as estatísticas de um processo estocástico tipo “shot”. Estas podem ser obtidas de várias maneiras [Papoulis, 1991; Shanmungan e Breipohl 1988; Thomas, 1971], mas com o objetivo de se obter a generalidade proposta, utilizam-se neste trabalho as funções características calculadas em intervalos infinitesimais no eixo dos instantes de Poisson. Calculam-se então os cumulantes e espectros de ordem n .

2.3.1 Cumulante de ordem n

Seja um sistema linear de resposta $h(t, \xi, P)$ a um impulso gerado no instante ξ , sendo P o vetor de parâmetros aleatórios associado a essa resposta introduzido para representar o caráter aleatório de sua forma. Considere-se esse sistema (figura 2-1) excitado pelo “trem” de impulsos de Poisson $x(t)$, e seja $y(t)$ a saída correspondente :

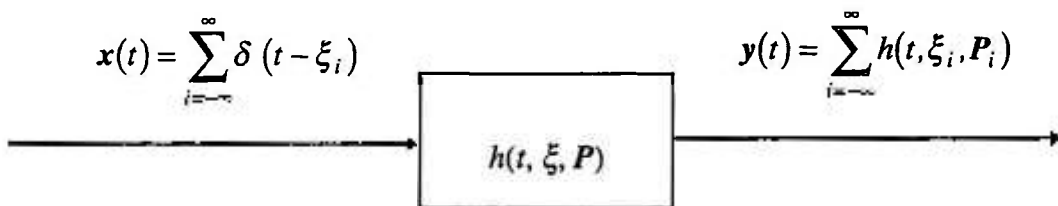


Figura 2-1 : Sistema linear $h(t, \xi, P)$

onde

ξ_i são os instantes de Poisson.

P_i são os vetores de parâmetros aleatórios associados às respostas impulsivas i , sendo os vetores P_i independentes entre si, identicamente distribuídos (com fdp $f(P_i) = f(P)$) e independentes de ξ_i .

Considere-se o eixo ξ dos instantes de Poisson ξ_i dividido em intervalos adjacentes e disjuntos $\Delta\xi_k$ de comprimento $\Delta\xi_k = \Delta\xi$ e tal que $\lambda(\xi_k) \cdot \Delta\xi_k \ll 1$ onde $\lambda(\xi_k)$ é a densidade de instantes de Poisson associada ao intervalo $\Delta\xi_k$.

Seja $y_{\Delta\xi_k}(t)$ a componente de $y(t)$ gerada em $\Delta\xi_k$. Pode-se escrever

$$y_{\Delta\xi_k}(t) = \sum_{\xi_i \in \Delta\xi_k} h(t, \xi_i, P_i) \quad (2.3-1)$$

com

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_{\Delta\xi_k}(t) \quad (2.3-2)$$

Como os intervalos $\Delta\xi_{k1}$ e $\Delta\xi_{k2}$ ($k1 \neq k2$) são disjuntos e as variáveis aleatórias $(P_i, (\xi_i \in \Delta\xi_{k1}))$ e $(P_i, (\xi_i \in \Delta\xi_{k2}))$ são independentes, resulta que os processos estocásticos $y_{\Delta\xi_{k1}}(t)$ e $y_{\Delta\xi_{k2}}(t)$ são independentes.

Seja o vetor de variáveis aleatórias

$$Y_{\Delta\xi_k} = [y_{\Delta\xi_k}(t_1) \ y_{\Delta\xi_k}(t_2) \ \dots \ y_{\Delta\xi_k}(t_n)] \quad (2.3-3)$$

e o vetor de variáveis auxiliares

$$V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n] \quad (2.3-4)$$

A primeira função característica de $y_{\Delta\xi_k}(t)$ é

$$\Phi_{n,y_{\Delta\xi_k}}(V) = E \left\{ \exp(j \cdot V \cdot Y'_{\Delta\xi_k}) \right\} \quad (2.3-5)$$

Considerando que P_i é independente de ξ_i , e como de $\lambda(\xi_k)$. $\Delta\xi_k \ll 1$ resulta que a probabilidade de ocorrência de um instante de Poisson em $\Delta\xi_k$ pode ser aproximada por $\lambda(\xi_k) \cdot \Delta\xi_k$ e a de não ocorrência por $(1 - \lambda(\xi_k) \cdot \Delta\xi_k)$ [Thomas, 1971]. Obtém-se

$$\Phi_{n,y_{\Delta\xi_k}}(V) \cong E \left\{ \lambda(\xi_k) \cdot \Delta\xi_k \cdot \exp(j \cdot V \cdot H'_{\Delta\xi_k}) + (1 - \lambda(\xi_k) \cdot \Delta\xi_k) \right\} \quad (2.3-6)$$

com
$$H_{\Delta\xi_k} = \left[h(t_1, \xi_i, P_i) \ h(t_2, \xi_i, P_i) \ \dots \ h(t_n, \xi_i, P_i) \right] \Big|_{\xi_i = \xi_k} \quad (2.3-7)$$

pois, no caso de apenas um instante de Poisson gerado em $\Delta\xi_k$, $Y_{\Delta\xi_k}$ transforma-se em $H_{\Delta\xi_k}$.

Portanto,

$$\Phi_{n,y_{\Delta\xi_k}}(V) \cong \lambda(\xi_k) \cdot \Delta\xi_k \cdot \left(E \left\{ \exp(j \cdot V \cdot H'_{\Delta\xi_k}) \right\} - 1 \right) + 1 \quad (2.3-8)$$

e a segunda equação característica de $y_{\Delta\xi_k}(t)$ pode ser escrita como

$$\Psi_{n,y_{\Delta\xi_k}}(V) \cong \ln \left(\lambda(\xi_k) \cdot \Delta\xi_k \cdot \left(E \left\{ \exp(j \cdot V \cdot H'_{\Delta\xi_k}) \right\} - 1 \right) + 1 \right) \quad (2.3-9)$$

Como $\lambda(\xi_k) \cdot \Delta\xi_k \ll 1$, pode-se aproximar (2.3-9) por série de Taylor. Obtém-se

$$\Psi_{n,y_{\Delta\xi_k}}(V) \cong \lambda(\xi_k) \cdot \Delta\xi_k \cdot \left(E \left\{ \exp(j \cdot V \cdot H'_{\Delta\xi_k}) \right\} - 1 \right) \quad (2.3-10)$$

E sendo $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_{\Delta\xi_k}(t)$ com os $y_{\Delta\xi_k}(t)$ independentes entre si, resulta que a

segunda função característica de $y(t)$ é igual à soma das segundas funções características dos $y_{\Delta\xi_k}(t)$ (equação 2.2-6), ou seja,

$$\Psi_{n,y}(V) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Psi_{n,y_{\Delta\xi_k}}(V) \quad (2.3-11)$$

então
$$\Psi_{n,y}(V) \cong \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda(\xi_k) \cdot \Delta\xi_k \cdot \left(E \left\{ \exp(j \cdot V \cdot H'_{\Delta\xi_k}) \right\} - 1 \right) \quad (2.3-12)$$

Fazendo $\Delta\xi_k \rightarrow 0$, resulta a

segunda função característica de ordem n do processo estocástico tipo "shot" $y(t)$

$$\Psi_{n,y}(V) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\xi) \cdot \left(E \left\{ \exp(j \cdot V \cdot H^t) \right\} - 1 \right) \cdot d\xi \quad (2.3-13)$$

sendo

$\lambda(\xi)$ a densidade instantânea dos pontos de Poisson.

V o vetor das variáveis auxiliares $V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$.

H o vetor das respostas impulsivas aleatórias

com $H = [h(t_1, \xi, P) \ h(t_2, \xi, P) \ \dots \ h(t_n, \xi, P)]$

P o vetor dos parâmetros aleatórios.

Observe-se que a passagem ao limite transforma (2.3-13) numa expressão exata.

Calculando o cumulante de $y(t)$ ordem n a partir da definição (2.2-7), obtém-se

$$C_{n,y}(t_1, t_2, \dots, t_n) = (-j)^n \cdot \left. \frac{\partial^n \Psi_{n,y}(v_1, v_2, \dots, v_n)}{\partial v_1 \cdot \partial v_2 \cdot \dots \cdot \partial v_n} \right|_{v_1=v_2=\dots=v_n=0} \quad (2.3-14)$$

e substituindo $\Psi_{n,y}(V)$ de (2.3-13)

$$C_{n,y}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\xi) \cdot E \left\{ (-j)^n \cdot \left. \frac{\partial^n \exp(j \cdot (v_1 \cdot h_1 + v_2 \cdot h_2 + \dots + v_n \cdot h_n))}{\partial v_1 \cdot \partial v_2 \cdot \dots \cdot \partial v_n} \right|_{v_1=v_2=\dots=v_n=0} \right\} \cdot d\xi \quad (2.3-15)$$

com $h_1 = h(t_1, \xi, P)$, $h_2 = h(t_2, \xi, P)$, ..., $h_n = h(t_n, \xi, P)$

e resulta a expressão geral do

cumulante de ordem n do processo estocástico tipo "shot" $y(t)$

$$C_{n,y}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\xi) \cdot E \left\{ \prod_{m=1}^n h(t_m, \xi, P) \right\} \cdot d\xi \quad (2.3-16)$$

sendo

$\lambda(\xi)$ a densidade instantânea dos pontos de Poisson.

$h(t_m, \xi, P)$ a resposta impulsiva em t_m a um impulso gerado em ξ , dependente do vetor de parâmetros aleatórios P .

Considerando os processos estocásticos $x(t)$ e $h(t_m, \xi, P)$ estacionários com $\lambda(\xi) = \lambda = \text{cte.}$, obtêm-se expressões de grande interesse para diversas aplicações. Resulta de (2.3-16)

$$C_{n,y}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \lambda \cdot \int_{-\infty}^{\infty} E \left\{ \prod_{m=1}^n h(t_m - \xi, \mathbf{P}) \right\} \cdot d\xi \quad (2.3-17)$$

Calculando o cumulante em $(0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1})$, obtém-se o

cumulante de ordem n do processo estocástico tipo "shot" $y(t)$ com $x(t)$ e $h(t, \xi, \mathbf{P})$ estacionários

$$C_{1,y} = \lambda \cdot \int_{-\infty}^{\infty} E \{ h(\xi, \mathbf{P}) \} \cdot d\xi \quad (2.3-18a)$$

$$C_{n,y}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) = \lambda \cdot \int_{-\infty}^{\infty} E \{ h(\xi, \mathbf{P}) \cdot h(\xi + \tau_1, \mathbf{P}) \dots h(\xi + \tau_{n-1}, \mathbf{P}) \} \cdot d\xi \quad (2.3-18b)$$

para $n \geq 2$

sendo

λ a densidade média dos pontos de Poisson.

$h(t, \mathbf{P})$ a resposta impulsiva dependente do vetor de parâmetros aleatórios.

Portanto, o cumulante de ordem n é diretamente proporcional à taxa média de eventos λ e à integral no tempo do momento de ordem n da resposta impulsiva $h(t, \mathbf{P})$.

Da mesma forma que na secção 1.2.2, é fácil ver que (2.3-18) pode se utilizada para se obter uma estimativa da taxa média de eventos $\hat{\lambda}$: *conhecida a integral do momento de ordem n de $h(t, \mathbf{P})$, pode-se obter a estimativa da taxa média de eventos $\hat{\lambda}$ a partir da estimativa do cumulante de ordem n.*

2.3.2 Espectro de ordem n

O cálculo do espectro $S_{n,y}(w_1, w_2, \dots, w_{n-1})$ associado ao cumulante $C_{n,y}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1})$ ($n \geq 2$) é realizado utilizando a equação (2.3-18b) e a definição (2.2-9). Tem-se

$$\begin{aligned} S_{n,y}(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} C_{n,y}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) \cdot e^{-j(w_1 \tau_1 + w_2 \tau_2 + \dots + w_{n-1} \tau_{n-1})} \cdot d\tau_1 \cdot d\tau_2 \dots \cdot d\tau_{n-1} \end{aligned} \quad (2.3-19)$$

Substituindo (2.3-18b) em (2.3-19)

$$\begin{aligned}
S_{n,y}(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) &= \lambda \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E \{ h(\xi, P) \cdot h(\xi + \tau_1, P) \cdot h(\xi + \tau_2, P) \dots \cdot h(\xi + \tau_{n-1}, P) \} \cdot d\xi \right. \\
&\quad \left. \cdot e^{-j(w_1 \tau_1 + w_2 \tau_2 + \dots + w_{n-1} \tau_{n-1})} \cdot d\tau_1 \cdot d\tau_2 \dots \cdot d\tau_{n-1} \right)
\end{aligned} \tag{2.3-20}$$

$$\begin{aligned}
S_{n,y}(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) &= \lambda \cdot E \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(h(\xi + \tau_1, P) \cdot e^{-jw_1(\xi + \tau_1)} \cdot d\tau_1 \right) \cdot \left(h(\xi + \tau_2, P) \cdot e^{-jw_2(\xi + \tau_2)} \cdot d\tau_2 \right) \dots \right. \\
&\quad \left. \cdot \left(h(\xi + \tau_{n-1}, P) \cdot e^{-jw_{n-1}(\xi + \tau_{n-1})} \cdot d\tau_{n-1} \right) \cdot \left(h(\xi, P) \cdot e^{-j(-w_1 - w_2 - \dots - w_{n-1})\xi} \cdot d\xi \right) \right\}
\end{aligned} \tag{2.3-21}$$

e resulta o

espectro de ordem n do processo estocástico tipo "shot" $y(t)$ com $x(t)$ e $h(t, \xi, P)$ estacionários

$$\begin{aligned}
S_{n,y}(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) &= \lambda \cdot E \{ H(w_1, P) \cdot H(w_2, P) \dots \cdot H(w_{n-1}, P) \cdot H(-w_1 - w_2 \dots - w_{n-1}, P) \} \\
\text{para } n \geq 2 &
\end{aligned} \tag{2.3-22}$$

Logo, o espectro de ordem n é diretamente proporcional à taxa média de eventos λ e à expectância do produto de n termos constituídos da resposta em frequência $H(w, P)$ calculada em w_1, \dots, w_{n-1} e $(-w_1 \dots -w_{n-1})$.

As equações (2.3-18 e 22) constituem-se na generalização proposta do teorema de Campbell. Particularmente, a partir da equação (2.3-22), obtêm-se os espectros dos sensores e sistemas associados aos processos estocásticos tipo "shot" estacionários. As duas equações combinadas formam uma poderosa ferramenta para a análise de tais sistemas e, particularmente neste trabalho, para a análise de sistemas de medição de fluxo de nêutrons.

Obtém-se o cumulante $C_{n,y}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1})$ calculado no domínio da frequência pela transformada inversa de Fourier de $S_{n,y}(w_1, w_2, \dots, w_{n-1})$. Resulta

$$\begin{aligned}
& C_{n,y}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) \\
&= \lambda \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \pi} \right)^{n-1} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} E \left\{ H(w_1, P) \cdot H(w_2, P) \dots H(w_{n-1}, P) \cdot H((-w_1 - w_2 \dots - w_{n-1}), P) \right\} \right. \\
&\quad \left. \cdot e^{j(w_1 \cdot \tau_1 + w_2 \cdot \tau_2 + \dots + w_{n-1} \cdot \tau_{n-1})} \cdot dw_1 \cdot dw_2 \dots dw_{n-1} \right)
\end{aligned} \tag{2.3-23}$$

Similarmente, pode-se expressar o primeiro cumulante em função de $H(w, P)$, por

$$C_{1,y} = \lambda \cdot E \{ H(0, P) \} \tag{2.3-24}$$

pois,

$$H(0, P) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi, P) \cdot d\xi \tag{2.3-25}$$

As equações (2.3-18) e (2.3-22 a 24) são utilizadas, na sequência deste trabalho, nos diversos cálculos dos cumulantes e espectros dos processos estocásticos tipo "shot".

2.4 Estatísticas de um processo estocástico gaussiano

As estatísticas de um processo estocástico gaussiano podem ser encontradas em vários textos (ex.: Papoulis [1991]). Apresenta-se aqui apenas um breve resumo em termos dos cumulantes e espectros, com o objetivo de descrever o ruído intrínseco na secção 2.5.2.

Considerem-se o processo estocástico gaussiano real $x(t)$ com média zero e matriz de covariâncias K , as n variáveis aleatórias $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1)$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(t_2)$, ..., $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}(t_n)$, e o vetor correspondente $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n]$.

A função densidade de probabilidade de ordem n de $\mathbf{x}(t)$ é

$$f_{n,x}(\mathbf{X}) = \frac{1}{\sqrt{(2 \cdot \pi)^n \cdot |K|}} \cdot \exp \left(-\frac{1}{2} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{X}' \right) \tag{2.4-1}$$

Suas funções características de ordem n são

$$\Phi_{n,x}(V) = E \left\{ e^{jV \cdot X'} \right\} = \exp \left(-\frac{1}{2} \cdot V \cdot K \cdot V' \right) \tag{2.4-2}$$

$$\Psi_{n,x}(V) = -\frac{1}{2} \cdot V \cdot K \cdot V' \tag{2.4-3}$$

ou

$$\Psi_{n,x}(V) = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^n v_i \cdot v_m \cdot k_{i,m} \tag{2.4-4}$$

O cumulante de ordem n é calculado utilizando a definição (2.2-7) :

$$C_{n,x}(t_1, t_2, \dots, t_n) = (-j)^n \cdot \frac{\partial^n \Psi_{n,x}(v_1, v_2, \dots, v_n)}{\partial v_1 \cdot \partial v_2 \dots \partial v_n} \Big|_{v_1=v_2=\dots=v_n=0} \quad (2.4-5)$$

E portanto,

$$\begin{aligned} C_{1,x}(t) &= 0 \\ C_{2,x}(t_1, t_2) &= \frac{1}{2} \cdot (k_{1,2} + k_{2,1}) = E\{x_1 \cdot x_2\} = M_{2,x}(t_1, t_2) \\ C_{n,x}(t_1, t_2, \dots, t_n) &= 0 \quad \text{para } n > 2 \end{aligned} \quad (2.4-6)$$

As equações (2.4-6) mostram que para um processo estocástico gaussiano de média zero apenas o cumulante de segunda ordem (covariância) é diferente de zero, o que demonstra uma das vantagens da utilização dos cumulantes no lugar dos momentos.

Seja então o sistema linear invariante no tempo $h(t) \leftrightarrow H(w)$ excitado por um processo estocástico gaussiano real e estacionário $x(t)$. Os cumulantes e espectros do processo estocástico de saída $y(t)$ podem ser obtidos a partir das equações (2.2-11) e (2.2-12), respectivamente, como

$$C_{2,y}(\tau) = C_{2,x}(\tau) * \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) \cdot h(\xi + \tau) \cdot d\xi \quad (2.4-7)$$

com

$$C_{2,x}(\tau) = M_{2,x}(\tau) = E\{x(t) \cdot x(t + \tau)\} \quad (2.4-8)$$

e

$$S_{2,y}(w) = S_{2,x}(w) \cdot H(w) \cdot H(-w) \quad (2.4-9)$$

sendo os demais cumulantes e espectros iguais a zero.

As equações (2.4-7 a 9) descrevem os processos estocásticos gaussianos na forma de cumulantes e espectros.

2.5 Aplicação a um sistema de medição de fluxo de radiação nuclear

Desta secção em diante consideram-se apenas sistemas lineares invariantes no tempo e processos estocásticos reais e estacionários.

Como exemplo, no caso da medição do fluxo de nêutrons para controle e proteção de um reator nuclear, pode-se considerar o processo estacionário em intervalos de tempo onde a variação da potência do reator é desprezível.

2.5.1 Composição do processo estocástico de detecção nuclear

Considere-se um sistema de medição de fluxo de radiação constituído de um detector de radiação associado a uma eletrônica de processamento do sinal e submetido a N radiações nucleares primárias $rad1$, $rad2$, ..., $radN$ e ao ruído eletrônico. Os processos estocásticos presentes na entrada do sistema são :

- Processos estocásticos nucleares $x_{rad1}(t)$, $x_{rad2}(t)$, ..., $x_{radN}(t)$, associados à interação com o detector das radiações $rad1$, $rad2$, ..., $radN$, respectivamente.
- Processos estocásticos não-nucleares $x_{rin}(t)$ e $x_{rex}(t)$ associados ao ruído intrínseco (térmico, “shot”, ruído de baixa frequência, etc.) e extrínseco (interferência eletromagnética, vibração, aterramento, acoplamentos entre partes do sistema, etc.), respectivamente.

Seja então o sistema linear representando o conjunto detector de radiação e eletrônica, tal como na figura 2-2 :

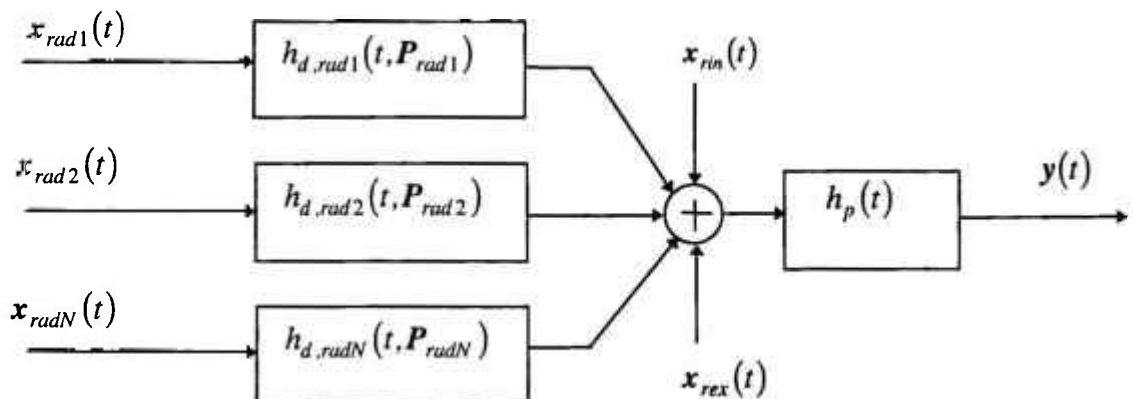


Figura 2-2 : Sistema linear representando detector+eletrônica

onde

$x_{rad1}(t)$, $x_{rad2}(t)$, ..., $x_{radN}(t)$, $x_{rin}(t)$, $x_{rex}(t)$ e $y(t)$ são os processos estocásticos de entrada e de saída, respectivamente.

$h_{d,rad1}(t, P_{rad1})$, $h_{d,rad2}(t, P_{rad2})$, $h_{d,radN}(t, P_{radN})$ são as respostas impulsivas do detector correspondentes à interação das radiações $rad1$, $rad2$, ..., $radN$, respectivamente.

$h_p(t)$ é a resposta impulsiva do sistema linear representando a eletrônica de processamento do sinal.

Portanto, no caso geral, o sistema linear com parâmetros aleatórios possui múltiplas entradas associadas a respostas distintas, uma para cada radiação nuclear. Este ponto pode ser visto pelos resultados obtidos no capítulo 3.

Como o sistema é linear, o processo estocástico $y(t)$ na saída de tal sistema pode ser considerado como composto de uma soma de processos estocásticos componentes,

correspondentes aos de entrada. Sejam $y_{rad1}(t)$, $y_{rad2}(t), \dots, y_{radN}(t)$, $y_{rin}(t)$, $y_{rex}(t)$ os processos estocásticos de saída correspondentes aos de entrada. Então

$$y(t) = y_{rad1}(t) + y_{rad2}(t) + \dots + y_{radN}(t) + y_{rin}(t) + y_{rex}(t) \quad (2.5-1)$$

Nos casos de interesse, esses processos estocásticos podem ser considerados como independentes entre si. Como exemplo, para uma câmara de fissão junto ao núcleo de um reator nuclear, pode-se dizer com boa aproximação que os sinais correspondentes aos nêutrons, gamas, alfas e ruído eletrônico são independentes entre si. Não só os processos físicos podem ser independentes como no caso das radiações e ruído eletrônico, como também para um mesmo processo físico gerador, o histórico das interações sofridas pela radiação é composto por numerosos eventos, de características diversas. Utilizando essa consideração conclui-se que o cumulante de $y(t)$ é igual à soma dos cumulantes de mesma ordem de suas componentes (ver 2.2-15), isto é,

$$C_{1,y} = C_{1,y_{rad1}} + C_{1,y_{rad2}} + \dots + C_{1,y_{radN}} + C_{1,y_{rin}} + C_{1,y_{rex}} \quad (2.5-2a)$$

e para $n \geq 2$

$$\begin{aligned} C_{n,y}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) \\ = C_{n,y_{rad1}}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) + C_{n,y_{rad2}}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) + \dots + C_{n,y_{radN}}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) \\ + C_{n,y_{rin}}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) + C_{n,y_{rex}}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) \end{aligned} \quad (2.5-2b)$$

Analogamente para os espectros, pode-se escrever

$$\begin{aligned} S_{n,y}(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) \\ = S_{n,y_{rad1}}(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) + S_{n,y_{rad2}}(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) + \dots + S_{n,y_{radN}}(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) \\ + S_{n,y_{rin}}(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) + S_{n,y_{rex}}(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) \end{aligned} \quad (2.5-3)$$

Essas expressões na forma de simples somas demonstram outra vantagem da utilização dos cumulantes no lugar dos momentos.

Note-se que $h_p(t)$ foi considerado analógico neste capítulo, apenas com finalidade didática. No capítulo 4 estudam-se os sistemas analógicos e digitais.

2.5.2 Considerações sobre as componentes

Apresentam-se, nesta secção, as componentes nucleares e não-nucleares.

a) Componentes nucleares

As componentes nucleares $y_{rad1}(t)$, $y_{rad2}(t)$, ..., $y_{radN}(t)$ são processos estocásticos tipo “shot” com seus cumulantes e espectros descritos por (2.3-18) e (2.3-22), respectivamente.

Calculando-se os cumulantes e espectros da componente nuclear i de saída $y_{radi}(t)$ por meio dessas equações, resultam

$$C_{1,y_{radi}} = \lambda_{radi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} E\{h_{radi}(\xi, P_{radi})\} \cdot d\xi \quad (2.5-4a)$$

e para $n \geq 2$

$$\begin{aligned} C_{n,y_{radi}}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) \\ = \lambda_{radi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} E\{h_{radi}(\xi, P_{radi}) \cdot h_{radi}(\xi + \tau_1, P_{radi}) \dots h_{radi}(\xi + \tau_{n-1}, P_{radi})\} \cdot d\xi \end{aligned} \quad (2.5-4b)$$

$$\begin{aligned} S_{n,y_{radi}}(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) \\ = \lambda_{radi} \cdot E\{H_{radi}(w_1, P_{radi}) \cdot H_{radi}(w_2, P_{radi}) \dots H_{radi}(w_{n-1}, P_{radi}) \cdot H_{radi}(-w_1 - w_2 \dots - w_{n-1}, P_{radi})\} \end{aligned} \quad (2.5-5)$$

onde

λ_{radi} é a taxa média de eventos correspondentes à radiação $radi$.

$h_{radi}(t, P_{radi}) \leftrightarrow H_{radi}(w, P_{radi})$ são as respostas do sistema correspondentes à radiação $radi$, sendo $h_{radi}(t, P_{radi}) = h_{d,radi}(t, P_{radi}) * h_p(t)$.

Em certos casos pode-se simplificar as equações (2.5-4) e (2.5-5) eliminando o caráter aleatório da forma do pulso $h_{radi}(t, P_{radi})$ e incluindo-o apenas na sua amplitude (ver secções 3.3.4 e 4.4.1).

b) Componentes não-nucleares

As componentes não-nucleares são constituídas dos processos estocásticos $y_{rin}(t)$ e $y_{rex}(t)$ associados ao ruído intrínseco e extrínseco, respectivamente.

Ruído Intrínseco

Classifica-se como ruído intrínseco [Motchenbacher e Fitchen, 1973; Ott, 1988] o conjunto de ruídos eletrônicos inerentes aos sistemas físicos (ruído térmico, ruído “shot”,

ruído de baixa frequência ($1/f$), etc.). Para fins de modelamento do sinal, neste estudo são considerados nesta categoria os ruídos (brancos ou não) com função densidade de probabilidade gaussiana.

Seja então o sistema linear representando o conjunto detector e eletrônico. A maior parte do ruído intrínseco responsável pela degradação das estatísticas de segunda ordem do sinal de interesse (nêutron) é gerado no estágio de entrada da eletrônica de processamento de sinal $h_p(t)$. Representando por $x_{rin}(t)$ e $y_{rin}(t)$ o ruído intrínseco referido à entrada e saída de $h_p(t)$ respectivamente (figura 2-2), obtêm-se por meio de (2.4-7) e (2.4-9) as seguintes relações para os cumulantes e espectros :

$$C_{2,y_{rin}}(\tau) = C_{2,x_{rin}}(\tau) * \int_{-\infty}^{\infty} h_p(\xi) \cdot h_p(\xi + \tau) \cdot d\xi \quad (2.5-6)$$

$$S_{2,y_{rin}}(w) = S_{2,x_{rin}}(w) \cdot H_p(w) \cdot H_p(-w) \quad (2.5-7)$$

sendo os demais cumulantes e espectros iguais a zero.

Ruído Extrínseco

Classifica-se como ruído extrínseco o conjunto de ruídos eletrônicos resultantes do “ambiente” onde o sistema físico está imerso (interferência eletromagnética, vibração, aterramento, acoplamentos entre partes do sistema, etc.).

O cálculo dos cumulantes e espectros para o ruído extrínseco é extremamente complexo. Felizmente, é possível minimizá-lo sem prejudicar o sinal de interesse, utilizando-se técnicas de redução de acoplamentos parasitas [Ott, 1988] : blindagem, aterramento, balanceamento, filtragem, isolamento, separação e orientação, projeto de cablagem, técnicas de cancelamento, etc.. Assume-se que essas técnicas sejam suficientes para assegurar que

$$\left| C_{n,y_{rex}}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) \right| \ll \left| C_{n,y_{rad}}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) \right| \quad n \geq 2 \quad (2.5-8)$$

para $w > w_{rex.lim}$

onde $w_{rex.lim}$ é a frequência limite acima da qual as relações (2.5-8) são verdadeiras, e rad é a radiação de interesse.

Com um projeto cuidadoso, é possível obter

$$\left| C_{2,y_{rex}}(\tau) \right| < \left| C_{2,y_{rin}}(\tau) \right| \quad (2.5-9)$$

ou seja, o ruído intrínseco passa a ser o erro-limite dos sistemas que utilizam apenas o segundo cumulante, como no sistema Campbell convencional.

Para fins de modelamento considera-se o ruído extrínseco minimizado e adota-se para $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} C_{n,y_{rex}}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) &\equiv 0 \\ S_{n,y_{rex}}(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) &\equiv 0 \end{aligned} \quad (2.5-10)$$

Analogamente, para sistemas que utilizam o primeiro cumulante ($n = 1$), procura-se obter

$$C_{1,y_{rex}} \ll C_{1,y_{rad}} \quad (2.5-11)$$

Interpretando o ruído extrínseco num sentido amplo, esse cumulante pode representar nos casos reais os erros do nível médio do tipo fuga, “offset” devido a acoplamentos, etc..

Também de (2.5-11), pode-se aproximar

$$C_{1,y_{rex}} \equiv 0 \quad (2.5-12)$$

2.5.3 Expressões dos cumulantes e espectros

Finalmente, é possível sintetizar as equações dos cumulantes e espectros do processo estocástico de saída do sistema linear da figura 2-2. Substituindo (2.5-4, 6, 10 e 12) em (2.5-2), resultam as seguintes equações do

cumulante de ordem n do processo estocástico de saída y(t)

$$C_{1,y} = \sum_{i=1}^N \lambda_{radi} \int_{-\infty}^{\infty} E\{h_{radi}(\xi, P_{radi})\} \cdot d\xi + C_{1,y_{rex}} \quad (2.5-13a)$$

com $C_{1,y_{rex}} \equiv 0$

e para $n \geq 2$

$$\begin{aligned} C_{n,y}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) \\ = \sum_{i=1}^N \lambda_{radi} \int_{-\infty}^{\infty} E\{h_{radi}(\xi, P_{radi}) \cdot h_{radi}(\xi + \tau_1, P_{radi}) \dots h_{radi}(\xi + \tau_{n-1}, P_{radi})\} \cdot d\xi \\ + C_{n,y_{rin}}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) + C_{n,y_{rex}}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) \end{aligned} \quad (2.5-13b)$$

com

$$C_{2,y_{rin}}(\tau) = C_{2,y_{rad}}(\tau) * \int_{-\infty}^{\infty} h_p(\xi) \cdot h_p(\xi + \tau) \cdot d\xi$$

$$C_{n,y_{rin}}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) = 0 \quad \text{para} \quad n > 2$$

e

$$C_{n,y_{rex}}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) \equiv 0 \quad (2.5-13c)$$

Substituindo (2.5-5, 7 e 10) em (2.5-3), resultam as seguintes equações para o

espectro de ordem n do processo estocástico de saída y(t)

$$\begin{aligned} S_{n,y}(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) \\ = \sum_{i=1}^N \lambda_{radi} \cdot E \left\{ H_{radi}(w_1, P_{radi}) \cdot H_{radi}(w_2, P_{radi}) \dots H_{radi}(w_{n-1}, P_{radi}) \cdot H_{radi}(-w_1 - w_2 \dots - w_{n-1}, P_{radi}) \right\} \\ + S_{n,y_{rin}}(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) + S_{n,y_{rex}}(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) \end{aligned} \quad (2.5-14a)$$

com

$$\begin{aligned} S_{2,y_{rin}}(w) &= S_{2,x_{rin}}(w) \cdot H_p(w) \cdot H_p(-w) \\ S_{n,y_{rin}}(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) &= 0 \quad \text{para} \quad n > 2 \end{aligned}$$

e

$$S_{n,y_{rex}}(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) \equiv 0 \quad (2.5-14b)$$

As equações (2.5-13) e (2.5-14) viabilizam a concepção de *sistemas Campbell de ordem n* destinados à medição de fluxo de radiação, de acordo com as considerações :

a) *Sobre a obtenção das taxas médias de eventos λ_{radi}*

Considerando o termo de ruído extrínseco minimizado por meio de técnicas de projeto, o sistema de equações permite a determinação das taxas médias de eventos λ_{radi} (densidades médias de pontos de Poisson), conhecidas as estimativas dos cumulantes e a integral dos momentos de $h_{radi}(t, P_{radi})$.

b) *Sobre a separação de componentes tipo "shot"*

Argumentando de forma qualitativa num caso particular :

Considerem-se dois tipos de radiação $rad1$ e $rad2$, sendo $rad1$ muito mais ionizante que $rad2$, e cujos pulsos respectivos gerados na saída do sistema linear possuem formas "similares". Desse modo, pode-se fazer a seguinte aproximação $h_{rad1}(t, P_{rad1}) \equiv (q_{t,rad1}) \cdot h(t)$ e $h_{rad2}(t, P_{rad2}) \equiv (q_{t,rad2}) \cdot h(t)$, onde $h(t)$ é a resposta impulsiva do sistema

representando as formas “similares”, $q_{t,rad1}$ e $q_{t,rad2}$ ($q_{t,rad1} \gg q_{t,rad2}$ para a maior parte dos eventos) as cargas (variáveis aleatórias) das trilhas de ionização de $rad1$ e $rad2$, respectivamente.

Calculando a relação entre os cumulantes de $y_{rad1}(t)$ e $y_{rad2}(t)$, a partir da equação (2.5-4), resulta

$$\frac{C_{n,y_{rad1}}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1})}{C_{n,y_{rad2}}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1})} = \frac{E\{q_{t,rad1}^n\}}{E\{q_{t,rad2}^n\}} \gg \frac{E\{q_{t,rad1}^{n-1}\}}{E\{q_{t,rad2}^{n-1}\}} = \frac{C_{n-1,y_{rad1}}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-2})}{C_{n-1,y_{rad2}}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-2})} \quad (2.5-15)$$

Sendo a radiação de interesse a mais ionizante $rad1$, como os cumulantes são aditivos (processos estocásticos independentes), rejeita-se mais a radiação menos ionizante $rad2$ quanto maior for a ordem n do cumulante.

Esta consideração demonstra a menção de DuBridge [1967] (ver secção 1.3.1) sobre a aplicação de estatísticas de ordem superior para aumentar a imunidade aos gamas.

c) Sobre a rejeição da componente gaussiana (ruído)

As equações (2.5-11) mostram que apenas o cumulante de segunda ordem é sensível ao ruído gaussiano. Este fato demonstra a maior imunidade ao ruído dos sistemas Campbell que utilizam cumulantes de ordem $n > 2$, em relação aos que utilizam apenas o de segunda ordem.

No entanto, a presença do ruído gaussiano pode degradar as estimativas dos cumulantes de ordem superior, aumentando o tempo de processamento para se obter dada precisão ou mesmo podendo causar a saturação de estágios da eletrônica. Assim, o ruído gaussiano não pode ser negligenciado nos sistemas $n > 2$, razão pela qual inclui-se a análise de ruído do sistema no capítulo 4.

Notas finais

Neste capítulo, desenvolveram-se as expressões gerais que descrevem o processo de detecção nuclear. Sua aplicação nos capítulos que se seguem permite realizar a análise integrada proposta de todo o sistema por meio do conceito de cumulantes e seus espectros.

Cumpre-se lembrar que, embora o objetivo deste trabalho seja o estudo de sistemas de medição de fluxo de nêutrons, a generalidade obtida no desenvolvimento apresentado permite sua aplicação a quaisquer sistemas de medição de fluxo de radiação nuclear.

CAPÍTULO 3

ANÁLISE DO DETECTOR

3.1 Introdução

No capítulo anterior o processo estocástico de detecção nuclear foi descrito na forma de cumulantes e espectros. Para sua aplicação em sistemas de medição de fluxo de radiação é necessário conhecer as respostas do tipo $h_{rad}(t, \mathbf{P}_{rad}) \leftrightarrow H_{rad}(w, \mathbf{P}_{rad})$ e as funções densidade de probabilidade associadas. Particularmente para caracterizar o detector de radiação neste capítulo, na forma de espectros (cumulantes), deve-se determinar a resposta do detector para a radiação de interesse $h_{d,rad}(t, \mathbf{P}_{rad}) \leftrightarrow H_{d,rad}(w, \mathbf{P}_{rad})$. Note-se que o carácter aleatório das respostas do sistema concentra-se apenas no detector, sendo a resposta do processador determinística.

Como neste trabalho interessa analisar os sistemas de medição de fluxo de nêutrons, estuda-se a câmara de ionização sensível a nêutrons (ex.: fissão e ^{10}B), e como na pesquisa bibliográfica realizada não foi encontrado um modelo detalhado dos pulsos de corrente $h_{d,rad}(t, \mathbf{P}_{rad})$ gerados pela câmara, foi necessário desenvolver um método para cálculo desses pulsos para posteriormente utilizá-los na expressões dos cumulantes e espectros.

Para isso, numa primeira etapa calcula-se o pulso de corrente gerado por uma trilha retilínea de ionização em função dos parâmetros físicos envolvidos no processo. Numa segunda etapa inclui-se o vetor de parâmetros aleatórios \mathbf{P}_{rad} e estuda-se o comportamento estatístico do detector. No final, um programa de computador aplica a metodologia desenvolvida.

O método é apresentado para três geometrias da câmara : plana, esférica e cilíndrica. É importante dizer que o modelo resultante apresenta certo grau de detalhamento, pois para o cálculo do pulso de corrente produzido por uma partícula ionizante emitida com determinada energia e direção, a partir de um ponto numa determinada profundidade do depósito sensível a nêutrons, consideram-se sua perda de energia e alcance no depósito e no gás, sua ionização específica no gás, além das condições de contorno geométricas da câmara. Utiliza-se aproximação analítica ou numérica para a velocidade do elétron e para o alcance da partícula ionizante. No cálculo estatístico considera-se P_{rad} formado das seguintes variáveis aleatórias correspondentes à partícula ionizante : profundidade, energia e direção de emissão, além de, eventualmente, uma variável de identificação. Consideram-se também as funções densidades de probabilidade dessas variáveis.

Para desenvolver esses assuntos, organiza-se este capítulo da seguinte forma :

Calcula-se inicialmente o pulso de corrente gerado por um ponto de ionização, baseado no desenvolvimento proposto por Franzen e Cochran [1962], e após, estende-se o método para determinação do pulso de corrente gerado por uma trilha de ionização retilínea genérica. Detalha-se o método, estudando-se o tempo de coleção e posição dos portadores de carga, geometrias, campo elétrico e potencial, velocidade dos portadores de carga, ionização específica e alcance da partícula ionizante, posição inicial da ionização e comprimento da trilha. Introduce-se o comportamento estatístico, apresentando as expressões dos cumulantes e espectros da corrente gerada pelo detector. Apresentam-se o vetor P_{rad} e as funções densidade de probabilidade associadas e faz-se um estudo qualitativo do comportamento das respostas (tempo e frequência) do detector e dos espectros. Apresenta-se um modelo simplificado para câmara de eletrodos próximos, útil para certas câmaras de fissão. Finalmente, aplica-se o método a casos exemplos por meio de um programa de computador.

Note-se que o sinal de interesse neste trabalho está associado a trilhas de ionização retilíneas originadas por fragmentos de fissão, alfas e ${}^7\text{Li}$ (resultantes da interação do nêutron). Não houve, portanto, qualquer preocupação em desenvolver um modelo específico para trilhas não-retilíneas, como as originadas por elétrons resultantes da interação gama. Este procedimento é válido, pois normalmente tem-se necessidade de uma boa exatidão do sinal de interesse e apenas uma estimativa dos sinais-erro. Coincidentemente, no caso particular da câmara de fissão, o sinal-erro alfa é bem descrito pelo modelo de trajetórias retilíneas.

Também, deve-se ressaltar que procurou-se validar o método apenas por meio de comparação com resultados de casos reais típicos e validar parte dos resultados por meio de cálculos independentes, tal como realizado no programa de computador. *Não é objetivo deste trabalho realizar a validação experimental.*

Cabe notar que neste capítulo a simbologia é empregada de modo a abranger mais de um caso, sempre que possível, para simplificar a apresentação. Também, neste capítulo surgem os símbolos compostos de vários subscritos separados por vírgulas (ex.: $h_{d,ele,rad}(t, P_{rad})$ representando a resposta impulsiva do detector (d), correspondente a componente dos elétrons (ele) e à radiação (rad)). Esse tipo de representação, embora extensa, permite uma mais rápida identificação dos símbolos nas inúmeras expressões.

3.2 Método para cálculo do pulso de corrente gerado por uma trilha de ionização retilínea em câmaras de ionização

Embora o método apresentado nesta secção possa ser aplicado às câmaras de ionização com qualquer geometria, limita-se o desenvolvimento às geometrias de maior interesse : plana, esférica e cilíndrica. Estas formas de câmara possuem linhas de campo elétrico retilíneas.

O método desenvolvido é adequado para câmaras de ionização onde o tempo de geração da trilha de ionização é muito menor que o tempo de coleção dos elétrons. No entanto, para câmaras “rápidas”, a consideração do tempo de geração da trilha pode ser facilmente incluída no desenvolvimento.

Além disso, despreza-se qualquer efeito de captura ou recombinação dos portadores de carga no gás, pois considera-se que a câmara de ionização opera com uma escolha adequada das variáveis tipo de gás, tensão de polarização e fluxo da radiação incidente.

Deve-se observar que essas limitações são aceitáveis para um grande número de aplicações.

3.2.1 Pulso de corrente gerado por um ponto de ionização

O pulso de corrente gerado pela câmara de ionização, no circuito associado, como resultado de uma ionização puntual (figura 3-1), pode ser obtido facilmente empregando a lei da conservação da energia [Franzen e Cochran, 1962] :

O trabalho realizado pelo campo elétrico ε , ao deslocar de dr_{π} um portador π de carga elétrica q_{π} situado em r_{π} , é igual à variação da energia armazenada na capacitância da câmara de ionização.

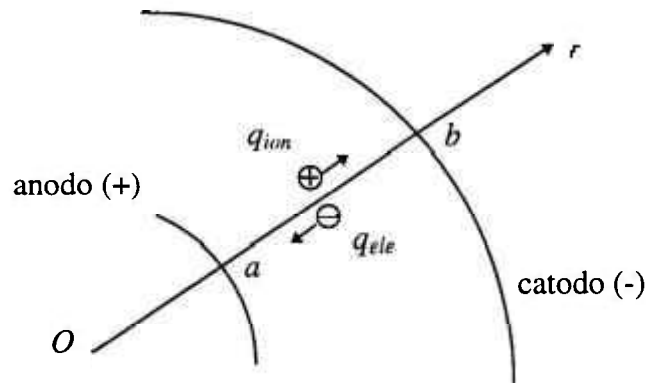


Figura 3-1 : Câmara de ionização (ionização puntual)

Sejam :

p a pressão do gás da câmara de ionização.

ϵ o campo elétrico no interior da câmara de ionização.

π o portador de carga ($\pi = ion$ ou $\pi = ele =$ elétron).

q_π a carga do portador ($q_\pi = q_{ion} > 0$ ou $q_\pi = q_{ele} < 0$).

r a coordenada da linha do campo elétrico.

r_π a posição do portador de carga ($r_\pi = r_{ion}$ ou $r_\pi = r_{ele}$).

v_π a velocidade no gás do portador de carga ($v_\pi = v_{ion} > 0$ ou $v_\pi = v_{ele} < 0$).

C_d a capacitância da câmara de ionização ($d = detector$).

q_d a carga armazenada na capacitância C_d da câmara num determinado instante.

v_d e V_d a tensão nos eletrodos da câmara num determinado instante e a tensão de polarização da câmara, respectivamente.

$h_{d,\pi}$ o pulso de corrente gerado pela câmara no circuito elétrico associado como resultado do deslocamento do portador de carga ($h_{d,\pi} = h_{d,ion}$ ou $h_{d,\pi} = h_{d,ele}$).

s_π o fator que fornece o sinal da carga do portador ($s_{ion} = 1$ ou $s_{ele} = -1$).

Aplicando-se a lei enunciada acima, tem-se

$$q_\pi \cdot \left(\epsilon \cdot dr_\pi \right)_{r_\pi} = d \left(\frac{q_d^2}{2 \cdot C_d} \right)_{V_d = V_d} = V_d \cdot d q_d \quad (3.2-1)$$

Dividindo por dt

$$\left(h_{d,\pi} \right)_{r_\pi} = \frac{d q_d}{dt} = \frac{q_\pi}{V_d} \cdot \left(\epsilon \cdot \frac{dr_\pi}{dt} \right)_{r_\pi} \quad (3.2-2)$$

obtém-se o

pulso de corrente resultante do movimento do portador π no campo elétrico ε

$$\boxed{(h_{d,\pi})_{r_i} = \frac{q_\pi}{V_d} \cdot (\varepsilon \cdot v_\pi)_{r_i}} \quad (3.2-3)$$

Expressando ε e v_π em termos de r_π :

O campo elétrico ε no interior da câmara de ionização de determinada geometria e tensão de polarização V_d pode ser descrito como função da posição, ou seja, $\varepsilon(r)$.

A velocidade do portador de carga v_π é uma função de ε/p , ou seja, $v_\pi(\varepsilon/p)$.

Substituindo em (3.2-3), resulta

$$\boxed{(h_{d,\pi})_{r_i} = q_\pi \cdot \frac{\varepsilon(r_\pi)}{V_d} \cdot v_\pi\left(\frac{\varepsilon(r_\pi)}{p}\right)} \quad (3.2-4)$$

Especificando os extremos da trajetória:

Ocorrida uma ionização puntual na coordenada inicial r_i , cada tipo de portador gerado se desloca pela ação do campo elétrico em direção do eletrodo respectivo, até ser coletado na coordenada final $r_{f,\pi}$ após o tempo de coleção do portador de carga $T_\pi(r_i)$.

Determinando os pulsos de corrente $h_{d,\pi}(t, r_i)$ e $h_d(t, r_i)$:

Para expressar o pulso de corrente $h_{d,\pi}$ em função do tempo t , é necessário determinar a função $r_\pi(t, r_i)$ e substituir em (3.2-4), resultando na *expressão geral do pulso de corrente em função do tempo resultante do movimento do portador π gerado em r_i no campo elétrico ε*

$$\boxed{h_{d,\pi}(t, r_i) = q_\pi \cdot \frac{\varepsilon(r_\pi(t, r_i))}{V_d} \cdot v_\pi\left(\frac{\varepsilon(r_\pi(t, r_i))}{p}\right) \cdot (U(t) - U(t - T_\pi(r_i)))} \quad (3.2-5)$$

onde

$U(\cdot)$ é a função degrau.

O pulso de corrente total resultante do movimento dos dois tipos de portadores *ion* e *ele* pode ser escrito como

$$\boxed{h_d(t, r_i) = h_{d,ion}(t, r_i) + h_{d,ele}(t, r_i)} \quad (3.2-6)$$

com $h_{d,ion}(t, r_i)$ e $h_{d,ele}(t, r_i)$ dados por (3.2-5).

Determinando as cargas $q_{h_d,\pi}(r_i)$ e $q_{h_d}(r_i)$ dos pulsos de corrente :

A carga $q_{h_d,\pi}(r_i)$ do pulso de corrente $h_{d,\pi}(t, r_i)$ pode ser calculada de (3.2-5), ou seja,

$$q_{h_d,\pi}(r_i) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{d,\pi}(t, r_i) \cdot dt \quad (3.2-7)$$

Com o objetivo de permitir uma melhor análise, prefere-se calcular a carga da seguinte forma :

Seja $V(r_i)$ o potencial associado ao ponto de ionização em r_i . A variação (negativa) da energia armazenada na capacitância da câmara de ionização resultante do movimento da carga q_{ion} do ponto r_i ao catodo em b é $q_{ion} \cdot (V(b) - V(r_i))$, e a resultante do movimento da carga q_{ele} do ponto r_i ao anodo em a é $q_{ele} \cdot (V(a) - V(r_i))$. As variações (negativas) da quantidade de cargas nos eletrodos da câmara que produzem essas mesmas variações da energia armazenada na capacitância da câmara são portanto $q_{ion} \cdot (V(b) - V(r_i)) / (V(a) - V(b))$ e $q_{ele} \cdot (V(a) - V(r_i)) / (V(a) - V(b))$, respectivamente.

Considerando $V(a) = V_d$ e $V(b) = 0$, tem-se que a carga $q_{h_d,ion}(r_i)$ do pulso de corrente $h_{d,ion}(t, r_i)$ pode ser expressa como

$$q_{h_d,ion}(r_i) = q_{ion} \cdot \frac{V(r_i)}{V_d} \quad (3.2-8)$$

e a carga $q_{h_d,ele}(r_i)$ do pulso de corrente $h_{d,ele}(t, r_i)$

$$q_{h_d,ele}(r_i) = q_{ele} \cdot \frac{V(r_i) - V_d}{V_d} \quad (3.2-9)$$

De uma forma condensada pode-se escrever

$$q_{h_d,\pi}(r_i) = q_{\pi} \cdot \frac{V(r_i) - V_{f,\pi}}{V_d} \quad (3.2-10)$$

onde

$V_{f,\pi}$ é o potencial do ponto final da trajetória do portador π ($V_{f,ion} = 0$ e $V_{f,ele} = V_d$).

É fácil ver, por meio de (3.2-8) e (3.2-9), que a carga total $q_{h_d}(r_i)$, soma das cargas dos pulsos de corrente dos íons e elétrons, é igual à carga representativa do ponto de ionização $q(r_i)$, isto é,

$$q_{h_d}(r_i) = q_{h_d,ion}(r_i) + q_{h_d,ele}(r_i) = q(r_i) = q_{ion}(r_i) = -q_{ele}(r_i) \quad (3.2-11)$$

onde explicitou-se q_{ion} e q_{ele} em função de r_i .

3.2.2 Pulso de corrente gerado por uma trilha de ionização retilínea

Seja uma trilha de ionização retilínea gerada a partir do catodo de uma câmara de ionização por uma partícula carregada pesada (ex.: fragmento de fissão, ${}^7\text{Li}$, alfa).

Sejam :

x o eixo de coordenada de mesma origem e direção da trilha.

x_t o comprimento da trilha de ionização.

e o módulo da carga do elétron.

$\rho_N(x)$ a densidade linear (ou ionização específica) dos pares de íons na posição x da trilha de ionização, com $\rho_N(x) = dN(x) / dx$, onde $N(x)$ é o número de pares de íons de 0 a x com $0 \leq x \leq x_t$.

O elemento de carga na posição x da trilha é

$$dq_\pi = s_\pi \cdot e \cdot \rho_N(x) \cdot dx \quad (3.2-12)$$

Calcula-se o pulso de corrente resultante do ponto de ionização de carga dq_π , utilizando a equação (3.2-5) com r_i em função de x , isto é $r_i(x)$. Resulta

$$dh_{d,\pi} = s_\pi \cdot e \cdot \rho_N(x) \cdot \frac{\varepsilon(r_\pi(t, r_i(x)))}{V_d} \cdot v_\pi \left(\frac{\varepsilon(r_\pi(t, r_i(x)))}{p} \right) \cdot (U(t) - U(t - T_\pi(r_i(x)))) \cdot dx \quad (3.2-13)$$

Integrando em x , obtém-se o

pulso de corrente devido à trilha de ionização

$$h_{d,\pi}(t) = \frac{s_\pi \cdot e}{V_d} \cdot \int_0^{x_t} \rho_N(x) \cdot \varepsilon(r_\pi(t, r_i(x))) \cdot v_\pi \left(\frac{\varepsilon(r_\pi(t, r_i(x)))}{p} \right) \cdot (U(t) - U(t - T_\pi(r_i(x)))) \cdot dx \quad (3.2-14)$$

O pulso de corrente total resultante do movimento dos dois tipos de portadores *ion* e *ele* pode ser escrito

$$h_d(t) = h_{d,ion}(t) + h_{d,ele}(t) \quad (3.2-15)$$

A carga $q_{h_{d,\pi}}$ do pulso de $h_{d,\pi}(t)$ pode ser calculada a partir de (3.2-14)

$$q_{h_{d,\pi}} = \int_{-\infty}^{\infty} h_{d,\pi}(t) \cdot dt \quad (3.2-16)$$

Ou para uma melhor análise a partir de (3.2-10) e (3.2-12)

$$dq_{h_{d,\pi}} = s_\pi \cdot e \cdot \rho_N(x) \cdot \frac{V[r_i(x)] - V_{i,x}}{V_d} \cdot dx \quad (3.2-17)$$

ou

$$q_{h_d,\pi} = s_\pi \cdot \left(e \cdot \int_0^{x_t} \rho_N(x) \cdot \frac{V(r_i(x))}{V_d} \cdot dx - \frac{V_{f,\pi}}{V_d} \cdot q_t \right) \quad (3.2-18)$$

onde q_t é a carga da trilha de ionização, representada pelos íons positivos.

$$q_t = e \cdot \int_0^{x_t} \rho_N(x) \cdot dx \quad (3.2-19)$$

Também, de acordo com (3.2-18), a carga total q_{h_d} pode ser escrita

$$q_{h_d} = q_{h_d,ion} + q_{h_d,ele} = q_t \quad (3.2-20)$$

com $q_{h_d,ion}$ e $q_{h_d,ele}$ dados por (3.2-18) ou (3.2-16) .

A partir de (3.2-18) e (3.2-20), pode-se ver claramente que as cargas $q_{h_d,\pi}$ e q_{h_d} dos pulsos de corrente são independentes da tensão de polarização V_d da câmara de ionização.

3.2.3 Detalhamento do método

Para aplicar o método descrito é necessário especificar, além das geometrias de interesse, as várias funções componentes de (3.2-14) e (3.2-18). Devem-se definir :

- a) Tempo de coleção $T_\pi(r_i)$ e posição $r_\pi(t, r_i)$ do portador de carga
- b) Geometrias
- c) Campo elétrico $\epsilon(r_\pi)$ e potencial $V(r_i)$
- d) Velocidade do portador de carga $v_\pi(\epsilon / p)$
- e) Ionização específica $\rho_N(x)$ e alcance L_0
- f) Posição inicial da ionização $r_i(x)$ e comprimento da trilha x_t

A seguir, desenvolvem-se cada um desses itens com a finalidade de calcular os pulsos de corrente e cargas associadas.

3.2.3.1 Tempo de coleção e posição do portador de carga

A relação entre o instante de tempo t e a posição do portador de carga r_π é

$$t(r_\pi, r_i) = \int_{r_i}^{r_\pi} \frac{dr_\pi}{v_\pi \left(\frac{\mathcal{E}(r_\pi)}{p} \right)} \quad (3.2-21)$$

Para determinar $T_\pi(r_i)$, faz-se $r_\pi = r_{f,\pi}$, ou seja

$$T_\pi(r_i) = t(r_{f,\pi}, r_i) \quad (3.2-22)$$

Mas, para determinar $r_\pi(t, r_i)$ é necessário inverter $t(r_\pi, r_i)$ de (3.2-21). Dependendo da escolha da função $v_\pi(\mathcal{E}/p)$ a inversão analítica nem sempre é possível, sendo que nesses casos efetua-se a inversão numérica. No caso de uma trilha de ionização e da inversão numérica de (3.2-21), sugere-se neste trabalho utilizar no lugar de (3.2-21) a integral abaixo

$$t(r_\pi, r_{i,\pi}) = \int_{r_{i,\pi}}^{r_\pi} \frac{dr_\pi}{v_\pi \left(\frac{\mathcal{E}(r_\pi)}{p} \right)} \quad (3.2-23)$$

onde $r_{0,\pi}$ é a coordenada da extremidade da linha de campo elétrico, no eletrodo oposto ao eletrodo de coleção do portador π . Então a equação (3.2-21) transforma-se em

$$t(r_\pi, r_i) = t(r_\pi, r_{0,\pi}) - t(r_i, r_{0,\pi}) \quad (3.2-24)$$

e $T_\pi(r_i)$ pode ser escrito como

$$T_\pi(r_i) = t(r_{f,\pi}, r_{0,\pi}) - t(r_i, r_{0,\pi}) \quad (3.2-25)$$

ou rescrevendo em função da coordenada da trilha (x)

$$\boxed{T_\pi(r_i(x)) = t(r_{f,\pi}, r_{0,\pi}) - t(r_i(x), r_{0,\pi})} \quad (3.2-26)$$

para $0 \leq x \leq x_t$

Para determinar a posição $r_\pi(t, r_i)$, considera-se que $t(r_\pi, r_i)$ é simplesmente t com $t = 0$ para $r_\pi = r_i$. Rescrevendo (3.2-24) e explicitando o intervalo de validade, obtém-se

$$t(r_\pi, r_{0,\pi}) = t + t(r_i, r_{0,\pi}) \quad \text{para } r_i \leq r_\pi \leq r_{f,\pi} \quad (3.2-27)$$

Invertendo em relação a r_π , resulta

$$r_\pi \left(\left(t + t(r_i, r_{0,\pi}) \right), r_{0,\pi} \right) = r_\pi(t, r_i) \quad \text{para } 0 \leq t \leq T_\pi \quad (3.2-28)$$

Ou rescrevendo em função da coordenada da trilha x

$$\boxed{r_\pi(t, r_i(x)) = r_\pi \left(\left(t + t(r_i(x), r_{0,\pi}) \right), r_{0,\pi} \right)} \quad (3.2-29)$$

para $0 \leq t \leq T_\pi$ e $0 \leq x \leq x_t$

Vê-se a grande vantagem de utilizar as equações (3.2-26) e (3.2-29) no lugar das equações (3.2-21) e (3.2-22): as funções $t(r_\pi, r_{0,\pi})$ e sua inversa $r_\pi(t, r_{0,\pi})$ podem ser previamente calculadas por meio de (3.2-23) e armazenadas, para uso posterior em (3.2-26)

e (3.2-29), enquanto a integral (3.2-21) deve ser calculada para cada ponto de cada trilha de ionização.

3.2.3.2 Geometrias

Três geometrias de câmara de ionização são consideradas neste trabalho : plana, esférica e cilíndrica, de acordo com a figura 3-2, onde se representam os correspondentes parâmetros dimensionais.

O equacionamento correspondente a cada uma delas é de importância no cálculo da posição inicial dos pontos de ionização e do comprimento da trilha, sendo o desenvolvimento apresentado na secção 3.2.3.6 e apêndice A.3.2.

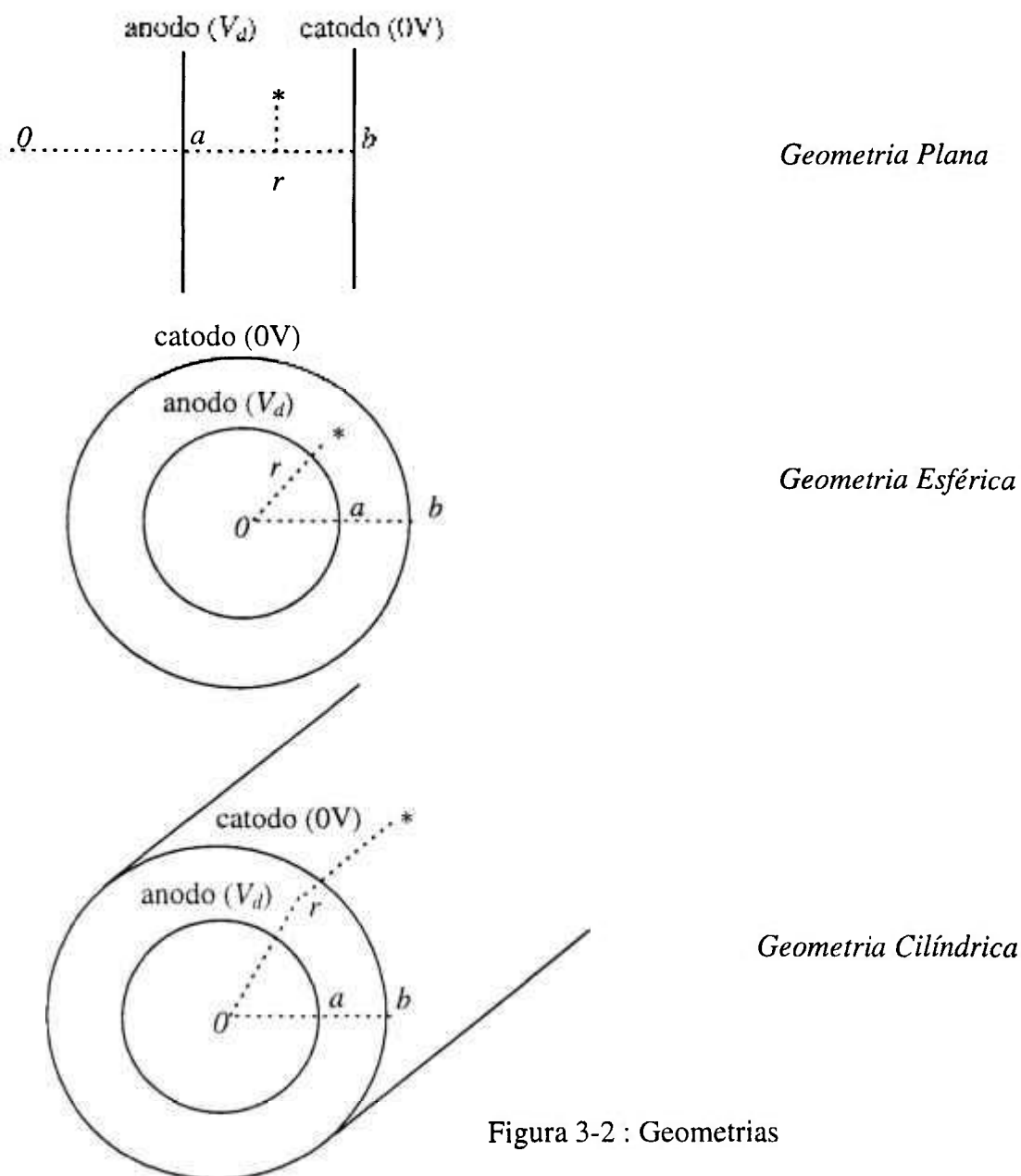


Figura 3-2 : Geometrias

3.2.3.3 Campo elétrico e potencial

O campo elétrico ε no interior da câmara de ionização depende da tensão de polarização da câmara V_d e de sua geometria, podendo ser escrito de uma forma compacta [Franzen e Cochran, 1962; Kowalski, 1970] como

$$\varepsilon(r) = k_\varepsilon \cdot r^{-m_\varepsilon} \quad (3.2-30)$$

onde para geometria

plana	$k_\varepsilon = V_d / (b-a)$	$m_\varepsilon = 0$
esférica	$k_\varepsilon = V_d \cdot (a \cdot b / (b-a))$	$m_\varepsilon = 2$
cilíndrica	$k_\varepsilon = V_d / \ln(b/a)$	$m_\varepsilon = 1$

O potencial $V(r)$ no interior da câmara de ionização pode ser obtido a partir do campo elétrico

$$V(r) = \int_r^b \varepsilon(r) \cdot dr \quad (3.2-31)$$

Substituindo (3.2-30) em (3.2-31), resulta

$$V(r) = \frac{k_\varepsilon}{1-m_\varepsilon} \cdot (b^{1-m_\varepsilon} - r^{1-m_\varepsilon}) \quad (3.2-32)$$

para geometria plana e esférica e

$$V(r) = k_\varepsilon \cdot \ln\left(\frac{b}{r}\right) \quad (3.2-33)$$

para geometria cilíndrica.

3.2.3.4 Velocidade do portador de carga

A velocidade do portador de carga v_π é uma função de ε / p onde ε é o campo elétrico e p é a pressão do gás.

A velocidade do íon é uma função linear de ε / p [Wilkinson, 1950; Franzen e Cochran, 1962], ou seja

$$v_{ion} = \mu_{ion} \cdot \frac{\varepsilon}{p} \quad (3.2-34)$$

onde

μ_{ion} é a mobilidade do íon no gás.

A velocidade do elétron, da ordem de 10^3 a 10^4 da velocidade do íon nas mesmas condições, varia de forma considerável de um gás para outro, sendo uma função não linear de ε/p .

Diversos textos (ex.: Bortner e outros [1957], Lamphere [1960], Franzen e Cochran [1962]) apresentam curvas experimentais da velocidade do elétron para diversos gases e compostos gasosos. Várias aproximações são possíveis. Particularmente, neste trabalho, desenvolvem-se a aproximação analítica por função potência e a aproximação numérica.

a) Aproximação analítica

A aproximação analítica por função potência [Franzen e Cochran, 1962], apesar de imprecisa para certos compostos gasosos, apresenta forma similar à equação da velocidade do íon, permitindo que (3.2-21) seja invertida analiticamente e que se obtenham certas expressões analíticas para o método.

A velocidade do elétron é aproximada por

$$v_{ele} = -\mu_{ele} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{p} \right)^{m_{v_{ele}}} \quad (3.2-35)$$

onde

μ_{ele} e $m_{v_{ele}}$ são constantes que dependem do gás e do ajuste realizado.

A similaridade das equações (3.2-34) e (3.2-35) permite escrever de uma maneira condensada

$$v_{\pi} = s_{\pi} \cdot \mu_{\pi} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{p} \right)^{m_{v_{\pi}}} \quad (3.2-36)$$

onde

μ_{π} é a mobilidade do portador de carga no gás para o íon e apenas uma constante para o elétron.

$m_{v_{\pi}}$ é uma constante que depende do portador π e do gás.

Substituindo (3.2-30) com $r = r_{\pi}$ em (3.2-36), resulta

$$v_{\pi} \left(\frac{\varepsilon(r_{\pi})}{p} \right) = s_{\pi} \cdot \mu_{\pi} \cdot \left(\frac{k_{\varepsilon} \cdot r_{\pi}^{-m_{\varepsilon}}}{p} \right)^{m_{v_{\pi}}} \quad (3.2-37)$$

$$\boxed{v_{\pi} \left(\frac{\varepsilon(r_{\pi})}{p} \right) = s_{\pi} \cdot \mu_{\pi} \cdot \left(\frac{k_{\varepsilon}}{p} \right)^{m_{v_{\pi}}} \cdot r_{\pi}^{-m_{\varepsilon} m_{v_{\pi}}}} \quad (3.2-38)$$

A utilização de (3.2-38), na obtenção do tempo de coleção do portador de carga, posição do portador de carga e pulso de corrente gerado, resulta nas expressões mostradas no apêndice A.3.1.

b) Aproximação numérica

A aproximação numérica proposta neste trabalho fornece precisão adequada para todos gases e compostos gasosos.

A velocidade do elétron é aproximada a partir de tabelas de dados experimentais. Utiliza-se a integral (3.2-23), no lugar de (3.2-21), para a obtenção do tempo de coleção e da posição do portador de carga, conforme proposto na secção 3.2.3.1.

O método de obtenção dos pulsos de corrente e cargas encontra-se descrito nas secções 3.2.1 e 3.2.2.

3.2.3.5 Poder de freamento, alcance e ionização específica

Nesta secção emprega-se o sufixo g para distinguir as variáveis e parâmetros correspondentes ao gás daqueles correspondentes ao depósito (filme) sensível a nêutrons de sufixo f . No restante deste trabalho omite-se o sufixo g , a favor da simplicidade da nomenclatura.

Utiliza-se o conceito de poder de freamento e alcance da partícula ionizante pesada no meio (depósito sensível a nêutrons e gás) com o objetivo de calcular, na secção 3.2.3.6 e apêndice A.3.2, o comprimento da trilha de ionização do gás $x_{t,g}$ (ou simplesmente x_t).

Além disso, a ionização específica da partícula no gás $\rho_{N,g}$ pode ser calculada a partir de equações empíricas de (alcance \times energia), ou também a partir de tabelas de poder de freamento (“stopping power”), total S , e/ou eletrônico S_{ele} , quando disponíveis.

Nos cálculos da ionização específica apresentados a seguir considera-se que [Lamphere, 1960; ICRU 31, 1979; ICRU 49, 1993]:

- Para uma partícula ionizante pesada, a maior parte da energia depositada no meio é resultado de interações de Coulomb com os elétrons dos átomos do meio.
- Apenas no final de sua trajetória (baixas energias) as interações de espalhamento com o núcleo atômico e a variação da relação entre as secções de choque de ionização e excitação passam a ser significativas.

Método de cálculo do alcance e ionização específica

Seja um depósito de material sensível a nêutrons (ex.: U_3O_8 , UO_2 enriquecidos com ^{235}U , ou B enriquecido com ^{10}B) de espessura micrométrica uniforme δ_f sobre um eletrodo da câmara de ionização (ex.: catodo) (figura 3-3).

Seja uma reação nuclear (ex.: (n,f) , (n,α)) no ponto B' de profundidade z no depósito, e a partícula ionizante resultante de energia $E_{0,f}$ emitida num ângulo θ em relação à normal ao catodo.

Considere-se o eixo de coordenada x de origem em B' para cálculos no depósito e de origem em B para cálculos no gás.

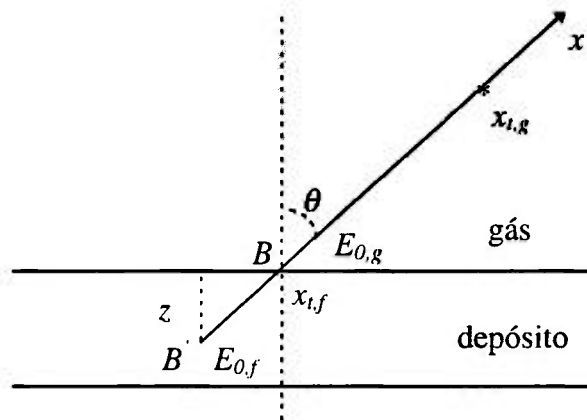


Figura 3-3 : Diagrama para análise da perda de energia da partícula no depósito e gás

Como o depósito possui espessura infinitesimal δ_f em relação ao raio do catodo b $\delta_f \ll b$, tem-se que o comprimento da trilha de ionização $x_{t,f}$ dentro do depósito pode ser escrito

$$x_{t,f} = \frac{z}{\cos(\theta)} \quad (3.2-39)$$

De B' a B , a partícula caminha $x_{t,f}$ e sua energia é reduzida de $E_{0,f}$ para $E_{0,g}$, onde $E_{0,g}$ é a energia de escape do depósito, igual à energia inicial da partícula no gás. Após isso, a partícula perde energia ao percorrer a trajetória de comprimento $x_{t,g}$ no gás, até colidir com um eletrodo ou até parar no próprio gás.

Assim, tem-se a seguinte sequência de cálculo :

- A partir da energia inicial da partícula no depósito $E_{0,f}$, calcula-se a energia de escape $E_{0,g}$;
- Com $E_{0,g}$, calcula-se o alcance $L_{0,g}$ e a ionização específica $\rho_{N,g}$ da partícula no gás;
- A partir de $L_{0,g}$ e das relações geométricas da câmara, calcula-se o comprimento da trilha no gás $x_{t,g}$ na secção 3.2.3.6 e apêndice A.3.2.

Como os mecanismos de perda de energia da partícula nos dois meios são os mesmos, o método apresentado a seguir, para o cálculo do alcance e ionização específica, pode ser utilizado em ambos.

a) Aproximação analítica

Neste caso considera-se uma função analítica biunívoca $L(E)$, onde E é a energia num ponto da trajetória da partícula ionizante. L é o alcance da partícula para a energia E , considerando que toda sua energia seja depositada no meio.

Apresenta-se o método, utilizando a função potência

$$L = k_L \cdot (E)^{m_L} \quad (3.2-40)$$

com

$k_L > 0$ e $m_L > 0$ constantes que dependem do meio e do tipo de partícula ionizante.

A forma dessa função é compatível com as expressões obtidas por Alexander e Gazdik [1960], Frank [1964], Kahn e outros [1965], para o alcance de fragmentos de fissão. É compatível também com fórmulas empíricas para o alcance de partículas alfa e com a eventual utilização da regra de Bragg-Kleeman [Evans, 1985]. Além disso, pode ser usada para descrever numa primeira aproximação o alcance de íons $Z > 2$ (ex.: ${}^7\text{Li}$ na câmara com ${}^{10}\text{B}$).

Seja então uma partícula de energia inicial E_0 e de alcance L_0 dado por (3.2-40). Numa determinada posição x da trilha de ionização, a partícula possui energia $E(x)$, e o alcance é reduzido para $(L_0 - x)$. Substituindo-se em

$$E = \left(\frac{L}{k_L} \right)^{\frac{1}{m_L}} \quad (3.2-41)$$

dado por inversão de (3.2-40), resulta

$$E(x) = \left(\frac{L_0 - x}{k_L} \right)^{\frac{1}{m_L}} \quad (3.2-42)$$

ou

$$E(x) = E_0 \cdot \left(1 - \frac{x}{L_0} \right)^{\frac{1}{m_L}} \quad (3.2-43)$$

para $0 \leq x \leq L_0$

Aplicação

Com a origem da coordenada x em B' :

Fazendo em (3.2-43) $E_0 = E_{0,f}$ e $x = x_{t,f}$, resulta a energia de escape $E_{0,g}$

$$E_{0,g} = E_{0,f} \cdot \left(1 - \frac{z}{L_{0,f} \cdot \cos(\theta)} \right)^{\frac{1}{m_{L,f}}} \quad \text{para } (z / \cos(\theta)) \leq L_{0,f}$$

$$E_{0,g} = 0 \quad \text{para } (z / \cos(\theta)) \geq L_{0,f}$$
(3.2-44)

sendo que de (3.2-40)

$$L_{0,f} = k_{L,f} \cdot (E_{0,f})^{m_{L,f}} \quad (3.2-45)$$

A partir de $E_{0,g}$ calcula-se o alcance da partícula no gás $L_{0,g}$ por meio de (3.2-40) :

$$L_{0,g} = k_{L,g} \cdot (E_{0,g})^{m_{L,g}} \quad (3.2-46)$$

Interessa calcular a ionização específica apenas para o gás.

Seja W_g a energia média necessária para a formação de um par de íons no gás pela partícula ionizante (depende do gás e do tipo de partícula). Sendo a partícula ionizante pesada, considere-se numa primeira aproximação W_g independente da energia [ICRU 31, 1979] (ver hipóteses no início desta secção).

De (3.2-43), com a origem da coordenada x em B , resulta

$$N_g(L_{0,g}) - N_g(x) = \frac{E_g(x)}{W_g} = N_g(L_{0,f}) \cdot \left(1 - \frac{x}{L_{0,g}} \right)^{\frac{1}{m_{L,g}}} \quad \text{para } 0 \leq x \leq L_{0,g}$$
(3.2-47)

onde

$N_g(x)$ é o número de pares de íons formados entre 0 e x .

Calculando a ionização específica $\rho_{N,g}(x) = dN_g(x) / dx$

$$\rho_{N,g}(x) = \frac{N_g(L_{0,g})}{m_{L,g} \cdot L_{0,g}} \cdot \left(1 - \frac{x}{L_{0,g}} \right)^{\frac{1}{m_{L,g}} - 1} \quad \text{para } 0 \leq x < L_{0,g}$$

$$\rho_{N,g}(x) = 0 \quad \text{para } x = L_{0,g}$$
(3.2-48)

b) Aproximação numérica

Como a partir desta secção os cálculos apresentados relacionam-se apenas com o gás, passa-se a omitir o sufixo g .

Em alguns casos (ex.: partícula alfa) dispõe-se de dados na forma tabular do alcance, poder de freamento total S , eletrónico S_{ele} , etc., da partícula ionizante nos componentes do gás e nos componentes do depósito. A partir desses dados pode-se determinar a perda de energia da partícula ionizante no depósito e seu alcance no gás de vários modos [Evans, 1985; Marmier e Sheldon, 1969]. Por exemplo, por meio da regra de Bragg-Kleeman ou pela combinação do poder de freamento dos elementos do composto ou da mistura.

Para a ionização específica, no caso de se dispor de dados do poder de freamento eletrónico S_{ele} , pode-se obter uma forma da curva $\rho_N(x)$ com menor influência das reações de espalhamento com o núcleo atômico para x próximo do alcance.

Ilustra-se esse tipo de aproximação com a determinação tabular do alcance e da ionização específica da partícula alfa num gás, a partir dos dados disponíveis nas tabelas de ICRU 49 [1993].

Sejam então os elementos de interesse do i -ésimo dado da tabela ICRU 49 :

$(E)_i$ a energia da partícula alfa.

$(S_{ele})_i$ o poder de freamento eletrónico.

$(R_{AFC})_i$ o alcance calculado utilizando a Aproximação de Freamento Contínuo (CSDA = "Continuous Slowing-Down Approximation").

$(F_D)_i$ o Fator de Desvio ("Detour Factor").

Para calcular o alcance "retilíneo" da partícula alfa :

- Gera-se na tabela uma nova coluna de alcance $(L)_i$ por meio da equação

$$(L)_i = (R_{AFC})_i \cdot (F_D)_i \quad (3.2-49)$$

- Para determinada energia E de interesse, o alcance L é interpolado da tabela.

Pode-se calcular a ionização específica $\rho_N(x)$ da partícula alfa no gás a partir do poder de freamento eletrónico S_{ele} . Sejam E_0 e L_0 , respectivamente, a energia inicial e o alcance interpolado da partícula. Para calcular a ionização específica $\rho_N(x)$:

- Gera-se na tabela uma nova coluna da coordenada da trilha $(x)_i$ por meio da equação

$$(x)_i = L_0 - (L)_i \quad (3.2-50)$$

- Gera-se na tabela uma nova coluna da ionização específica $(\rho_N)_i$

$$(\rho_N)_i = \frac{1}{W} \cdot \left(\frac{d R_{AFC}}{d x} \right)_i \cdot (S_{ele})_i \quad (3.2-51)$$

onde

W é a energia média para a partícula alfa formar um par de íons no gás,

$$\left(\frac{d R_{AFC}}{d x} \right)_i = \frac{(R_{AFC})_{i+1} - (R_{AFC})_i}{(x)_{i+1} - (x)_i} \quad (3.2-52)$$

- Para determinada coordenada x de interesse, a ionização específica $\rho_N(x)$ é interpolada da tabela.

Deve-se levar em conta nos cálculos que o poder de freamento e alcance obtidos da tabela ICRU 49 encontram-se representados considerando-se a unidade de comprimento expressa em g/cm^2 .

3.2.3.6 Posição inicial da ionização e comprimento da trilha

Nesta secção determina-se r_i em função de x , e x_t em função do alcance L_0 e das condições de contorno geométricas da câmara, para uma trilha de ionização genérica no gás, e em câmaras de ionização de geometria plana, esférica e cilíndrica. Como o desenvolvimento envolve apenas considerações geométricas, seu detalhamento encontra-se no apêndice A.3.2. Nesta secção apresentam-se apenas os resultados.

Sejam :

θ o ângulo entre o eixo x da trilha e a normal ao catodo.

Ω o ângulo entre o plano (trilha / normal catodo) e o plano da secção reta da câmara (para geometria cilíndrica).

Vários casos podem ocorrer :

- a trilha pode ou não alcançar o anodo (para todas as geometrias).
- a trilha pode ou não reencontrar o catodo (para geometria esférica e cilíndrica).

Relações para geometria plana

Determinação de $r_i(x)$

$$r_i(x) = b - x \cdot \cos(\theta) \quad \text{para } 0 \leq x \leq x_t \quad (3.2-53)$$

Determinação de x_t

a) a trilha alcança o anodo

$$x_t = \frac{(b - a)}{\cos(\theta)} \quad (3.2-54)$$

b) a trilha não alcança o anodo

$$x_t = L_0 \quad (3.2-55)$$

Relações para geometria esférica

Determinação de $r_i(x)$

$$r_i(x) = x^2 + b^2 - 2 \cdot x \cdot b \cdot \cos(\theta) \quad \text{para } 0 \leq x \leq x_t \quad (3.2-56)$$

Determinação de x_t

a) a trilha alcança o anodo

$$x_t = b \cdot \cos(\theta) - \sqrt{b^2 \cdot \cos^2(\theta) - (b^2 - a^2)} \quad (3.2-57)$$

b) a trilha reencontra o catodo

$$x_t = 2 \cdot b \cdot \cos(\theta) \quad (3.2-58)$$

c) a trilha não alcança o anodo e não reencontra o catodo

$$x_t = L_0 \quad (3.2-59)$$

Relações para geometria cilíndrica

Sejam :

θ_1 o ângulo entre a projeção do eixo x da trilha na secção reta da câmara e a normal ao catodo.

φ o ângulo entre o eixo x da trilha e a secção reta da câmara.

Determinação de $r_i(x)$

$$r_i(x) = (x \cdot \cos(\varphi))^2 + b^2 - 2 \cdot (x \cdot \cos(\varphi)) \cdot b \cdot \cos(\theta_1) \quad \text{para } 0 \leq x \leq x_t \quad (3.2-60)$$

Determinação de x_t

a) a trilha alcança o anodo

$$x_t = \frac{b \cdot \cos(\theta_1) - \sqrt{b^2 \cdot \cos^2(\theta_1) - (b^2 - a^2)}}{\cos(\varphi)} \quad (3.2-61)$$

b) a trilha reencontra o catodo

$$x_t = \frac{2 \cdot b \cdot \cos(\theta_1)}{\cos(\varphi)} \quad (3.2-62)$$

c) a trilha não alcança o anodo e não reencontra o catodo

$$x_t = L_0 \quad (3.2-63)$$

3.3 Comportamento estatístico do detector

Esta secção tem por objetivo analisar as respostas do detector do ponto de vista estatístico.

Nas secções 3.1 e 3.2 desenvolveu-se um método para cálculo do pulso de corrente $h_d(t)$ e suas componentes $h_{d,\pi}(t)$ (nesta secção 3.3, chamados de $h_{d,rad}(t, \mathbf{P}_{rad})$ e $h_{d,\pi,rad}(t, \mathbf{P}_{rad})$, respectivamente), resultante de trilhas retilíneas em câmaras de ionização. Seja então $h_{d,rad}(t, \mathbf{P}_{rad})$ representada pelas equações (3.2-15 e 14).

3.3.1 Equações Gerais

Seja $i_{d,rad}$ a corrente gerada pelo detector quando submetido à radiação nuclear primária rad de taxa média de eventos λ_{rad} . Utilizando as equações (2.5-4) e (2.5-5), obtêm-se os cumulantes e espectros da corrente $i_{d,rad}$:

Cumulantes

$$\begin{aligned} C_{n,i_{d,rad}}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \\ = \lambda_{rad} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} E \left\{ h_{d,rad}(\xi, \mathbf{P}_{rad}) \cdot h_{d,rad}(\xi + \tau_1, \mathbf{P}_{rad}) \dots h_{d,rad}(\xi + \tau_{n-1}, \mathbf{P}_{rad}) \right\} \cdot d\xi \end{aligned} \quad (3.3-1)$$

Espectros

$$\begin{aligned} S_{n,i_{d,rad}}(w_1, \dots, w_{n-1}) \\ = \lambda_{rad} \cdot E \left\{ H_{d,rad}(w_1, \mathbf{P}_{rad}) \dots H_{d,rad}(w_{n-1}, \mathbf{P}_{rad}) \cdot H_{d,rad}(-w_1 \dots -w_{n-1}, \mathbf{P}_{rad}) \right\} \end{aligned} \quad (3.3-2)$$

onde

λ_{rad} é a taxa média de eventos correspondente à rad .

$h_{d,rad}(t, \mathbf{P}_{rad}) \leftrightarrow H_{d,rad}(w, \mathbf{P}_{rad})$ são as respostas do detector (pulso de corrente e sua transformada de Fourier) correspondentes à rad .

\mathbf{P}_{rad} é o vetor de parâmetros aleatórios correspondente à rad .

Momentos das cargas

Considerando as equações (3.2-16 ou 18) e (3.2-20), calculam-se os momentos

$$E \left\{ q_{h_{d,\pi,rad}}^n(\mathbf{P}_{rad}) \right\} \text{ e } E \left\{ q_{h_{d,rad}}^n(\mathbf{P}_{rad}) \right\} \quad (3.3-3)$$

respectivamente, onde

$q_{h_{d,\pi,rad}}(\mathbf{P}_{rad}) = \mathbf{q}_{h_{d,\pi,rad}}$ é a carga do pulso de corrente $h_{d,\pi,rad}(t, \mathbf{P}_{rad})$.

$q_{h_{d,rad}}(\mathbf{P}_{rad}) = \mathbf{q}_{h_{d,rad}}$ é a carga do pulso de corrente $h_{d,rad}(t, \mathbf{P}_{rad})$, igual à carga correspondente à trilha de ionização $q_{t,rad}(\mathbf{P}_{rad}) = \mathbf{q}_{t,rad}$.

Para calcular as expressões (3.3-1 a 3) é necessário determinar \mathbf{P}_{rad} e sua função densidade de probabilidade.

3.3.2 Vetor \mathbf{P}_{rad}

As características aleatórias do pulso de corrente podem ser representadas pela direção θ e Ω (ver apêndice A.3.2), pela profundidade z do ponto de ocorrência da reação nuclear no depósito sensível a nêutrons e pela energia de emissão $E_{0,f}$ da partícula ionizante resultante dessa reação. A variação aleatória da energia absorvida no meio durante o percurso da partícula, que resulta na dispersão (“straggling”) do alcance, é desprezada neste trabalho por introduzir erros de segunda ordem nos resultados.

Para apenas uma radiação ionizante secundária, resultado da reação nuclear, o vetor \mathbf{P}_{rad} pode ser escrito como

$$\mathbf{P}_{rad} = [\theta \quad \Omega \quad z \quad E_{0,f,rad}] \quad (3.3-4)$$

Para calcular as expectâncias nas equações (3.3-1, 2 e 3) é necessário conhecer a função densidade de probabilidade (fdp) do vetor \mathbf{P}_{rad}

$$f_{\mathbf{P}_{rad}}(\mathbf{P}_{rad}) = f_{\theta, \Omega, z, E_{0,f,rad}}(\theta, \Omega, z, E_{0,f,rad}) \quad (3.3-5)$$

Claramente as variáveis aleatórias θ , Ω , z e $E_{0,f,rad}$ são independentes entre si, logo

$$f_{\mathbf{P}_{rad}}(\mathbf{P}_{rad}) = f_{\theta}(\theta) \cdot f_{\Omega}(\Omega) \cdot f_z(z) \cdot f_{E_{0,f,rad}}(E_{0,f,rad}) \quad (3.3-6)$$

Observações sobre as diferentes fdp_s:

a) Sobre $f_{\theta}(\theta)$ e $f_{\Omega}(\Omega)$

Como todas as direções são equiprováveis e, θ e Ω independentes entre si, resulta que $f_{\theta}(\theta)$ e $f_{\Omega}(\Omega)$ são uniformes nos intervalos $0 \leq \theta \leq \pi/2$ e $0 \leq \Omega \leq \pi/2$.

b) Sobre $f_z(z)$

Considerando espessura micrométrica, todas as profundidades são equiprováveis e portanto $f_z(z)$ é uniforme em $0 \leq z \leq \delta_f$.

c) Sobre $f_{E_{0,f,rad}}(E_{0,f,rad})$

Corresponde ao espectro normalizado de energia de emissão da partícula ionizante. Como exemplo para um depósito de óxido de urânio contendo ^{235}U , $f_{E_{0,f,rad}}(E_{0,f,rad})$ corresponde ao espectro normalizado das energias dos fragmentos de fissão [Lamphere, 1960; Khan e outros, 1965].

No caso de uma câmara de fissão submetida à radiação primária nêutron, os fragmentos de fissão podem ser tratados como um tipo de radiação secundária, de modo que essas quatro variáveis aleatórias são suficientes para realizar o modelamento. No caso de uma câmara com ^{10}B , os dados disponíveis permitem refinar o cálculo considerando que a radiação primária nêutron origina duas radiações secundárias (alfa e ^7Li) em sentidos opostos, sendo que apenas uma delas ioniza o gás. Portanto, para generalizar os resultados obtidos :

Seja s a variável aleatória que identifica a ocorrência das radiações secundárias s_0 e s_1 com energias de emissão E_{0,f,rad,s_0} e E_{0,f,rad,s_1} , respectivamente.

Então,

para $s = 0$

$$\mathbf{P}_{rad}|_{s=0} = \mathbf{P}_{rad,s_0} = [\theta \quad \Omega \quad z \quad E_{0,f,rad,s_0}] \quad (3.3-7)$$

$$h_{d,rad}(t, \mathbf{P}_{rad})|_{s=0} = h_{d,rad,s_0}(t, \mathbf{P}_{rad,s_0}) \quad (3.3-8)$$

para $s = 1$

$$\mathbf{P}_{rad}|_{s=1} = \mathbf{P}_{rad,s_1} = [\theta \quad \Omega \quad z \quad E_{0,f,rad,s_1}] \quad (3.3-9)$$

$$h_{d,rad}(t, \mathbf{P}_{rad})|_{s=1} = h_{d,rad,s_1}(t, \mathbf{P}_{rad,s_1}) \quad (3.3-10)$$

Como s é independente das demais variáveis aleatórias, a equação (3.3-1) pode ser escrita

$$\begin{aligned} C_{n,i,d,rad}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \\ = \lambda_{rad} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} E \left\{ p\{s=0\} \cdot h_{d,rad,s_0}(\xi, \mathbf{P}_{rad,s_0}) \cdot h_{d,rad,s_0}(\xi + \tau_1, \mathbf{P}_{rad,s_0}) \dots \cdot h_{d,rad,s_0}(\xi + \tau_{n-1}, \mathbf{P}_{rad,s_0}) \right. \\ \left. + p\{s=1\} \cdot h_{d,rad,s_1}(\xi, \mathbf{P}_{rad,s_1}) \cdot h_{d,rad,s_1}(\xi + \tau_1, \mathbf{P}_{rad,s_1}) \dots \cdot h_{d,rad,s_1}(\xi + \tau_{n-1}, \mathbf{P}_{rad,s_1}) \right\} \cdot d\xi \end{aligned} \quad (3.3-11)$$

ou

$$\begin{aligned}
& C_{n,i,j,n,w}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \\
&= \lambda_{rad} \cdot \left(p\{s=0\} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} E \left\{ h_{d,rad,s_0}(\xi, \mathbf{P}_{rad,s_0}) \cdot h_{d,rad,s_0}(\xi + \tau_1, \mathbf{P}_{rad,s_0}) \dots h_{d,rad,s_0}(\xi + \tau_{n-1}, \mathbf{P}_{rad,s_0}) \right\} \cdot d\xi \right. \\
&\quad \left. + p\{s=1\} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} E \left\{ h_{d,rad,s_1}(\xi, \mathbf{P}_{rad,s_1}) \cdot h_{d,rad,s_1}(\xi + \tau_1, \mathbf{P}_{rad,s_1}) \dots h_{d,rad,s_1}(\xi + \tau_{n-1}, \mathbf{P}_{rad,s_1}) \right\} \cdot d\xi \right)
\end{aligned} \tag{3.3-12}$$

onde

$p\{\cdot\}$ designa a probabilidade.

$h_{d,rad,s_0}(t, \mathbf{P}_{rad,s_0})$ e $h_{d,rad,s_1}(t, \mathbf{P}_{rad,s_1})$ são as respostas impulsivas do detector correspondentes à radiação primária *rad* e às radiações secundárias (partículas ionizantes) s_0 e s_1 , respectivamente.

Analogamente para os espectros, pode-se obter por meio de (3.3-2) uma expressão similar, ou seja,

$$\begin{aligned}
& S_{n,i,d,rad}(w_1, \dots, w_{n-1}) \\
&= \lambda_{rad} \cdot \left(p\{s=0\} \cdot E \left\{ H_{d,rad,s_0}(w_1, \mathbf{P}_{rad,s_0}) \dots H_{d,rad,s_0}(w_{n-1}, \mathbf{P}_{rad,s_0}) \cdot H_{d,rad,s_0}(-w_1 \dots -w_{n-1}, \mathbf{P}_{rad,s_0}) \right\} \right. \\
&\quad \left. + p\{s=1\} \cdot E \left\{ H_{d,rad,s_1}(w_1, \mathbf{P}_{rad,s_1}) \dots H_{d,rad,s_1}(w_{n-1}, \mathbf{P}_{rad,s_1}) \cdot H_{d,rad,s_1}(-w_1 \dots -w_{n-1}, \mathbf{P}_{rad,s_1}) \right\} \right)
\end{aligned} \tag{3.3-13}$$

onde

$H_{d,rad,s_0}(w, \mathbf{P}_{rad,s_0})$ e $H_{d,rad,s_1}(w, \mathbf{P}_{rad,s_1})$ são as respostas em frequência do detector correspondentes à radiação primária *rad* e às radiações secundárias (partículas ionizantes) s_0 e s_1 , respectivamente.

No exemplo da câmara ^{10}B , (*rad* = nêutron = n), (s_0 = alfa), ($s_1 = ^7Li$), ($E_{0,f,n,\alpha} = 1,47$ MeV), ($E_{0,f,n,Li7} = 0,88$ MeV) (ou seja apenas duas raias espectrais) e ($p\{s=0\} = p\{s=1\} = 1/2$) (a mesma probabilidade de ocorrência do pulso alfa e 7Li).

3.3.3 Comportamento das respostas do detector e dos espectros

Nesta secção faz-se uma análise qualitativa das respostas do detector com o objetivo de delinear certos padrões de seu comportamento. As considerações aqui apresentadas são ilustradas nas secções 3.3.4 e 3.4.

Para aumentar a generalidade da análise, considera-se nesta secção que as trilhas de ionização possam ser originadas tanto no anodo como no catodo. A particularização para apenas um dos eletrodos é trivial.

3.3.3.1 Comportamento no domínio do tempo

Procura-se caracterizar certos padrões de comportamento dos pulsos de corrente gerados pelo detector, através das considerações :

Consideração 1

Conforme (3.2-15), o pulso de corrente $h_{d,rad}(t, \mathbf{P}_{rad})$ é composto de duas componentes (pulsos) :

$$h_{d,rad}(t, \mathbf{P}_{rad}) = h_{d,ion,rad}(t, \mathbf{P}_{ion,rad}) + h_{d,ele,rad}(t, \mathbf{P}_{ele,rad}) \quad (3.3-14)$$

sendo $h_{d,ion,rad}(t, \mathbf{P}_{ion,rad})$ a componente correspondente aos íons e $h_{d,ele,rad}(t, \mathbf{P}_{ele,rad})$ correspondente aos elétrons.

Mas para este modelo, de acordo com a definição de \mathbf{P}_{rad} em (3.3-4)

$$\mathbf{P}_{rad} = \mathbf{P}_{rad,ion} = \mathbf{P}_{rad,ele} \quad (3.3-15)$$

ou seja,

$$\boxed{h_{d,rad}(t, \mathbf{P}_{rad}) = h_{d,ion,rad}(t, \mathbf{P}_{rad}) + h_{d,ele,rad}(t, \mathbf{P}_{rad})} \quad (3.3-16)$$

Consideração 2

Para qualquer tipo de radiação ionizante que produza trilhas de ionização retilíneas, o pulso de corrente correspondente aos íons e o pulso de corrente correspondente aos elétrons possuem duração finita ($\leq T_{ion,max}$) e ($\leq T_{ele,max}$) respectivamente, sem “oscilações internas”, isto é, partindo-se do princípio de que as trilhas são contínuas, a ionização específica é contínua com eventual variação abrupta apenas nas extremidades da trilha, e que o campo elétrico é monotônico, na sequência temporal, observa-se que :

- a) O pulso apresenta uma primeira transição abrupta correspondente ao tempo de geração da trilha de ionização. Como neste trabalho este tempo foi desprezado, tem-se um degrau em $t = 0$.
- b) Após isso, o pulso pode :
 - b1) Aumentar de amplitude, caso os portadores correspondentes estejam caminhando em direção aos campos elétricos crescentes e nenhum deles esteja sendo coletado (os portadores em movimento ainda não alcançaram o próximo eletrodo).
 - b2) Permanecer constante, caso o campo elétrico seja constante e nenhum portador correspondente esteja sendo coletado.

- b3) Diminuir de amplitude, caso os portadores correspondentes estejam caminhando em direção aos campos elétricos decrescentes e/ou qualquer portador correspondente esteja sendo coletado.
- c) A partir do início da coleção dos portadores até seu término, a amplitude do pulso decresce até zero.

Em resumo, o pulso aumenta de amplitude a partir de $t = 0$, eventualmente (câmara plana) permanece constante e decresce até zero.

Além disso, exceto para pequenos raios a do anodo em câmaras cilíndricas e esféricas, o pulso de corrente correspondente ao portador não apresenta região impulsiva dentro de sua duração.

Consideração 3

Para qualquer tipo de radiação ionizante e para a maior parte dos eventos ζ :

- a) A duração do pulso de corrente correspondente aos íons $T_{h_d,ion,rad}(\zeta) \leq T_{ion,max}$ é muito maior ($\approx 10^3$) que a duração do pulso de corrente correspondente aos elétrons $T_{h_d,e,rad}(\zeta) \leq T_{e,max}$.
- b) Como $h_{d,ion,rad}(t, P_{rad}(\zeta))$ e $h_{d,e,rad}(t, P_{rad}(\zeta))$ possuem formas baseadas na consideração 2 e cargas $q_{h_d,ion,rad}(\zeta)$ e $q_{h_d,e,rad}(\zeta)$ da mesma ordem de grandeza segundo (3.2-18), resulta que a amplitude do pulso de corrente $I_{h_d,ion,rad}(\zeta)$ é muito menor que $I_{h_d,e,rad}(\zeta)$. Para ilustrar, esboçam-se na figura 3-4 possíveis formas dos pulsos de corrente:

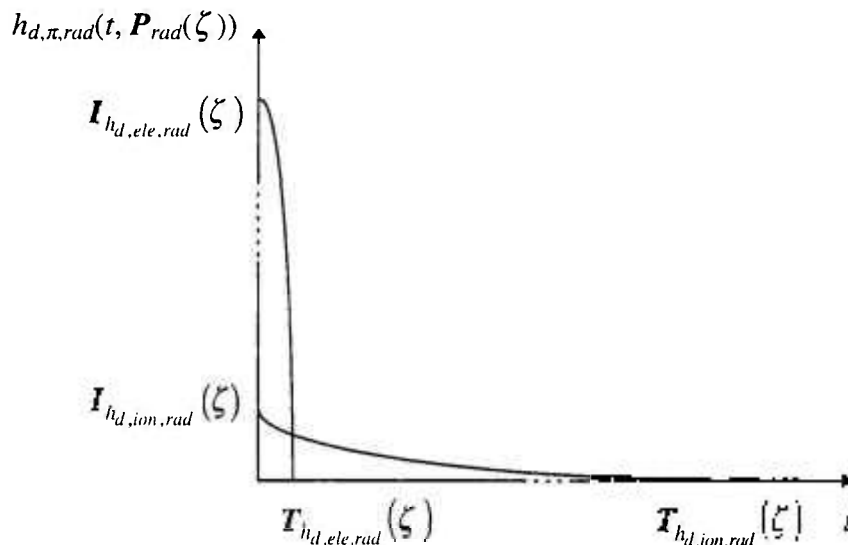


Figura 3-4 : Pulsos de corrente no detector

3.3.3.2 Comportamento no domínio da frequência

Procura-se obter certos padrões de comportamento dos espectros da corrente gerada pelo detector. Para isso, a partir das considerações sobre as formas dos pulsos de corrente na secção 3.3.3.1, procura-se inferir as respostas em frequência desses pulsos e portanto os espectros da corrente gerada.

a) Respostas das componentes

O fato de o pulso correspondente ao portador π apresentar, a partir de zero, uma região crescente, eventualmente uma região constante e uma região decrescente até zero, e também de não apresentar região impulsiva dentro de sua duração, conforme visto na secção 3.3.3.1, implica que a resposta em frequência correspondente possui uma primeira região aproximadamente plana, uma região de transição e uma terceira região onde a resposta é aproximadamente zero. A frequência utilizada para representar a região de transição é $\pi / T_{h_d, \pi, rad}(\zeta)$, compatível com a frequência próxima ao centro dessa região no espectro de segunda ordem das câmaras de eletrodos próximos (ver secção 3.3.4).

Tendo em vista essas considerações, tem-se, para a maior parte de eventos ζ :

Região 1

Para $0 \leq |w| \ll \pi / T_{h_d, \pi, rad}(\zeta)$

$$H_{d, \pi, rad}(w, P_{rad}(\zeta)) \equiv H_{d, \pi, rad}(0, P_{rad}(\zeta)) = q_{h_d, \pi, rad}(\zeta) \quad (\text{região plana}) \quad (3.3-17)$$

Região 2

Para $|w|$ da ordem de $\pi / T_{h_d, \pi, rad}(\zeta)$

$$H_{d, \pi, rad}(w, P_{rad}(\zeta)) \text{ apresenta região de transição}$$

Região 3

Para $|w| \gg \pi / T_{h_d, \pi, rad}(\zeta)$

$$H_{d, \pi, rad}(w, P_{rad}(\zeta)) \equiv 0 \quad (3.3-18)$$

b) Resposta Total

A resposta total é a soma das respostas componentes

$$H_{d,rad}(w, P_{rad}(\zeta)) = H_{d,ion,rad}(w, P_{rad}(\zeta)) + H_{d,ele,rad}(w, P_{rad}(\zeta)) \quad (3.3-19)$$

e como para a maior parte de eventos ζ

$$\pi / T_{h_d,ion,rad}(\zeta) \ll \pi / T_{h_d,ele,rad}(\zeta) \quad (3.3-20)$$

resultam cinco regiões para análise :

Região 1

Para $0 \leq |w| \ll \pi / T_{h_d,ion,rad}(\zeta)$

$$H_{d,rad}(w, P_{rad}(\zeta)) \cong q_{h_d,ion,rad}(\zeta) + q_{h_d,ele,rad}(\zeta) = q_{h_d,rad}(\zeta) \quad (\text{primeira região plana}) \quad (3.3-21)$$

onde $q_{h_d,rad}(\zeta)$ é a carga do pulso de corrente $h_{d,rad}(t, P_{rad}(\zeta))$.

Região 2

Para $|w|$ da ordem de $\pi / T_{h_d,ion,rad}(\zeta)$

$H_{d,rad}(w, P_{rad}(\zeta))$ apresenta primeira região transição

Região 3

Para $\pi / T_{h_d,ion,rad}(\zeta) \ll |w| \ll \pi / T_{h_d,ele,rad}(\zeta)$

$$H_{d,rad}(w, P_{rad}(\zeta)) \cong q_{h_d,ele,rad}(\zeta) \quad (\text{segunda região plana}) \quad (3.3-22)$$

Região 4

Para $|w|$ da ordem de $\pi / T_{h_d,ele,rad}(\zeta)$

$H_{d,rad}(w, P_{rad}(\zeta))$ apresenta segunda região de transição

Região 5

Para $|w| \gg \pi / T_{h_d,ele,rad}(\zeta)$

$$H_{d,rad}(w, P_{rad}(\zeta)) \cong 0 \quad (3.3-23)$$

c) Espectros

Conforme já mencionado, como se considera nesta secção que as trilhas podem ter origem em qualquer um dos eletrodos, a duração dos pulsos correspondentes aos íons é ($\leq T_{ion,max}$) e a duração dos pulsos correspondentes aos elétrons é ($\leq T_{ele,max}$). Mas para um grande número de projetos de câmara de ionização de fissão, na maior parte dos eventos ζ , tem-se $T_{h_d,ion,rad}(\zeta) = T_{ion,max}$ e $T_{h_d,ele,rad}(\zeta) = T_{ele,max}$. Para facilitar a descrição abaixo, consideram-se essas igualdades, lembrando que para os casos $T_{h_d,ion,rad}(\zeta) \leq T_{ion,max}$ e/ou

$T_{h_d,ele,rad}(\zeta) \leq T_{ele,max}$ haverá um deslocamento dos espectros para frequências mais altas na regiões $\pi / T_{ion,max}$ e / ou $\pi / T_{ele,max}$, respectivamente.

- *Regiões planas*

Verifica-se que o espectro de ordem n possui várias regiões planas determinadas pelas possibilidades de posicionamento dos $|w_i|$ ($1 \leq i \leq n-1$) e $|-w_1 \dots -w_{n-1}|$ nas faixas $0 \leq \text{faixa 1} \ll \pi / T_{ion,max}$ e $\pi / T_{ion,max} \ll \text{faixa 2} \ll \pi / T_{ele,max}$. No entanto, este trabalho, para finalidade de posicionamento dos filtros do processador, considera duas delas, isto é, aquelas regiões, aqui denominadas de regiões planas $P1$ e $P2$, onde todos os $|w_i|$ e $|-w_1 \dots -w_{n-1}|$ pertencem à mesma faixa.

Considerando a equação (3.3-2) e os resultados acima, pode-se escrever :

Região plana P1

Fazendo $w_1 = w_2 = \dots w_{n-1} = 0$ em (3.3-2), resulta o importante valor limite :

$$S_{n,i_d,rad}(0, \dots, 0) = \lambda_{rad} \cdot E\{H_{d,rad}^n(0, P_{rad})\} = \lambda_{rad} \cdot E\{q_{h_d,rad}^n\} \quad (3.3-24)$$

Para $0 \leq (|w_1| \text{ e } \dots |w_{n-1}| \text{ e } |-w_1 \dots -w_{n-1}|) \ll \pi / T_{ion,max}$

$$S_{n,i_d,rad}(w_1, \dots, w_{n-1}) \cong S_{n,i_d,rad}(0, \dots, 0) = \lambda_{rad} \cdot E\{q_{h_d,rad}^n\} \quad (3.3-25)$$

Região plana P2

Para $\pi / T_{ion,max} \ll (|w_1| \text{ e } \dots |w_{n-1}| \text{ e } |-w_1 \dots -w_{n-1}|) \ll \pi / T_{ele,max}$

$$S_{n,i_d,rad}(w_1, \dots, w_{n-1}) \cong \lambda_{rad} \cdot E\{q_{h_d,ele,rad}^n\} \quad (3.3-26)$$

Também, é interessante apresentar a região plana limite dos espectros definida por

Para $(|w_1| \text{ ou } \dots |w_{n-1}| \text{ ou } |-w_1 \dots -w_{n-1}|) \gg \pi / T_{ele,max}$

$$S_{n,i_d,rad}(w_1, \dots, w_{n-1}) \cong 0 \quad (3.3-27)$$

- *Regiões de transição*

Verifica-se a existência de várias regiões de transição de $S_{n,i_d,rad}(w_1, \dots, w_{n-1})$ caracterizadas por

$(|w_1| \text{ ou } \dots |w_{n-1}| \text{ ou } |-w_1 \dots -w_{n-1}|)$ da ordem de $\pi / T_{ion,max}$

e

$(|w_1| \text{ ou } \dots |w_{n-1}| \text{ ou } |-w_1 \dots -w_{n-1}|)$ da ordem de $\pi / T_{ele,max}$

Para ilustrar, a figura 3-5 apresenta um esboço do espectro $S_{2,id,rad}(w)$ de uma câmara de ionização :

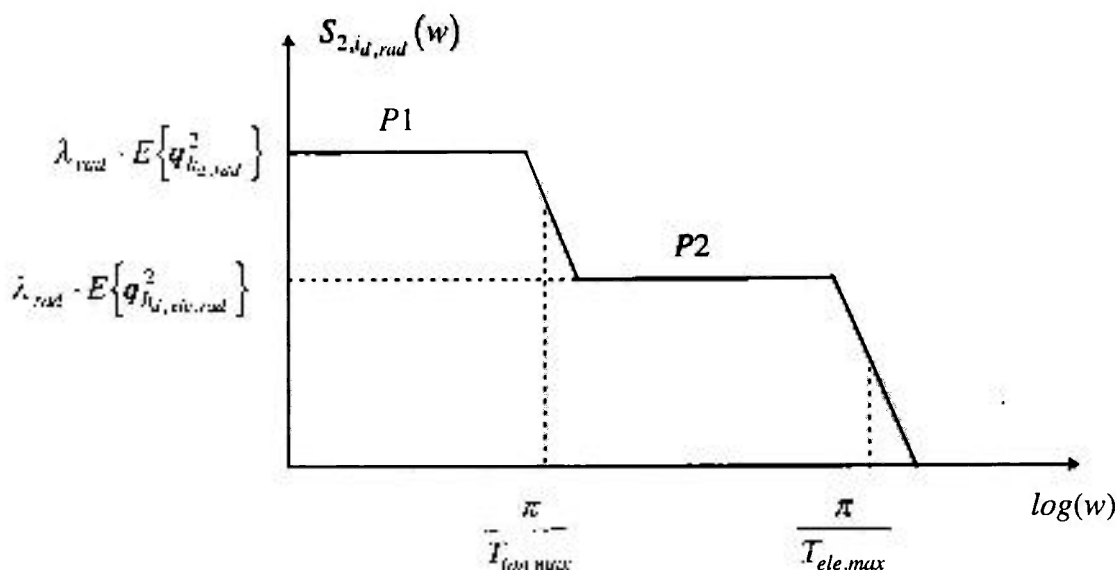


Figura 3-5 : Esboço do espectro $S_{2,id,rad}(w)$ de uma câmara de ionização

Um exemplo do espectro de terceira ordem $S_{3,id,rad}(w_1, w_2)$ é mostrado nas figuras 3-9, 10, 11, e 12 da secção 3.3.4 .

Observem-se, nos espectros, as regiões planas $P1$ e $P2$ correspondentes ao maior e ao menor patamares (diferentes de zero), respectivamente.

É interessante notar que as regiões planas dos espectros dependem apenas da taxa média de eventos λ_{rad} e das cargas $q_{hd,rad}$ e $q_{hd,ele,rad}$. Portanto, conforme (3.2-18), verifica-se que os níveis dos patamares dessas regiões são insensíveis à variação da tensão de polarização da câmara V_d .

As frequências $\pi / T_{\pi,max}$ mostram um valor indicativo do posicionamento das regiões de transição dos espectros. Diferentemente das regiões planas, essas regiões são sensíveis à variação de V_d . Deve-se observar que o estudo da variação da forma dos espectros (regiões planas e de transição), quando relacionada com a variação dos parâmetros do detector, possui grande interesse para a avaliação do estado do detector de radiação.

3.3.4 Modelo simplificado : câmara de eletrodos próximos

Em certas implementações (ex.: câmaras de fissão cilíndricas) a distância entre os eletrodos ($b-a$) é muito menor que o raio interno a . Nesse caso, a câmara, cilíndrica ou

esférica, aproxima-se de uma câmara plana, onde o campo elétrico ε e as velocidades dos portadores de carga v_π são constantes.

Nos projetos onde, para a maior parte dos eventos ζ , o alcance da partícula ionizante é muito maior que a distância entre os eletrodos, pode-se dizer que as extremidades de uma trilha encontram-se sobre o anodo e catodo e o pulso de corrente correspondente a cada portador de carga tem duração determinística. É o caso de câmaras de fissão onde a maior parte da ionização devido aos fragmentos de fissão ocorre no início de sua trajetória (ionização específica decrescente) e a maior parte da ionização devida às partículas alfas ocorre junto ao fim de sua trajetória (ionização específica crescente até determinado ponto). É por isso que para uma boa discriminação nêutron / alfa utilizam-se câmaras de eletrodos próximos.

Finalmente, pode-se considerar a ionização específica $\rho_N(x)$ praticamente constante durante a trajetória da partícula ionizante (aproximação).

Considerando essas hipóteses, pode-se calcular os pulsos de corrente a partir das equações gerais da secção 3.2. No entanto, as seguintes considerações levam ao mesmo resultado :

- Sendo ε , v_π e ρ_N constantes, a taxa de coleção das cargas da trilha é constante.
- Como as extremidades da trilha encontram-se no anodo e catodo, tanto os íons positivos como os elétrons começam a ser coletados a partir de $t = 0$, e como cada portador possui um correspondente de sinal contrário que percorre a mesma diferença de potencial, resulta que as cargas dos pulsos de corrente do íon e elétron são idênticas, isto é :

$$q_{h_d,ion,rad} = q_{h_d,ele,rad} = q_{h_d,\pi,rad} \quad (3.3-28)$$

Portanto, os pulsos $h_{d,ion,rad}(t, P_{rad})$ e $h_{d,ele,rad}(t, P_{rad})$ têm forma determinística triangular, conforme mostrado na figura 3-6 :

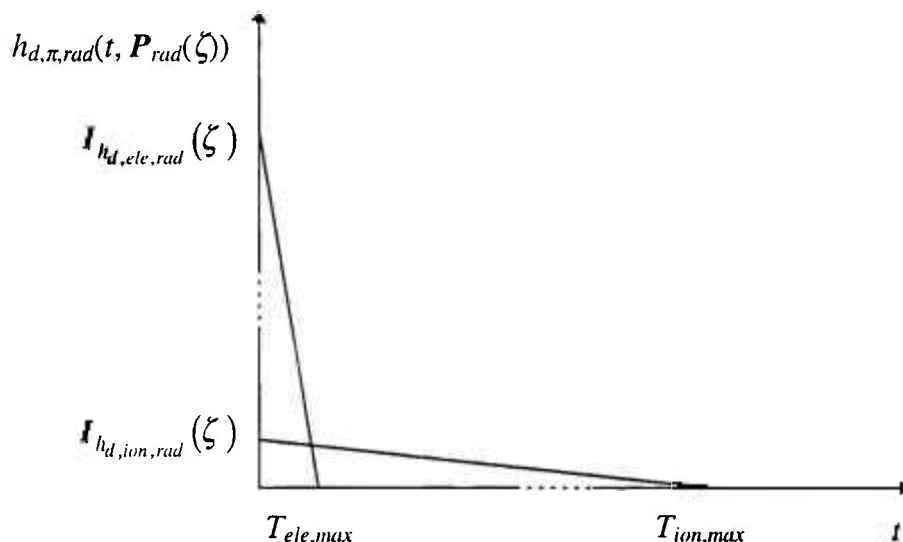


Figura 3-6 : Pulsos de corrente na câmara de eletrodos próximos

Essas considerações implicam na obtenção das expressões abaixo para os pulsos de corrente, cumulantes e espectros.

a) Pulsos de corrente

Deixando P_{rad} implícito, pode-se escrever

$$h_{d,\pi,rad}(t) = I_{h_{d,\pi,rad}} \cdot \left(1 - \frac{t}{T_{\pi,max}}\right) \cdot (U(t) - U(t - T_{\pi,max})) \quad (3.3-29)$$

também,

$$q_{h_{d,rad}} = q_{h_{d,ion,rad}} + q_{h_{d,ele,rad}} = 2 \cdot q_{h_{d,\pi,rad}} \quad (3.3-30)$$

mas,

$$q_{h_{d,\pi,rad}} = \frac{I_{h_{d,\pi,rad}} \cdot T_{\pi,max}}{2} \quad (3.3-31)$$

logo

$$I_{h_{d,\pi,rad}} = \frac{q_{h_{d,rad}}}{T_{\pi,max}} \quad (3.3-32)$$

Substituindo (3.3-32) em (3.3-29), obtêm-se os pulsos de corrente

$$h_{d,\pi,rad}(t) = \frac{q_{h_{d,rad}}}{T_{\pi,max}} \cdot \left(1 - \frac{t}{T_{\pi,max}}\right) \cdot (U(t) - U(t - T_{\pi,max})) \quad (3.3-33)$$

onde

$$T_{\pi,max} = \frac{b-a}{v_{\pi}} \quad (3.3-34)$$

e $v_{\pi} = \text{cte.}$ dado por aproximação analítica ((3.2-38) com $m_e = 0$) ou numérica (para v_{ele}).

Isolando a amplitude aleatória em (3.3-33)

$$h_{d,\pi,rad}(t) = q_{h_{d,rad}} \cdot h_{d,\pi,\Delta}(t) \quad (3.3-35)$$

onde $h_{d,\pi,\Delta}(t)$ é o pulso triangular de carga 1/2

$$h_{d,\pi,\Delta}(t) = \frac{1}{T_{\pi,max}} \cdot \left(1 - \frac{t}{T_{\pi,max}}\right) \cdot (U(t) - U(t - T_{\pi,max})) \quad (3.3-36)$$

Também, calcula-se o pulso de corrente total $h_{d,rad}(t)$ utilizando-se (3.3-16)

$$h_{d,rad}(t) = q_{h_{d,rad}} \cdot h_{d,\Delta}(t) = q_{h_{d,rad}} \cdot (h_{d,ion,\Delta}(t) + h_{d,ele,\Delta}(t)) \quad (3.3-37)$$

Como a ionização específica $\rho_{N,rad}$ é constante, as cargas dos pulsos de corrente são calculadas facilmente

$$q_{h_d,rad} = q_{t,rad} = \rho_{N,rad} \cdot x_t = \rho_{N,rad} \cdot \frac{b-a}{\cos(\theta)} \quad (3.3-38)$$

c

$$q_{h_d,\pi,rad} = \frac{\rho_{N,rad}}{2} \cdot \frac{b-a}{\cos(\theta)} \quad (3.3-39)$$

b) Cumulantes e espectros

Para os cumulantes, substitui-se (3.3-37) em (3.3-1)

$$C_{n,i_d,rad}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) = \lambda_{rad} \cdot E\{q_{h_d,rad}^n\} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h_{d,\Delta}(\xi) \cdot h_{d,\Delta}(\xi + \tau_1) \dots h_{d,\Delta}(\xi + \tau_{n-1}) \cdot d\xi \quad (3.3-40)$$

Para os espectros, considerando

$$H_{d,rad}(w) = q_{h_d,rad} \cdot H_{d,\Delta}(w) = q_{h_d,rad} \cdot (H_{d,ion,\Delta}(w) + H_{d,ele,\Delta}(w)) \quad (3.3-41)$$

com $h_{d,\pi,\Delta}(t) \leftrightarrow H_{d,\pi,\Delta}(w)$

e

$$H_{d,\pi,\Delta}(w) = \int_0^{T_{\pi,max}} \frac{1}{T_{\pi,max}} \dots \left(1 - \frac{t}{T_{\pi,max}}\right) \cdot e^{-j \cdot w \cdot t} \cdot dt \quad (3.3-42)$$

ou seja,

$$H_{d,\pi,\Delta}(w) = \frac{1}{T_{\pi,max}^2 \cdot w^2} \cdot \left((1 - \cos(w \cdot T_{\pi,max})) + j \cdot (\text{sen}(w \cdot T_{\pi,max}) - w \cdot T_{\pi,max}) \right) \quad (3.3-43)$$

e resulta de (3.3-41) e (3.3-2)

$$S_{n,i_d,rad}(w_1, \dots, w_{n-1}) = \lambda_{rad} \cdot E\{q_{h_d,rad}^n\} \cdot H_{d,\Delta}(w_1) \dots H_{d,\Delta}(w_{n-1}) \cdot H_{d,\Delta}(-w_1 \dots -w_{n-1}) \quad (3.3-44)$$

Para ilustrar apresentam-se nas figuras 3-7, 8, 9, 10 e 11 os espectros normalizados de segunda e terceira ordem considerando $\lambda_{rad} \cdot E\{q_{h_d,rad}^n\} = 1$, $T_{ele,max} = 1$, $T_{ion,max} = 1000$, com w correspondente a essa normalização.

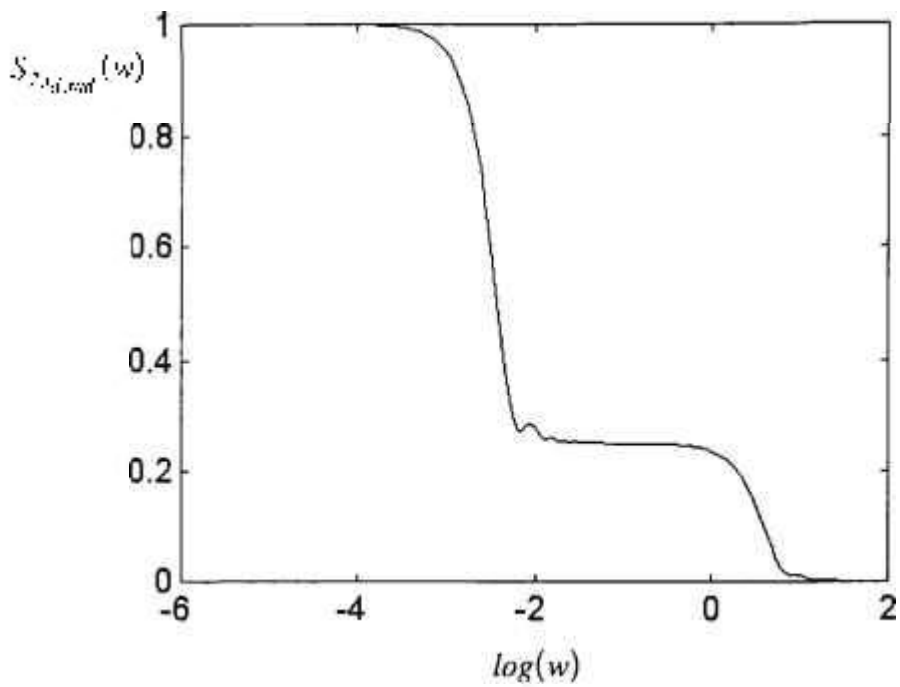


Figura 3-7 : Espectro normalizado de segunda ordem

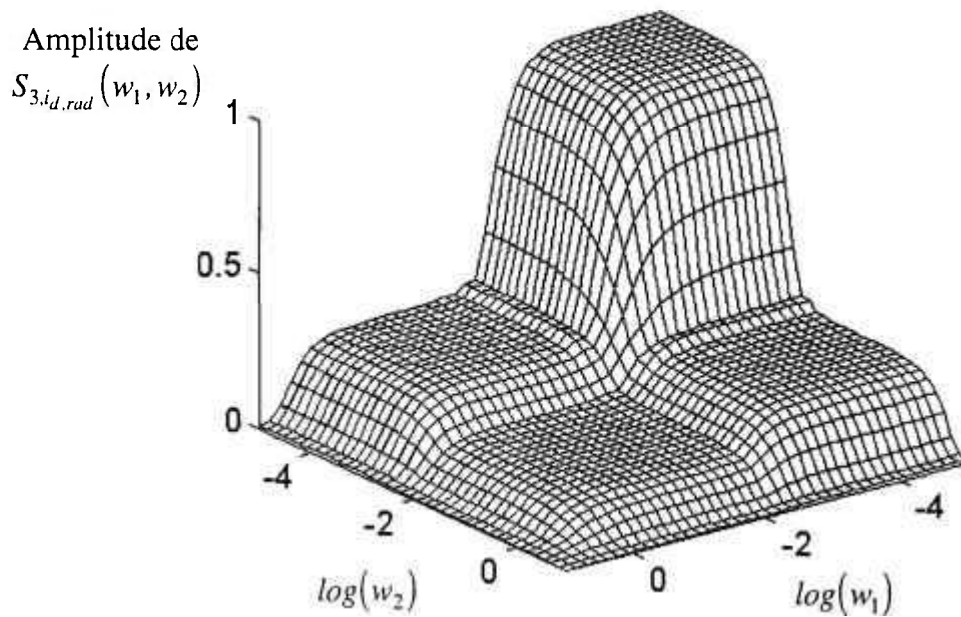


Figura 3-8 : Amplitude do espectro normalizado de terceira ordem (primeiro quadrante)

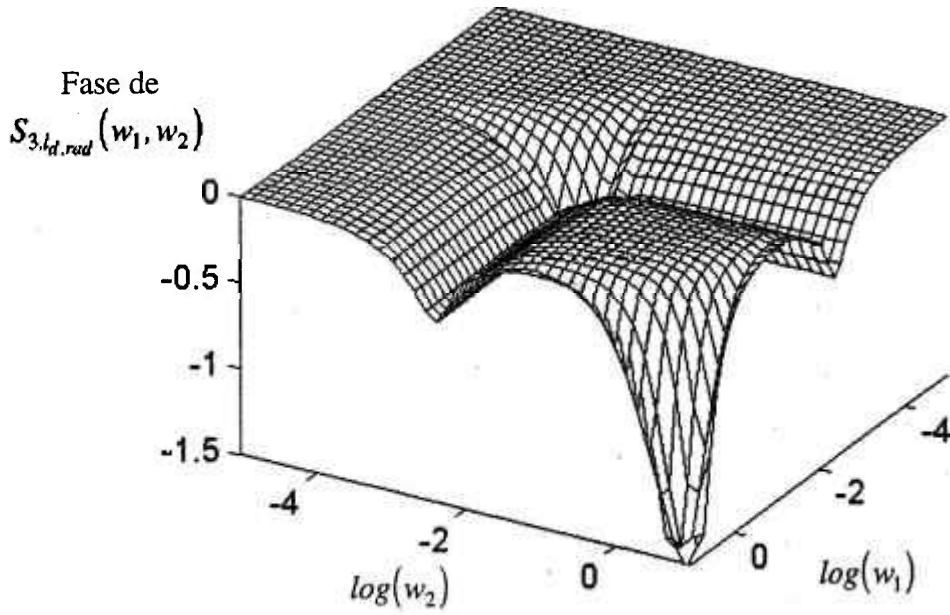


Figura 3-9 : Fase do espectro normalizado de terceira ordem (primeiro quadrante)

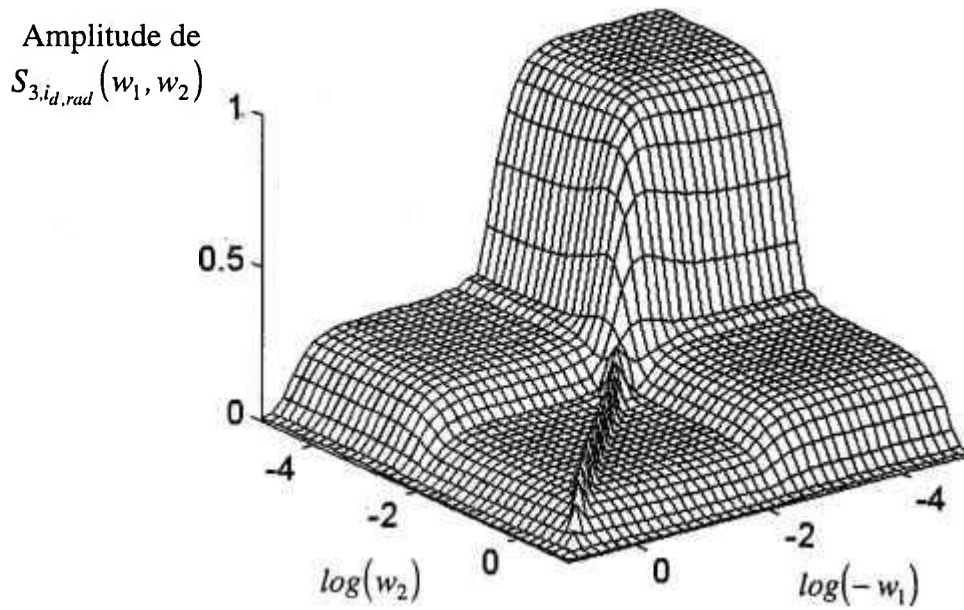


Figura 3-10 : Amplitude do espectro normalizado de terceira ordem (segundo quadrante)

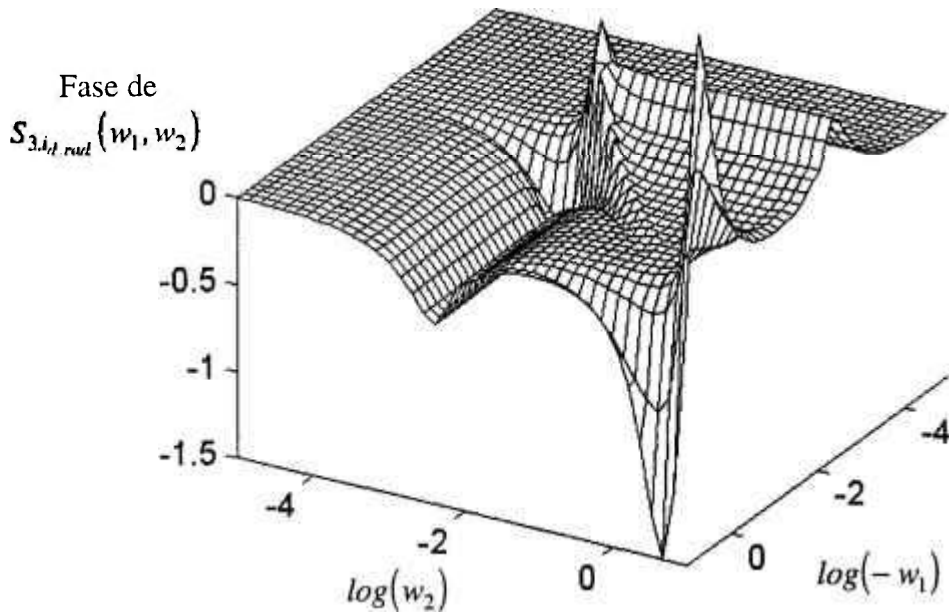


Figura 3-11 : Fase do espectro normalizado de terceira ordem (segundo quadrante)

Observem-se, nas figuras, as regiões planas caracterizadas pela amplitude aproximadamente constante e fase (para o espectro de terceira ordem) aproximadamente zero. Note-se também que as frequências $\pi / T_{ion,max}$ e $\pi / T_{ele,max}$ são representativas das regiões de transição. No caso, por exemplo, do espectro de segunda ordem $S_{2, id, rad}(\pi / T_{ion,max}) = 0,5954$ e $S_{2, id, rad}(\pi / T_{ele,max}) = 0,1426$.

3.4 Aplicação

Um programa de computador escrito na linguagem MATLAB implementa a metodologia desenvolvida neste capítulo.

O programa permite calcular basicamente os pulsos de corrente (íons positivos e elétrons) correspondente a cada trilha individual de ionização resultante de uma reação nuclear no depósito sensível a nêutrons, assim como os espectros (cumulantes) da corrente de saída da câmara. É possível realizar análise de sensibilidade para estudar as variações dos pulsos de corrente e espectros (cumulantes) em relação às variações de parâmetros de projeto. Como resultado do programa, obtêm-se os gráficos dos pulsos de corrente e espectros (até terceira ordem), dados tais como, as energias de escape do depósito das partículas ionizantes, seus alcances no gás, os comprimentos das trilhas de ionização, as

cargas das trilhas, as cargas e durações dos pulsos de corrente, os momentos dessas cargas, etc.

Os parâmetros dos depósitos e gases, utilizados nos cálculos, foram obtidos de Hornbeck [1951], Sharpe [1955], Bortner e outros [1957], Alexander e Gazdik [1960], Lamphere [1960], Frank [1964], Price [1964], Lederer [1967], ICRU 31 [1979], Benedict e outros [1981], Evans [1985], ICRU 49 [1993].

Como exemplo, nas figuras 3-12 a 3-14, apresentam-se alguns resultados da simulação de uma câmara de fissão cilíndrica com dois eletrodos (raio do anodo = 3 cm ; raio do catodo = 3,5 cm), sendo o catodo recoberto com uma espessura uniforme de 1 mg/cm^2 de U_3O_8 enriquecido a 93%. O gás de preenchimento é o argônio a pressão de 3 atm. Simularam-se alguns pulsos de corrente gerados e o espectro de segunda ordem da câmara para duas tensões de polarização (600V e 800V). Com o objetivo de não sobrecarregar as figuras, apresentam-se apenas os pulsos de corrente para a energia inicial de 90 MeV da partícula ionizante, profundidade de emissão de $0,5 \text{ mg/cm}^2$ no depósito e quatro direções de emissão (θ, Ω) : $(20^\circ, 45^\circ)$, $(40^\circ, 45^\circ)$, $(60^\circ, 45^\circ)$ e $(80^\circ, 45^\circ)$.

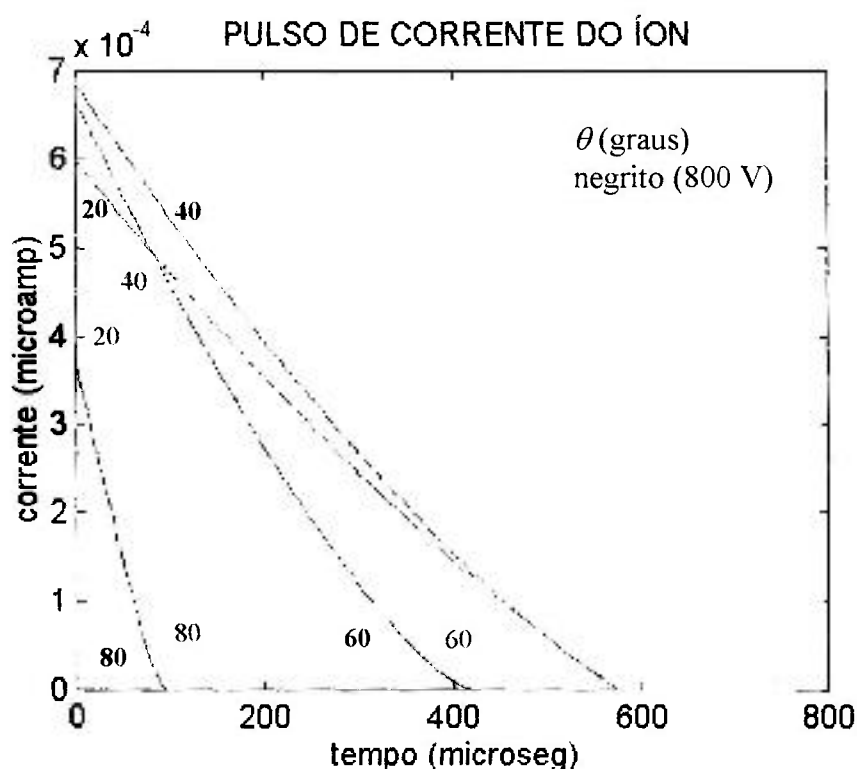


Figura 3-12 : Pulsos de corrente do íon em câmara de fissão cilíndrica

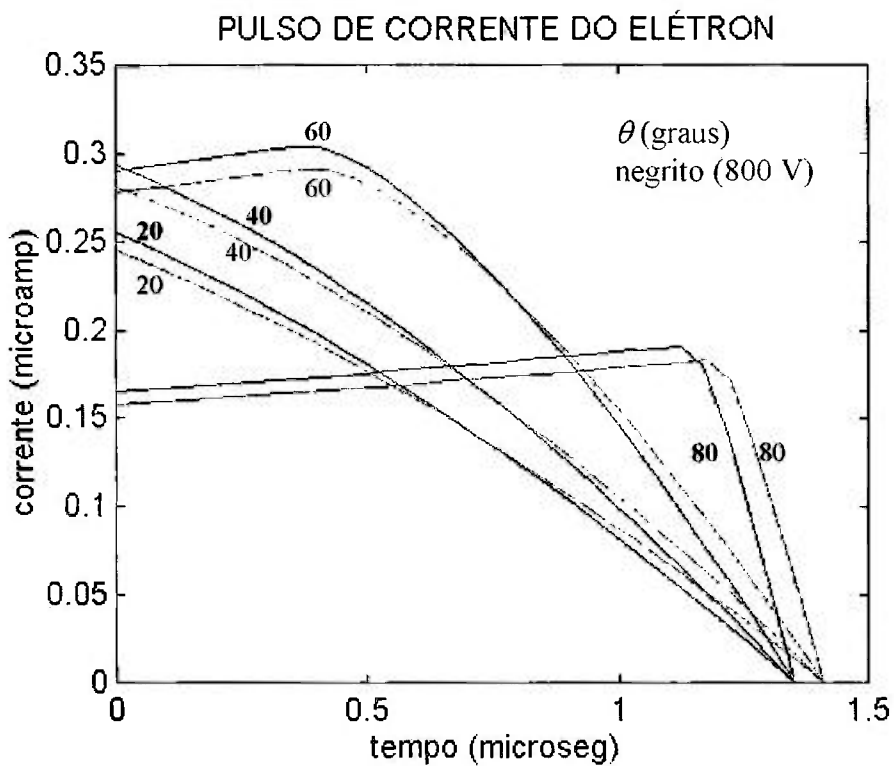


Figura 3-13 : Pulsos de corrente do elétron em câmara de fissão cilíndrica

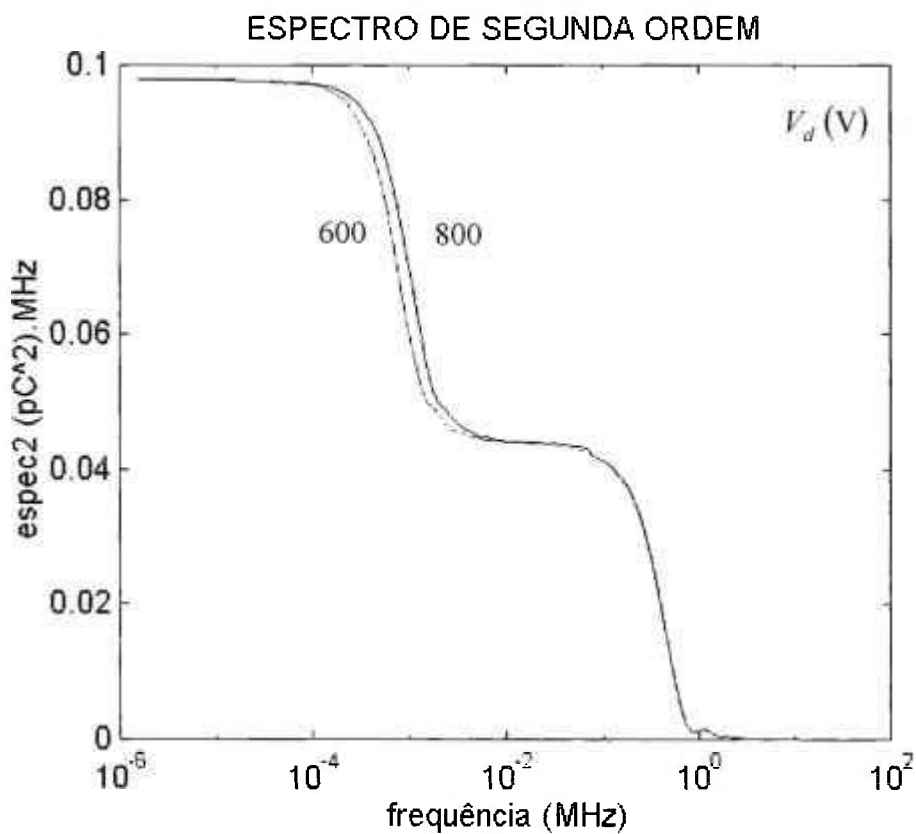


Figura 3-14 : Espectro de segunda ordem em câmara de fissão cilíndrica

Nota-se que o aumento da tensão de polarização não afeta a carga (área) dos pulsos correspondentes, mas reduz a duração, resultando no deslocamento no sentido das frequências (em módulo) crescentes das regiões de transição dos espectros. A redução da duração dos pulsos dos elétrons é menos acentuada devido ao tipo de relação entre a velocidade do elétron e o campo elétrico para o argônio. Como resultado, na escala *log*, não se consegue observar na figura o pequeno deslocamento da segunda região de transição.

Observe-se, também, a forma quase triangular de ambos os pulsos (íons e elétrons) quando as trilhas de ionização atravessam totalmente a câmara ($\theta = 20^\circ$ e 40°), e a região crescente dos pulsos dos elétrons resultantes de trilhas de ionização que não atravessam totalmente a câmara ($\theta = 60^\circ$ e 80°). Essa região corresponde a uma aceleração dos elétrons, sem nenhuma coleção dos mesmos.

Finalmente, vê-se que a aplicação do teorema de Campbell generalizado, ao modelamento de uma câmara de ionização, permite obter uma caracterização dos pulsos e espectros muito mais detalhada do que seria possível com o teorema de Campbell convencional, limitado à ordem dois e que não inclui aspectos da forma aleatória do pulso.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DO PROCESSADOR DE SINAL

4.1 Introdução

Para obter a taxa média de eventos λ_{rad} da radiação de interesse rad ou avaliar o funcionamento do detector por meio dos cumulantes e espectros, é necessário acoplar o detector a uma eletrônica de processamento de sinal. Em muitas aplicações (ex.: medição de fluxo de radiação), o objetivo principal é a obtenção de λ_{rad} , sendo a avaliação do funcionamento do detector, por meio dos espectros (ou cumulantes), realizada apenas para assegurar o bom funcionamento do sistema. Portanto, um sistema de medição de fluxo de radiação pode ser representado conforme a figura 4-1 :

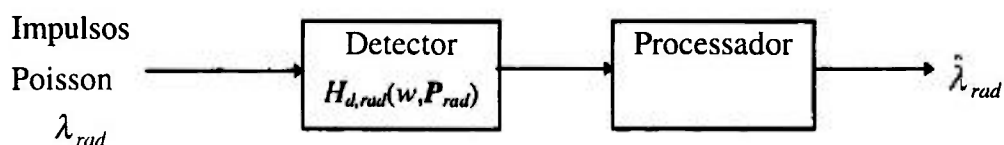


Figura 4.1 : Diagrama de um sistema de medição de fluxo de radiação

No capítulo 2 foram estabelecidas as expressões gerais dos sistemas Campbell de n -ésima ordem para medição de fluxo de radiação na forma de cumulantes e espectros. No capítulo 3 foi realizado o modelamento do detector de radiação, câmara de ionização sensível a nêutrons, obtendo-se suas respostas $h_d(t, P_{rad}) \leftrightarrow H_d(w, P_{rad})$ e possibilitando sua caracterização sobretudo na forma de espectros. De posse desse conhecimento, é possível neste capítulo realizar a análise do processador.

Observe-se que as respostas do detector possuem um caráter aleatório, e normalmente, dado um determinado detector, deve-se projetar um processador de sinal

com resposta determinística que otimize certas características de desempenho do sistema. Por isso, diferentemente da análise do detector, devem-se estudar as opções de configuração do processador e analisá-las quanto às características de desempenho de interesse para a aplicação. Como exemplo, quando o objetivo é a obtenção da taxa média de eventos λ_{rad} , pode-se pretender otimizar a relação sinal / ruído, otimizar o tempo do cálculo das estimativas dos cumulantes (tempo de resposta) e minimizar a sensibilidade dos cumulantes à variação de determinados parâmetros, tal como a tensão de polarização do detector de radiação. Quando o objetivo é a obtenção dos espectros de radiação do detector para avaliação de seu funcionamento, pode-se desejar aumentar a sensibilidade à variação de determinadas características, a fim de ressaltar qualquer desvio do estado normal de funcionamento. Portanto a análise deve contemplar essas opções de configuração.

Também deve-se considerar que embora a tendência dos projetos modernos seja reduzir ao máximo suas partes analógicas, na área nuclear utilizam-se ainda sistemas de primeira e segunda ordem analógicos. Por isso, neste capítulo faz-se um estudo geral considerando configurações analógicas e digitais, mas sempre dando maior ênfase às digitais.

Para efetuar essa análise, organiza-se este capítulo da seguinte forma :

Inicialmente consideram-se as possíveis configurações analógicas e digitais do processador e apresentam-se as expressões dos cumulantes e espectros nos diversos pontos do sistema. Como as expressões obtidas para os sistemas digitais apresentam partes calculadas no domínio do tempo-contínuo e partes no domínio do tempo-discreto e como as simulações são hoje realizadas sobretudo no domínio discreto, desenvolvem-se expressões equivalentes apenas no domínio discreto e sistemas equivalentes que possuem os mesmos cumulantes e espectros que os sistemas originais. Esses sistemas equivalentes constituem-se numa ferramenta útil para a análise que se segue, pois com eles podem-se descrever tanto sistemas analógicos como digitais com expressões mais simplificadas.

Considera-se o processador composto basicamente de adaptadores de sinal, filtros e estimadores de parâmetros. Para os adaptadores de sinal, discutem-se suas configurações, e faz-se a análise de ruído, esboçando o espectro de ruído em relação ao espectro de segunda ordem do sinal detector. Essa análise é útil para a seleção das frequências limites dos filtros. Quanto aos filtros, apresentam-se três casos principais de posicionamento de suas frequências limites em relação aos espectros do detector. Adotam-se na análise filtros ideais como referência e calculam-se os quatro primeiros cumulantes em função de suas frequências limites. Finalmente para os estimadores, utilizam-se os estimadores não-tendenciosos convencionais dos cumulantes e apresentam-se formas de obtenção da taxa média de eventos λ_{rad} . Com o objetivo de avaliar a precisão e o tempo de resposta do

sistema, calculam-se as variâncias dos estimadores dos três primeiros cumulantes na origem.

Nesta apresentação, dá-se ênfase ao processador para cumulantes de ordem $n \geq 2$. O processador para o primeiro cumulante, sendo mais simples, é apresentado apenas na forma de comentários no decorrer do texto.

A simbologia adotada neste capítulo segue a mesma padronização do restante do trabalho. Como exemplo, o subscrito p é reservado para designar o processador, a o adaptador, pf o pré-filtro, f o filtro, ana a parte analógica, dig a parte digital e assim por diante. Desse modo, $H_{p,a}(w)$ representa a resposta em frequência do adaptador, bloco do processador de sinal, $H_{p,f}^d(u)$ a resposta em frequência do filtro digital (discreto) do processador, $S_{n,v_{p,rad}}^d(u_1, \dots, u_{n-1})$ o espectro de ordem n do sinal discreto $v_{p,rad}[k]$, sendo $v_{p,rad}[k]$ o sinal na saída do processador e correspondente à radiação rad ; etc..

4.2 Configurações

Analisando as características do sinal gerado pelo detector de radiação (secção 1.2.1), seus espectros (secção 3.3.3) e as expressões dos cumulantes e espectros do sistema (secção 2.5.3), conclui-se que o processador deve ser constituído por adaptadores de sinal, filtros e estimadores de parâmetros.

A primeira etapa do processador, o adaptador de sinal, deve preparar o sinal de corrente gerado pelo detector, sobretudo adaptando impedâncias e fornecendo amplificação adequada do sinal, para os filtros do processador. O adaptador deve portanto possibilitar a obtenção de boa relação sinal / ruído, e em muitas aplicações tornar o desempenho do sistema mais insensível a certas características da entrada, como as capacitâncias do cabo coaxial de sinal e do detector. Para sistemas que utilizem os $n \geq 2$ primeiros cumulantes, é necessário utilizar pelo menos dois adaptadores de sinal (ver secção 4.3).

O filtro tem por função apenas selecionar a faixa de frequências onde o sinal é analisado, com o objetivo, por exemplo, de obter a taxa média de eventos λ_{rad} com menor influência do ruído e da tensão de polarização do detector, ou com boa característica de precisão e tempo de resposta. Também no caso de analisar o funcionamento do detector por meio dos espectros ou mesmo por meio dos cumulantes, é necessário posicionar o filtro numa faixa de frequências para melhor captar as alterações de seu funcionamento. Utilizam-se diferentes filtros para diferentes objetivos. Por exemplo, o filtro utilizado para obter λ_{rad} é diferente daquele utilizado para avaliar o funcionamento do detector. Além

disso, na maioria das implementações digitais, utiliza-se um pré-filtro com função de filtro “anti-aliasing” [Oppenheim e Schaffer, 1989].

Para obter a taxa média de eventos λ_{rad} , cumulantes e espectros, o processador deve possuir um estimador desses parâmetros. Neste trabalho, centraliza-se o enfoque no estimador λ_{rad} realizado a partir dos estimadores convencionais dos cumulantes.

Como em qualquer configuração do processador o detector e adaptador são essencialmente analógicos e, tendo em vista o objetivo de estudar sistemas analógicos e digitais, realiza-se a análise de três configurações do processador, aqui denominadas configuração 1, 2 e 3 :

A *configuração 1 totalmente analógica* possui o filtro e o estimador de λ_{rad} analógicos (figura 4-2). Neste caso, o filtro analógico $H_{p,f}(w)$ tem por função apenas selecionar a faixa de frequências de interesse $[w_{p1}, w_{p2}]$.

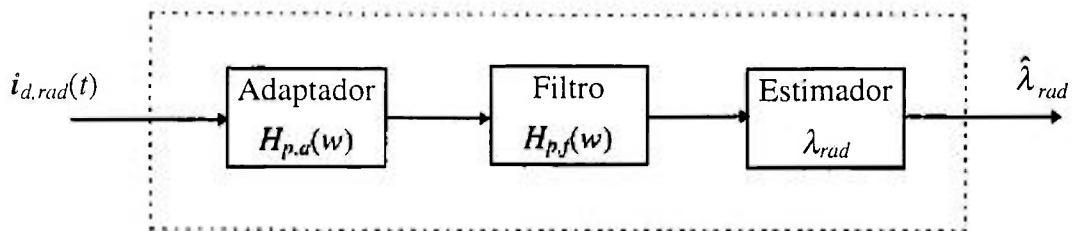


Figura 4.2 : Configuração 1 : processador totalmente analógico

A *configuração 2 com o estimador de λ_{rad} digital* é mostrada na figura 4-3. Neste caso, o pré-filtro analógico $H_{p,pf}(w)$ realiza a função de filtro “anti-aliasing” limitando a faixa de frequências e o filtro analógico $H_{p,f}(w)$ seleciona a faixa de frequências de interesse $[w_{p1}, w_{p2}]$, sendo que em algumas implementações pode-se utilizar apenas um filtro para as duas funções. O sinal é discretizado para o estimador pelo conversor C/D (Contínuo/Discreto) com tempo de amostragem T .

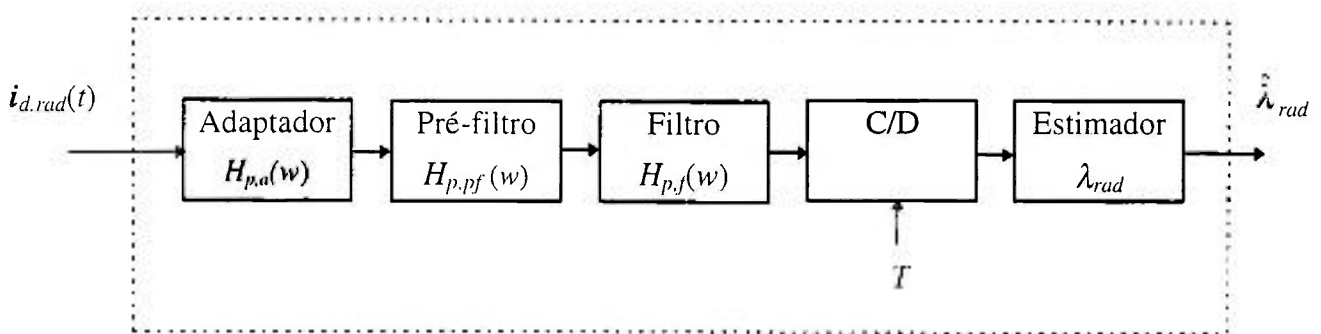


Figura 4.3 : Configuração 2 : processador com estimador de λ_{rad} digital

A *configuração 3 com filtro e estimador digitais* é apresentada na figura 4-4. Da mesma forma que na configuração 2, o pré-filtro analógico $H_{p,pf}(w)$ realiza a função de

filtro “anti-aliasing” e o filtro digital $H_{p,f}^d(u)$ (com $u = w.T$) seleciona a faixa de frequências de interesse $[u_{p1}, u_{p2}]$ (ou $[w_{p1}, w_{p2}]$).

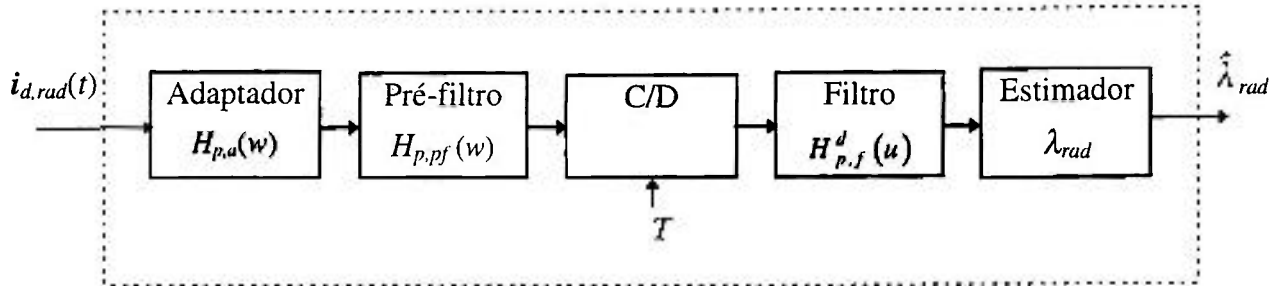


Figura 4.4 : Configuração 3 : processador com filtro e estimador de λ_{rad} digitais

Nota

- No caso do processador para o primeiro cumulante, $w_{p1} = 0$.
- Nas configurações 2 e 3, o filtro $H_{p,pf}(w)$ pode participar da definição de $[w_{p1}, w_{p2}]$. Como exemplo, pode-se ter $[w_{p1}, w_{p2}] = [w_{p,f1}, w_{p,f2}] \cap [w_{p,pf1}, w_{p,pf2}]$, onde $[w_{p,f1}, w_{p,f2}]$ e $[w_{p,pf1}, w_{p,pf2}]$ são as faixas dos filtros $H_{p,f}(w)$ e $H_{p,pf}(w)$, respectivamente.

4.2.1 Expressões para os cumulantes e espectros

Para desenvolver as expressões para os cumulantes e espectros dos sinais das configurações 1, 2 e 3, e evitar repetições de cálculo desnecessárias, sintetizam-se os diagramas das figuras 4-2, 3 e 4 no diagrama de blocos da figura 4-5, que ressalta as características comuns dessas configurações :

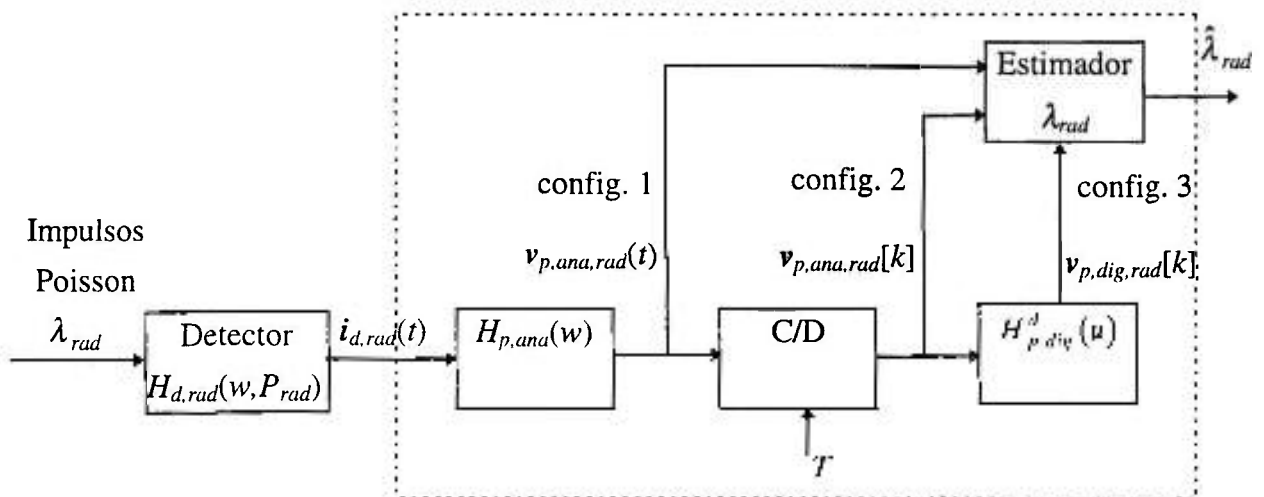


Figura 4.5 : Diagrama para as três configurações do processador

sendo

$$\begin{aligned}
 H_{p,ana}(w) &= H_{p,a}(w) \cdot H_{p,f}(w) \text{ para a configuração 1} \\
 &= H_{p,a}(w) \cdot H_{p,pf}(w) \cdot H_{p,f}(w) \text{ para a configuração 2} \\
 &= H_{p,a}(w) \cdot H_{p,pf}(w) \text{ para a configuração 3} \\
 H_{p,dig}^d(u) &= H_{p,f}^d(u) \text{ para a configuração 3}
 \end{aligned}
 \tag{4.2-1}$$

e $v_{p,ana,rad}(t)$, $v_{p,ana,rad}[k]$ e $v_{p,dig,rad}[k]$, os processos estocásticos (sinais) nos diversos pontos do sistema e nas saídas das configurações 1, 2 e 3, respectivamente.

Observa-se que o processador possui uma parte analógica $H_{p,ana}(w)$ (configuração 1, 2 e 3), um conversor C/D (configuração 2 e 3) e uma parte digital $H_{p,dig}^d(u)$ (configuração 3).

Para completar, sejam as respostas da parte analógica do sistema $h_{ana,rad}(t, \mathbf{P}_{rad}) \leftrightarrow H_{ana,rad}(w, \mathbf{P}_{rad})$, resultantes da combinação do detector e da parte analógica do processador. Pode-se escrever

$$\begin{aligned}
 h_{ana,rad}(t, \mathbf{P}_{rad}) &= h_{d,rad}(t, \mathbf{P}_{rad}) * h_{p,ana}(t) \\
 H_{ana,rad}(w, \mathbf{P}_{rad}) &= H_{d,rad}(w, \mathbf{P}_{rad}) \cdot H_{p,ana}(w)
 \end{aligned}
 \tag{4.2-2}$$

Calculam-se então os cumulantes e espectros nos diversos pontos do sistema.

4.2.1.1 Expressões gerais

a) Cumulantes e espectros de $v_{p,ana,rad}(t)$ na saída da parte analógica

Aplicam-se as equações gerais dos cumulantes (2.5-4) e espectros (2.5-5) na saída de um sistema linear para uma determinada radiação de interesse.

Tem-se então para os

Cumulantes de $v_{p,ana,rad}(t)$

Para $n=1$, de (2.5-4) pode-se escrever

$$\begin{aligned}
C_{1,v,p,ana,rad} &= \lambda_{rad} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} E\{h_{ana,rad}(\xi, P_{rad})\} \cdot d\xi \\
&= \lambda_{rad} \cdot E\{H_{ana,rad}(0, P_{rad})\} = \lambda_{rad} \cdot E\{H_{d,rad}(0, P_{rad})\} \cdot H_{p,ana}(0)
\end{aligned} \tag{4.2-3}$$

e resulta

$$C_{1,v,p,ana,rad} = \lambda_{rad} \cdot E\{q_{h_{d,rad}}\} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h_{p,ana}(\xi) \cdot d\xi \tag{4.2-4}$$

pois

$$H_{d,rad}(0, P_{rad}) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{d,rad}(\xi, P_{rad}) \cdot d\xi = q_{h_{d,rad}} \quad \text{e} \quad H_{p,ana}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{p,ana}(\xi) \cdot d\xi \tag{4.2-4a}$$

com $h_{p,ana}(t)$ resultante de (4.2-1).

Observe-se que $q_{h_{d,rad}} = q_{t,rad}$ (carga da trilha de ionização), caso todos os portadores gerados pela ionização sejam coletados (ver 3.2-20). Note-se também que a equação (4.2-4) não é uma aproximação, e sim uma expressão exata.

Para $n \geq 2$, obtém-se

$$\begin{aligned}
C_{n,v,p,ana,rad}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \\
= \lambda_{rad} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} E\{h_{ana,rad}(\xi, P_{rad}) \cdot h_{ana,rad}(\xi + \tau_1, P_{rad}) \dots \cdot h_{ana,rad}(\xi + \tau_{n-1}, P_{rad})\} \cdot d\xi
\end{aligned} \tag{4.2-5}$$

com $h_{ana,rad}(t, P_{rad}) = h_{d,rad}(t, P_{rad}) * h_{p,ana}(t)$

Também, podem-se calcular os cumulantes considerando-se as respostas do detector e do processador separadamente, ou seja,

$$\begin{aligned}
C_{n,v,p,ana,rad}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \\
= C_{n,d,rad}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) * \int_{-\infty}^{\infty} h_{p,ana}(\xi) \cdot h_{p,ana}(\xi + \tau_1) \dots \cdot h_{p,ana}(\xi + \tau_{n-1}) \cdot d\xi
\end{aligned} \tag{4.2-6}$$

com

$$\begin{aligned}
C_{n,d,rad}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \\
= \lambda_{rad} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} E\{h_{d,rad}(\xi, P_{rad}) \cdot h_{d,rad}(\xi + \tau_1, P_{rad}) \dots \cdot h_{d,rad}(\xi + \tau_{n-1}, P_{rad})\} \cdot d\xi
\end{aligned} \tag{4.2-7}$$

onde (*) representa a convolução multidimensional.

Espectros de $v_{p,ana,rad}(t)$

De (2.5-5), pode-se escrever

$$\begin{aligned} S_{n,v_{p,ana,rad}}(w_1, \dots, w_{n-1}) \\ = \lambda_{rad} \cdot E\{H_{ana,rad}(w_1, P_{rad}) \dots H_{ana,rad}(w_{n-1}, P_{rad}) \cdot H_{ana,rad}(-w_1 \dots -w_{n-1}, P_{rad})\} \end{aligned} \quad (4.2-8)$$

com $H_{ana,rad}(w, P_{rad}) = H_{d,rad}(w, P_{rad}) \cdot H_{p,ana}(w)$

ou calculando separadamente

$$\begin{aligned} S_{n,v_{p,ana,rad}}(w_1, \dots, w_{n-1}) = \\ = S_{n,i_{d,rad}}(w_1, \dots, w_{n-1}) \cdot H_{p,ana}(w_1) \dots H_{p,ana}(w_{n-1}) \cdot H_{p,ana}(-w_1 \dots -w_{n-1}) \end{aligned} \quad (4.2-9)$$

com

$$\begin{aligned} S_{n,i_{d,rad}}(w_1, \dots, w_{n-1}) \\ = \lambda_{rad} \cdot E\{H_{d,rad}(w_1, P_{rad}) \dots H_{d,rad}(w_{n-1}, P_{rad}) \cdot H_{d,rad}(-w_1 \dots -w_{n-1}, P_{rad})\} \end{aligned} \quad (4.2-10)$$

b) Cumulantes e espectros de $v_{p,ana,rad}[k]$ na saída do conversor C/D

Cumulantes de $v_{p,ana,rad}[k]$

Os cumulantes de $v_{p,ana,rad}[k]$ na saída do conversor C/D, representados por $C_{n,v_{p,ana,rad}}[l_1, \dots, l_{n-1}]$, podem ser obtidos facilmente a partir dos cumulantes de $v_{p,ana,rad}(t)$. Considerando que os cumulantes podem ser expressos em função dos momentos (ver apêndice A.2.1), para qualquer período de amostragem $T > 0$, obtém-se

$$\boxed{C_{n,v_{p,ana,rad}}[l_1, \dots, l_{n-1}] = C_{n,v_{p,ana,rad}}(l_1 \cdot T, \dots, l_{n-1} \cdot T)} \quad (4.2-11)$$

Isto é : *se o amostrador for ideal, para qualquer período de amostragem $T > 0$, os cumulantes na entrada (contínuos) e na saída (discretos) do conversor C/D são idênticos, mantendo-se a correspondência dos atrasos ("lags"). Se $n = 1$, os cumulantes contínuo e discreto são indistintamente chamados de $C_{1,v_{p,ana,rad}}$.*

Assim, pode-se escrever para $v_{p,ana,rad}[k]$

Para $n = 1$

$$C_{1,v_{p,ana,rad}} = \lambda_{rad} \cdot E\{q_{h_d,rad}\} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h_{p,ana}(\xi) \cdot d\xi \quad (4.2-12)$$

Para $n \geq 2$

$$\begin{aligned} C_{n,v_{p,ana,rad}}[l_1, \dots, l_{n-1}] \\ = \lambda_{rad} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} E\{h_{p,ana,rad}(\xi, \mathbf{P}_{rad}) \cdot h_{p,ana,rad}(\xi + l_1 \cdot T, \mathbf{P}_{rad}) \dots \cdot h_{p,ana,rad}(\xi + l_{n-1} \cdot T, \mathbf{P}_{rad})\} \cdot d\xi \end{aligned} \quad (4.2-13)$$

Do mesmo modo, podem-se calcular os cumulantes considerando-se as respostas do detector e do processador separadamente, ou seja,

$$\begin{aligned} C_{n,v_{p,ana,rad}}[l_1, \dots, l_{n-1}] \\ = C_{n,i_d,rad}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) * \int_{-\infty}^{\infty} h_{p,ana}(\xi) \cdot h_{p,ana}(\xi + \tau_1) \dots \cdot h_{p,ana}(\xi + \tau_{n-1}) \cdot d\xi \Big|_{\substack{\tau_1=l_1 \cdot T \\ \tau_{n-1}=l_{n-1} \cdot T}} \end{aligned} \quad (4.2-14)$$

com $C_{n,i_d,rad}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$ dado por (4.2-7).

Espectros de $v_{p,ana,rad}[k]$

Considere-se a resposta $H_{p,ana}(w)$ possuindo faixa de frequências limitada superiormente pelo pré-filtro do processador

$$H_{p,ana}(w) = 0 \quad \text{para } |w| > w_{p,ana2} \quad (4.2-15)$$

então

$$S_{n,v_{p,ana,rad}}(w_1, \dots, w_{n-1}) = 0 \quad \text{para } |w_i| > w_{p,ana2} \quad (4.2-16)$$

Seja o período de amostragem T compatível com a condição de Nyquist

$$T < \frac{\pi}{w_{p,ana2}} \quad (4.2-17)$$

Os espectros de $v_{p,ana,rad}[k]$, após discretização, podem ser obtidos aplicando o teorema de amostragem multidimensional (apêndice A.4.2). Resulta

$$S_{n,v_{p,ana,rad}}^d(u_1, \dots, u_{n-1}) = \frac{1}{T^{n-1}} \cdot S_{n,v_{p,ana,rad}}\left(\frac{u_1}{T}, \dots, \frac{u_{n-1}}{T}\right) \quad (4.2-18)$$

para $|u_i| \leq \pi$, com $u_i = w_i \cdot T$

T obedecendo a condição de Nyquist.

Ou seja, os espectros são preservados após a amostragem se a condição de Nyquist é satisfeita.

Calculando então os espectros de $v_{p,ana,rad}[k]$

$$S_{v_{p,ana,rad}}^d(u_1, \dots, u_{n-1}) = \lambda_{rad} \cdot \frac{1}{T^{n-1}} \cdot E \left\{ H_{ana,rad} \left(\frac{u_1}{T}, \mathbf{P}_{rad} \right) \cdots H_{ana,rad} \left(\frac{u_{n-1}}{T}, \mathbf{P}_{rad} \right) \cdot H_{ana,rad} \left(-\frac{u_1}{T}, \dots, -\frac{u_{n-1}}{T}, \mathbf{P}_{rad} \right) \right\} \quad (4.2-19)$$

sendo válida para as condições fixadas em (4.2-15 a 18).

Ou calculando separadamente

$$S_{v_{p,dig,rad}}^d(u_1, \dots, u_{n-1}) = \frac{1}{T^{n-1}} \cdot S_{n,d,rad} \left(\frac{u_1}{T}, \dots, \frac{u_{n-1}}{T} \right) \cdot H_{p,ana} \left(\frac{u_1}{T} \right) \cdots H_{p,ana} \left(\frac{u_{n-1}}{T} \right) \cdot H_{p,ana} \left(-\frac{u_1}{T}, \dots, -\frac{u_{n-1}}{T} \right) \quad (4.2-20)$$

com as condições anteriores.

c) Cumulantes e espectros de $v_{p,dig,rad}[k]$ na saída da parte digital

Os cumulantes e espectros de $v_{p,dig,rad}[k]$ na saída da parte digital podem ser calculados pelas relações (2.2-13 e 14), considerando os cumulantes e espectros de $v_{p,ana,rad}[k]$ calculados no item anterior. Tem-se para os

Cumulantes de $v_{p,dig,rad}[k]$

Utilizando (2.2-13), pode-se escrever

Para $n = 1$

$$C_{1,v_{p,dig,rad}} = C_{1,v_{p,ana,rad}} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{p,dig}[m] \quad (4.2-21)$$

Para $n \geq 2$

$$C_{n,v_{p,dig,rad}}[l_1, \dots, l_{n-1}] = C_{n,v_{p,ana,rad}}[l_1, \dots, l_{n-1}] * \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{p,dig}[m] \cdot h_{p,dig}[m+l_1] \cdots h_{p,dig}[m+l_{n-1}] \quad (4.2-22)$$

com $C_{1,v_{p,ana,rad}}$ e $C_{n,v_{p,ana,rad}}[l_1, \dots, l_{n-1}]$ dados por (4.2-12, (13 ou 14)).

Espectros de $v_{p,dig,rad}[k]$

Utilizando (2.2-14), obtém-se

$$S_{n,v_{p,dig,rad}}^d(u_1, \dots, u_{n-1}) = S_{n,v_{p,ana,rad}}^d(u_1, \dots, u_{n-1}) \cdot H_{p,dig}^d(u_1) \dots H_{p,dig}^d(u_{n-1}) \cdot H_{p,dig}^d(-u_1 \dots -u_{n-1}) \quad (4.2-23)$$

com $S_{n,v_{p,ana,rad}}^d(u_1, \dots, u_{n-1})$ dado por (4.2-19 ou 20).

O resultado da substituição de (4.2-20 em 23) é

$$\begin{aligned} S_{n,v_{p,dig,rad}}^d(u_1, \dots, u_{n-1}) \\ = \frac{1}{T^{n-1}} \cdot S_{n,v_{p,ana,rad}}^d\left(\frac{u_1}{T}, \dots, \frac{u_{n-1}}{T}\right) \cdot H_{p,ana}\left(\frac{u_1}{T}\right) \dots H_{p,ana}\left(\frac{u_{n-1}}{T}\right) \cdot H_{p,ana}\left(-\frac{u_1}{T}, \dots, -\frac{u_{n-1}}{T}\right) \\ \cdot H_{p,dig}^d(u_1) \dots H_{p,dig}^d(u_{n-1}) \cdot H_{p,dig}^d(-u_1 \dots -u_{n-1}) \end{aligned} \quad (4.2-23a)$$

As expressões desenvolvidas nesta secção 4.2.1.1 permitem o cálculo dos cumulantes e espectros para as três configurações do processador. Como essas expressões envolvem sempre cálculos no domínio contínuo, é interessante desenvolver expressões equivalentes no domínio discreto utilizadas em simulações e mesmo no desenvolvimento de algoritmos. Além disso, para o estudo de sistemas com filtros digitais, é útil estabelecer o conceito de sistemas equivalentes, que possuem os mesmos cumulantes e espectros, mas uma configuração com uma resposta $H_p(w)$ analógica ou $H_p^d(u)$ digital.

O desenvolvimento que segue, embora de aplicação geral, foi criado especificamente para este estudo, e tem por objetivo principal unificar o tratamento dos sistemas analógicos e digitais, de modo a viabilizar a análise.

4.2.1.2 Expressões e sistemas equivalentes

a) Desenvolvimento

Analisando as equações dos espectros, vê-se que a resposta em frequência de um bloco analógico gera termos do tipo $(H(w_1) \dots H(w_{n-1}) \cdot H(-w_1 \dots -w_{n-1}))$, podendo $H(w)$ representar por exemplo $H_{p,ana}(w)$ ou $H_{ana,rad}(w, P_{rad})$ dependendo da expressão considerada. Com a finalidade de obter expressões equivalentes, procura-se determinar as condições para que um bloco digital gere um termo idêntico :

Considere o bloco digital $h'[k] \leftrightarrow H^{d'}(u')$, tal que

$$h'[k] = h(k \cdot T') \quad (4.2-24)$$

onde T' é o período de amostragem da resposta impulsiva.

Levando em conta que

$$H(w) = 0 \quad \text{para } |w| > w_{max} \quad (4.2-25)$$

e fazendo

$$w_{max} < \frac{2 \cdot \pi}{T'} - w_{max} \quad \text{ou} \quad w_{max} < \frac{\pi}{T'} \quad (\text{Nyquist}) \quad (4.2-26)$$

resulta

$$H^{d'}(u') = \frac{1}{T'} \cdot H\left(\frac{u'}{T'}\right) \quad (4.2-27)$$

para $|u'_i| \leq \pi$ e $u' = w \cdot T'$

Mas, a expressão

$$H^{d'}(-u'_1 \dots -u'_{n-1}) = \frac{1}{T'} \cdot H\left(-\frac{u'_1}{T'} \dots -\frac{u'_{n-1}}{T'}\right) \quad (4.2-28)$$

é válida se não houver contribuição das réplicas (figura 4-6) de $H^{d'}(u')$ fora de $[-\pi, \pi]$, ou seja

$$|-u'_1 \dots -u'_{n-1}| < 2 \cdot \pi - u'_{max} \quad (4.2-29)$$

para $|u'_i| \leq \pi$ e $u'_{max} = w_{max} \cdot T'$

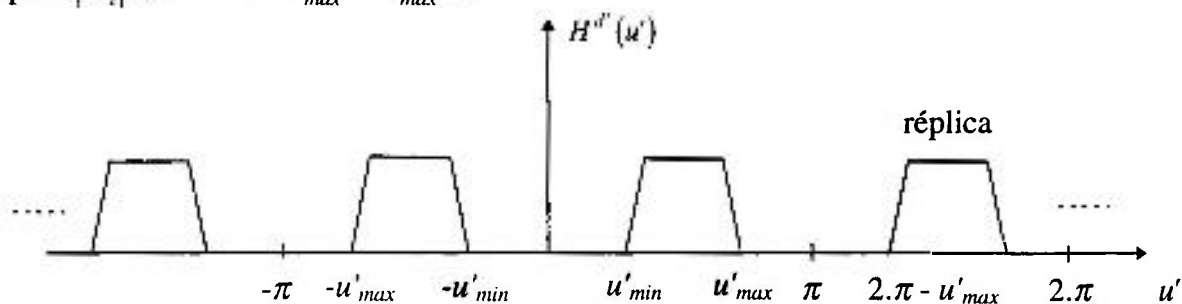


Figura 4-6 : Resposta $H^{d'}(u')$

Logo de (4.2-27 e 28)

$$\boxed{T' \cdot H^{d'}(u'_1) \dots H^{d'}(u'_{n-1}) \cdot H^{d'}(-u'_1 \dots -u'_{n-1}) = \frac{1}{(T')^{n-1}} \cdot H\left(\frac{u'_1}{T'}\right) \dots H\left(\frac{u'_{n-1}}{T'}\right) \cdot H\left(-\frac{u'_1}{T'} \dots -\frac{u'_{n-1}}{T'}\right)} \quad (4.2-30)$$

para $|u'_i| \leq \pi$ e $n \geq 2$

e se $(n-1) \cdot u'_{max} < 2 \cdot \pi - u'_{max}$

ou seja,

$$\boxed{w'_{max} < \frac{2 \cdot \pi}{n} \quad \text{ou} \quad w_{max} < \frac{2 \cdot \pi}{n \cdot T'}} \quad (4.2-31)$$

Aplicando a transformada inversa de Fourier em (4.2-30)

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) \cdot h(\xi + l_1 \cdot T') \dots \cdot h(\xi + l_{n-1} \cdot T') \cdot d\xi = T' \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} h'[m] \cdot h'[m + l_1] \dots \cdot h'[m + l_{n-1}]} \quad (4.2-32)$$

para $n \geq 2$

e se $w_{max} < \frac{2 \cdot \pi}{n \cdot T'}$

Analogamente para $n = 1$, pode-se obter um resultado similar. Nesse caso

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) \cdot d\xi = H(0) = T' \cdot H^{d'}(0) = T' \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} h'[m] \quad (4.2-33)$$

ou seja,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) \cdot d\xi = T' \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} h'[m]} \quad (4.2-34)$$

se $w_{max} < \frac{\pi}{T'}$ (Nyquist)

As equações (4.2-30, 32 e 34) são *exatas* e gerais sendo úteis para simulações, para o desenvolvimento de algoritmos para certos sistemas e para o estabelecimento da equivalência de sistemas analógicos e digitais. Pode-se por exemplo :

a) Amostrar o sinal numa frequência compatível com Nyquist e obter $h'[k]$ a partir de $h[k]$ por meio de um interpolador digital [Oppenheim e Schaffer, 1989], ou seja

$$h'[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] \cdot h_{fi}[k - m \cdot L] \quad (4.2-35)$$

onde

$h[k]$ é obtido de $h(t)$ utilizando período de amostragem T .

$L = T / T'$ (número inteiro).

$h_{fi}[k]$ é o filtro de interpolação.

b) Fazer $T = T'$, ou seja, amostrar o sinal numa frequência compatível com $w_{max} < 2 \cdot \pi / n \cdot T$ de modo que sempre se obtenha a equivalência das equações no domínio tempo-contínuo e tempo-discreto para os cumulantes e espectros de interesse. Assim, para um sistema que utilize até o quarto cumulante, deve-se amostrar o sinal numa frequência no mínimo duas vezes a de Nyquist.

Fazendo $T = T'$, observa-se uma completa equivalência entre os blocos analógicos e digitais, para efeito de cálculo dos cumulantes e espectros do sinal de saída :

Considere o sistema da figura 4-7 com o bloco analógico $H(w)$, tal que

$$H(w) = 0 \quad \text{para } |w| > w_{max} \tag{4.2-36}$$

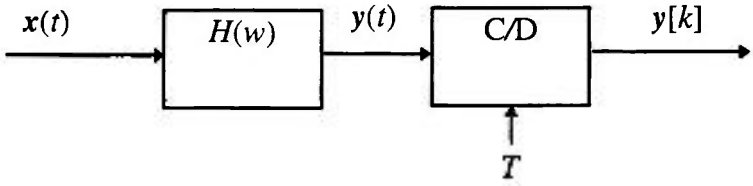


Figura 4-7 : Sistema com bloco $H(w)$

Então esse sistema é equivalente a

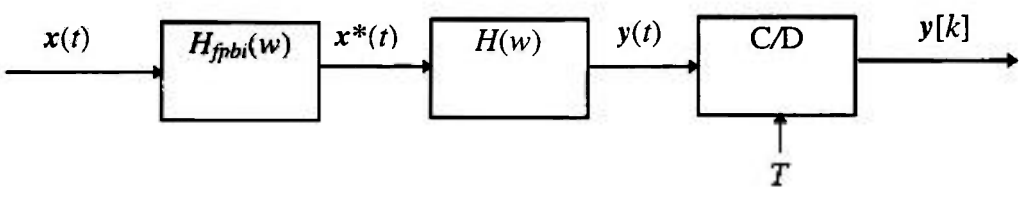


Figura 4-8 : Sistema equivalente com filtro passa-baixas ideal

onde $H_{fpbi}(w)$ é o filtro passa baixas ideal definido por

$$\begin{aligned} H_{fpbi}(w) &= 1 & \text{para } |w| \leq w_{max} \\ H_{fpbi}(w) &= 0 & \text{caso contrário} \end{aligned}$$

e $x^*(t)$ é o sinal $x(t)$ limitado na frequência w_{max} , após o filtro $H_{fpbi}(w)$.

Para o espectro de $y(t)$, pode-se escrever

$$\begin{aligned} S_{n,y}(w_1, \dots, w_{n-1}) &= S_{n,x}(w_1, \dots, w_{n-1}) \cdot H(w_1) \dots H(w_{n-1}) \cdot H(-w_1 \dots -w_{n-1}) \\ &= S_{n,x^*}(w_1, \dots, w_{n-1}) \cdot H(w_1) \dots H(w_{n-1}) \cdot H(-w_1 \dots -w_{n-1}) \end{aligned} \tag{4.2-37}$$

com

$$S_{n,x^*}(w_1, \dots, w_{n-1}) = S_{n,x}(w_1, \dots, w_{n-1}) \cdot H_{fpbi}(w_1) \dots H_{fpbi}(w_{n-1}) \cdot H_{fpbi}(-w_1 \dots -w_{n-1}) \tag{4.2-37a}$$

Considerando (4.2-18 e 37), obtém-se para o espectro de $y[k]$

$$S_{n,y}^d(u_1, \dots, u_{n-1}) = \frac{1}{T^{n-1}} \cdot S_{n,x^*}\left(\frac{u_1}{T}, \dots, \frac{u_{n-1}}{T}\right) \cdot H\left(\frac{u_1}{T}\right) \dots H\left(\frac{u_{n-1}}{T}\right) \cdot H\left(-\frac{u_1}{T} \dots -\frac{u_{n-1}}{T}\right) \tag{4.2-38}$$

para $|u_i| \leq \pi$

Mas, como $w_{max} < 2 \cdot \pi / n \cdot T$, pode-se utilizar a expressão equivalente (4.2-30) em (4.2-38)

$$S_{n,y}^d(u_1, \dots, u_{n-1}) = T \cdot S_{n,x^*} \left(\frac{u_1}{T}, \dots, \frac{u_{n-1}}{T} \right) \cdot H^d(u_1) \dots H^d(u_{n-1}) \cdot H^d(-u_1 \dots -u_{n-1}) \quad (4.2-39)$$

para $|u_i| \leq \pi$

Sendo $x^*(t)$ limitado em w_{max} , pode-se discretizá-lo utilizando um período T , obtendo-se

$$S_{n,x^*}^d(u_1, \dots, u_{n-1}) = \frac{1}{T^{n-1}} \cdot S_{n,x^*} \left(\frac{u_1}{T}, \dots, \frac{u_{n-1}}{T} \right) \quad (4.2-40)$$

para $|u_i| \leq \pi$

Substituindo em (4.2-39), resulta

$$S_{n,y}^d(u_1, \dots, u_{n-1}) = T^n \cdot S_{n,x^*}^d(u_1, \dots, u_{n-1}) \cdot H^d(u_1) \dots H^d(u_{n-1}) \cdot H^d(-u_1 \dots -u_{n-1}) \quad (4.2-41)$$

que corresponde à expressão (totalmente discreta) do sistema da figura 4-9

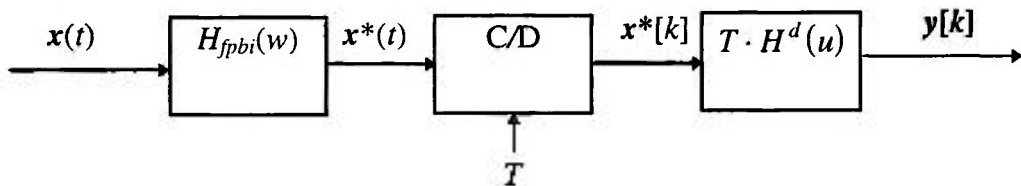


Figura 4-9 : Sistema equivalente com bloco $T \cdot H^d(u)$

Os sistemas equivalentes das figuras 4-8 e 9 possuem os mesmos cumulantes e espectros que o sistema original da figura 4-7, obedecendo à condição $w_{max} < 2 \cdot \pi / n \cdot T$ (ou $u_{max} < 2 \cdot \pi / n$). Observe-se a transformação do bloco analógico em digital (ou vice-versa) com a substituição de $H(w)$ por $T \cdot H^d(u)$ (ou vice-versa) e sua permutação de posição com o conversor C/D, mas mantendo-se a limitação de frequências antes do conversor. Note-se também que o sistema da figura 4.9 possui os mesmos cumulantes (e espectros, diferindo do fator de escala $1/T^{n-1}$ correspondente à amostragem) que o sistema analógico $H(w)$ excitado por $x(t)$ (equação (4.2-37)).

Para calcular os cumulantes, basta aplicar a transformada inversa de Fourier aos espectros calculados acima.

b) Aplicação

Os resultados obtidos no item (a) podem ser utilizados para a dedução de *expressões equivalentes* às expressões gerais da secção 4.2.1.1 e também para o desenvolvimento de expressões simplificadas por meio dos *sistemas equivalentes*.

Expressões equivalentes

Apresentam-se apenas alguns exemplos.

Os cumulantes e espectros de $v_{p,ana,rad}[k]$ e de $v_{p,dig,rad}[k]$, calculados na secção 4.2.1.1, podem ser escritos como :

Para $n = 1$, aplicando (4.2-34) em (4.2-12), pode-se escrever

$$C_{1,v_{p,ana,rad}} = \lambda_{rad} \cdot E\{q_{hd,rad}\} \cdot T \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{p,ana}[m] \quad (4.2-42)$$

valendo as condições

$$\begin{aligned} h_{p,ana}[k] &= h_{p,ana}(k \cdot T) \\ H_{p,ana}(w) &= 0 \text{ para } |w| > w_{p,ana2} \\ w_{p,ana2} &< \frac{\pi}{T} \text{ (condição de Nyquist)} \end{aligned} \quad (4.2-42a)$$

e considerando (4.2-42 e 21), obtém-se

$$C_{1,v_{p,dig,rad}} = \lambda_{rad} \cdot E\{q_{hd,rad}\} \cdot T \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_p[m] \quad (4.2-43)$$

com

$$h_p[k] = h_{p,ana}[k] * h_{p,dig}[k] \quad (4.2-43a)$$

Para $n \geq 2$, aplicando (4.2-32) em (4.2-13), resulta

$$\begin{aligned} C_{n,v_{p,ana,rad}} [l_1, \dots, l_{n-1}] \\ = \lambda_{rad} \cdot T \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} E\{h_{ana,rad}[m, P_{rad}] \cdot h_{ana,rad}[m+l_1, P_{rad}] \dots \cdot h_{ana,rad}[m+l_{n-1}, P_{rad}]\} \end{aligned} \quad (4.2-44)$$

valendo as condições

$$h_{ana,rad}[k, P_{rad}] = h_{ana,rad}(k \cdot T, P_{rad})$$

$$H_{ana,rad}(w, \mathbf{P}_{rad}) = 0 \quad \text{para } |w| > w_{p,ana2}$$

$$w_{p,ana2} < \frac{2 \cdot \pi}{n \cdot T}$$
(4.2-44a)

e considerando (4.2-44 e 22), obtém-se

$$C_{n,v_{p,dig,rad}}[l_1, \dots, l_{n-1}] = \lambda_{rad} \cdot T \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} E \{ h_{rad}[m, \mathbf{P}_{rad}] \cdot h_{rad}[m+l_1, \mathbf{P}_{rad}] \dots \cdot h_{rad}[m+l_{n-1}, \mathbf{P}_{rad}] \}$$
(4.2-45)

com

$$h_{rad}[k, \mathbf{P}_{rad}] = h_{ana,rad}[k, \mathbf{P}_{rad}] * h_{p,dig}[k]$$
(4.2-45a)

Também, os espectros correspondentes a (4.2-44 e 45) podem ser escritos como

$$S_{n,v_{p,ana,rad}}^d(u_1, \dots, u_{n-1})$$

$$= \lambda_{rad} \cdot T \cdot E \{ H_{ana,rad}^d(u_1, \mathbf{P}_{rad}) \dots \cdot H_{ana,rad}^d(u_{n-1}, \mathbf{P}_{rad}) \cdot H_{ana,rad}^d(-u_1 \dots -u_{n-1}, \mathbf{P}_{rad}) \}$$
(4.2-46)

e

$$S_{n,v_{p,dig,rad}}^d(u_1, \dots, u_{n-1}) = \lambda_{rad} \cdot T \cdot E \{ H_{rad}^d(u_1, \mathbf{P}_{rad}) \dots \cdot H_{rad}^d(u_{n-1}, \mathbf{P}_{rad}) \cdot H_{rad}^d(-u_1 \dots -u_{n-1}, \mathbf{P}_{rad}) \}$$
(4.2-47)

Note-se que os cumulantes são descritos por expressões inteiramente discretas e os espectros pelas correspondentes transformadas de Fourier. As equações (4.2-42 a 47) são expressões alternativas para o cálculo dos cumulantes e espectros de de $v_{p,ana,rad}[k]$ e $v_{p,dig,rad}[k]$ e podem ser usadas no lugar das equações originais.

Sistemas equivalentes

Considerem-se o sistema original ($H_{p,ana}(w)$, C/D, $H_{p,dig}^d(u)$) da figura 4-5, repetido na figura 4-10

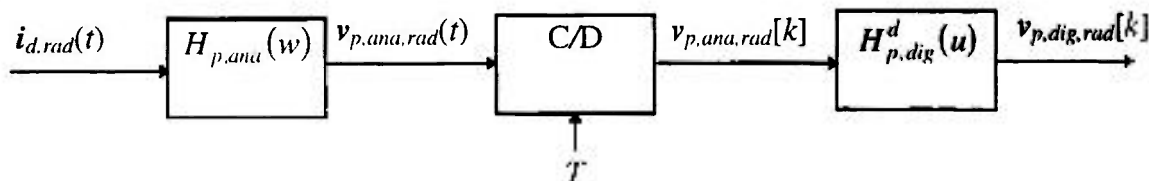


Figura 4-10 : Sistema original ($H_{p,ana}(w)$, C/D, $H_{p,dig}^d(u)$)

com os espectros de $v_{p,dig,rad}[k]$ dados por

$$\begin{aligned}
 S_{n,p,dig,rad}^d(u_1, \dots, u_{n-1}) &= \frac{1}{T^{n-1}} \cdot S_{n,p,ana}^d\left(\frac{u_1}{T}, \dots, \frac{u_{n-1}}{T}\right) \cdot H_{p,ana}\left(\frac{u_1}{T}\right) \cdots H_{p,ana}\left(\frac{u_{n-1}}{T}\right) \cdot H_{p,ana}\left(-\frac{u_1}{T}, \dots, -\frac{u_{n-1}}{T}\right) \\
 &\quad \cdot H_{p,dig}^d(u_1) \cdots H_{p,dig}^d(u_{n-1}) \cdot H_{p,dig}^d(-u_1, \dots, -u_{n-1})
 \end{aligned} \tag{4.2-48}$$

Baseado nas conclusões do item (a) desta secção (4.2.1.2), verifica-se que se podem obter sistemas equivalentes ao sistema original por meio do deslocamento de $H_{p,ana}(w)$ ou $H_{p,dig}^d(u)$.

A condição para efetuar o deslocamento do bloco $H_{p,ana}(w)$ para a saída do conversor C/D é

$$w_{p,ana2} < \frac{2 \cdot \pi}{n \cdot T} \tag{4.2-49}$$

Com esse deslocamento resultam as seguintes transformações :

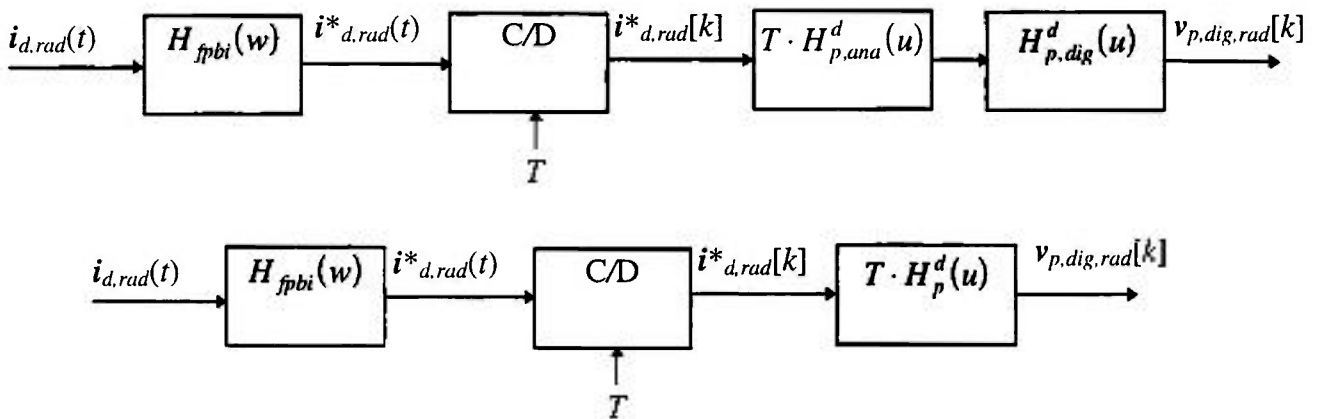


Figura 4-11 : Transformações resultantes do deslocamento de $H_{p,ana}(w)$

podendo-se escrever para os espectros de $v_{p,dig,rad}[k]$

$$\begin{aligned}
 S_{n,p,dig,rad}^d(u_1, \dots, u_{n-1}) &= T^n \cdot S_{n,p,ana}^d(u_1, \dots, u_{n-1}) \cdot H_p^d(u_1) \cdots H_p^d(u_{n-1}) \cdot H_p^d(-u_1, \dots, -u_{n-1})
 \end{aligned} \tag{4.2-50}$$

sendo

$$H_p^d(u) = H_{p,ana}^d(u) \cdot H_{p,dig}^d(u) \tag{4.2-51}$$

a resposta em frequência correspondente à resposta impulsiva discreta equivalente do processador com a faixa de frequências

$$\left[u_{p1}, u_{p2} \right] = \left[w_{p,ana1} \cdot T, w_{p,ana2} \cdot T \right] \cap \left[u_{p,dig1}, u_{p,dig2} \right]$$

e com

$$H_{p,ana}^d(u) = \frac{1}{T} \cdot H_{p,ana}\left(\frac{u}{T}\right) \quad \text{para } |u| \leq \pi \quad (4.2-52)$$

Para completar a equivalência, pode-se deslocar o novo bloco formado $T \cdot H_p^d(u)$ da figura 4-11 para a entrada do conversor C/D. Considerando o bloco analógico $H_p(w)$ definido por

$$H_p(w) = T \cdot H_p^d(w \cdot T) \quad \text{para } |u| = |w \cdot T| \leq \pi \quad (4.2-53)$$

sendo $H_p(w)$ a resposta em frequência correspondente à resposta impulsiva contínua equivalente do processador. Resultam as transformações indicadas na figura 4-12 :

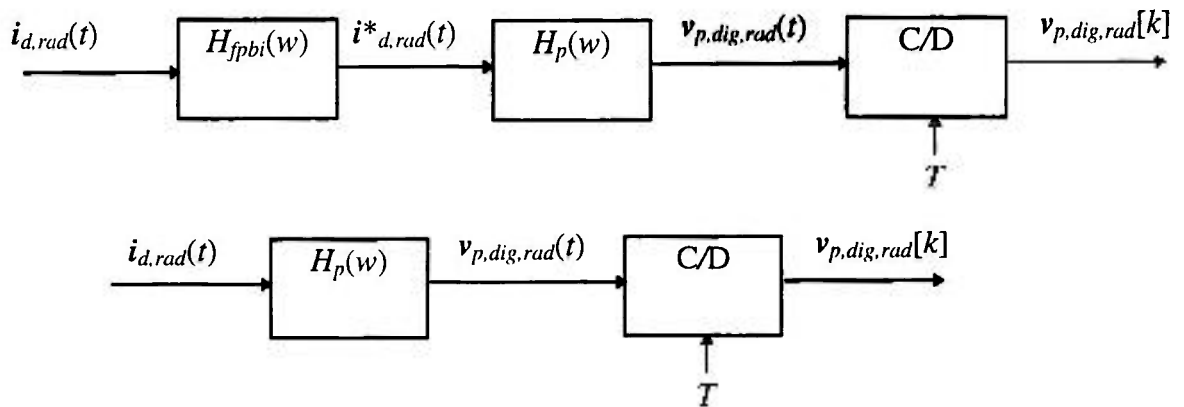


Figura 4-12 : Transformações resultantes do deslocamento de $T \cdot H_p^d(u)$

podendo-se escrever para os espectros na saída do sistema analógico $v_{p,dig,rad}(t)$

$$S_{n,v_{p,dig,rad}}(w_1, \dots, w_{n-1}) = S_{n,i_{d,rad}}(w_1, \dots, w_{n-1}) \cdot H_p(w_1) \dots H_p(w_{n-1}) \cdot H_p(-w_1 \dots -w_{n-1}) \quad (4.2-54)$$

para $|w \cdot T| \leq \pi$

e na saída do sistema digital $v_{p,dig,rad}[k]$

$$\begin{aligned} S_{n,v_{p,dig,rad}}^d(u_1, \dots, u_{n-1}) &= \frac{1}{T^{n-1}} \cdot S_{n,v_{p,dig,rad}}\left(\frac{u_1}{T}, \dots, \frac{u_{n-1}}{T}\right) \\ &= \frac{1}{T^{n-1}} \cdot S_{n,i_{d,rad}}\left(\frac{u_1}{T}, \dots, \frac{u_{n-1}}{T}\right) \cdot H_p\left(\frac{u_1}{T}\right) \dots H_p\left(\frac{u_{n-1}}{T}\right) \cdot H_p\left(-\frac{u_1}{T} \dots -\frac{u_{n-1}}{T}\right) \end{aligned} \quad (4.2-55)$$

para $|u_i| \leq \pi$

Do mesmo modo que se obtêm esses resultados com o deslocamento do bloco $H_{p,ana}(w)$ do sistema original, pode-se também deslocar o bloco $H_{p,dig}^d(u)$ para a entrada do conversor C/D (ver figura 4-10). A condição para efetuar esse deslocamento é

$$u_{p,dig1} < \frac{2 \cdot \pi}{n} \quad (4.2-56)$$

No entanto, essa condição diferentemente de (4.2-49) não estabelece um critério para o período de amostragem T . Para isso, se $u_{p,dig2} \leq w_{p,ana2} \cdot T$, então $u_{p2} = u_{p,dig2}$, e para não haver “aliasing” dentro de $[u_{p1}, u_{p2}]$, deve-se amostrar com um período T , tal que

$$\frac{u_{p,dig2}}{T} < \frac{2 \cdot \pi}{T} - w_{p,ana2} \quad (4.2-57)$$

De uma forma conservativa, substituindo (4.2-56 em 57), obtém-se

$$w_{p,ana2} < \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot \frac{n-1}{n} \quad (4.2-58)$$

Note que essa condição mantém os espectros livres de “aliasing” no intervalo $[u_{p1}, u_{p2}]$, mas não em $[u_{p2}, \pi]$, enquanto a condição de Nyquist mais conservativa que (4.2-58) elimina o “aliasing” em $[u_{p1}, \pi]$.

Com esse deslocamento, resultam as seguintes transformações :

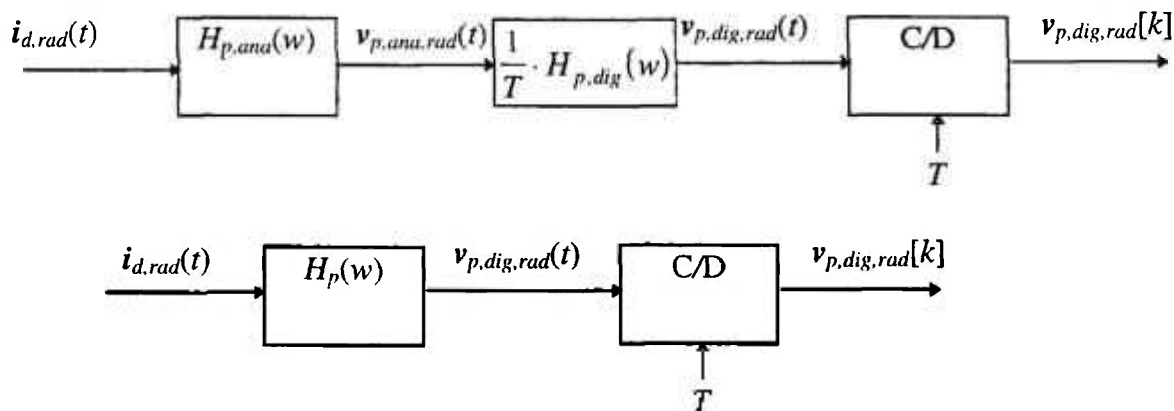


Figura 4-13 : Transformações resultantes do deslocamento de $H_{p,dig}^d(u)$

sendo

$$H_p(w) = H_{p,ana}(w) \cdot \frac{1}{T} \cdot H_{p,dig}(w) \quad (4.2-59)$$

com a faixa de frequências

$$[w_{p1}, w_{p2}] = [w_{p,ana1}, w_{p,ana2}] \cap [u_{p,dig1} / T, u_{p,dig2} / T]$$

e com

$$H_{p,dig}(w) = T \cdot H_{p,dig}^d(w \cdot T) \quad \text{para } |u| = |w \cdot T| \leq \pi \quad (4.2-60)$$

valendo portanto as mesmas equações (4.2-54 e 55).

Para completar a equivalência, no caso de deslocar $H_p(w)$ da figura 4-13 para a saída do conversor C/D obtém-se o resultado da figura 4-11, valendo também a equação (4.2-50).

c) Conclusão

Além das expressões equivalentes obtidas para os cumulantes e espectros dos sinais $v_{p,ana,rad}[k]$ e $v_{p,dig,rad}[k]$, úteis em simulação e desenvolvimento de algoritmos, nesta secção demonstrou-se que, para efeito de cálculo dos cumulantes e espectros, um sistema digital típico ($H_{p,ana}(w)$, C/D, $H_{p,dig}^d(u)$) pode ser reduzido a um sistema com uma parte analógica e conversor C/D ($H_p(w)$, C/D) (figura 4-14) ou a um sistema com um filtro passa-baixas ideal, conversor C/D e parte digital ($H_{fpbi}(w)$, C/D, $T \cdot H_p^d(u)$) (figura 4-15):

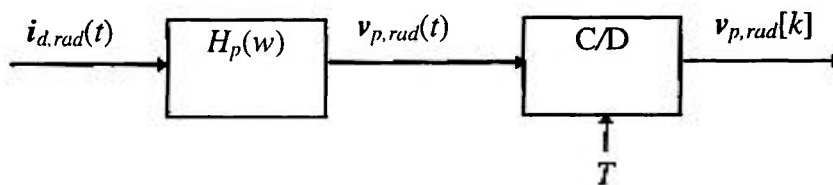


Figura 4-14 : Modelo ($H_p(w)$, C/D)

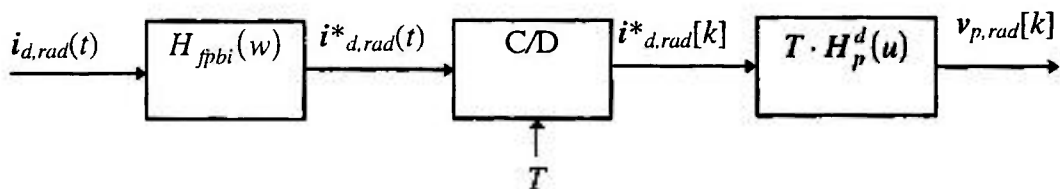


Figura 4-15 : Modelo ($H_{fpbi}(w)$, C/D, $T \cdot H_p^d(u)$)

Embora essa conclusão sobre sistemas equivalentes tenha sido obtida por meio dos espectros, sendo portanto válida para os cumulantes de ordem $n \geq 2$, é fácil ver por meio do exemplo (4.2-43) que elas também são válidas para o cumulante de primeira ordem, com as mesmas condições de $n = 2$.

Observe-se que os cumulantes na saída $v_{p,rad}[k]$ do sistema digital são idênticos aos cumulantes na saída $v_{p,rad}(t)$ do sistema analógico $H_p(w)$, mantendo-se as correspondências dos atrasos (“lags”):

$$C_{n,v_{p,rad}}[l_1, \dots, l_{n-1}] = C_{n,v_{p,rad}}(l_1 \cdot T, \dots, l_{n-1} \cdot T) \quad (4.2-61)$$

e para os espectros,

$$S_{n,v,p,rad}^u(u_1, \dots, u_{n-1}) = \frac{1}{T^{n-1}} \cdot S_{n,v,p,rad} \left(\frac{u_1}{T}, \dots, \frac{u_{n-1}}{T} \right) \quad (4.2-62)$$

Basta então estudar um dos sistemas para obter os resultados do outro.

Descartam-se portanto no restante deste trabalho os subscritos *ana* e *dig* para distinguir as saídas dos blocos e os próprios blocos analógicos e digitais, respectivamente.

Nota

As expressões dos cumulantes e espectros desenvolvidas acima apresentam simplificações para as regiões planas dos espectros do detector, conforme mostrado na secção 4.4.1.

4.3 Adaptadores de sinal

As respostas $h_{p,a}(t) \leftrightarrow H_{p,a}(w)$ do adaptador de sinal não são suficientes para caracterizá-lo. Deve-se também considerar a configuração de seu estágio de entrada responsável pelos limites da característica de ruído do sistema e pela influência de certos parâmetros de entrada, como as capacitâncias do cabo coaxial de sinal e do detector, na resposta do sistema.

Como o amplificador de entrada é a parte essencial do adaptador de sinal, qualquer contribuição adicional às respostas $h_{p,a}(t) \leftrightarrow H_{p,a}(w)$ pode ser representada por uma constante de ganho k_a , sendo sua implementação trivial (figura 4-16).

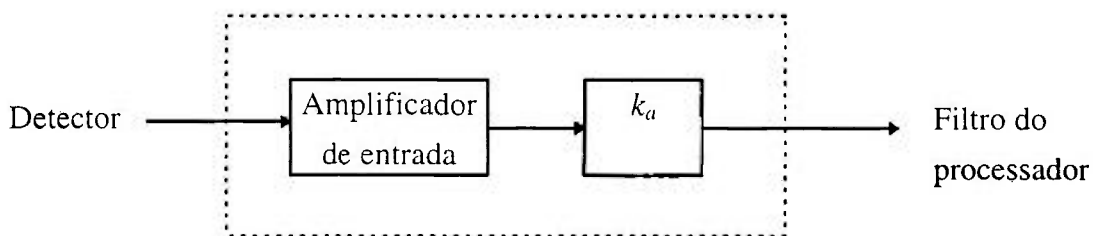


Figura 4-16 : Adaptador de sinal

A presença do nível médio (primeiro cumulante) da corrente gerada pelo detector pode reduzir a precisão do processamento dos cumulantes de ordem $n \geq 2$. Como exemplo, a partir das equações (2.5-4), pode ser visto que na saída do detector

$$\frac{(C_{n,i_d,rad}(0,\dots,0))^{\frac{1}{n}}}{C_{1,i_d,rad}} \propto \frac{1}{(\lambda_{rad})^{\frac{1}{n}}} \quad (4.3-1)$$

Claramente, quanto maior λ_{rad} , menor é a componente do sinal correspondente ao cumulante de ordem $n \geq 2$ em relação à componente de nível médio $n = 1$. Portanto, para processar os cumulantes de ordem $n \geq 2$ deve-se separar o nível médio do sinal. Essa separação pode ser feita, por exemplo, por meio de bloqueio do nível médio (acoplamento capacitivo) logo após o detector. Para sistemas que utilizam os n primeiros cumulantes adapta-se o sinal através de duas vias diferentes: uma para o nível médio (primeiro cumulante) e outra para os demais cumulantes. Vários arranjos são possíveis para a implementação dessas duas vias com apenas um detector: pode-se, por exemplo, retirar o sinal do anodo e/ou catodo do detector, utilizar amplificadores separados em eletrodos distintos, ou conectados no mesmo eletrodo. Embora os detalhes de implementação não façam parte do escopo deste trabalho, observar-se-á que as configurações básicas do amplificador são as mesmas tanto para obter o primeiro cumulante quanto para obter os demais cumulantes, o que justifica a representação de apenas uma via na figura 4-16, para estudo de suas características.

Alguns dos objetivos do amplificador são adaptar impedâncias, amplificar o sinal e permitir a obtenção de uma boa relação sinal / ruído após os filtros do processador. Apesar das equações (2.5-6 e 7) mostrarem que apenas o segundo cumulante é sensível ao ruído gaussiano, por considerações heurísticas pode-se concluir que o ruído gaussiano pode degradar as estimativas dos cumulantes de ordem diferente de dois, ou seja: “quanto maior for o nível de ruído, maior será o intervalo de tempo do conjunto de amostras para o cálculo das estimativas dos cumulantes do sinal, para que as varianças correspondentes à componente de ruído permitam alcançar determinada precisão”. Esse ponto é fundamental para sistemas onde o tempo de resposta é uma característica de importância (ex.: sistema responsável pelo controle e proteção de um reator). Também, o ruído pode levar à saturação dos estágios de amplificação do sinal, resultando em redução de ganho e eventualmente em redução da precisão do processamento dos cumulantes. Esses fatos justificam o objetivo de aumentar a relação sinal / ruído (das duas vias) do adaptador de sinal, mesmo no caso de não se utilizar o cumulante de segunda ordem.

Um outro objetivo do amplificador é reduzir a influência dos parâmetros de entrada. É conveniente ressaltar que, diferentemente do caso da aplicação de espectroscopia de energia de partículas [Nicholson, 1974], este objetivo pode aqui ser desejável, não sendo entretanto essencial em certas aplicações. Isto é, sendo o arranjo de entrada fixo e sendo certos parâmetros (capacitâncias do cabo coaxial de sinal e do detector) estáveis a longo prazo, então a resposta do adaptador pode depender desses

parâmetros. No entanto, as configurações do adaptador de sinal que minimizam a influência desses parâmetros são praticamente equivalentes no desempenho sinal / ruído àquelas que não o fazem, e portanto dá-se preferência às primeiras.

Discute-se neste trabalho a configuração inversora realimentada, que abrange as configurações tradicionais utilizadas na área nuclear dos chamados “amplificador sensível à carga” e “amplificador sensível à corrente” (amplificador à transcondutância). A configuração não-inversora realimentada do amplificador não é tratada diretamente, mas pode ser estudada a partir dos resultados obtidos. Não são considerados neste estudo detalhes de implementação, tais como possíveis esquemas de mudança de escalas do amplificador com o objetivo de maximizar o sinal e evitar saturação de estágios.

Seja então o diagrama simplificado (figura 4-17) representando o detector, as vias do primeiro e dos demais cumulantes e apenas um amplificador para análise :

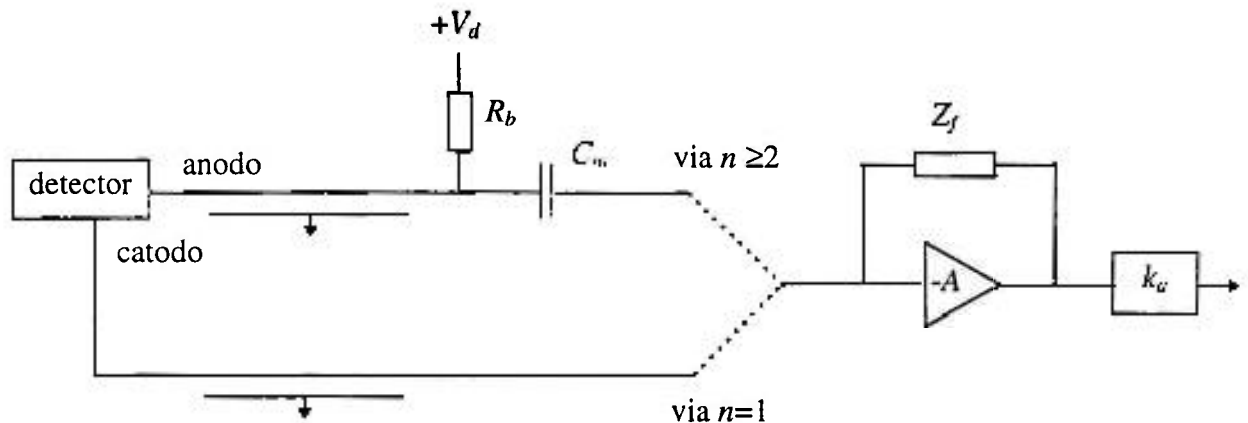


Figura 4-17 : Diagrama simplificado do detector e adaptador de sinal

sendo

C_{ac} a capacitância de acoplamento.

R_b a resistência de polarização.

A o ganho de malha aberta do amplificador $abs(A) \gg 1$.

Z_f a impedância de realimentação.

V_d a tensão de polarização do detector.

k_a a constante de ganho do restante do adaptador.

Tem-se a seguinte classificação [Nicholson, 1974] :

- Amplificador sensível a corrente, se $Z_f = R_f$, sendo R_f a resistência de realimentação.
- Amplificador sensível a carga, se $(Z_f = R_f // (1 / j.w.C_f))$ e $(R_f.C_f \gg \text{largura do pulso da corrente de interesse})$, sendo R_f e C_f a resistência e a capacitância de realimentação, respectivamente.

No entanto, essa classificação é secundária neste estudo, pois não se procura no caso geral um sinal com a forma do pulso de corrente ou cuja amplitude seja proporcional à carga desse pulso, mas apenas uma configuração que permita maximizar a relação sinal / ruído e reduzir a influência dos parâmetros de entrada.

Finalmente, se $(Z_f = R_f // (1 / j.\omega.C_f))$, o adaptador introduz um pólo próximo de $(1 / R_f.C_f)$ na resposta em frequência do amplificador. Como é visto na secção 4.6, o posicionamento das frequências limites do sistema também afeta a precisão e tempo de processamento dos cumulantes. Portanto, no projeto do adaptador deve-se também levar em conta tal efeito.

A seguir apresenta-se a análise de ruído do adaptador de sinal utilizando-se o espectro de segunda ordem. O estudo da influência dos parâmetros de entrada é secundário neste trabalho, de forma que se inclui apenas um esboço no apêndice A.4.1.

4.3.1 Análise de ruído

Assume-se que o ruído extrínseco é minimizado pelas técnicas de Ott [1988].

A maior parte do ruído intrínseco responsável pela degradação das estatísticas do sinal de interesse é gerado junto à entrada do amplificador do adaptador de sinal.

Considere-se então, o modelo para análise de ruído (figura 4-18) correspondente à via dos cumulantes de ordem $n \geq 2$ da figura 4-17 :

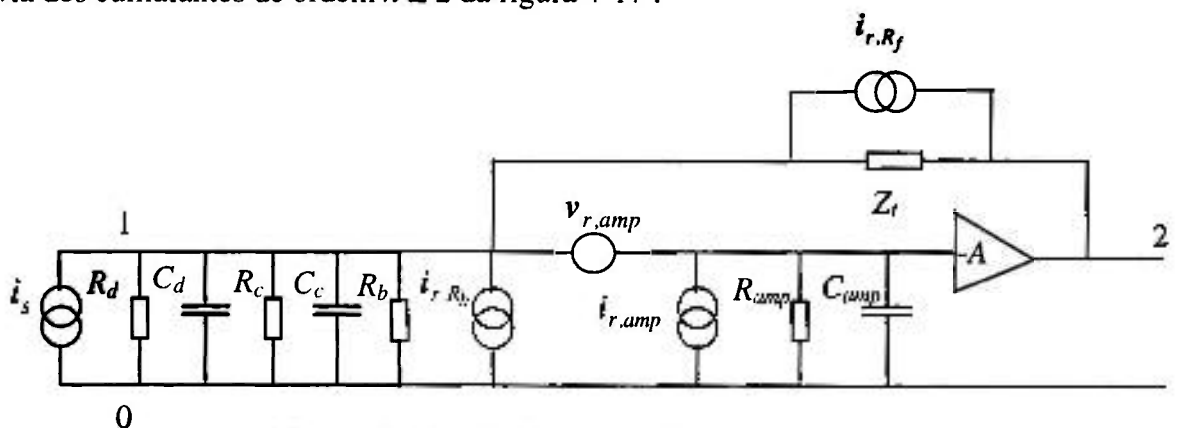


Figura 4-18 : Modelo para análise de ruído $n \geq 2$

com

i_s e S_{2,i_s} a corrente de sinal do detector ($i_s(t) = i_d(t)$) e seu espectro, respectivamente.

R_d e C_d a resistência de isolamento e a capacitância do detector respectivamente.

R_c e C_c a resistência de isolamento e a capacitância do cabo coaxial de sinal, respectivamente.

R_b , i_{r,R_b} e $S_{2,i_{r,R_b}}$ a resistência de polarização do detector, a corrente de ruído (correspondente ao resistor associado) e seu espectro, respectivamente.

$v_{r,amp}$, $i_{r,amp}$, $S_{2,v_{r,amp}}$ e $S_{2,i_{r,amp}}$ a tensão e corrente do modelo de ruído (v_r , i_r) do amplificador e seus respectivos espectros.

R_{amp} e C_{amp} a resistência e a capacitância de entrada do amplificador, respectivamente.

Z_f , i_{r,R_f} e $S_{2,i_{r,R_f}}$ a impedância de realimentação , a corrente de ruído (correspondente ao resistor associado) e seu espectro, respectivamente.

A o ganho de malha aberta do amplificador.

Agrupando as impedâncias entre os pontos 1 e 0 (figura 4-18) como Z_{10} , deslocando as fontes de ruído i_{r,R_f} e $v_{r,amp}$ e aplicando transformações de fontes , resulta

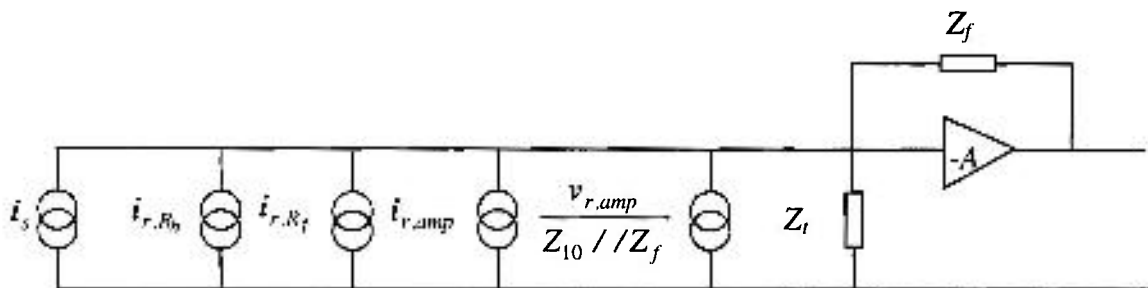


Figura 4-19 : Modelo após transformação

com

$$Z_{10} = R_d // R_c // R_b // (1 / j.w.(C_d + C_c)) \quad (4.3-2)$$

$$Z_t = Z_{10} // R_{amp} // (1 / j.w.C_{amp}) \quad (4.3-3)$$

$$Z_f = R_f // (1 / j.w.C_f) \quad (4.3-4)$$

Considerando as fontes de ruído independentes, resulta

$$S_{2,i_r} = S_{2,i_{r,R_b}} + S_{2,i_{r,R_f}} + S_{2,i_{r,amp}} + \frac{S_{2,v_{r,amp}}}{\left(\text{abs}\left(Z_{10} // Z_f\right)\right)^2} \quad (4.3-5)$$

sendo

$$\left(\text{abs}\left(Z_{10} // Z_f\right)\right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{R_{eq}}\right)^2 + C_{eq}^2 \cdot w^2} \quad (4.3-6)$$

com

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_d} + \frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_f} \quad \text{e} \quad C_{eq} = C_c + C_d + C_f \quad (4.3-7)$$

Substituindo (4.3-6) em (4.3-5), obtém-se

$$S_{2,i_r} = S_{2,i_r,R_b} + S_{2,i_r,R_f} + S_{2,i_r,amp} + \frac{S_{2,v_r,amp}}{R_{eq}^2} \cdot \left(1 + (R_{eq} \cdot C_{eq})^2 \cdot \omega^2\right) \quad (4.3-8)$$

sendo R_{eq} e C_{eq} dados por (4.3-7).

Supondo que os resistores utilizados R_b e R_f contribuem sobretudo com ruído Johnson, resulta

$$S_{2,i_r,R_b} = \frac{2 \cdot k \cdot T}{R_b} \quad (4.3-9)$$

$$S_{2,i_r,R_f} = \frac{2 \cdot k \cdot T}{R_f} \quad (4.3-10)$$

onde

k é a constante de Boltzmann ($k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K).

T é a temperatura absoluta em K.

Normalmente os espectros $S_{2,v_r,amp}$ e $S_{2,i_r,amp}$ do amplificador não são constantes numa faixa ampla de frequências. No entanto, para muitos amplificadores pode-se considerá-los constantes na faixa de frequências de interesse, ou, no caso geral para uma primeira análise, iguais aos seus limites máximos nessa faixa $S_{2,v_r,amp,max}$ e $S_{2,i_r,amp,max}$.

Tendo em vista essas considerações, pode-se esboçar os espectros de sinal e de ruído no mesmo gráfico (ver secção 3.3.3), como na figura 4-20 :

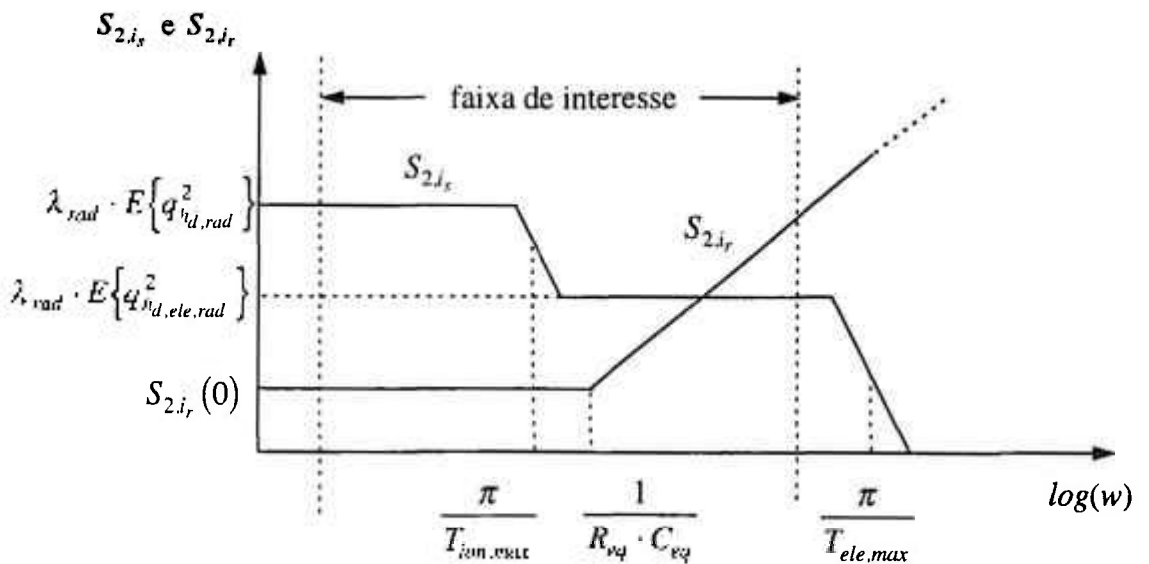


Figura 4-20 : Esboços dos espectros de sinal e de ruído

com

$$S_{2,i_r}(0) = 2 \cdot k \cdot T \cdot \left(\frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_f} \right) + S_{2,i_r,amp} + \frac{S_{2,v_r,amp}}{R_{eq}^2} \quad (4.3-11)$$

Na verdade a frequência zero foi bloqueada pelo capacitor de acoplamento, sendo representada como valor limite do gráfico.

Observe-se a maior contribuição do termo $(R_{eq} \cdot C_{eq})^2 \cdot \omega^2$ para frequências acima de $1/(R_{eq} \cdot C_{eq})$. Como exemplo, em reatores nucleares onde a capacitância do cabo coaxial de sinal, e portanto C_{eq} , são elevadas (da ordem de kF), o limite mínimo de λ_{rud} detectável por um sistema de segunda ordem é determinado por essa característica do ruído.

Para o cálculo da relação sinal / ruído (referida ao segundo cumulante) numa faixa de frequências de interesse definida pelos filtros do processador $[\omega_{p1}, \omega_{p2}]$ basta calcular a relação das áreas sob as curvas, isto é,

$$\frac{C_{2,i_s}(0)}{C_{2,i_r}(0)_{[\omega_{p1}, \omega_{p2}]}} = \frac{\int_{\omega_{p1}}^{\omega_{p2}} S_{2,i_s}(\omega) \cdot d\omega}{\int_{\omega_{p1}}^{\omega_{p2}} S_{2,i_r}(\omega) \cdot d\omega} \quad (4.3-12)$$

que representa a relação entre a variância da corrente de sinal e a variância da corrente de ruído.

Portanto, para maximizar (4.3-12), pode-se além de minimizar os termos de S_{2,i_r} em (4.3-8), maximizando R_d , R_c , R_b e R_f e minimizando C_d , C_c e C_f , também escolher a faixa de frequências $[\omega_{p1}, \omega_{p2}]$ adequada.

Deve-se lembrar que embora o amplificador forneça ao sinal e ao ruído uma reposta em frequência dada pela configuração (Z_t, Z_f, A) da figura 4-19, que pode introduzir no amplificador um pólo próximo a $(1/R_f \cdot C_f)$, deixa-se a definição de ω_{p1} e ω_{p2} para os filtros do processador de sinal. Esse procedimento é útil, pois dessa maneira pode-se escolher vários filtros passa-faixa que definem ω_{p1} e ω_{p2} com o objetivo de :

- Otimizar a relação sinal / ruído.
- Otimizar a precisão e o tempo de processamento dos cumulantes.
- Minimizar a sensibilidade dos cumulantes à variação de parâmetros, tal como a tensão de polarização do detector.
- Obter os espectros do detector.

Embora a análise de ruído apresentada tenha sido realizada para a via $(n \geq 2)$, para a via $n = 1$ basta fazer $(R_b \rightarrow \infty$ e $\omega_{p1} = 0)$ e considerar a relação sinal / ruído referida ao primeiro cumulante como

$$\frac{C_{1,i_s}}{\left(C_{2,i_r}(0) \Big|_{0,w_{p2}} \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{C_{1,i_s}}{\left(\frac{1}{\pi} \int_0^{w_{p2}} S_{2,i_r}(w) \cdot dw \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.3-13)$$

sendo C_{1,i_s} calculado na secção 4.4.

Note-se que (4.3-13) representa a relação entre o nível médio da corrente de sinal e o desvio padrão da corrente de ruído.

4.4 Filtros

O estudo que se segue, embora possa ser efetuado utilizando-se as equações gerais da secção 4.2.1.1, é desenvolvido nesta secção considerando os modelos equivalentes das figuras 4-14 e 15, que podem representar tanto sistemas analógicos (saída $v_{p,rad}(t)$) como digitais (saída $v_{p,rad}[k]$).

4.4.1 Posicionamento dos filtros

Os filtros do processador definem a faixa de frequências $[w_{p1}, w_{p2}]$ (ou $[u_{p1}, u_{p2}]$) de interesse e portanto a região de frequências onde o processador modifica os espectros do detector e contribui para os espectros do sinal de saída. Essas contribuições, aqui denominadas $G_{n,p}(w_1, \dots, w_{n-1})$ (ou $G_{n,p}^d(w_1 \cdot T, \dots, w_{n-1} \cdot T)$), podem ser escritas como

$$G_{n,p}(w_1, \dots, w_{n-1}) = H_p(w_1) \dots H_p(w_{n-1}) \cdot H_p(-w_1 \dots -w_{n-1}) \quad (4.4-1)$$

e

$$G_{n,p}^d(w_1 \cdot T, \dots, w_{n-1} \cdot T) = T \cdot H_p^d(w_1 \cdot T) \dots H_p^d(w_{n-1} \cdot T) \cdot H_p^d(-w_1 \cdot T \dots -w_{n-1} \cdot T) \quad (4.4-2)$$

Considerando essas equações, pode-se escrever para os espectros de $v_{p,rad}(t)$ e $v_{p,rad}[k]$:

$$S_{n,v_{p,rad}}(w_1, \dots, w_{n-1}) = S_{n,i_d,rad}(w_1, \dots, w_{n-1}) \cdot G_{n,p}(w_1, \dots, w_{n-1}) \quad (4.4-3)$$

$$S_{n,v_{p,rad}}^d(u_1, \dots, u_{n-1}) = S_{n,i_d,rad} \left(\frac{u_1}{T}, \dots, \frac{u_{n-1}}{T} \right) \cdot G_{n,p}^d(u_1, \dots, u_{n-1}) \quad (4.4-4)$$

para $|u_i| \leq \pi$

Observando-se as formas dos espectros do detector apresentadas na secção 3.3.3, identificam-se três principais possibilidades (casos) de posicionamento dos filtros do processador que resultam numa determinada contribuição para os espectros do sinal de saída :

- *Casos 1 e 2*, onde o filtro é posicionado numa faixa de frequências de modo que $G_{n,p}(w_1, \dots, w_{n-1})$ (ou $G_{n,p}^d(w_1 \cdot T, \dots, w_{n-1} \cdot T)$) resulte na região plana $P1$ e $P2$ dos espectros, respectivamente (ver secção 3.3.3). Estes casos são utilizados na obtenção da taxa média de eventos λ_{rad} , pois como foi mostrado na secção 3.3.3.2, as regiões planas dos espectros dependem apenas da taxa média de eventos λ_{rad} e das cargas $q_{hd,rad}$ e $q_{hd,ele,rad}$, sendo independentes da tensão de polarização V_d do detector. Deve-se ressaltar que o filtro do caso 1 pode possuir vantagens em relação ao filtro do caso 2 quanto à relação sinal / ruído (ver figura 4-20), mas para detectores lentos a região plana $P1$ dos espectros torna-se estreita, sendo difícil obter uma faixa de frequências adequada para posicionar o filtro passa-faixa, pois além de ser necessário eliminar o ruído extrínseco no início da região (frequências baixas), o tempo de resposta (ver secção 4.6) resultante, devido às baixas frequências limites do filtro, pode ser muito elevado.
- *Caso 3*, onde o filtro é posicionado numa faixa de frequências de forma que $G_{n,p}(w_1, \dots, w_{n-1})$ (ou $G_{n,p}^d(w_1 \cdot T, \dots, w_{n-1} \cdot T)$) resulte em trechos dos espectros, normalmente contendo regiões de transição, com o objetivo de avaliar o funcionamento do detector por meio de seus espectros e/ou cumulantes.

4.4.1.1 Casos 1 e 2 : contribuições nas regiões planas dos espectros

Estes casos são utilizados na obtenção da taxa média de eventos λ_{rad} .

Seja a contribuição $G_{n,p}(w_1, \dots, w_{n-1})$ (ou $G_{n,p}^d(w_1 \cdot T, \dots, w_{n-1} \cdot T)$) localizada na região plana $P1$ (caso 1) ou $P2$ (caso 2) dos espectros do detector. Para ilustrar, a figura 4-21 apresenta os esboços do espectro $S_{2,rd,rad}(w)$ e de $G_{2,p}(w)$ (ou $G_{2,p}^d(w \cdot T)$) :

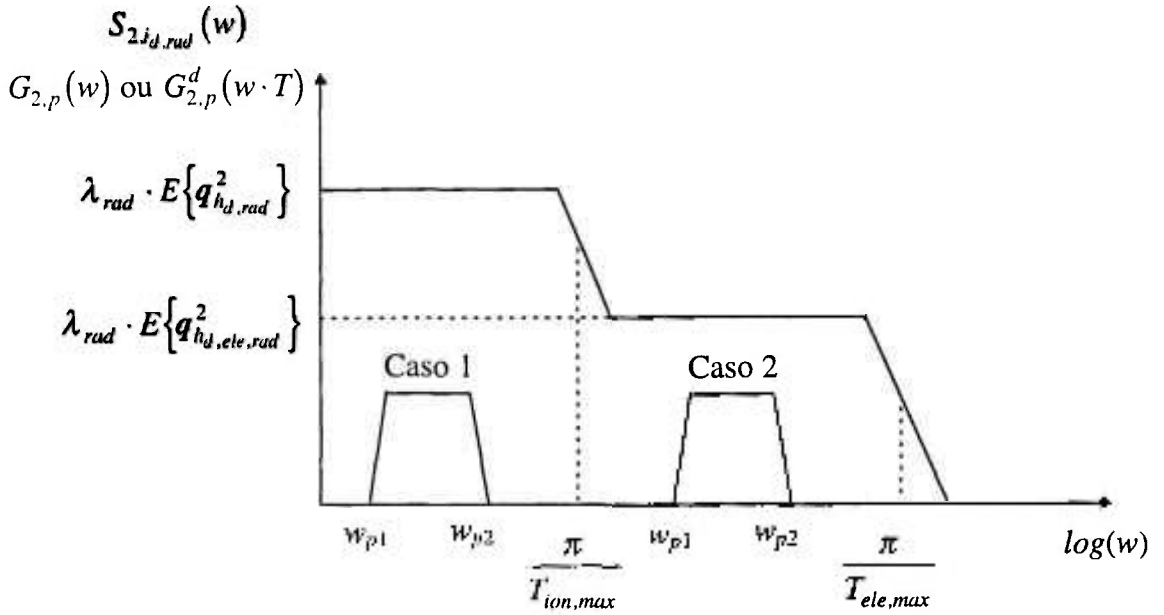


Figura 4-21 : $S_{2,i_d,rad}(w)$ e $G_{2,p}(w)$ (ou $G_{2,p}^d(w \cdot T)$)

De acordo com as equações (3.3-25 e 26) as regiões planas $P1$ e $P2$ dos espectros da corrente do detector $i_{d,rad}(t)$ podem ser escritas como

$$S_{i_d,rad}(w_1, \dots, w_{n-1}) \equiv \lambda_{rad} \cdot E\{Q_{rad}^n\} \quad (4.4-5)$$

com

$$Q_{rad} = \begin{cases} q_{hd,rad} & \text{para o caso 1} \\ q_{hd,ele,rad} & \text{para o caso 2} \end{cases} \quad (4.4-5a)$$

Observe-se que $q_{hd,rad} = q_{t,rad}$ (carga da trilha de ionização), caso todos os portadores gerados pela ionização sejam coletados (ver 3.2-20).

As expressões dos cumulantes e espectros podem ser facilmente desenvolvidas a partir dos modelos das figuras 4-14 e 15. Pode-se escrever para os espectros de $v_{p,rad}(t)$

$$S_{n,v_{p,rad}}(w_1, \dots, w_{n-1}) = S_{n,i_d,rad}(w_1, \dots, w_{n-1}) \cdot H_p(w_1) \dots \cdot H_p(w_{n-1}) \cdot H_p(-w_1 \dots - w_{n-1}) \quad (4.4-6)$$

Mas na faixa $[w_{p1}, w_{p2}]$, pode-se substituir (4.4-5 em 6) (ver saída $v_{p,rad}(t)$ na figura 4-14), resultando

$$S_{n,v_{p,rad}}(w_1, \dots, w_{n-1}) \equiv \lambda_{rad} \cdot E\{Q_{rad}^n\} \cdot H_p(w_1) \dots \cdot H_p(w_{n-1}) \cdot H_p(-w_1 \dots - w_{n-1}) \quad (4.4-7)$$

Para os espectros de $v_{p,rad}[k]$ (ver saída $v_{p,rad}[k]$ na figura 4-14), obtém-se

$$S_{n,v_{p,rad}}^d(u_1, \dots, u_{n-1}) \equiv \lambda_{rad} \cdot E\{Q_{rad}^n\} \cdot \frac{1}{T^{n-1}} \cdot H_p\left(\frac{u_1}{T}\right) \dots \cdot H_p\left(\frac{u_{n-1}}{T}\right) \cdot H_p\left(-\frac{u_1}{T} \dots - \frac{u_{n-1}}{T}\right) \quad (4.4-8)$$

ou (ver saída $v_{p,rad}[k]$ na figura 4-15)

$$S_{n,v_{p,rad}}^n(u_1, \dots, u_{n-1}) \equiv \lambda_{rad} \cdot E\{Q_{rad}^n\} \cdot T \cdot H_p^n(u_1) \dots H_p^n(u_{n-1}) \cdot H_p^n(-u_1 \dots -u_{n-1}) \quad (4.4-9)$$

Para os cumulantes, pode-se escrever

$$C_{n,v_{p,rad}}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \equiv \lambda_{rad} \cdot E\{Q_{rad}^n\} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h_p(\xi) \cdot h_p(\xi + \tau_1) \dots \cdot h_p(\xi + \tau_{n-1}) \cdot d\xi \quad (4.4-10)$$

c

$$\begin{aligned} C_{n,v_{p,rad}}[l_1, \dots, l_{n-1}] &= C_{n,v_{p,rad}}(l_1 \cdot T, \dots, l_{n-1} \cdot T) \\ &\equiv \lambda_{rad} \cdot E\{Q_{rad}^n\} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h_p(\xi) \cdot h_p(\xi + l_1 \cdot T) \dots \cdot h_p(\xi + l_{n-1} \cdot T) \cdot d\xi = (4.4-11) \\ &= \lambda_{rad} \cdot E\{Q_{rad}^n\} \cdot T \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_p[m] \cdot h_p[m + l_1] \dots \cdot h_p[m + l_{n-1}] \end{aligned}$$

Note-se que as aproximações de (4.4-7 a 11) não se devem à discretização, mas às regiões planas dos espectros, de acordo com (4.4-5).

c) Algumas considerações

Analisando as equações dos cumulantes e espectros para filtros que geram contribuições nas regiões planas dos espectros, conclui-se :

Sobre a forma das equações

Os cumulantes e espectros de $v_{p,rad}(t)$ e $v_{p,rad}[k]$ dependem da taxa média de eventos λ_{rad} , da carga $q_{hd,rad}$ (caso 1) do pulso de corrente total ou da carga $q_{hd,ele,rad}$ (caso 2) do pulso de corrente correspondente aos elétrons, e das respostas do processador de sinal. Observe que nesses casos o caráter aleatório está representado apenas nas cargas dos pulsos de corrente. Além disso, supõe-se que a câmara de ionização opera em condições tais que todas as cargas geradas pela ionização sejam coletadas, resultando que $q_{hd,rad} = q_t$ e também que, $q_{hd,rad}$, $q_{hd,ele,rad}$, e portanto os cumulantes e espectros não dependem da tensão de polarização do detector dentro dessas condições. Esses fatos justificam o interesse em utilizar filtros nas regiões planas dos espectros para obter a taxa média de eventos λ_{rad} .

Sobre processos estocásticos equivalentes

Analisando as equações (4.4-7 e 10), observa-se que se obtêm os mesmos cumulantes e espectros ao excitar o sistema linear $h_p(t) \leftrightarrow H_p(w)$ com um processo estocástico $x_{rad}(t)$ tipo “shot” de taxa média de eventos λ_{rad} , com amplitudes dos impulsos $Q_{k,rad}$ e com $E\{Q_{k,rad}^n\} = E\{Q_{rad}^n\}$, pois

$$S_{n,x_{rad}}(w_1, \dots, w_{n-1}) = \lambda_{rad} \cdot E\{Q_{rad}^n\} \quad (4.4-12)$$

$$C_{n,x_{rad}}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) = \lambda_{rad} \cdot E\{Q_{rad}^n\} \cdot \delta(\tau_1) \dots \delta(\tau_{n-1}) \quad (4.4-13)$$

Deve-se notar que esse modelo é normalmente utilizado para obter as equações do teorema de Campbell (1.2-2 e 3) encontradas em diversos textos (ex.: Shanmugan e Breipohl [1988], Papoulis [1991]).

Da mesma forma, no lugar de supor as equações (4.4-12 e 13) provenientes de um processo estocástico tipo “shot”, pode-se considerá-las como resultantes de um processo estocástico tipo “ruído branco não-gaussiano”. No caso discreto considera-se o ruído branco não-gaussiano discreto, ou seja,

$$S_{n,x_{rad}}^d(u_1, \dots, u_{n-1}) = \lambda_{rad} \cdot E\{Q_{rad}^n\} \quad (4.4-14)$$

$$C_{n,x_{rad}}[l_1, \dots, l_{n-1}] = \lambda_{rad} \cdot E\{Q_{rad}^n\} \cdot \delta[l_1] \dots \delta[l_{n-1}] \quad (4.4-15)$$

Esta equivalência é de grande importância, pois é o ponto de partida dos *métodos de identificação das respostas do sistema* [Papoulis, 1991; Mendel 1991]. É interessante observar que no caso de se realizar a identificação da resposta do sistema do caso 1 e 2, obtém-se uma aproximação da resposta discreta da eletrônica $h_p[k] \leftrightarrow H_p^d(u)$ sem qualquer contribuição da forma da resposta do detector. Além disso, é possível obter a resposta equivalente $h_p[k] \leftrightarrow H_p^d(u)$ somente se as condições (4.2-49) ou (4.2-56 e 57) forem obedecidas.

4.4.1.2 Caso 3 : contribuições nas regiões de transição dos espectros

Este caso é utilizado na avaliação do funcionamento do detector.

Como as regiões de transição são sensíveis às variações de certas características e condições de operação da câmara de ionização, tais como pressão e temperatura do gás e tensão de polarização, com o objetivo de avaliar o funcionamento do detector é interessante posicionar os filtros do processador de modo que sua contribuição $G_{n,p}(w_1, \dots, w_{n-1})$ (ou $G_{n,p}^d(w_1 \cdot T, \dots, w_{n-1} \cdot T)$) esteja localizada sobre uma ou mais regiões de transição dos

espectros. A figura 4-22 apresenta os esboços do espectro $S_{2,i_d,rad}(w)$ e de $G_{2,p}(w)$ (ou $G_{2,p}^d(w \cdot T)$) sobre uma região de transição :

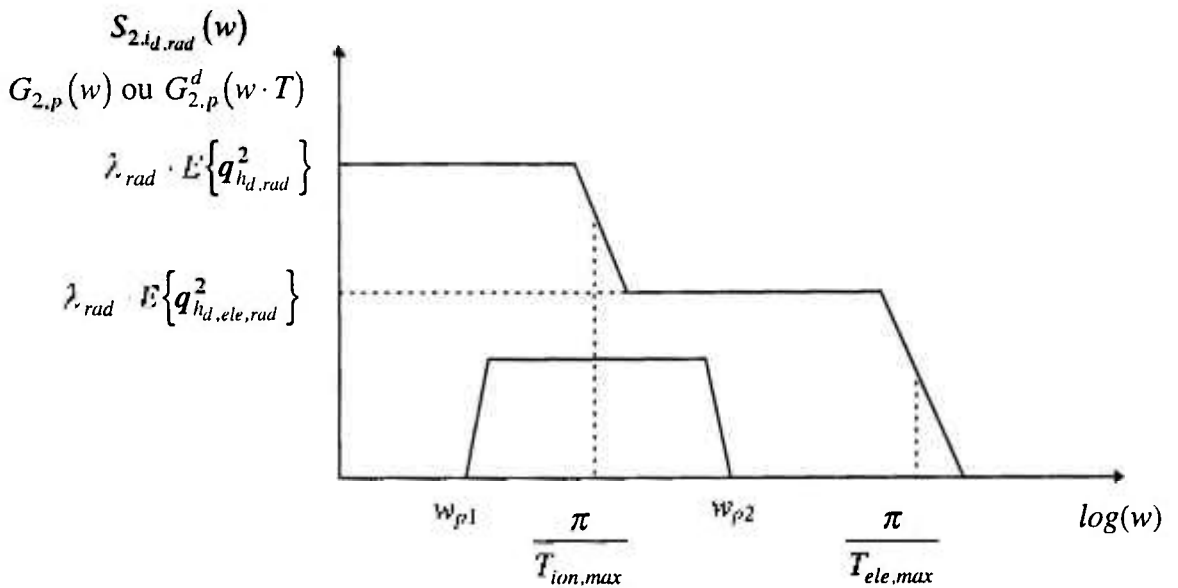


Figura 4-22 : $S_{2,i_d,rad}(w)$ e $G_{2,p}(w)$ (ou $G_{2,p}^d(w \cdot T)$)

Neste caso, as equações resultantes dos cumulantes e espectros de $v_{p,rad}(t)$ e $v_{p,rad}[k]$ não permitem simplificações como aquelas dos casos 1 e 2, sendo utilizadas as equações gerais já desenvolvidas.

Deve-se observar que, diferentemente dos casos 1 e 2, a identificação da resposta do sistema resulta na obtenção de uma aproximação da resposta do detector na região $[w_{p1}, w_{p2}]$.

4.4.2 Filtros ideais

Como a definição dos filtros do processador, para a otimização das características de ruído, tempo de resposta e precisão, está mais relacionada com o posicionamento das frequências que limitam sua resposta em frequência, do que com a forma desta, calculam-se os quatro primeiros cumulantes em função dessas frequências na saída dos filtros do processador, considerando que a resposta do processador (adaptador + filtros) se comporte como a de um filtro ideal. Particularmente, o resultado obtido para o primeiro cumulante é válido para qualquer resposta tipo filtro passa-baixas, enquanto que os resultados para os demais cumulantes são válidos para respostas tipo filtro passa-faixa ideal com contribuições nas regiões planas dos espectros (casos 1 e 2). Com esse procedimento obtêm-se expressões analíticas úteis para a seleção das frequências dos filtros do processador. Além disso, a utilização de respostas tipo filtros ideais como referência

constitui-se num balizamento de projeto útil, considerando a tecnologia digital hoje disponível.

4.4.2.1 Primeiro cumulante

Para o primeiro cumulante, utiliza-se uma resposta tipo filtro passa-baixas qualquer.

Das equações (4.2-4 e 21), resulta

$$C_{1,v_{p,ana},rad} = \lambda_{rad} \cdot E\{q_{k_d,rad}\} \cdot k_p = \lambda_{rad} \cdot E\{q_{k_d,rad}\} \cdot k_p^d \cdot T \quad (4.4-16)$$

com

$$\begin{aligned} k_p &= k_p^d \cdot T = H_p(0) = H_{p,ana}(0) && \text{para a configuração 1 e 2} \\ &= H_{p,ana}(0) \cdot H_{p,dig}^d(0) && \text{para a configuração 3} \end{aligned} \quad (4.4-16a)$$

Observe-se que para o primeiro cumulante não é necessário utilizar as condições de validade do modelo equivalente, pois não é necessário realizar o deslocamento de blocos para obter a equação simplificada (4.4-16). Assim, (4.4-16 e 16a) são válidas para qualquer período de amostragem $T > 0$ (configurações 2 e 3).

4.4.2.2 Cumulantes de ordem $n \geq 2$

Para os demais cumulantes, utiliza-se uma resposta tipo filtro passa-faixa $[w_{p1}, w_{p2}]$ com contribuições nas regiões planas dos espectros (casos 1 e 2).

Embora esse desenvolvimento possa ser realizado a partir dos espectros de $v_{p,rad}(t)$ ou de $v_{p,rad}[k]$, uma vez que os cumulantes resultantes obedecem à equação (4.2-61), realiza-se todo desenvolvimento no domínio discreto, e comentam-se no final os resultados para o domínio contínuo.

Considerem-se então os espectros de $v_{p,rad}[k]$ representados pela equação (4.4-9), ou seja,

$$S_{n,v_{p,rad}}^d(u_1, \dots, u_{n-1}) \equiv \lambda_{rad} \cdot E\{Q_{rad}^n\} \cdot T \cdot H_p^d(u_1) \dots H_p^d(u_{n-1}) \cdot H_p^d(-u_1 \dots - u_{n-1}) \quad (4.4-17)$$

Para o cálculo dos cumulantes em função das frequências $[u_{p1}, u_{p2}]$, pode-se utilizar por exemplo a transformada inversa de Fourier de (4.4-17), representada de uma forma normalizada como

$$C_{n, u_p, \text{rad}} [l_1, \dots, l_{n-1}] \cong n \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \pi} \right)^{n-1} \cdot \lambda_{\text{rad}} \cdot E \{ Q_{\text{rad}}^n \} \cdot (k_p^d \cdot T)^n \cdot \left(\frac{u_{p2}}{T} \right)^{n-1} \cdot J_n [l_1, \dots, l_{n-1}] \quad (4.4-18)$$

com

$$J_n [l_1, \dots, l_{n-1}] = \frac{1}{n \cdot (k_p^d)^n \cdot u_{p2}^{n-1}} \cdot \int \dots \int_{D_n^d} H_p^d(u_1) \dots H_p^d(u_{n-1}) \cdot H_p^d(-u_1 \dots -u_{n-1}) \cdot e^{j(u_1 l_1 + \dots + u_{n-1} l_{n-1})} \cdot du_1 \dots du_{n-1} \quad (4.4-19)$$

sendo D_n o domínio no qual o integrando é diferente de zero e $n \cdot (k_p^d)^n \cdot u_{p2}^{n-1}$ o fator de normalização.

As equações (4.4-18 e 19) podem ser utilizadas para qualquer filtro $H_p^d(u)$, particularmente para o filtro passa-faixa ideal (figura 4-23) definido no intervalo $[0, \pi]$ por

$$\begin{aligned} H_p^d(u) &= k_p^d \quad (\text{cte.}) \quad \text{para } 0 < u_{p1} \leq u \leq u_{p2} \leq \pi \\ H_p^d(u) &= 0 \quad \text{no restante do intervalo } [0, \pi] \end{aligned} \quad (4.4-20)$$

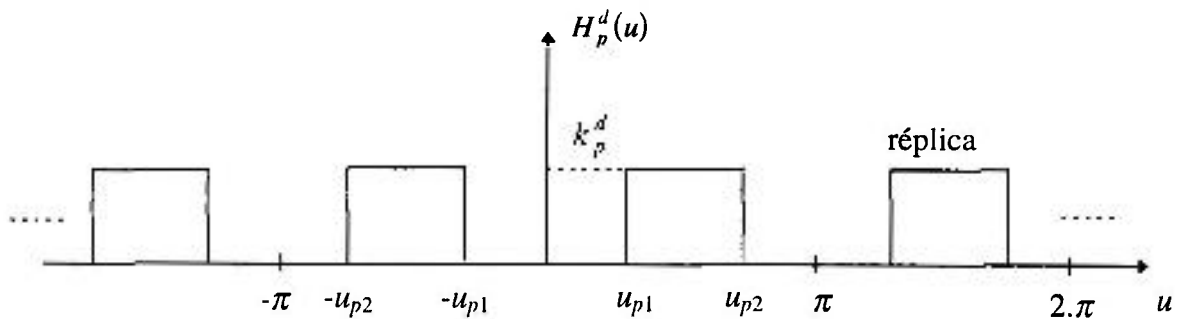


Figura 4-23 : Filtro ideal $H_p^d(u)$

Nesse caso, como no domínio D_n^d

$$H_p^d(u_1) \dots H_p^d(u_{n-1}) \cdot H_p^d(-u_1 \dots -u_{n-1}) = (k_p^d)^n \quad (4.4-21)$$

resulta

$$J_n [l_1, \dots, l_{n-1}] = \frac{1}{n \cdot u_{p2}^{n-1}} \cdot \int \dots \int_{D_n^d} \cos(u_1 \cdot l_1 + \dots + u_{n-1} \cdot l_{n-1}) \cdot du_1 \dots du_{n-1} \quad (4.4-22)$$

pois J_n é real.

É interessante observar que o domínio D_n^d não inclui a contribuição das réplicas de $H_p^d(u)$ (figura 4-23) de acordo com as considerações realizadas para a sua construção. Claramente, esse fato assegura a equivalência dos sistemas analógicos e digitais.

As equações (4.4-18 e 19) podem em princípio ser utilizadas para o cálculo dos cumulantes em função das frequências limites dos filtros passa-faixa ideais. No entanto, a partir do quarto cumulante torna-se difícil reconhecer o domínio D_n^d , além das expressões analíticas resultantes serem complexas e de pouca utilidade. Neste trabalho, utiliza-se o método acima para calcular o segundo e terceiro cumulantes, sendo o quarto cumulante calculado apenas na origem utilizando convoluções unidimensionais. Apresenta-se a seguir o cálculo desses três cumulantes.

a) Segundo cumulante

Utilizando (4.4-18 e 22) com $n = 2$, pode-se escrever

$$C_{2, \text{pass}}^d[l] \cong \frac{1}{\pi} \cdot \lambda_{\text{pass}} \cdot E\{Q_{\text{pass}}^2\} \cdot (k_p^d \cdot T)^2 \cdot \frac{u_{p2}}{T} \cdot J_2[l] \quad (4.4-23)$$

com

$$J_2[l] = \frac{1}{2 \cdot u_{p2}} \cdot \int_{D_2^d} \cos(u \cdot l) \cdot du \quad (4.4-24)$$

e o domínio dado por

$$D_2^d = [-u_{p2}, -u_{p1}] \cup [u_{p1}, u_{p2}] \quad (4.4-25)$$

e portanto

$$J_2[l] = \frac{1}{u_{p2}} \cdot \int_{u_{p1}}^{u_{p2}} \cos(u \cdot l) \cdot du = \frac{\text{sen}(u_{p2} \cdot l) - \text{sen}(u_{p1} \cdot l)}{u_{p2} \cdot l} - \frac{\text{sen}(u_{p2} \cdot l)}{u_{p2} \cdot l} - k_u \cdot \frac{\text{sen}(k_u \cdot u_{p2} \cdot l)}{k_u \cdot u_{p2} \cdot l} \quad (4.4-26)$$

com

$$k_u = \frac{u_{p1}}{u_{p2}} \quad (4.4-26a)$$

logo

$$J_2[l] = \text{sinc}(u_{p2} \cdot l) - k_u \cdot \text{sinc}(k_u \cdot u_{p2} \cdot l) \quad (4.4-27)$$

com

$$\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x} \quad (4.4-27a)$$

O gráfico de J_2 em função de $u_{p2} \cdot l$ (representado por a) com k_u como parâmetro é apresentado na figura 4-24 :

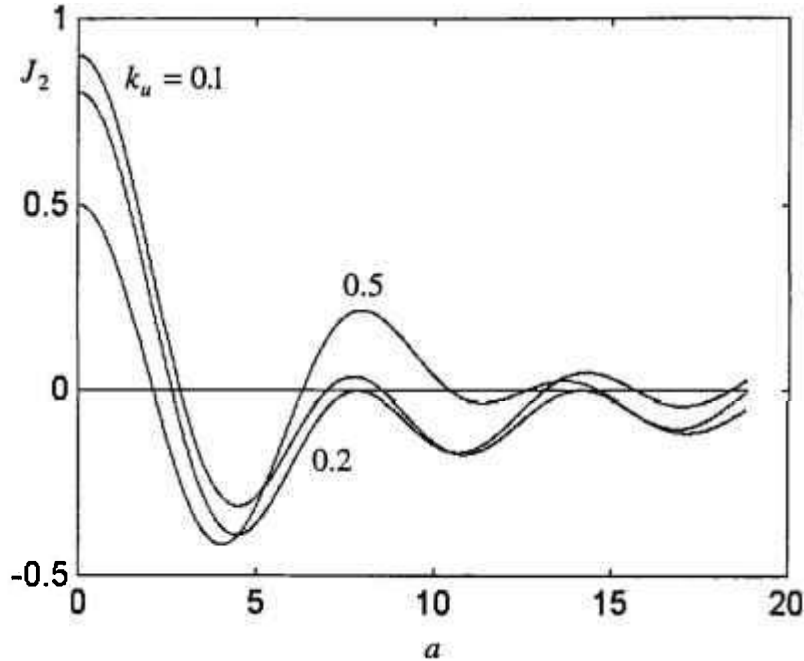


Figura 4-24 : J_2 em função de a

Claramente, o cumulante é máximo na origem e pode ser escrito como

$$C_{2,v_p,rad}[0] \cong \frac{1}{\pi} \cdot \lambda_{rad} \cdot E\{Q_{rad}^2\} \cdot (k_p^d \cdot T)^2 \cdot \frac{u_{p2}}{T} \cdot (1 - k_u) \quad (4.4-28)$$

o qual pode também ser calculado pela área sob o espectro $S_{2,v_p,rad}^d(u)$.

Note-se que para calcular o cumulante $C_{2,v_p,rad}(\tau)$, basta na equação (4.4-23) substituir $k_p^d \cdot T$ por k_p , u_{p2} / T por w_{p2} e $J_2[l]$ por $J_2(\tau)$, substituindo em (4.4-27) $u_{p2} \cdot l$ por $w_{p2} \cdot \tau$ (sendo $k_w = k_u = w_{p1} / w_{p2}$). Escrevendo por exemplo o cumulante na origem, resulta

$$C_{2,v_p,rad}(0) \cong \frac{1}{\pi} \cdot \lambda_{rad} \cdot E\{Q_{rad}^2\} \cdot k_p^2 \cdot w_{p2} \cdot (1 - k_w) \quad (4.4-29)$$

b) Terceiro cumulante

Utilizando (4.4-18 e 22) com $n = 3$, pode-se escrever

$$C_{3,v,p,rad}[l_1, l_2] \cong \frac{3}{4 \cdot \pi^2} \cdot \lambda_{rad} \cdot E\{Q_{rad}^3\} \cdot (k_p^d \cdot T)^3 \cdot \left(\frac{u_{p2}}{T}\right)^2 \cdot J_3[l_1, l_2] \quad (4.4-30)$$

com

$$J_3[l_1, l_2] = \frac{1}{3 \cdot u_{p2}^2} \cdot \int \int_{D_3^d} \cos(u_1 \cdot l_1 + u_2 \cdot l_2) \cdot du_1 \cdot du_2 \quad (4.4-31)$$

sendo o domínio D_3^d dado pela região onde

$$H_p^d(u_1) \cdot H_p^d(u_2) \cdot H_p^d(-u_1 - u_2) = (k_p^d)^3 \quad (4.4-32)$$

representado na figura 4-25.

O domínio D_3^d é constituído dos seis triângulos retângulos (Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 e seus simétricos) de catetos $(u_{p2} - 2 \cdot u_{p1})$ internos ao hexágono limitado pelos pontos $(u_{p2}, 0)$, $(0, u_{p2})$, $(-u_{p2}, u_{p2})$, $(-u_{p2}, 0)$, $(0, -u_{p2})$ e $(u_{p2}, -u_{p2})$.

Pode-se ver que

$$\text{se } u_{p2} < 2 \cdot u_{p1} \text{ então } D_3^d = \phi \quad (\text{vazio}) \quad (4.4-33)$$

A condição (4.4-33) mostra que para filtros "estreitos" ($u_{p2} \leq 2 \cdot u_{p1}$) o terceiro cumulante é igual a zero.

Para obter $C_{3,v,p,rad}[l_1, l_2]$ é necessário calcular J_3 .

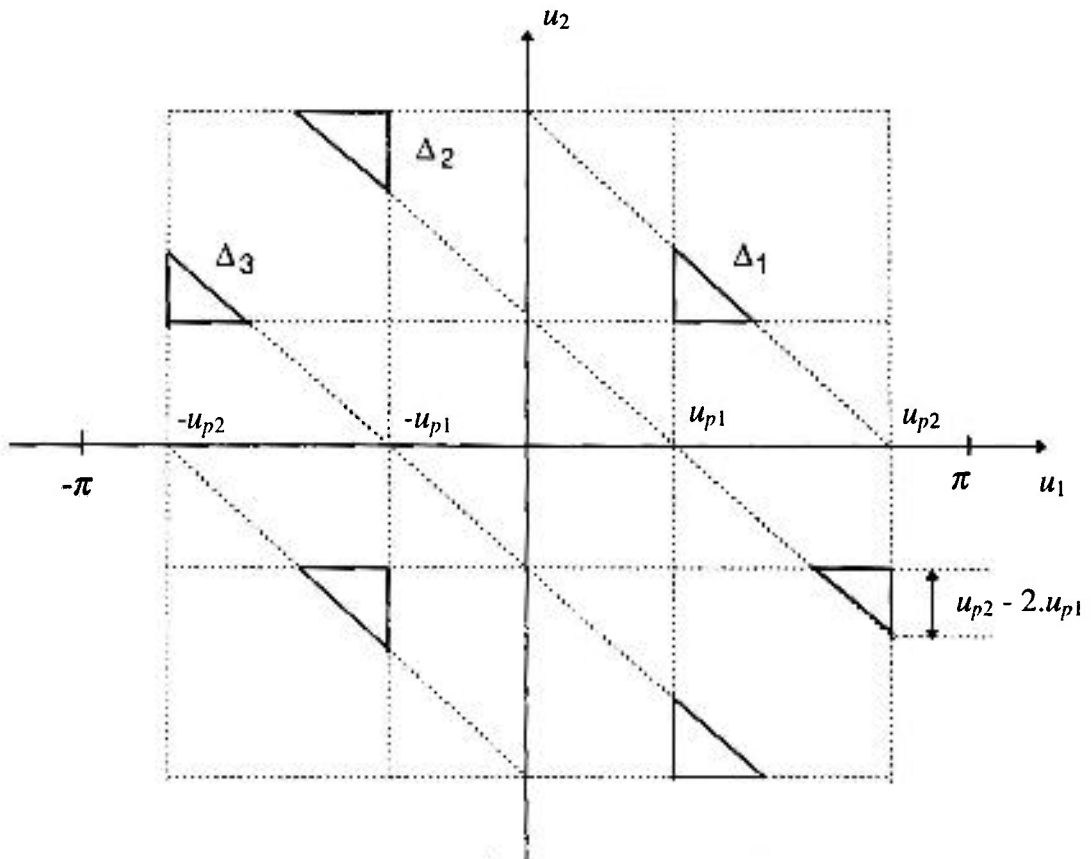


Figura 4-25 : Domínio D_3^d correspondente ao filtro passa-faixa

Cálculo de J_3

Considerando a simetria apenas entre os quadrantes alternados, resulta

$$J_3 = \frac{2}{3} \cdot (J_{3,\Delta_1} + J_{3,\Delta_2} + J_{3,\Delta_3}) \cdot U(u_{p2} - 2 \cdot u_{p1}) \quad (4.4-34)$$

onde $U(\cdot)$ é a função degrau.

O cálculo dos diversos termos da equação (4.4-34) encontra-se no apêndice A.4.3. Nesta secção apresentam-se apenas os resultados. Para simplificar a notação, sejam

$$a = u_{p2} \cdot l_1 \quad \text{e} \quad b = u_{p2} \cdot l_2 \quad (4.4-35)$$

Então,

$$J_{3,\Delta_1} = \frac{1}{a \cdot (b-a)} \cdot \cos((1-k_u) \cdot a + k_u \cdot b) - \frac{1}{b \cdot (b-a)} \cdot \cos(k_u \cdot a + (1-k_u) \cdot b) - \frac{1}{a \cdot b} \cdot \cos(k_u \cdot (a+b)) \quad (4.4-36)$$

$$J_{3,\Delta_2} = \frac{1}{a \cdot (b-a)} \cdot \cos((1-k_u) \cdot a - b) - \frac{1}{b \cdot (b-a)} \cdot \cos(k_u \cdot (a - 2 \cdot b)) - \frac{1}{a \cdot b} \cdot \cos(k_u \cdot a - b) \quad (4.4-37)$$

$$J_{3,\Delta_3} = \frac{1}{a \cdot (b-a)} \cdot \cos(k_u \cdot (2 \cdot a - b)) - \frac{1}{b \cdot (b-a)} \cdot \cos(a - (1-k_u) \cdot b) - \frac{1}{a \cdot b} \cdot \cos(a - k_u \cdot b) \quad (4.4-38)$$

A figura 4-26 apresenta o termo J_3 de (4.4-34) ($k_u = 0,2$) em função de a e b :

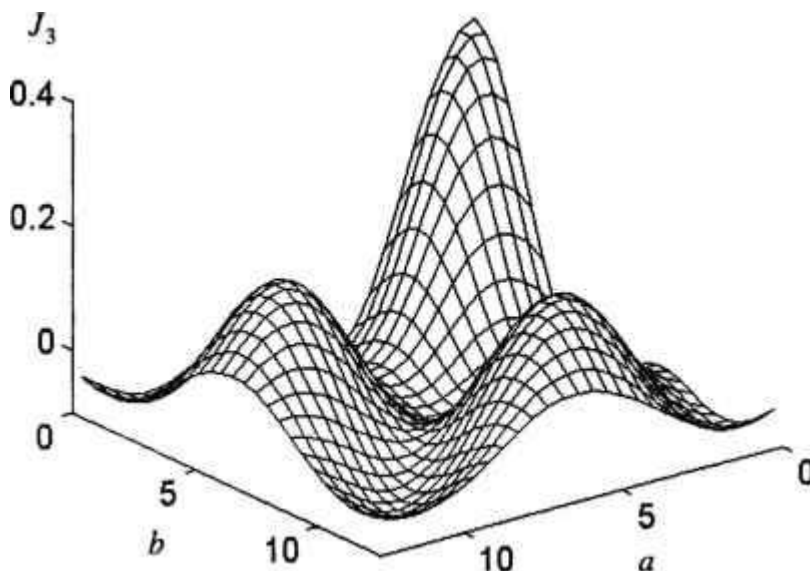


Figura 4-26 : J_3 em função de $(a = u_{p2} \cdot l_1)$ e $(b = u_{p2} \cdot l_2)$ para $k_u = 0,2$

O cálculo do terceiro cumulante na origem pode ser feito facilmente a partir da área do domínio D_3^d (ver figura 4-25). Tem-se então

$$J_3[0,0] = \frac{1}{u_{p2}^2} \cdot (u_{p2} - 2 \cdot u_{p1})^2 \cdot U(u_{p2} - 2 \cdot u_{p1}) \quad (4.4-39)$$

ou

$$J_3[0,0] = (1 - 2 \cdot k_u)^2 \cdot U(1 - 2 \cdot k_u) \quad (4.4-40)$$

E calculando o cumulante

$$C_{3,v_{p,rad}}[0,0] \cong \frac{3}{4 \cdot \pi^2} \cdot \lambda_{rad} \cdot E\{Q_{rad}^3\} \cdot (k_p^d \cdot T)^3 \cdot \left(\frac{u_{p2}}{T}\right)^2 \cdot (1 - 2 \cdot k_u)^2 \cdot U(1 - 2 \cdot k_u) \quad (4.4-41)$$

Para calcular $C_{3,v_{p,rad}}(\tau_1, \tau_2)$ procede-se de forma similar ao mostrado para o segundo cumulante, de modo que a expressão para $C_{3,v_{p,rad}}(0,0)$ pode ser escrita como

$$C_{3,v_{pdig,rad}}(0,0) \cong \frac{3}{4 \cdot \pi^2} \cdot \lambda_{rad} \cdot E\{Q_{rad}^3\} \cdot k_p^3 \cdot w_{p2}^2 \cdot (1 - 2 \cdot k_w)^2 \cdot U(1 - 2 \cdot k_w) \quad (4.4-42)$$

c) Quarto cumulante

Como a expressão geral analítica resultante para $C_{4,v_{p,rad}}[l_1, l_2, l_3]$ em função das frequências limites do filtro u_{p1} e u_{p2} é complexa e de difícil análise, e como o quarto cumulante é máximo na origem, apresenta-se apenas $C_{4,v_{p,rad}}[0,0,0]$. Também, o domínio D_4^d para um filtro passa-faixa possui representação gráfica complexa e de difícil visualização, de forma que adota-se um procedimento diferente daquele utilizado para o cálculo do segundo e terceiro cumulantes : propõe-se calcular $C_{4,v_{p,rad}}[0,l,l]$ por meio de transformadas e convoluções unidimensionais. Como esse cálculo é específico, nesta secção apresentam-se apenas os resultados , sendo o desenvolvimento transferido para o apêndice A.4.4. Obtém-se

$$C_{4,v_{p,rad}}[0,0,0] \cong \frac{1}{2 \cdot \pi^3} \cdot \lambda_{rad} \cdot E\{Q_{rad}^4\} \cdot (k_p^d \cdot T)^4 \cdot \left(\frac{u_{p2}}{T}\right)^3 \cdot \left[(1 - k_u)^3 + \frac{1}{3} \cdot (1 - 3 \cdot k_u)^2 \cdot U(1 - 3 \cdot k_u) \right] \quad (4.4-43)$$

Note-se que o segundo e quarto cumulantes, diferentemente do terceiro, possuem um termo função de $1 - k_u$ que impede que se tornem zero para filtros estreitos.

Claramente, obtém-se $C_{4,v_p,rad}(0,0,0)$ a partir de (4.4-43) seguindo o mesmo procedimento já descrito para os demais cumulantes

4.5 Estimadores da taxa média de eventos

Apresentam-se os estimadores da taxa média de eventos λ_{rad} realizados a partir de estimadores analógicos e digitais dos momentos do processo estocástico $v_p(t)$ ou $v_p[k]$ na entrada do bloco estimador, onde

$$\begin{aligned} v_p(t) &= v_{p,ana}(t) && \text{para a configuração 1} \\ v_p[k] &= v_{p,ana}[k] && \text{para a configuração 2} \\ v_p[k] &= v_{p,dig}[k] && \text{para a configuração 3} \end{aligned}$$

(4.5-1)

Considera-se o processo estacionário como sendo ergódico para os N primeiros momentos de interesse, isto é, os estimadores temporais dos momentos tendem em probabilidade aos momentos respectivos quando a duração do conjunto de amostras tende ao infinito [Papoulis, 1991].

Observe-se que na apresentação dos estimadores não é especificada a radiação de interesse, *rad*, pois $v_p(t)$ ou $v_p[k]$ podem ser os resultados da combinação de vários processos estocásticos nucleares (radiações) e não nucleares (ruído), conforme visto na secção 2.5.1 que trata da composição do processo estocástico de detecção nuclear.

4.5.1 Estimadores dos momentos

Abordam-se os estimadores não-tendenciosos (“unbiased”) básicos analógicos e digitais. Embora esses estimadores não sejam aqueles de menor variância, servem sobretudo como padrão de desempenho, pois além de serem facilmente utilizáveis, obtém-se a partir deles expressões analíticas de interesse para o estudo de sistemas.

Apresentam-se a seguir os estimadores analógicos e digitais.

a) Estimadores analógicos

Seja o intervalo de tempo $[\xi_{s1}, \xi_{s2}]$ do sinal coletado para análise. Tem-se para o primeiro momento $n=1$

$$\hat{M}_{1,v_p} = \hat{E}\{v_p(t)\} = \frac{1}{\xi_2 - \xi_1} \int_{\xi_1}^{\xi_2} v_p(\xi) \cdot d\xi \quad (4.5-2)$$

com

$$\xi_1 = \xi_{s1} \quad \text{e} \quad \xi_2 = \xi_{s2} \quad (4.5-2a)$$

demais momentos $n \geq 2$

$$\begin{aligned} & \hat{M}_{n,v_p}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \\ &= \hat{E}\{v_p(t) \cdot v_p(t + \tau_1) \dots v_p(t + \tau_{n-1})\} = \frac{1}{\xi_2 - \xi_1} \int_{\xi_1}^{\xi_2} v_p(\xi) \cdot v_p(\xi + \tau_1) \dots v_p(\xi + \tau_{n-1}) \cdot d\xi \end{aligned} \quad (4.5-3)$$

com

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \max(\xi_{s1}, \xi_{s1} - \tau_1, \dots, \xi_{s1} - \tau_{n-1}) \\ \xi_2 &= \min(\xi_{s2}, \xi_{s2} - \tau_1, \dots, \xi_{s2} - \tau_{n-1}) \end{aligned} \quad (4.5-3a)$$

Como

$$E\{\hat{M}_{1,v_p}\} = M_{1,v_p} \quad (4.5-4)$$

$$E\{\hat{M}_{n,v_p}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})\} = M_{n,v_p}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \quad (4.5-5)$$

conclui-se que os estimadores (4.5-2 e 3) são não-tendenciosos.

b) Estimadores digitais

Seja o intervalo dos índices $[m_{s1}, m_{s2}]$ do conjunto de dados coletados para análise. Tem-se para o primeiro momento $n=1$

$$\hat{M}_{1,v_p} = \hat{E}\{v_p[k]\} = \frac{1}{m_2 - m_1 + 1} \sum_{m=m_1}^{m_2} v_p[m] \quad (4.5-6)$$

com

$$m_1 = m_{s1} \quad \text{e} \quad m_2 = m_{s2} \quad (4.5-6a)$$

demais momentos $n \geq 2$

$$\begin{aligned} & \hat{M}_{n,v_p}[l_1, \dots, l_{n-1}] \\ &= \hat{E}\{v_p[k] \cdot v_p[k+l_1] \dots v_p[k+l_{n-1}]\} = \frac{1}{m_2 - m_1 + 1} \cdot \sum_{m=m_1}^{m_2} v_p[m] \cdot v_p[m+l_1] \dots v_p[m+l_{n-1}] \end{aligned} \quad (4.5-7)$$

com

$$\begin{aligned} m_1 &= \max(m_{s1}, m_{s1} - l_1, \dots, m_{s1} - l_{n-1}) \\ m_2 &= \min(m_{s2}, m_{s2} - l_1, \dots, m_{s2} - l_{n-1}) \end{aligned} \quad (4.5-7a)$$

Analogamente aos estimadores analógicos, conclui-se que os estimadores digitais (4.5-6 e 7) são não-tendenciosos.

4.5.2 Estimadores dos cumulantes

Apresentam-se os estimadores dos cumulantes no domínio tempo-discreto. Os estimadores no domínio tempo-contínuo são análogos.

Embora teoricamente seja possível utilizar qualquer número de cumulantes, utilizam-se nas aplicações práticas no máximo os quatro primeiros. Isto porque além de permitirem obter bons resultados na identificação das respostas do sistema [Mendel, 1991], a utilização de cumulantes de ordem superior a quatro resulta em tempos de resposta elevados para se obter uma determinada precisão (ver secção 4.6.2). Considerem-se então os quatro primeiros cumulantes, sendo os de ordem $n \geq 2$ calculados do sinal $v_p[k]$ (ou $v_p(t)$) com média zero. Rescrevendo as equações dos cumulantes em função dos momentos (ver apêndice A.2.1), obtêm-se

$$C_{1,v_p} = M_{1,v_p} \quad (4.5-8)$$

$$C_{2,v_p}[l] = M_{2,v_p}[l] \quad (4.5-9)$$

$$C_{3,v_p}[l_1, l_2] = M_{3,v_p}[l_1, l_2] \quad (4.5-10)$$

$$\begin{aligned} & C_{4,v_p}[l_1, l_2, l_3] \\ &= M_{4,v_p}[l_1, l_2, l_3] - M_{2,v_p}[l_1] \cdot M_{2,v_p}[l_3 - l_2] - M_{2,v_p}[l_2] \cdot M_{2,v_p}[l_3 - l_1] - M_{2,v_p}[l_3] \cdot M_{2,v_p}[l_2 - l_1] \end{aligned} \quad (4.5-11)$$

Os estimadores não-tendenciosos dos três primeiros cumulantes são

$$\hat{C}_{1,v_p} = \hat{M}_{1,v_p} \quad (4.5-12)$$

$$\hat{C}_{2,v_p}[l] = \hat{M}_{2,v_p}[l] \quad (4.5-13)$$

$$\hat{C}_{3,v_p}[l_1, l_2] = \hat{M}_{3,v_p}[l_1, l_2] \quad (4.5-14)$$

Como o quarto cumulante é uma função não-linear dos momentos, o cálculo de seu estimador não-tendencioso é mais complicado. Uma solução, que atende tanto ao estimador analógico quanto ao digital, é escolher dois (ou mais) grupos de amostras não-correlacionados, de modo que qualquer elemento de um grupo é não-correlacionado com qualquer elemento do(s) outro(s), mas podendo ser correlacionado com outro elemento do mesmo grupo. No processo ergódico as amostras podem ser obtidas em dois ou mais intervalos de tempo consecutivos e devidamente separados para minimizar a correlação, mas mantendo o processo estacionário em todos os intervalos.

Para ilustrar, sejam G_1 e G_2 os grupos. Resulta o estimador não-tendencioso

$$\begin{aligned} \hat{C}_{4,v_p}[l_1, l_2, l_3] = & \left(\hat{M}_{4,v_p}[l_1, l_2, l_3] \right)_{G_1 \text{ ou } G_2} - \left(\hat{M}_{2,v_p}[l_1] \right)_{G_1} \cdot \left(\hat{M}_{2,v_p}[l_3 - l_2] \right)_{G_2} \\ & - \left(\hat{M}_{2,v_p}[l_2] \right)_{G_1} \cdot \left(\hat{M}_{2,v_p}[l_3 - l_1] \right)_{G_2} - \left(\hat{M}_{2,v_p}[l_3] \right)_{G_1} \cdot \left(\hat{M}_{2,v_p}[l_2 - l_1] \right)_{G_2} \end{aligned} \quad (4.5-15)$$

onde os subscritos G_1 e G_2 representam o momento calculado com as amostras desses grupos.

4.5.3 Estimadores λ_{radi}

A secção 2.5.3 resume as equações dos cumulantes e espectros para um sistema de medição de fluxo de radiação submetido a N tipos de radiação e aos ruídos intrínseco (gaussiano) e extrínseco. As equações dos cumulantes para o processo estocástico $v_p[k]$ (ou $v_p(t)$) podem ser obtidas aplicando (2.5-13) e considerando as diversas expressões para os cumulantes das três configurações desenvolvidas nas secções 4.2.1 e 4.4.1 :

$$C_{n,v_p}[l_1, \dots, l_{n-1}] = \sum_{i=1}^N \lambda_{radi} \cdot g_{n,radi}[l_1, \dots, l_{n-1}] + C_{n,v_{p,rin}}[l_1, \dots, l_{n-1}] + C_{n,v_{p,rex}}[l_1, \dots, l_{n-1}] \quad (4.5-16)$$

onde

λ_{radi} é a taxa média de eventos correspondente à radiação *radi*.

$v_{p,rin}[k]$ e $v_{p,rex}[k]$ são as seqüências correspondentes ao ruído intrínseco e extrínseco, respectivamente.

$g_{n,radi}[l_1, \dots, l_{n-1}]$ são os cumulantes para uma taxa média de eventos unitária (dependem apenas das respostas impulsivas correspondentes à radiação *radi*).

No caso geral, $g_{n, radi}[l_1, \dots, l_{n-1}]$ é dado pelas equações desenvolvidas na secção 4.2.1. Como exemplo de (4.2-45), pode-se escrever

$$g_{n, radi}[l_1, \dots, l_{n-1}] = T \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} E\{h_{radi}[m, P_{radi}] \cdot h_{radi}[m+l_1, P_{radi}] \dots h_{radi}[m+l_{n-1}, P_{radi}]\} \quad (4.5-17)$$

Mas o estudo na secção 4.4 mostra que é possível escolher filtros nas regiões planas dos espectros, tal que para uma radiação *radi*

$$g_{n, radi}[l_1, \dots, l_{n-1}] \cong E\{Q_{radi}^n\} \cdot g_{n, p}[l_1, \dots, l_{n-1}] \quad (4.5-18)$$

com $g_{n, p}[l_1, \dots, l_{n-1}]$ dependendo apenas do processador (eletrônica) e $E\{Q_{radi}^n\}$, apenas do detector.

Considerando por exemplo a equação (4.4-11), resulta que

$$g_{n, p}[l_1, \dots, l_{n-1}] = T \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_p[m] \cdot h_p[m+l_1] \dots h_p[m+l_{n-1}] \quad (4.5-19)$$

Deve-se observar que (4.5-18) é válida para as radiações ($1 \leq i \leq N$) somente se as regiões planas dos espectros dessas radiações coincidirem num trecho de modo que seja possível nele posicionar o filtro. Independente de utilizar ou não (4.5-18), é possível propor o seguinte esquema para a obtenção da taxa média de eventos :

Considerando conhecidos os parâmetros $g_{n, radi}[l_1, \dots, l_{n-1}]$, minimizado o ruído extrínseco ($C_{n, v, p, rex}[l_1, \dots, l_{n-1}] \cong 0$), sendo portanto apenas $C_{2, v, p, rin}[l]$ diferente de zero, pode-se propor estimar as taxas de eventos $\lambda_{rad1}, \dots, \lambda_{radN}$ e o ruído intrínseco $C_{2, v, p, rin}[l]$ a partir das estimativas de $N+1$ cumulantes. No caso de se escolher os $N+1$ primeiros cumulantes, resulta

$$\begin{bmatrix} \hat{\lambda}_{rad1} \\ \hat{\lambda}_{rad2} \\ \dots \\ \hat{\lambda}_{radN} \\ \hat{C}_{2, v, p, rin} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{1, rad1} & g_{1, rad2} & \dots & g_{1, radN} & 0 \\ g_{2, rad1} & g_{2, rad2} & \dots & g_{2, radN} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{N, rad1} & g_{N, rad2} & \dots & g_{N, radN} & 0 \\ g_{N+1, rad1} & g_{N+1, rad2} & \dots & g_{N+1, radN} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{C}_{1, v, p} \\ \hat{C}_{2, v, p} \\ \dots \\ \hat{C}_{N, v, p} \\ \hat{C}_{N+1, v, p} \end{bmatrix} \quad (4.5-20)$$

Embora a equação (4.5-20) mostre a viabilidade da obtenção das taxas de eventos das diversas radiações, é preciso observar alguns pontos na sua aplicação nos casos reais :

- Quanto maior a ordem do cumulante, maior é o tempo de resposta para obter dada precisão (ver secção 4.6).
- Quanto maior a precisão desejada para obter λ_{radi} , maior é o tempo de resposta para obter tal precisão (ver secção 4.6).

- c) Pode existir diferença de várias ordens de grandeza entre os termos $\lambda_{radi} \cdot g_{n,radi}$ e $\lambda_{radj} \cdot g_{n,radj}$, não só pela diferença entre $g_{n,radi}$ e $g_{n,radj}$ como entre λ_{radi} e λ_{radj} . Nesse caso, o erro da estimativa do cumulante deve ser muito menor que o menor desses termos, o que pode resultar em *tempos de resposta proibitivos*.
- d) A dificuldade de obter estimativas precisas de $g_{n,radi}$ para determinadas radiações (ex.: gama).
- e) Em certas aplicações interessa determinar com precisão e tempo de resposta adequados apenas a taxa média de eventos λ_{rad} da radiação de interesse (ex.: nêutron). A determinação das demais variáveis pode ser realizada apenas se não comprometer esse objetivo.

Observe-se que os pontos (c) e (e) são típicos da aplicação de sistemas de medição de fluxo de nêutrons para controle e proteção de reatores nucleares. Nesses casos pode ser mais interessante no lugar de solucionar a equação (4.5-20), simplesmente escolher a ordem adequada do cumulante utilizado para a obtenção da taxa média de eventos λ_{rad} ($rad = \text{nêutron}$) numa determinada região de fluxo de nêutrons. Como exemplo, pode-se calcular $\hat{\lambda}_{rad}$ como

$$\hat{\lambda}_{rad} \equiv \frac{\hat{C}_{n,v_p}[l_1, \dots, l_{n-1}]}{g_{n,rad}[l_1, \dots, l_{n-1}]} \quad (4.5-21)$$

onde o valor n é escolhido conforme a faixa de λ_{rad} .

Da mesma forma que no sistema Campbell convencional, temos como resultado, que, estimado o cumulante $C_{n,v_p}[l_1, \dots, l_{n-1}]$ e conhecido $g_{n,rad}[l_1, \dots, l_{n-1}]$, obtém-se $\hat{\lambda}_{rad}$.

4.6 Precisão e tempo de resposta

A precisão e o tempo de resposta relacionados à obtenção de λ_{rad} podem ser avaliados calculando-se as variâncias dos estimadores dos cumulantes.

É importante lembrar que a avaliação desses parâmetros é fundamental para a aplicação em sistemas de medição de fluxo de nêutrons para controle e proteção de reatores nucleares. Para isso procura-se desenvolver expressões analíticas para as variâncias desses estimadores, de modo a facilitar o estudo do seu comportamento.

4.6.1 Varianças dos estimadores dos cumulantes

São calculadas a partir das varianças dos estimadores dos momentos. Para o cumulante de quarta ordem esse procedimento é válido somente se os fatores de cada termo-produto forem calculados em grupos de amostras não-correlacionados.

Desenvolvem-se expressões analíticas apenas para os três primeiros cumulantes para a radiação de interesse rad , calculados na origem para os filtros ideais de referência da secção 4.4.2. Também, de modo análogo ao realizado para os filtros ideais, o desenvolvimento é efetuado no domínio discreto, sendo que os resultados para o caso contínuo são comentados no final de cada desenvolvimento.

4.6.1.1 Varianças dos estimadores dos momentos

O desenvolvimento desta secção (4.6.1.1) é acrescentado neste trabalho apenas com o objetivo didático, pois é análogo ao encontrado para o caso contínuo em Papoulis [1991].

Considerem-se os estimadores discretos (4.5-6) e (4.5-7) e, para facilitar os cálculos, a redefinição da variável m , de modo que

$$\hat{M}_{1,v_p} = \frac{1}{2 \cdot M + 1} \cdot \sum_{m=-M}^M v_p[m] \quad (4.6-1)$$

e

$$\hat{M}_{n,v_p}[l_1, \dots, l_{n-1}] = \frac{1}{2 \cdot M + 1} \cdot \sum_{m=-M}^M v_p[m] \cdot v_p[m+l_1] \dots v_p[m+l_{n-1}] \quad (4.6-2)$$

com $2 \cdot M + 1 = m_2 - m_1 + 1$ (ímpar)

Seja a média móvel $y[k]$ da sequência $x[k]$, isto é,

$$y[k] = \frac{1}{2 \cdot M + 1} \cdot \sum_{m=-M}^M x[k-m] \quad (4.6-3)$$

Observe que, para

$$x[k] = v_p[k] \quad \text{resulta} \quad y[0] = \hat{M}_{1,v_p} \quad (4.6-4)$$

e para

$$x[k] = v_p[k] \cdot v_p[k+l_1] \dots v_p[k+l_{n-1}] \quad \text{resulta} \quad y[0] = \hat{M}_{n,v_p}[l_1, \dots, l_{n-1}] \quad (4.6-5)$$

Mas $y[k]$ pode ser escrito como

$$y[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[k-m] \cdot b[m] = x[k] * b[k] \quad (4.6-6)$$

com

$$b[k] = \frac{1}{2 \cdot M + 1} \cdot (U[k + M] - U[k - M - 1]) \quad (4.6-7)$$

onde $U[\cdot]$ é a função degrau.

Então a média móvel $y[k]$ pode ser considerada a saída de um sistema linear $b[k]$, cuja entrada é $x[k]$. Para esse sistema linear têm-se as seguintes relações :

$$C_{2,y}[l] = C_{2,x}[l] * \rho[l] \quad (4.6-8)$$

e

$$S_{2,y}^d(u) = S_{2,x}^d(u) \cdot B^d(u) \cdot B^d(-u) \quad (4.6-9)$$

onde

$$\rho[l] = b[l] * b[-l] \quad \text{e} \quad b[l] \leftrightarrow B^d(u) \quad (4.6-10)$$

Interessa calcular a variância de \hat{M}_{1,v_p} e $\hat{M}_{n,v_p}[l_1, \dots, l_{n-1}]$ e portanto a variância de $y[0]$ de (4.6-4 e 5). Obtém-se

$$\text{var}(y[0]) = C_{2,y}[0] \quad (4.6-11)$$

e de (4.6-8)

$$\text{var}(y[0]) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{2,x}[m] \cdot \rho[-m] \quad (4.6-12)$$

Mas de (4.6-7 e 10)

$$\rho[m] = \frac{1}{2 \cdot M + 1} \cdot \left(1 - \frac{|m|}{2 \cdot M + 1} \right) \quad \text{para } |m| \leq 2 \cdot M + 1$$

$$\rho[m] = 0 \quad \text{caso contrário} \quad (4.6-13)$$

Substituindo em (4.6-12)

$$\boxed{\text{var}(y[0]) = \frac{1}{2 \cdot M + 1} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{2,x}[m] \cdot \left(1 - \frac{|m|}{2 \cdot M + 1} \right)} \quad (4.6-14)$$

com $x[k]$ dado por (4.6-4 e 5)

O cálculo da variância no domínio da frequência pode ser realizado por meio de (4.6-9) com

$$B^d(u) \cdot B^d(-u) = \frac{\text{sen}^2\left(\frac{2 \cdot M + 1}{2} \cdot u\right)}{(2 \cdot M + 1)^2 \cdot \text{sen}^2\left(\frac{u}{2}\right)} \quad (4.6-15)$$

ou seja,

$$\boxed{\text{var}(y[0]) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot (2 \cdot M + 1)^2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} S_{2,x}^d(u) \cdot \frac{\text{sen}^2\left(\frac{2 \cdot M + 1}{2} \cdot u\right)}{\text{sen}^2\left(\frac{u}{2}\right)} \cdot du} \quad (4.6-16)$$

O cálculo exato da variância é realizado utilizando-se (4.6-14 ou 16). No entanto, analisando o comportamento de $S_{2,x}^d(u)$, pode-se obter certas simplificações para essas equações. Para isso, considerando que o termo (4.6-15) possui valores significativos somente no primeiro lóbulo de largura $\frac{4 \cdot \pi}{2 \cdot M + 1}$ em torno da origem, pode-se considerar três casos :

a) $S_{2,x}^d(u)$ possui uma região aproximadamente plana de largura no mínimo igual a do lóbulo, isto é,

$$S_{2,x}^d(u) \cong S_{2,x}^d(0) \quad \text{para} \quad |u| \leq \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot M + 1} \quad (4.6-17)$$

Nesse caso

$$\boxed{\text{var}(y[0]) \cong \frac{1}{2 \cdot M + 1} \cdot S_{2,x}^d(0)} \quad (4.6-18)$$

para

$$u_{rp} \geq \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot M + 1} \quad (4.6-18a)$$

onde u_{rp} é a frequência limite da região plana de $S_{2,x}^d(u)$.

b) $S_{2,x}^d(u)$ é do tipo impulsiva dentro do lóbulo. Nesse caso $S_{2,x}^d(u)$ amostra o lóbulo nas diversas frequências dos impulsos.

c) $S_{2,x}^d(u)$ possui uma forma qualquer dentro do lóbulo. Nesse caso utilizam-se diretamente (4.6-14 e 16).

Na sequência aplica-se o método ao cálculo das variâncias dos estimadores dos três primeiros cumulantes (ou momentos).

4.6.1.2 Filtros ideais : varianças dos estimadores dos três primeiros cumulantes

Calculam-se as varianças dos estimadores dos três primeiros cumulantes do sinal de interesse $v_{p,rad}$ para filtros ideais (secção 4.4.2) com contribuições nas regiões planas dos espectros.

Como os estimadores dos três primeiros cumulantes são idênticos aos estimadores dos três primeiros momentos conforme (4.5-8 a 10), utilizam-se os resultados da secção anterior. Realiza-se o cálculo no domínio da frequência empregando o espectro $S_{2,x}^d(u)$ calculado por meio de convoluções envolvendo $H_p^d(u)$.

Note-se no desenvolvimento a seguir que se utilizam cumulantes de ordem $2 \cdot n$, e portanto as condições do modelo equivalente que produzem $h_p[k] \leftrightarrow H_p^d(u)$ devem ser obedecidas para tal ordem.

a) Primeiro cumulante

Fazendo $x[k] = v_{p,rad}[k]$ calcula-se o espectro $S_{2,x}^d(u) = S_{2,v_{p,rad}}^d(u)$. Utiliza-se um filtro que gera contribuições na região plana $P1$ dos espectros. De 4.4-9, resulta

$$S_{2,x}^d(u) = S_{2,v_{p,rad}}^d(u) \equiv \lambda_{rad} \cdot E\{q_{h_d,rad}^2\} \cdot T \cdot H_p(u) \cdot H_p(-u) \quad (4.6-19)$$

ou aplicando a transformada inversa de Fourier

$$C_{2,x}[\delta] = C_{2,v_{p,rad}}[\delta] \equiv \lambda_{rad} \cdot E\{q_{h_d,rad}^2\} \cdot T \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_p[k] \cdot h_p[k + \delta] \quad (4.6-20)$$

Para calcular a variança $var(\hat{M}_{1,v_{p,rad}}) = var(y[0])$, no caso geral substitui-se (4.6-20 em 14) ou (4.6-19 em 16) utilizando o filtro $h_p[k] \leftrightarrow H_p^d(u)$ escolhido. No caso de utilizar o filtro passa-baixas ideal de frequência limite u_{p2} e ganho k_p^d , obtém-se

$$S_{2,x}^d(u) = S_{2,v_{p,rad}}^d(u) \equiv \lambda_{rad} \cdot E\{q_{h_d,rad}^2\} \cdot T \cdot (k_p^d)^2 \quad (4.6-21)$$

para $|u| \leq u_{p2}$

Substituindo em (4.6-16) e expressando na forma de cumulantes

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{C}_{1,v,p,rad}) &= \text{var}(\hat{M}_{1,v,p,rad}) \\ &\equiv \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot (2 \cdot M + 1)^2} \cdot \lambda_{rad} \cdot E\{q_{hd,rad}^2\} \cdot T \cdot (k_p^d)^2 \cdot \int_{-u_{p2}}^{u_{p2}} \frac{\text{sen}^2\left(\frac{2 \cdot M + 1}{2} \cdot u\right)}{\text{sen}^2\left(\frac{u}{2}\right)} \cdot du \end{aligned} \quad (4.6-22)$$

Verifica-se que, $\text{var}(\hat{C}_{1,v,p,rad})$ pode ser reduzida pelo aumento do tamanho do conjunto de amostras $(2 \cdot M + 1)$ ou pela redução da largura do filtro u_{p2} . No caso de optar-se pelo aumento do tamanho do conjunto de amostras, no limite (4.6-22) transforma-se na (4.6-18), podendo-se escrever para a variância

$$\text{var}(\hat{C}_{1,v,p,rad}) \equiv \frac{1}{(2 \cdot M + 1) \cdot T} \cdot \lambda_{rad} \cdot E\{q_{hd,rad}^2\} \cdot (k_p^d \cdot T)^2 \quad (4.6-23)$$

e para a variância normalizada em relação a $C_{1,v,p,rad}^2$ de (4.4-16)

$$\frac{\text{var}(\hat{C}_{1,v,p,rad})}{C_{1,v,p,rad}^2} \equiv \frac{1}{(2 \cdot M + 1) \cdot T} \cdot \frac{1}{\lambda_{rad}} \cdot \frac{E\{q_{hd,rad}^2\}}{E^2\{q_{hd,rad}\}} \quad (4.6-24)$$

para

$$u_{p2} \geq \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot M + 1} \quad (4.6-24a)$$

No caso de optar-se pela redução da largura do filtro, de (4.6-22), resulta

$$\text{var}(\hat{C}_{1,v,p,rad}) \equiv \frac{1}{\pi} \cdot \lambda_{rad} \cdot E\{q_{hd,rad}^2\} \cdot (k_p^d \cdot T)^2 \cdot \frac{u_{p2}}{T} \quad (4.6-25)$$

e de (4.4-16)

$$\frac{\text{var}(\hat{C}_{1,v,p,rad})}{C_{1,v,p,rad}^2} \equiv \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\lambda_{rad}} \cdot \frac{E\{q_{hd,rad}^2\}}{E^2\{q_{hd,rad}\}} \cdot \frac{u_{p2}}{T} \quad (4.6-26)$$

para

$$u_{p2} \ll \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot M + 1} \quad (4.6-26a)$$

As expressões para o caso analógico são similares, sendo necessário apenas substituir $(2 \cdot M + 1) \cdot T$ por $(\xi_2 - \xi_1)$ e u_{p2} / T por w_{p2} .

b) Segundo cumulante

Fazendo $x[k] = v_{p,rad}[k] \cdot v_{p,rad}[k+l]$, calcula-se $S_{2,x}^d(0)$ a partir do cumulante

$$C_{2,x}[\delta] = E\{x[k] \cdot x[k+\delta]\} - E^2\{x[k]\} \quad (4.6-27)$$

onde

$$E\{x[k] \cdot x[k+\delta]\} = E\{v_{p,rad}[k] \cdot v_{p,rad}[k+l] \cdot v_{p,rad}[k+\delta] \cdot v_{p,rad}[k+l+\delta]\} \quad (4.6-28)$$

e

$$E^2\{x[k]\} = E^2\{v_{p,rad}[k] \cdot v_{p,rad}[k+l]\} \quad (4.6-29)$$

Calculando os termos (4.6-28 e 29) por meio das relações entre cumulantes e momentos do apêndice A.2.1, vem

$$\begin{aligned} E\{x[k] \cdot x[k+\delta]\} \\ = C_{4,v_{p,rad}}[l, \delta, l+\delta] + C_{2,v_{p,rad}}^2[l] + C_{2,v_{p,rad}}^2[\delta] + C_{2,v_{p,rad}}[l+\delta] \cdot C_{2,v_{p,rad}}[l-\delta] \end{aligned} \quad (4.6-30)$$

e

$$E^2\{x[k]\} = C_{2,v_{p,rad}}^2[l] \quad (4.6-31)$$

logo de (4.6-27), pode-se escrever

$$C_{2,x}[\delta] = C_{4,v_{p,rad}}[l, \delta, l+\delta] + C_{2,v_{p,rad}}^2[\delta] + C_{2,v_{p,rad}}[l+\delta] \cdot C_{2,v_{p,rad}}[l-\delta] \quad (4.6-32)$$

com os termos

$$C_{4,v_{p,rad}}[l, \delta, l+\delta] \equiv \lambda_{rad} \cdot E\{Q_{rad}^4\} \cdot T \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_p[m] \cdot h_p[m+l] \cdot h_p[m+\delta] \cdot h_p[m+l+\delta] \quad (4.6-33)$$

e

$$C_{2,v_{p,rad}}[\varepsilon] \equiv \lambda_{rad} \cdot E\{Q_{rad}^2\} \cdot T \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_p[m] \cdot h_p[m+\varepsilon] \quad (4.6-34)$$

com

$$\varepsilon = \delta \quad \varepsilon = l + \delta \quad \text{ou} \quad \varepsilon = l - \delta$$

Para o cálculo no domínio da frequência, seja o operador $F_{\delta}^d\{\cdot\}$ que representa a transformada de Fourier discreta em δ . Aplicando em (4.6-32), vem

$$S_{2,x}^d(u) = F_{\delta}^d\{C_{4,v_{p,rad}}[l, \delta, l+\delta]\} + F_{\delta}^d\{C_{2,v_{p,rad}}^2[\delta]\} + F_{\delta}^d\{C_{2,v_{p,rad}}[l+\delta] \cdot C_{2,v_{p,rad}}[l-\delta]\} \quad (4.6-35)$$

O objetivo é calcular $S_{2,x}^d(0)$, sendo que para demonstrar o método calcula-se a variância para o caso de interesse quando ($l = 0$), ou seja, na origem. Tem-se

$$S_{2,x}^d(u) = F_{\delta}^d \left\{ C_{4,v,p,rad} [0, \delta, \delta] \right\} + 2 \cdot F_{\delta}^d \left\{ C_{2,v,p,rad}^2 [\delta] \right\} \quad (4.6-36)$$

Calculando o termo $F_{\delta}^d \left\{ C_{4,v,p,rad} [0, \delta, \delta] \right\}$, pode-se escrever

$$C_{4,v,p,rad} [0, \delta, \delta] \equiv \lambda_{rad} \cdot E \left\{ Q_{rad}^4 \right\} \cdot T \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_p^2[m] \cdot h_p^2[m + \delta] \quad (4.6-37)$$

logo

$$F_{\delta}^d \left\{ C_{4,v,p,rad} [0, \delta, \delta] \right\} \equiv \lambda_{rad} \cdot E \left\{ Q_{rad}^4 \right\} \cdot T \cdot H_{p2}^d(u) \cdot H_{p2}^d(-u) \quad (4.6-38)$$

onde

$$h_{p2}[k] = h_p^2[k] \quad \text{e} \quad H_{p2}^d(u) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot H_p^d(u) * H_p^d(u) \quad (4.6-39)$$

Para $F_{\delta}^d \left\{ C_{2,v,p,rad}^2 [\delta] \right\}$, obtém-se

$$F_{\delta}^d \left\{ C_{2,v,p,rad}^2 [\delta] \right\} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot S_{2,v,p,rad}^d(u) * S_{2,v,p,rad}^d(u) \quad (4.6-40)$$

com

$$S_{2,v,p,rad}^d(u) \equiv \lambda_{rad} \cdot E \left\{ Q_{rad}^2 \right\} \cdot T \cdot H_p^d(u) \cdot H_p^d(-u) \quad (4.6-41)$$

Substituindo os termos (4.6-38 a 41) em (4.6-36), resulta

$$\begin{aligned} S_{2,x}^d(u) &\equiv \lambda_{rad} \cdot E \left\{ Q_{rad}^4 \right\} \cdot T \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot H_p^d(u) * H_p^d(u) \right) \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot H_p^d(-u) * H_p^d(-u) \right) \\ &+ 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\lambda_{rad} \cdot E \left\{ Q_{rad}^2 \right\} \cdot T \cdot H_p^d(u) \cdot H_p^d(-u) \right) * \left(\lambda_{rad} \cdot E \left\{ Q_{rad}^2 \right\} \cdot T \cdot H_p^d(u) \cdot H_p^d(-u) \right) \end{aligned} \quad (4.6-42)$$

Calculando agora $S_{2,x}^d(0)$ para o filtro passa-faixa ideal, tem-se para

$$H_p^d(u) * H_p^d(u) \Big|_{u=0} = 2 \cdot (k_p^d)^2 \cdot (u_{p2} - u_{p1}) \quad (4.6-43)$$

e

$$\left(H_p^d(u) \cdot H_p^d(-u) * H_p^d(u) \cdot H_p^d(-u) \right) \Big|_{u=0} = 2 \cdot (k_p^d)^4 \cdot (u_{p2} - u_{p1}) \quad (4.6-44)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} S_{2,x}^d(0) &\equiv \frac{1}{\pi^2} \cdot \lambda_{rad} \cdot E \left\{ Q_{rad}^4 \right\} \cdot T \cdot (k_p^d)^4 \cdot (u_{p2} - u_{p1})^2 \\ &+ \frac{2}{\pi} \cdot \lambda_{rad}^2 \cdot E^2 \left\{ Q_{rad}^2 \right\} \cdot T^2 \cdot (k_p^d)^4 \cdot (u_{p2} - u_{p1}) \end{aligned} \quad (4.6-45)$$

A variância é obtida por meio de (4.6-18) como

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{C}_{2,v,p,\text{rad}}[0]) &= \text{var}(\hat{M}_{2,v,p,\text{rad}}[0]) \\ &\cong \frac{1}{\pi^2} \cdot \lambda_{\text{rad}}^2 \cdot E^2\{Q_{\text{rad}}^2\} \cdot (k_p^d \cdot T)^4 \cdot \left(\frac{u_{p2}}{T} - \frac{u_{p1}}{T}\right)^2 \cdot \frac{1}{(2 \cdot M + 1) \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{\lambda_{\text{rad}}} \cdot \frac{E\{Q_{\text{rad}}^4\}}{E^2\{Q_{\text{rad}}^2\}} + \frac{2 \cdot \pi}{\frac{u_{p2}}{T} - \frac{u_{p1}}{T}} \right) \end{aligned}$$

e a variância normalizada em relação a $C_{2,v,p,\text{rad}}^2[0]$ de (4.4-28), pode ser escrita como

$$\frac{\text{var}(\hat{C}_{2,v,p,\text{rad}}[0])}{C_{2,v,p,\text{rad}}^2[0]} \cong \frac{1}{(2 \cdot M + 1) \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{\lambda_{\text{rad}}} \cdot \frac{E\{Q_{\text{rad}}^4\}}{E^2\{Q_{\text{rad}}^2\}} + \frac{2 \cdot \pi}{\frac{u_{p2}}{T} - \frac{u_{p1}}{T}} \right) \quad (4.6-46)$$

para

$$u_{p2} - u_{p1} \gg \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot M + 1} \quad (4.6-46a)$$

Do mesmo modo que para o primeiro cumulante, as expressões para o caso analógico são similares, sendo necessário apenas substituir $(2 \cdot M + 1) \cdot T$ por $(\xi_2 - \xi_1)$ e u_{p2}/T por w_{p2} .

c) Terceiro cumulante

O cálculo da variância do estimador do terceiro cumulante é mais trabalhoso. Como seu procedimento de cálculo segue a mesma sequência utilizada no caso do segundo cumulante, transfere-se esse desenvolvimento para o anexo A.4.5. Nesta secção mostra-se apenas o resultado da variância normalizada :

$$\begin{aligned} \frac{\text{var}(\hat{C}_{3,v,p,\text{rad}}[0,0])}{C_{3,v,p,\text{rad}}^2[0,0]} &\cong \frac{1}{(2 \cdot M + 1) \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{\lambda_{\text{rad}}} \cdot \frac{E\{Q_{\text{rad}}^6\}}{E^2\{Q_{\text{rad}}^3\}} \right. \\ &+ \frac{4 \cdot \pi}{3} \cdot \left(\frac{E\{Q_{\text{rad}}^2\} \cdot E\{Q_{\text{rad}}^4\}}{E^2\{Q_{\text{rad}}^3\}} + 1 \right) \cdot \frac{5 + 2 \cdot \left(\frac{u_{p2} - 3 \cdot u_{p1}}{u_{p2} - 2 \cdot u_{p1}} \right)^3 \cdot U(u_{p2} - 3 \cdot u_{p1})}{\frac{u_{p2}}{T} - 2 \cdot \frac{u_{p1}}{T}} \\ &\left. + 8 \cdot \pi^2 \cdot \lambda_{\text{rad}} \cdot \frac{E^3\{Q_{\text{rad}}^2\}}{E^2\{Q_{\text{rad}}^3\}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{u_{p2}}{T} - 2 \cdot \frac{u_{p1}}{T} \right)^2} \right) \end{aligned}$$

(4.6-47)

para $u_{p2} - 2 \cdot u_{p1} \gg 2 \cdot \pi / (2 \cdot M + 1)$.

Também, a expressão para o caso analógico é similar (ver itens anteriores).

4.6.2 Análise

Os resultados obtidos na secção 4.6.1 para a variança normalizada dos estimadores dos cumulantes, equações (4.6-24, 46 e 47), permitem avaliar a precisão e o tempo de resposta do sistema. Viu-se que para o caso analógico é necessário apenas substituir $(2 \cdot M + 1) \cdot T$ por $(\xi_2 - \xi_1)$ e $(u_{p1} / T$ e $u_{p2} / T)$ por $(w_{p1}$ e $w_{p2})$ nessas equações.

Observe que a precisão relacionada ao cumulante de n -ésima ordem calculado na origem é dada por

$$\frac{\text{var}\{\hat{C}_{n,v,p,rad}[0,\dots,0]\}}{C_{n,v,p,rad}^2[0,\dots,0]} \quad (4.6-48)$$

e o tempo de resposta para obter tal precisão pode ser definido como a duração do conjunto de dados (ou sinal) utilizado para análise

$$(2 \cdot M + 1) \cdot T \quad (4.6-49)$$

No caso por exemplo de se utilizar processadores “lentos” que calculam as estimativas dos cumulantes num tempo superior a essa duração (4.6-49), deve-se considerar esse excesso de tempo no cálculo do tempo de resposta.

Observando as equações (4.6-24, 46 e 47), verifica-se que o produto da precisão pelo tempo de resposta constitui-se numa *figura de mérito* do sistema de grande importância para a análise. Sendo esse produto denominado de $\Pi_{n,rad}$, então

$$\Pi_{n,rad} = \frac{\text{var}\{\hat{C}_{n,v,p,rad}[0,\dots,0]\}}{C_{n,v,p,rad}^2[0,\dots,0]} \cdot (2 \cdot M + 1) \cdot T \quad (4.6-50)$$

Claramente para o caso analógico basta fazer as substituições adequadas nessa definição.

Tendo em vista as equações (4.6-24, 46 e 47), pode-se escrever para $\Pi_{1,rad}$ a

$$\Pi_{1,rad} \equiv \frac{1}{\lambda_{rad}} \cdot \frac{E\{q_{hd,rad}^2\}}{E^2\{q_{hd,rad}\}} \quad (4.6-51)$$

$$\Pi_{2,rad} \equiv \frac{1}{\lambda_{rad}} \cdot \frac{E\{Q_{rad}^4\}}{E^2\{Q_{rad}^2\}} + \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot \frac{u_{p2}}{T} - \frac{u_{p1}}{T} \quad (4.6-52)$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{1,rad} \cong & \frac{1}{\lambda_{rad}} \cdot \frac{E\{Q_{rad}^6\}}{E^2\{Q_{rad}^3\}} \\
& + \frac{4 \cdot \pi}{3} \cdot \left(\frac{E\{Q_{rad}^2\} \cdot E\{Q_{rad}^4\}}{E^2\{Q_{rad}^3\}} + 1 \right) \cdot \frac{5 + 2 \cdot \left(\frac{u_{p2} - 3 \cdot u_{p1}}{u_{p2} - 2 \cdot u_{p1}} \right)^3 \cdot U(u_{p2} - 3 \cdot u_{p1})}{\frac{u_{p2}}{T} - 2 \cdot \frac{u_{p1}}{T}} \\
& + 8 \cdot \pi^2 \cdot \lambda_{rad} \cdot \frac{E^3\{Q_{rad}^2\}}{E^2\{Q_{rad}^3\}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{u_{p2}}{T} - 2 \cdot \frac{u_{p1}}{T} \right)^2}
\end{aligned} \tag{4.6-53}$$

É fácil ver que essas equações podem ser escritas como

$$\Pi_{1,rad} \cong k_{1,1} \cdot \frac{1}{\lambda_{rad}} \tag{4.6-54}$$

$$\Pi_{2,rad} \cong k_{2,1} \cdot \frac{1}{\lambda_{rad}} + k_{2,2} \tag{4.6-55}$$

$$\Pi_{3,rad} \cong k_{3,1} \cdot \frac{1}{\lambda_{rad}} + k_{3,2} + k_{3,3} \cdot \lambda_{rad} \tag{4.6-56}$$

onde os $k_{i,j}$ são constantes dependentes de u_{p1}/T , u_{p2}/T e dos momentos de Q_{rad} (ou $q_{hd,rad}$).

Observe-se que os $\Pi_{n,rad}$ possuem um comportamento hiperbólico numa primeira faixa de λ_{rad} . Enquanto $\Pi_{1,rad}$ tende a zero com o aumento de λ_{rad} , $\Pi_{2,rad}$ tende a uma constante diferente de zero, e $\Pi_{3,rad}$, após certa região de mínimo, aumenta de forma linear com o aumento de λ_{rad} . Embora não se tenha calculado a variância normalizada do estimador do quarto cumulante, deve-se esperar para esta uma componente proporcional a λ_{rad}^2 . Conclui-se, portanto, que ocorre um aumento mais acentuado de $\Pi_{n,rad}$ em relação a $\Pi_{n-1,rad}$ ($n > 2$) para λ_{rad} elevado. Deve-se notar que quanto maior $\Pi_{n,rad}$, pior é o desempenho do sistema, pois para uma dada precisão, o tempo de resposta é maior.

As figuras 4-27 e 28 mostram um esboço desse comportamento de $\Pi_{n,rad}$ em função de λ_{rad} , considerando o processador com $k_u = 0,2$, $T = 10 \mu s$, $u_{p2} = \pi/4$ e contribuição unitária dos fatores correspondentes aos momentos das cargas :

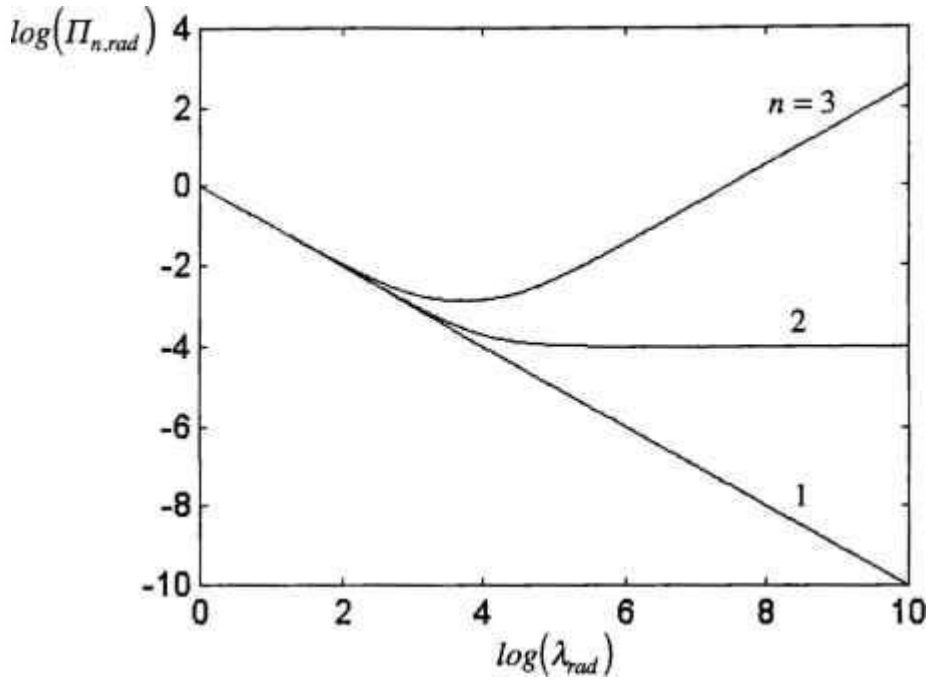


Figura 4-27 : $\Pi_{n,rad}$ em função de λ_{rad} : produto da precisão pelo tempo de resposta, em função da taxa média de eventos, numa faixa ampla

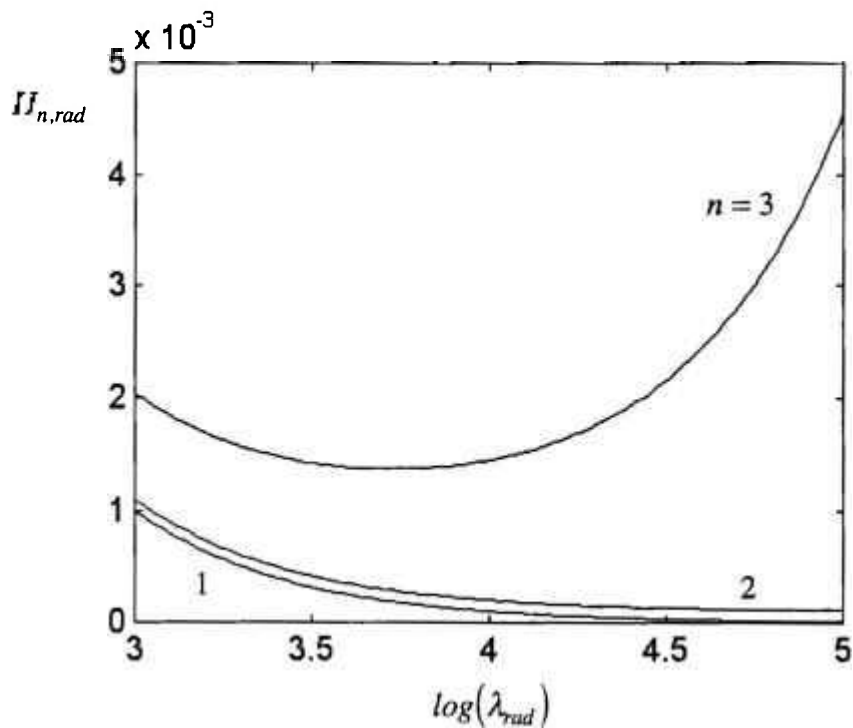


Figura 4-28 : $\Pi_{n,rad}$ em função de λ_{rad} : produto da precisão pelo tempo de resposta, em função da taxa média de eventos, numa faixa limitada

A análise das figuras de mérito $\Pi_{n,rad}$ mostra o comportamento crescente de $\Pi_{n,rad}$ ($n > 2$) com o aumento de λ_{rad} , após um ponto de mínimo, e o comportamento mais acentuadamente crescente de $\Pi_{n,rad}$ ($n > 2$) em relação a $\Pi_{n-1,rad}$ para λ_{rad} superior a esses pontos de mínimo. A posição desses pontos tem uma relação direta com as frequências limites (analógicas) do processador e particularmente para filtros “largos” ($u_{p2} \gg u_{p1}$) com a frequência limite superior u_{p2} / T . Para uma faixa ampla de λ_{rad} , como ocorre num reator nuclear (11 décadas), pode-se obter um tempo de resposta satisfatório para os cumulantes de ordem superior apenas numa faixa mais restrita de λ_{rad} . A utilização desses cumulantes numa faixa mais extensa pode ser feita apenas para funções (ex.: supervisão) onde o tempo de resposta não é de principal importância. Portanto, esse resultado não recomenda a utilização do sistema de equações (4.5-20) para funções relacionadas ao controle e proteção de um reator nuclear, e sim a utilização da ordem do cumulante adequada para a obtenção de λ_{rad} numa determinada região de fluxo de nêutrons. Como exemplo, no sentido decrescente de potências utilizar-se-iam os cumulantes em ordem crescente, mesmo havendo certa superposição, sendo que a utilização dos cumulantes de ordem superior estaria restrita a uma faixa de potências, cujo limite superior é dependente de u_{p2} / T (para filtros “largos”).

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

Realizou-se um trabalho de análise de sistemas de medição de fluxo de nêutrons utilizando as funções estatísticas dos cumulantes e espectros.

Ressalta-se o carácter global e integrado desta análise, ao incluir desde o processo estocástico de detecção nuclear aos elementos do sistema : detector de radiação e processador de sinal, todos integrados sob a descrição matemática dos cumulantes e espectros.

Não foi encontrado um estudo similar na bibliografia pesquisada.

Iniciou-se a análise integrada pela generalização do teorema de Campbell, utilizando o conceito de cumulantes e *espectros* de ordem n e a representação da forma dos pulsos aleatórios por um vetor de parâmetros aleatórios. A validade dessa generalização se estende a todos os sistemas associados aos processos estocásticos tipo "shot", mas sua aplicação neste trabalho foi restrita aos sistemas de medição de fluxo de radiação nuclear.

Utilizando o conceito dos cumulantes , a composição do processo estocástico de detecção nuclear se tornou trivial, pois os cumulantes de processos independentes são aditivos. Além, das componentes correspondentes às radiações nucleares, consideraram-se nos cálculos as componentes de ruído representadas pelo ruído intrínseco gaussiano e o ruído extrínseco, sendo esta última passível de minimização por meio de técnicas de projeto.

Como resultado dessa parte da análise, verificou-se a menção de DuBridg[e] [1967], ou seja, a possibilidade de conceber sistemas Campbell de ordem superior com a vantagem de maior imunidade às radiações indesejáveis de menor poder de ionização. Também, utilizando a representação por cumulantes, ganhou-se maior imunidade ao ruído gaussiano e a possibilidade de melhor obtenção das respostas do sistema pelos processos de

identificação [Mendel, 1991]. Por outro lado, a representação do teorema de Campbell na forma de espectros permitiu a caracterização dos sensores e sistemas “shot” no domínio da frequência e portanto a integração da análise do sensor ao processador de sinal.

Procurou-se aplicar essa análise inicial a um sistema de medição de fluxo de nêutrons constituído de um detector de nêutrons (câmara de ionização sensível a nêutrons) e de um processador de sinal.

Na análise do detector desenvolveu-se inicialmente um método de cálculo dos pulsos de corrente gerados nos eletrodos da câmara para as três geometrias (plana, esférica e cilíndrica), levando-se em conta os principais fatores do processo: a profundidade do evento no depósito sensível a nêutrons, a energia e a direção de emissão da partícula ionizante, sua perda de energia e alcance no depósito e no gás, sua ionização específica no gás, além das condições de contorno geométricas da câmara. Utilizaram-se aproximações analíticas e numéricas para a velocidade do elétron e alcance da partícula ionizante. Aproximou-se a ionização específica no gás a partir da relação entre alcance residual e energia.

A seguir, passou-se ao estudo estatístico. Considerou-se o vetor de parâmetros aleatórios representado pelo espectro de energia, a profundidade do evento no depósito sensível a nêutrons, a direção de emissão da partícula ionizante e eventualmente por uma variável de identificação das radiações secundárias. Conhecidas suas funções de densidade de probabilidade, torna-se possível calcular os espectros (cumulantes) da corrente do detector e os momentos das cargas dos pulsos de corrente. Foi analisado o comportamento qualitativo das respostas do detector (tempo e frequência) e dos espectros, necessário para se adquirir um conhecimento das possíveis formas dos mesmos. No final, apresentou-se um modelo para a câmara de eletrodos próximos, útil para a análise e projeto de câmaras de fissão.

Um programa de computador, utilizando a linguagem MATLAB, implementou o método de análise do detector.

Algumas aplicações já justificariam a realização de apenas esta parte da análise. Entre elas:

- A caracterização de sensores associados aos processos estocásticos tipo “shot” na forma de espectros (e cumulantes) e, particularmente, na aplicação em sistemas de medição de fluxo de nêutrons, *a caracterização de câmaras de ionização sensíveis a nêutrons.*
- O estudo da variação dos espectros (cumulantes) em relação às variações dos parâmetros de projeto da câmara (ex.: pressão do gás, tensão de polarização, etc.) pode ser utilizado não só para projeto, mas também para o estabelecimento de uma metodologia que permita a avaliação do funcionamento do detector de radiação (ex.: supervisão “on-line”). Este ponto é de grande importância no contexto da *supervisão de componentes das centrais nucleares.*

Deve-se observar que a generalização do teorema de Campbell na forma de espectros mostrou sua importância não só na caracterização do detector de radiação como no restante do trabalho.

Na sequência realizou-se a análise do processador de sinal.

Fez-se um estudo de modo a incluir configurações analógicas e digitais por meio do desenvolvimento do conceito de expressões e sistemas equivalentes. Verificou-se a necessidade de aumentar a frequência de amostragem ($1/T$) acima daquela de Nyquist, de acordo com a relação $w_{max} < \frac{2 \cdot \pi}{n \cdot T}$, de modo que possa se estabelecer uma equivalência entre as configurações analógicas e digitais com relação aos cumulantes e espectros. Como exemplo, para os quatro primeiros cumulantes, isso corresponde a uma frequência de amostragem no mínimo duas vezes a de Nyquist. Para a equivalência com relação às variâncias dos cumulantes, é necessário amostrar no dobro dessa frequência. Essa equivalência possui utilização não só na simulação, mas também na implementação de sistemas reais, satisfeita a nova condição de amostragem.

Realizou-se a análise de ruído do adaptador de sinal, considerando seu efeito no segundo e primeiro cumulantes do sinal. O efeito do ruído gaussiano nos cumulantes de maior ordem, embora teoricamente nulo, dependendo de seu nível, pode produzir aumento do tempo de cálculo dos estimadores desses cumulantes para se obter determinada precisão.

O conceito de *sistemas equivalentes* passou a ser utilizado extensivamente no restante do trabalho.

Estudou-se o posicionamento dos filtros do processador em relação aos espectros do sinal do detector. Obtiveram-se expressões simplificadas para os cumulantes e espectros dos filtros com contribuições nas regiões planas dos espectros, de grande importância para a obtenção da taxa média da radiação de interesse. Os filtros com contribuições nas regiões de transição dos espectros possuem maior importância na análise do estado de funcionamento do detector. Decidiu-se utilizar filtros ideais como referência de projeto. Calcularam-se, a partir das transformadas inversas de Fourier dos espectros, os quatro primeiros cumulantes para filtros ideais com contribuições nas regiões planas dos espectros.

Um sistema real tem por objetivo principal a determinação da taxa média de eventos λ_{rad} da radiação de interesse. Com vistas a isso, apresentaram-se os estimadores não-tendenciosos convencionais dos momentos e cumulantes, e, propôs-se determinar λ_{rad} a partir das estimativas dos cumulantes, realizando uma generalização dos sistemas Campbell convencionais. Num sistema de medição de fluxo de nêutrons para controle e proteção de um reator nuclear, é de grande importância o conhecimento da precisão e

tempo de resposta relacionados à variável λ_{rad} . Por isso, desenvolveram-se expressões analíticas para as variâncias dos estimadores dos três primeiros cumulantes calculados na origem para os filtros ideais de referência. O estudo das figuras de mérito $\Pi_{n,rad}$, produtos das variâncias normalizadas pelos tempos de resposta, mostrou sua importância no projeto de sistemas. Concluiu-se que a utilização de cumulantes de ordem superior, em funções onde o tempo de resposta para uma dada precisão é um parâmetro de importância, deve ser restrita a uma faixa da taxa média de eventos λ_{rad} , limitada superiormente por um valor relacionado com as frequências limites do processador de sinal.

Como resultado desta última parte da análise, acrescentam-se algumas possíveis aplicações deste trabalho e sugestões de continuidade. Podem-se citar :

- O projeto e a análise de sistemas Campbell de n -ésima ordem. As ferramentas matemáticas desenvolvidas neste estudo permitem não só avaliar sistemas existentes, como também *conceber* sistemas digitais modernos para controle e proteção de reatores nucleares ou para simples monitoração do fluxo neutrônico. Pode-se eventualmente questionar a necessidade da redução adicional da componente gama por meio da utilização de cumulantes de ordem superior, ou mesmo, os tempos de respostas elevados resultantes da utilização de cumulantes de ordem superior em faixas amplas de λ_{rad} . No entanto, pode-se ter como objetivo aumentar a região de superposição entre a faixa de partida e a faixa Campbell, possibilitando melhor supervisão de funcionamento, ganhando-se, além disso, maior rejeição do ruído gaussiano e melhor obtenção das respostas (espectros) do sistema nos processos de identificação.
- É possível também obter as taxas médias de eventos correspondentes a mais de uma radiação (ex.: nêutron, gama, alfa) em determinadas condições. No lugar de simplesmente recuperar a taxa média de eventos correspondente aos nêutrons, podem-se utilizar, conforme mostrado, sistemas de equações baseadas nos cumulantes para a obtenção das taxas médias de eventos desse conjunto de radiações, mas considerando-se as ressalvas apontadas neste trabalho.
- Pode-se transformar o programa de computador desenvolvido numa ferramenta mais completa de pesquisa e projeto, incluindo melhorias tais como: aumento da biblioteca dos gases e depósitos sensíveis a nêutrons, introdução da contribuição do tempo de geração da trilha de ionização para o estudo de detectores “rápidos”, introdução de outras opções de cálculo do alcance, perda de energia e ionização específica, inclusão do cálculo direto para detectores constituídos de vários eletrodos concêntricos e com depósitos nos anodos e catodos, otimização da velocidade de processamento por meio da fragmentação de matrizes, armazenamento por blocos de dados no disco, etc..

- Na parte de simulação utilizando o estudo desenvolvido, é relativamente fácil incorporar técnicas de Monte Carlo para a geração dos pulsos nucleares ao lado do ruído gaussiano. Esses pulsos nucleares combinados com o ruído eletrônico simulariam o sinal real produzido num reator nuclear. O sinal simulado poderia ser processado pelo computador de forma equivalente ao realizado pelo processador de sinal pertencente a um sistema real. O conjunto resultante consistiria num simulador de sistemas de medição de fluxo de nêutrons, útil para análise e projeto.

Em resumo, este trabalho de análise permite tratar , na forma de sistema, todo o processo de detecção e medição de fluxo de radiação nuclear utilizando o conceito de cumulantes e espectros. Construiu-se, portanto, uma ferramenta que possibilita decisões importantes de projeto. Como resultado pode-se dizer que, hoje, torna-se viável um sistema de medição de fluxo de nêutrons em reatores nucleares, que, no seu conjunto seria superior aos similares anteriores.

APÊNDICES

A.2 Apêndice do capítulo 2

A.2.1 Relações entre momentos e cumulantes

A.3 Apêndice do capítulo 3

A.3.1 Expressões resultantes da aproximação analítica da velocidade do elétron

A.3.2 Relações geométricas

A.3.3 Exemplo de aplicação do programa de computador

A.4 Apêndice do capítulo 4

A.4.1 Análise da influência dos parâmetros de entrada

A.4.2 Generalização do teorema da amostragem no domínio multidimensional

A.4.3 Filtros ideais : cálculo para o terceiro cumulante

A.4.4 Filtros ideais : quarto cumulante

A.4.5 Variança do terceiro cumulante

A.2 Apêndice do capítulo 2

A.2.1 Relações entre momentos e cumulantes

Apresentam-se as relações gerais para os quatro primeiros momentos/cumulantes. Para o sexto momento, utilizado no cálculo da variância do estimador do terceiro momento/cumulante (ver apêndice A.4.5), apresenta-se apenas a expressão particular com média zero.

As relações entre momentos e cumulantes podem ser obtidas a partir das derivadas da expressão $\Phi_{n,x} = e^{\Psi_{n,x}}$ em $V=0$:

$$E\{x_1 \cdot x_2 \dots x_n\} = \frac{\partial^n \Phi_{n,x}(v_1, v_2, \dots, v_n)}{\partial v_1 \cdot \partial v_2 \dots \partial v_n} \Bigg|_{v_1=v_2=\dots=v_n=0} = \frac{\partial^n \exp(\Psi_{n,x}(v_1, v_2, \dots, v_n))}{\partial v_1 \cdot \partial v_2 \dots \partial v_n} \Bigg|_{v_1=v_2=\dots=v_n=0} \quad (\text{A.2.1-1})$$

ou mais facilmente por meio do método das partições [Mendel, 1991].

Embora as expressões que se seguem sejam escritas no domínio tempo-discreto, para o domínio tempo-contínuo basta realizar a mudança de nomenclatura apropriada.

Para os 4 primeiros momentos e cumulantes, tem-se :

- **Primeira Ordem**

$M_{1,x}$ função de $C_{1,x}$

$$M_{1,x}[k] = E\{x\} = C_{1,x}[k] \quad (\text{A.2.1-2})$$

- **Segunda Ordem**

$M_{2,x}$ função de $C_{2,x}$

$$M_{2,x}[k_1, k_2] = E\{x_1 \cdot x_2\} = C_{2,x}[k_1, k_2] + C_{1,x}[k_1] \cdot C_{1,x}[k_2] \quad (\text{A.2.1-3})$$

$C_{2,x}$ função de $M_{2,x}$

$$C_{2,x}[k_1, k_2] = M_{2,x}[k_1, k_2] - M_{1,x}[k_1] \cdot M_{1,x}[k_2] \quad (\text{A.2.1-4})$$

Se $E\{x\} = 0$, resulta

$$\boxed{C_{2,x}[k_1, k_2] = M_{2,x}[k_1, k_2]} \quad (\text{A.2.1-5})$$

• **Terceira Ordem**

$M_{3,x}$ função de $C_{3,x}$

$$\begin{aligned}
 M_{3,x}[k_1, k_2, k_3] &= E\{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3\} \\
 &= C_{3,x}[k_1, k_2, k_3] \\
 &\quad + C_{1,x}[k_1] \cdot C_{2,x}[k_2, k_3] + C_{1,x}[k_2] \cdot C_{2,x}[k_1, k_3] + C_{1,x}[k_3] \cdot C_{2,x}[k_1, k_2] \\
 &\quad + C_{1,x}[k_1] \cdot C_{1,x}[k_2] \cdot C_{1,x}[k_3]
 \end{aligned}
 \tag{A.2.1-6}$$

$C_{3,x}$ função de $M_{3,x}$

$$\begin{aligned}
 C_{3,x}[k_1, k_2, k_3] &= M_{3,x}[k_1, k_2, k_3] \\
 &\quad - M_{1,x}[k_1] \cdot M_{2,x}[k_2, k_3] - M_{1,x}[k_2] \cdot M_{2,x}[k_1, k_3] - M_{1,x}[k_3] \cdot M_{2,x}[k_1, k_2] \\
 &\quad + 2 \cdot M_{1,x}[k_1] \cdot M_{1,x}[k_2] \cdot M_{1,x}[k_3]
 \end{aligned}
 \tag{A.2.1-7}$$

Se $E\{x\} = 0$, resulta

$$\boxed{C_{3,x}[k_1, k_2, k_3] = M_{3,x}[k_1, k_2, k_3]}
 \tag{A.2.1-8}$$

• **Quarta Ordem**

$M_{4,x}$ função de $C_{4,x}$

$$\begin{aligned}
 M_{4,x}[k_1, k_2, k_3, k_4] &= E\{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4\} \\
 &= C_{4,x}[k_1, k_2, k_3, k_4] \\
 &\quad + C_{1,x}[k_1] \cdot C_{3,x}[k_2, k_3, k_4] + C_{1,x}[k_2] \cdot C_{3,x}[k_1, k_3, k_4] \\
 &\quad + C_{1,x}[k_3] \cdot C_{3,x}[k_1, k_2, k_4] + C_{1,x}[k_4] \cdot C_{3,x}[k_1, k_2, k_3] \\
 &\quad + C_{2,x}[k_1, k_2] \cdot C_{2,x}[k_3, k_4] + C_{2,x}[k_1, k_3] \cdot C_{2,x}[k_2, k_4] + C_{2,x}[k_1, k_4] \cdot C_{2,x}[k_2, k_3] \\
 &\quad + C_{2,x}[k_1, k_2] \cdot C_{1,x}[k_3] \cdot C_{1,x}[k_4] + C_{2,x}[k_1, k_3] \cdot C_{1,x}[k_2] \cdot C_{1,x}[k_4] \\
 &\quad + C_{2,x}[k_1, k_4] \cdot C_{1,x}[k_2] \cdot C_{1,x}[k_3] + C_{2,x}[k_2, k_3] \cdot C_{1,x}[k_1] \cdot C_{1,x}[k_4] \\
 &\quad + C_{2,x}[k_2, k_4] \cdot C_{1,x}[k_1] \cdot C_{1,x}[k_3] + C_{2,x}[k_3, k_4] \cdot C_{1,x}[k_1] \cdot C_{1,x}[k_2] \\
 &\quad + C_{1,x}[k_1] \cdot C_{1,x}[k_2] \cdot C_{1,x}[k_3] \cdot C_{1,x}[k_4]
 \end{aligned}
 \tag{A.2.1-9}$$

$C_{4,x}$ função de $M_{4,x}$

$$\begin{aligned}
 & C_{4,x}[k_1, k_2, k_3, k_4] \\
 &= M_{4,x}[k_1, k_2, k_3, k_4] \\
 &- M_{1,x}[k_1] \cdot M_{3,x}[k_2, k_3, k_4] - M_{1,x}[k_2] \cdot M_{3,x}[k_1, k_3, k_4] \\
 &- M_{1,x}[k_3] \cdot M_{3,x}[k_1, k_2, k_4] - M_{1,x}[k_4] \cdot M_{3,x}[k_1, k_2, k_3] \\
 &- M_{2,x}[k_1, k_2] \cdot M_{2,x}[k_3, k_4] - M_{2,x}[k_1, k_3] \cdot M_{2,x}[k_2, k_4] - M_{2,x}[k_1, k_4] \cdot M_{2,x}[k_2, k_3] \\
 &+ 2 \cdot M_{2,x}[k_1, k_2] \cdot M_{1,x}[k_3] \cdot M_{1,x}[k_4] + 2 \cdot M_{2,x}[k_1, k_3] \cdot M_{1,x}[k_2] \cdot M_{1,x}[k_4] \\
 &+ 2 \cdot M_{2,x}[k_1, k_4] \cdot M_{1,x}[k_2] \cdot M_{1,x}[k_3] + 2 \cdot M_{2,x}[k_2, k_3] \cdot M_{1,x}[k_1] \cdot M_{1,x}[k_4] \\
 &+ 2 \cdot M_{2,x}[k_2, k_4] \cdot M_{1,x}[k_1] \cdot M_{1,x}[k_3] + 2 \cdot M_{2,x}[k_3, k_4] \cdot M_{1,x}[k_1] \cdot M_{1,x}[k_2] \\
 &- 6 \cdot M_{1,x}[k_1] \cdot M_{1,x}[k_2] \cdot M_{1,x}[k_3] \cdot M_{1,x}[k_4]
 \end{aligned}$$

(A.2.1-10)

Se $E\{x\} = 0$, resulta

$$\begin{aligned}
 & C_{4,x}[k_1, k_2, k_3, k_4] \\
 &= M_{4,x}[k_1, k_2, k_3, k_4] \\
 &- M_{2,x}[k_1, k_2] \cdot M_{2,x}[k_3, k_4] - M_{2,x}[k_1, k_3] \cdot M_{2,x}[k_2, k_4] - M_{2,x}[k_1, k_4] \cdot M_{2,x}[k_2, k_3]
 \end{aligned}$$

(A.2.1-11)

• *Sexta Ordem*

$M_{6,x}$ função de $C_{6,x}$ com $E\{x\} = 0$

$$\begin{aligned}
 M_{6,x}[k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6] &= E\{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6\} \\
 &= C_{6,x}[k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6] \\
 &+ C_{2,x}[k_1, k_2] \cdot C_{4,x}[k_3, k_4, k_5, k_6] + C_{2,x}[k_1, k_3] \cdot C_{4,x}[k_2, k_4, k_5, k_6] \\
 &+ C_{2,x}[k_1, k_4] \cdot C_{4,x}[k_2, k_3, k_5, k_6] + C_{2,x}[k_1, k_5] \cdot C_{4,x}[k_2, k_3, k_4, k_6] \\
 &+ C_{2,x}[k_1, k_6] \cdot C_{4,x}[k_2, k_3, k_4, k_5] + C_{2,x}[k_2, k_3] \cdot C_{4,x}[k_1, k_4, k_5, k_6] \\
 &+ C_{2,x}[k_2, k_4] \cdot C_{4,x}[k_1, k_3, k_5, k_6] + C_{2,x}[k_2, k_5] \cdot C_{4,x}[k_1, k_3, k_4, k_6] \\
 &+ C_{2,x}[k_2, k_6] \cdot C_{4,x}[k_1, k_3, k_4, k_5] + C_{2,x}[k_3, k_4] \cdot C_{4,x}[k_1, k_2, k_5, k_6] \\
 &+ C_{2,x}[k_3, k_5] \cdot C_{4,x}[k_1, k_2, k_4, k_6] + C_{2,x}[k_3, k_6] \cdot C_{4,x}[k_1, k_2, k_4, k_5] \\
 &+ C_{2,x}[k_4, k_5] \cdot C_{4,x}[k_1, k_2, k_3, k_6] + C_{2,x}[k_4, k_6] \cdot C_{4,x}[k_1, k_2, k_3, k_5] \\
 &+ C_{2,x}[k_5, k_6] \cdot C_{4,x}[k_1, k_2, k_3, k_4] \\
 &+ C_{3,x}[k_1, k_2, k_3] \cdot C_{3,x}[k_4, k_5, k_6] + C_{3,x}[k_1, k_2, k_4] \cdot C_{3,x}[k_3, k_5, k_6] \\
 &+ C_{3,x}[k_1, k_2, k_5] \cdot C_{3,x}[k_3, k_4, k_6] + C_{3,x}[k_1, k_2, k_6] \cdot C_{3,x}[k_3, k_4, k_5] \\
 &+ C_{3,x}[k_1, k_3, k_4] \cdot C_{3,x}[k_2, k_5, k_6] + C_{3,x}[k_1, k_3, k_5] \cdot C_{3,x}[k_2, k_4, k_6] \\
 &+ C_{3,x}[k_1, k_3, k_6] \cdot C_{3,x}[k_2, k_4, k_5] + C_{3,x}[k_1, k_4, k_5] \cdot C_{3,x}[k_2, k_3, k_6] \\
 &+ C_{3,x}[k_1, k_4, k_6] \cdot C_{3,x}[k_2, k_3, k_5] + C_{3,x}[k_1, k_5, k_6] \cdot C_{3,x}[k_2, k_3, k_4] \\
 &+ C_{2,x}[k_1, k_2] \cdot C_{2,x}[k_3, k_4] \cdot C_{2,x}[k_5, k_6] + C_{2,x}[k_1, k_2] \cdot C_{2,x}[k_3, k_5] \cdot C_{2,x}[k_4, k_6] \\
 &+ C_{2,x}[k_1, k_2] \cdot C_{2,x}[k_3, k_6] \cdot C_{2,x}[k_4, k_5] + C_{2,x}[k_1, k_3] \cdot C_{2,x}[k_2, k_4] \cdot C_{2,x}[k_5, k_6] \\
 &+ C_{2,x}[k_1, k_3] \cdot C_{2,x}[k_2, k_5] \cdot C_{2,x}[k_4, k_6] + C_{2,x}[k_1, k_3] \cdot C_{2,x}[k_2, k_6] \cdot C_{2,x}[k_4, k_5] \\
 &+ C_{2,x}[k_1, k_4] \cdot C_{2,x}[k_2, k_3] \cdot C_{2,x}[k_5, k_6] + C_{2,x}[k_1, k_4] \cdot C_{2,x}[k_2, k_5] \cdot C_{2,x}[k_3, k_6] \\
 &+ C_{2,x}[k_1, k_4] \cdot C_{2,x}[k_2, k_6] \cdot C_{2,x}[k_3, k_5] + C_{2,x}[k_1, k_5] \cdot C_{2,x}[k_2, k_3] \cdot C_{2,x}[k_4, k_6] \\
 &+ C_{2,x}[k_1, k_5] \cdot C_{2,x}[k_2, k_4] \cdot C_{2,x}[k_3, k_6] + C_{2,x}[k_1, k_5] \cdot C_{2,x}[k_2, k_6] \cdot C_{2,x}[k_3, k_4] \\
 &+ C_{2,x}[k_1, k_6] \cdot C_{2,x}[k_2, k_3] \cdot C_{2,x}[k_4, k_5] + C_{2,x}[k_1, k_6] \cdot C_{2,x}[k_2, k_4] \cdot C_{2,x}[k_3, k_5] \\
 &+ C_{2,x}[k_1, k_6] \cdot C_{2,x}[k_2, k_5] \cdot C_{2,x}[k_3, k_4]
 \end{aligned}$$

(A.2.1-12)

A.3 Apêndice do capítulo 3

A.3.1 Expressões resultantes da aproximação analítica da velocidade do elétron

Seja a expressão (3.2-38) resultante da aproximação por função potência da velocidade do elétron :

$$v_{\pi} \left(\frac{\varepsilon(r_{\pi})}{p} \right) = s_{\pi} \cdot \mu_{\pi} \cdot \left(\frac{k_{\varepsilon}}{p} \right)^{m_{v_{\pi}}} \cdot r_{\pi}^{-m_{\varepsilon} \cdot m_{v_{\pi}}} \quad (\text{A.3.1-1})$$

Sua utilização na obtenção do tempo de coleção e posição do portador de carga, e do pulso de corrente gerado pela ionização, resulta nas seguintes expressões analíticas :

Tempo de coleção do portador de carga

Substituindo (A.3.1-1) em (3.2-21) e integrando, obtém-se

$$\begin{aligned} t(r_{\pi}, r_i) &= \int_{r_i}^{r_{\pi}} \frac{dr_{\pi}}{v_{\pi} \left(\frac{\varepsilon(r_{\pi})}{p} \right)} = \int_{r_i}^{r_{\pi}} \frac{dr_{\pi}}{s_{\pi} \cdot \mu_{\pi} \cdot \left(\frac{k_{\varepsilon}}{p} \right)^{m_{v_{\pi}}} \cdot r_{\pi}^{-m_{\varepsilon} \cdot m_{v_{\pi}}}} = \frac{1}{s_{\pi} \cdot \mu_{\pi} \cdot \left(\frac{k_{\varepsilon}}{p} \right)^{m_{v_{\pi}}}} \int_{r_i}^{r_{\pi}} r_{\pi}^{m_{\varepsilon} \cdot m_{v_{\pi}}} \cdot dr_{\pi} \\ &= s_{\pi} \cdot \frac{1}{\mu_{\pi}} \cdot \left(\frac{p}{k_{\varepsilon}} \right)^{m_{v_{\pi}}} \cdot \frac{1}{m_{\varepsilon} \cdot m_{v_{\pi}} + 1} \cdot \left(r_{\pi}^{(m_{\varepsilon} \cdot m_{v_{\pi}} + 1)} - r_i^{(m_{\varepsilon} \cdot m_{v_{\pi}} + 1)} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.3.1-2})$$

Quando o portador alcança seu eletrodo respectivo $r_{\pi} = r_{f,\pi}$, tem-se o tempo de coleção do portador de carga $T_{\pi}(r_i) = t(r_{f,\pi}, r_i)$

$$T_{\pi}(r_i) = s_{\pi} \cdot \frac{1}{\mu_{\pi}} \cdot \left(\frac{p}{k_{\varepsilon}} \right)^{m_{v_{\pi}}} \cdot \frac{1}{m_{\varepsilon} \cdot m_{v_{\pi}} + 1} \cdot \left(r_{f,\pi}^{(m_{\varepsilon} \cdot m_{v_{\pi}} + 1)} - r_i^{(m_{\varepsilon} \cdot m_{v_{\pi}} + 1)} \right) \quad (\text{A.3.1-3})$$

com $(r_{f, ion} = b)$ e $(r_{f, ele} = a)$.

Posição do portador de carga

Para obter a posição do portador em função do tempo inverte-se a equação (A.3.1-2)

$$r_{\pi}(t, r_i) = \left[\frac{t}{s_{\pi} \cdot \frac{1}{\mu_{\pi}} \cdot \left(\frac{\bar{p}}{k_{\varepsilon}}\right)^{m_{v_{\pi}}} \cdot \frac{1}{m_{\varepsilon} \cdot m_{v_{\pi}} + 1}} + r_i^{(m_{\varepsilon} \cdot m_{v_{\pi}} + 1)} \right]^{\frac{1}{m_{\varepsilon} \cdot m_{v_{\pi}} + 1}} \quad (\text{A.3.1-4})$$

ou

$$r_{\pi}(t, r_i) = r_i \left(\frac{t}{T_{\pi}(r_i)} \cdot \left(\frac{r_{f,\pi}}{r_i} \right)^{(m_{\varepsilon} \cdot m_{v_{\pi}} + 1)} - 1 \right) + 1 \quad (\text{A.3.1-5})$$

para $0 \leq t \leq T_{\pi}(r_i)$

com $T_{\pi}(r_i)$ dado por (A.3.1-3).

Pulso de corrente gerado por um ponto de ionização

Substituindo-se ε de (3.2-30) e v_{π} de (A.3.1-1) em (3.2-5), resulta

$$h_{d,\pi}(t, r_i) = q_{\pi} \cdot \frac{k_{\varepsilon} \cdot (r_{\pi}(t, r_i))^{-m_{\varepsilon}}}{V_d} \cdot s_{\pi} \cdot \mu_{\pi} \cdot \left(\frac{k_{\varepsilon}}{p}\right)^{m_{v_{\pi}}} \cdot (r_{\pi}(t, r_i))^{-m_{\varepsilon} \cdot m_{v_{\pi}}} \cdot (U(t) - U(t - T_{\pi}(r_i))) \quad (\text{A.3.1-6})$$

ou

$$h_{d,\pi}(t, r_i) = s_{\pi} \cdot q_{\pi} \cdot \frac{\mu_{\pi} \cdot k_{\varepsilon}^{(m_{v_{\pi}} + 1)}}{V_d \cdot p^{m_{v_{\pi}}}} \cdot (r_{\pi}(t, r_i))^{-m_{\varepsilon} \cdot (m_{v_{\pi}} + 1)} \cdot (U(t) - U(t - T_{\pi}(r_i))) \quad (\text{A.3.1-7})$$

onde

$r_{\pi}(t, r_i)$ é calculada por (A.3.1-4 ou 5) e $T_{\pi}(r_i)$ por (A.3.1-3).

Pulso de corrente gerado por uma trilha de ionização retilínea

Calcula-se a corrente $dh_{d,\pi}$ resultante do ponto de ionização de carga dq_{π} (3.2-12), utilizando a equação (A.3.1-7) com r_i em função de x , isto é $r_i(x)$. Resulta

$$dh_{d,\pi} = e \cdot \rho_N(x) \cdot \frac{\mu_{\pi} \cdot k_{\varepsilon}^{(m_{v_{\pi}} + 1)}}{V_d \cdot p^{m_{v_{\pi}}}} \cdot (r_{\pi}(t, r_i(x)))^{-m_{\varepsilon} \cdot (m_{v_{\pi}} + 1)} \cdot (U(t) - U(t - T_{\pi}(r_i(x)))) \cdot dx \quad (\text{A.3.1-8})$$

Integrando em x , resulta a corrente $h_{d,\pi}(t)$ devido à trilha de ionização

$$h_{d,\pi}(t) = \frac{e \cdot \mu_{\pi} \cdot k_{\varepsilon}^{(m_{\nu_{\pi}}+1)}}{V_d \cdot p^{m_{\nu_{\pi}}}} \int_0^{x_t} \rho_N(x) \cdot (r_{\pi}(t, r_i(x)))^{-m_{\nu_{\pi}}(m_{\nu_{\pi}}+1)} \cdot (U(t) - U(t - T_{\pi}(r_i(x)))) \cdot dx$$

(A.3.1-9)

As demais expressões da corrente total e das cargas são dadas pelas equações (3.2-15) a (3.2-20).

A.3.2 Relações geométricas

Seja uma partícula ionizante pesada de energia inicial E_0 e alcance L_0 que gera uma trilha de ionização retilínea genérica de origem no catodo da câmara, de direção x e de comprimento x_t .

Sejam :

θ o ângulo entre o eixo x da trilha e a normal ao catodo.

Ω o ângulo entre o plano (trilha / normal catodo) e o plano da secção reta da câmara (para geometria cilíndrica).

Vários casos podem ocorrer :

- a trilha pode ou não alcançar o anodo (para todas as geometrias).
- a trilha pode ou não reencontrar o catodo (para geometria esférica e cilíndrica).

Relações para geometria plana (figura A.3-1)

Determinação de $r_i(x)$

$$r_i(x) = b - x \cdot \cos(\theta) \quad \text{para } 0 \leq x \leq x_t \quad (\text{A.3.2-1})$$

Determinação de x_t

a) a trilha alcança o anodo

$$(b - a) \leq L_0 \cdot \cos(\theta) \quad (\text{A.3.2-2})$$

resulta

$$x_t = \frac{(b - a)}{\cos(\theta)} \quad (\text{A.3.2-3})$$

b) a trilha não alcança o anodo

$$(b - a) > L_0 \cdot \cos(\theta) \quad (\text{A.3.2-4})$$

resulta

$$x_t = L_0 \quad (\text{A.3.2-5})$$

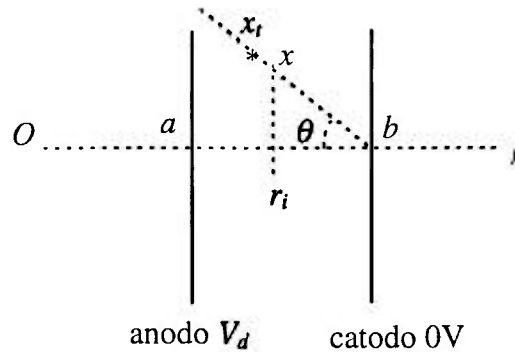


Figura A.3-1 : Trilha na geometria plana

Relações para geometria esférica (figura A.3-2)*Determinação de $r_i(x)$*

$$\boxed{r_i(x) = x^2 + b^2 - 2 \cdot x \cdot b \cdot \cos(\theta)} \quad \text{para } 0 \leq x \leq x_i \quad (\text{A.3.2-6})$$

Determinação de x_i

a) a trilha alcança o anodo

$$(a \geq b \cdot \text{sen}(\theta)) \text{ e } \left(L_0 \geq b \cdot \cos(\theta) - \sqrt{b^2 \cdot \cos^2(\theta) - (b^2 - a^2)} \right) \quad (\text{A.3.2-7})$$

resulta

$$\boxed{x_i = b \cdot \cos(\theta) - \sqrt{b^2 \cdot \cos^2(\theta) - (b^2 - a^2)}} \quad (\text{A.3.2-8})$$

b) a trilha reencontra o catodo

$$(a < b \cdot \text{sen}(\theta)) \text{ e } (L_0 \geq 2 \cdot b \cdot \cos(\theta)) \quad (\text{A.3.2-9})$$

resulta

$$\boxed{x_i = 2 \cdot b \cdot \cos(\theta)} \quad (\text{A.3.2-10})$$

c) a trilha não alcança o anodo e não reencontra o catodo

$$(a \geq b \cdot \text{sen}(\theta)) \text{ e } \left(L_0 < b \cdot \cos(\theta) - \sqrt{b^2 \cdot \cos^2(\theta) - (b^2 - a^2)} \right)$$

$$\text{ou } (a < b \cdot \text{sen}(\theta)) \text{ e } (L_0 < 2 \cdot b \cdot \cos(\theta))$$

(A.3.2-11)

resulta

$$\boxed{x_i = L_0} \quad (\text{A.3.2-12})$$

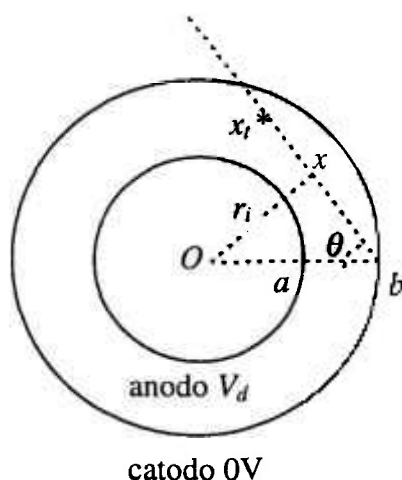


Figura A.3-2 : Trilha na geometria esférica

Relações para geometria cilíndrica (figuras A.3-3 e A.3-4)

Sejam :

θ_1 o ângulo entre a projeção do eixo x da trilha na secção reta da câmara e a normal ao catodo.

φ o ângulo entre o eixo x da trilha e a secção reta da câmara.

Determinação de θ_1 e φ

Considere o tetraedro $OBCD$ (figura A.3-4) :

Triângulo CDE

$$CD = CE \cdot \text{sen}(\Omega) \quad (\text{A.3.2-13})$$

Triângulo BCD

$$CD = x_i \cdot \text{sen}(\varphi) \quad (\text{A.3.2-14})$$

Triângulo BCE

$$CE = x_i \cdot \text{sen}(\theta) \quad (\text{A.3.2-15})$$

Substituindo (A.3.2-14) e (A.3.2-15) em (A.3.2-13), resulta

$$\boxed{\text{sen}(\varphi) = \text{sen}(\theta) \cdot \text{sen}(\Omega)} \quad (\text{A.3.2-16})$$

Também,

Triângulo OBC

$$OC^2 = b^2 + x_i^2 - 2 \cdot b \cdot x_i \cdot \cos(\theta) \quad (\text{A.3.2-17})$$

Triângulo OBD

$$OD^2 = b^2 + (x_i \cdot \cos(\varphi))^2 - 2 \cdot b \cdot (x_i \cdot \cos(\varphi)) \cdot \cos(\theta_1) \quad (\text{A.3.2-18})$$

Considerando o triângulo OCD e combinando (A.3.2-14), (A.3.2-17) e (A.3.2-18), resulta

$$\boxed{\cos(\theta_1) = \frac{\cos(\theta)}{\cos(\varphi)}} \quad (\text{A.3.2-19})$$

Determinação de $r_i(x)$

$$\boxed{r_i(x) = (x \cdot \cos(\varphi))^2 + b^2 - 2 \cdot (x \cdot \cos(\varphi)) \cdot b \cdot \cos(\theta_1)} \quad \text{para } 0 \leq x \leq x_t \quad (\text{A.3.2-20})$$

Determinação de x_t

a) a trilha alcança o anodo

$$(a \geq b \cdot \text{sen}(\theta_1)) \text{ e } \left(L_0 \cdot \cos(\varphi) \geq b \cdot \cos(\theta_1) - \sqrt{b^2 \cdot \cos^2(\theta_1) - (b^2 - a^2)} \right) \quad (\text{A.3.2-21})$$

resulta

$$\boxed{x_t = \frac{b \cdot \cos(\theta_1) - \sqrt{b^2 \cdot \cos^2(\theta_1) - (b^2 - a^2)}}{\cos(\varphi)}} \quad (\text{A.3.2-22})$$

b) a trilha reencontra o catodo

$$(a < b \cdot \text{sen}(\theta_1)) \text{ e } (L_0 \cdot \cos(\varphi) \geq 2 \cdot b \cdot \cos(\theta_1)) \quad (\text{A.3.2-23})$$

resulta

$$\boxed{x_t = \frac{2 \cdot b \cdot \cos(\theta_1)}{\cos(\varphi)}} \quad (\text{A.3.2-24})$$

c) a trilha não alcança o anodo e não reencontra o catodo

$$(a \geq b \cdot \text{sen}(\theta_1)) \text{ e } \left(L_0 \cdot \cos(\varphi) < b \cdot \cos(\theta_1) - \sqrt{b^2 \cdot \cos^2(\theta_1) - (b^2 - a^2)} \right) \\ \text{ou } (a < b \cdot \text{sen}(\theta_1)) \text{ e } (L_0 \cdot \cos(\varphi) < 2 \cdot b \cdot \cos(\theta_1)) \quad (\text{A.3.2-25})$$

resulta

$$\boxed{x_t = L_0} \quad (\text{A.3.2-26})$$

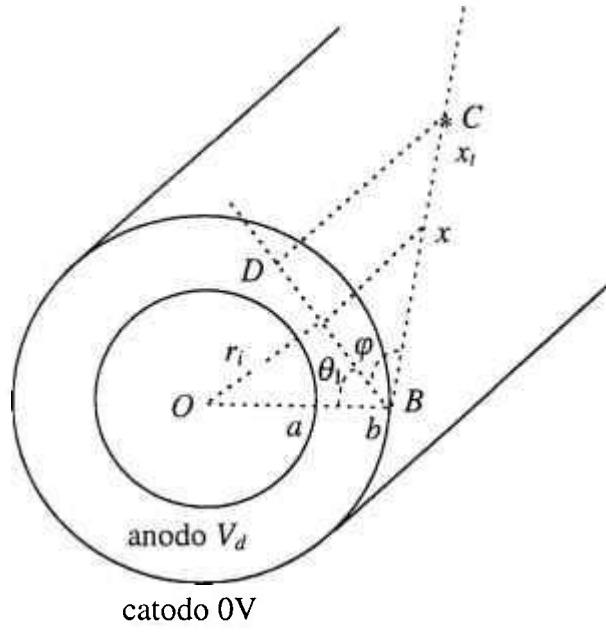


Figura A.3-3 : Trilha na geometria cilíndrica

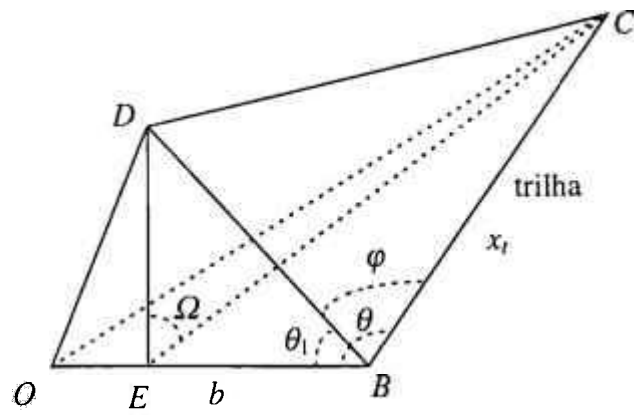


Figura A.3-4 : Tetraedro $OBCD$

A.3.3 Exemplo de aplicação do programa de computador

***** ENTRADA DE DADOS *****

***** CÂMARA DE IONIZAÇÃO *****

gás :

tipo (Argônio=1)(Nitrogênio=2) = 1

pressão (atm) = 3

geometria :

tipo (plana=1)(esférica=2)(cilíndrica=3) = 3

dimensões (cm) :

primeira coordenada ou raio menor = 3

segunda coordenada ou raio maior = 3.5

tensão de polarização (V) = [600 800]

depósito sensível a nêutrons (UO₂=1)(U₃O₈=2)(B₁₀=3) = 2

***** PARTÍCULA IONIZANTE *****

tipo (alfa=1)(fragmento de fissão=2) = 2

profundidade do ponto de emissão da partícula no depósito (mg/cm²) : 0.5

energia inicial (Mev) = 90

ângulos (graus) :

teta = [20 40 60 80]

omega = 45

***** CÁLCULO *****

aproximação da velocidade do elétron (analítica=1)(numérica=2) = 1

***** DISCRETIZAÇÃO *****

número de pontos da trilha : 500

***** SAÍDA DE DADOS *****

***** CÂMARA DE IONIZAÇÃO *****

(campo elétrico/pressão)max ((V/cm)/atm) = 576.6 <= 760

***** PARTÍCULA IONIZANTE *****

energia de escape do depósito (MeV) =

Columns 1 through 7

80.4256 78.3056 72.3078 42.7794 80.4256 78.3056 72.3078

Column 8

42.7794

alcance (cm) =

Columns 1 through 7

0.8569 0.8417 0.7982 0.5625 0.8569 0.8417 0.7982

Column 8

0.5625

comprimento da trilha (cm) =

Columns 1 through 7

0.5351 0.6731 0.7982 0.5625 0.5351 0.6731 0.7982

Column 8

0.5625

carga da trilha (pC) =

Columns 1 through 7

0.3480 0.4007 0.4064 0.2405 0.3480 0.4007 0.4064

Column 8

0.2405

***** PULSO DE CORRENTE *****

carga_ion (pC) =

Columns 1 through 7

0.1564 0.1738 0.1175 0.0153 0.1564 0.1738 0.1175

Column 8

0.0153

duração_ion (microseg) =

Columns 1 through 7

768.3891 768.3891 566.3578 123.1270 576.2918 576.2918 424.7684

Column 8

92.3452

carga_ele (pC) =

Columns 1 through 7

0.1916 0.2268 0.2888 0.2250 0.1916 0.2268 0.2888

Column 8

0.2250

duração_ele (microseg) =

Columns 1 through 7

1.4119 1.4119 1.4119 1.4119 1.3522 1.3522 1.3522

Column 8

1.3522

***** GRÁFICOS *****

número de cores (1 a 7) = 2

número de curvas em sequência/cor = 4

A.4 Apêndice do capítulo 4

A.4.1 Análise da influência dos parâmetros de entrada

Os símbolos aqui utilizados são definidos na secção 4.3.

Agrupando as impedâncias na entrada em Z_t , aplicando o teorema de Miller [Millman e Halkias, 1972] e desprezando-se o efeito da impedância refletida na saída, resulta o seguinte modelo equivalente :

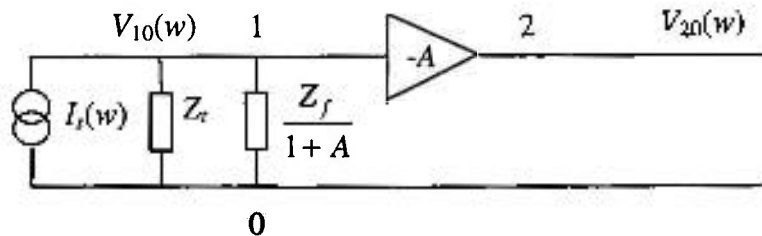


Figura A.4-1 : Modelo equivalente para análise da influência dos parâmetros de entrada

onde :

$i_s(t) \leftrightarrow I_s(w)$ é a corrente de sinal de entrada (desconsiderando seu caráter aleatório) e

$$Z_t = R_d // R_c // R_b // R_{amp} // (1/j \cdot w \cdot (C_d + C_c + C_{amp})) \quad (\text{A.4.1-1})$$

$$Z_f = R_f // (1/j \cdot w \cdot C_f) \quad (\text{A.4.1-2})$$

A tensão na entrada do amplificador pode ser escrita como

$$V_{10}(w) = \left(Z_t(w) // \frac{Z_f(w)}{A(w)+1} \right) \cdot I_s(w) \quad (\text{A.4.1-3})$$

Se na faixa de frequências de interesse $[w_{p1}, w_{p2}]$ for válida a relação

$$\text{abs} \left(\frac{Z_f(w)}{A(w)+1} \right) \ll \text{abs}(Z_t(w)) \quad (\text{A.4.1-4})$$

ou

$$\text{abs} \left(\left(\frac{1}{R_f} + j \cdot w \cdot C_f \right) \cdot (A(w)+1) \right) \gg \text{abs} \left(\frac{1}{R_t} + j \cdot w \cdot C_t \right) \quad (\text{A.4.1-5})$$

então

$$V_{10}(w) \cong \frac{Z_f(w)}{A(w)+1} \cdot I_s(w) \quad (\text{A.4.1-6})$$

Também para a resposta em frequência do amplificador (malha fechada) tem-se

$$H_{a,a}(w) = \frac{V_{20}(w)}{I_s(w)} = -\frac{V_{10}(w) \cdot A(w)}{I_s(w)} \quad (\text{A.4.1-7})$$

ou

$$H_{a,a}(w) = -\left(Z_f(w) // \frac{Z_f(w)}{A(w)+1} \right) \cdot A(w) \quad (\text{A.4.1-8})$$

Considerando válida a relação (A.4.1-5), obtém-se

$$H_{a,a}(w) \cong -Z_f(w) \cdot \frac{A(w)}{A(w)+1} \quad (\text{A.4.1-9})$$

e para

$$abs(A(w)) \gg 1 \quad (\text{A.4.1-10})$$

$$\boxed{H_{a,a}(w) \cong -Z_f(w)} \quad (\text{A.4.1-11})$$

Claramente as condições (A.4.1-5 e 10) são compatíveis, de modo que para minimizar a influência dos parâmetros de entrada e do ganho de malha aberta do amplificador, deve-se :

- maximizar C_f e/ou minimizar R_f .
- maximizar $abs(A)$ na faixa de frequências de interesse.

A condição de maximizar C_f ou minimizar R_f é oposta à condição obtida para maximizar a relação sinal / ruído (ver secção 4.3.1). No entanto, este fato não causa maiores problemas, pois é possível encontrar normalmente uma boa relação de compromisso nas aplicações de interesse.

A.4.2 Generalização do teorema da amostragem no domínio multidimensional

Este desenvolvimento é uma generalização do teorema da amostragem unidimensional encontrado em vários textos (ex.: Oppenheim e Schaffer [1975]).

Considere uma função $x(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$ no domínio contínuo e seja $X(w_1, \dots, w_{n-1})$ sua transformada de Fourier, isto é,

$$X(w_1, \dots, w_{n-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \cdot e^{-j(w_1 \tau_1 + \dots + w_{n-1} \tau_{n-1})} \cdot d\tau_1 \dots d\tau_{n-1} \quad (\text{A.4.2-1})$$

$$x(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) = \left(\frac{1}{2 \cdot \pi} \right)^{n-1} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} X(w_1, \dots, w_{n-1}) \cdot e^{j(w_1 \tau_1 + \dots + w_{n-1} \tau_{n-1})} \cdot dw_1 \dots dw_{n-1} \quad (\text{A.4.2-2})$$

A função discreta $x[k_1, \dots, k_{n-1}]$, tal que

$$x[k_1, \dots, k_{n-1}] = x(k_1 \cdot T, \dots, k_{n-1} \cdot T) \quad (\text{A.4.2-3})$$

constitui-se numa amostra de $x(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$ com espaçamento T nas diversas dimensões.

De (A.4.2-2 e 3) resulta

$$\begin{aligned} x[k_1, \dots, k_{n-1}] &= x(k_1 \cdot T, \dots, k_{n-1} \cdot T) \\ &= \left(\frac{1}{2 \cdot \pi} \right)^{n-1} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} X(w_1, \dots, w_{n-1}) \cdot e^{jT \cdot (w_1 k_1 + \dots + w_{n-1} k_{n-1})} \cdot dw_1 \dots dw_{n-1} \end{aligned} \quad (\text{A.4.2-4})$$

Seja $X^d(u_1, \dots, u_{n-1})$ a transformada de Fourier discreta de $x[k_1, \dots, k_{n-1}]$

$$X^d(u_1, \dots, u_{n-1}) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{k_{n-1}=-\infty}^{\infty} x[k_1, \dots, k_{n-1}] \cdot e^{-j(u_1 k_1 + \dots + u_{n-1} k_{n-1})} \quad (\text{A.4.2-5})$$

e

$$x[k_1, \dots, k_{n-1}] = \left(\frac{1}{2 \cdot \pi} \right)^{n-1} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} X^d(u_1, \dots, u_{n-1}) \cdot e^{j(u_1 k_1 + \dots + u_{n-1} k_{n-1})} \cdot du_1 \dots du_{n-1} \quad (\text{A.4.2-6})$$

Considere a equação (A.4.2-4) como a soma de integrais de comprimento $2 \cdot \pi / T$

$$\begin{aligned} &x[k_1, \dots, k_{n-1}] \\ &= \left(\frac{1}{2 \cdot \pi} \right)^{n-1} \cdot \sum_{\eta=-\infty}^{\infty} \int_{(2\eta-1)\pi/T}^{(2\eta+1)\pi/T} \dots \sum_{r_{n-1}=-\infty}^{\infty} \int_{(2r_{n-1}-1)\pi/T}^{(2r_{n-1}+1)\pi/T} X(w_1, \dots, w_{n-1}) \cdot e^{jT \cdot (w_1 k_1 + \dots + w_{n-1} k_{n-1})} \cdot dw_1 \dots dw_{n-1} \end{aligned} \quad (\text{A.4.2-7})$$

Cada integral pode ser reduzida ao intervalo $[-\pi / T, \pi / T]$ por mudança adequada das variáveis, ou seja,

$$x[k_1, \dots, k_{n-1}] = \left(\frac{1}{2 \cdot \pi} \right)^{n-1} \cdot \sum_{\eta=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \dots \sum_{r_{n-1}=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X \left(w_1 + \frac{2 \cdot \pi \cdot r_1}{T}, \dots, w_{n-1} + \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{n-1}}{T} \right) \cdot e^{j \cdot T \cdot (w_1 \cdot k_1 + \dots + w_{n-1} \cdot k_{n-1})} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (\eta \cdot k_1 + \dots + r_{n-1} \cdot k_{n-1})} \cdot dw_1 \dots dw_{n-1} \quad (\text{A.4.2-8})$$

Deslocando as somatórias para o centro da expressão e notando que $e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot (\eta \cdot k_1 + \dots + r_{n-1} \cdot k_{n-1})} = 1$, resulta

$$x[k_1, \dots, k_{n-1}] = \left(\frac{1}{2 \cdot \pi} \right)^{n-1} \cdot \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \dots \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \sum_{\eta=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{r_{n-1}=-\infty}^{\infty} X \left(w_1 + \frac{2 \cdot \pi \cdot r_1}{T}, \dots, w_{n-1} + \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{n-1}}{T} \right) \cdot e^{j \cdot T \cdot (w_1 \cdot k_1 + \dots + w_{n-1} \cdot k_{n-1})} \cdot dw_1 \dots dw_{n-1} \quad (\text{A.4.2-9})$$

Fazendo $w_i = \frac{u_i}{T}$ para $(1 \leq i \leq n-1)$ e substituindo em (A.4.2-9)

$$x[k_1, \dots, k_{n-1}] = \left(\frac{1}{2 \cdot \pi} \right)^{n-1} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{T^{n-1}} \cdot \sum_{\eta=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{r_{n-1}=-\infty}^{\infty} X \left(\frac{u_1}{T} + \frac{2 \cdot \pi \cdot r_1}{T}, \dots, \frac{u_{n-1}}{T} + \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{n-1}}{T} \right) \cdot e^{j \cdot (u_1 \cdot k_1 + \dots + u_{n-1} \cdot k_{n-1})} \cdot du_1 \dots du_{n-1} \quad (\text{A.4.2-10})$$

Comparando as equações (A.4.2-6 e 10) resulta a relação entre a transformada de Fourier da função contínua com a da função amostrada

$$X^d(u_1, \dots, u_{n-1}) = \frac{1}{T^{n-1}} \cdot \sum_{\eta=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{r_{n-1}=-\infty}^{\infty} X \left(\frac{u_1}{T} + \frac{2 \cdot \pi \cdot r_1}{T}, \dots, \frac{u_{n-1}}{T} + \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{n-1}}{T} \right) \quad (\text{A.4.2-11})$$

ou

$$X^d(w_1 \cdot T, \dots, w_{n-1} \cdot T) = \frac{1}{T^{n-1}} \cdot \sum_{\eta=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{r_{n-1}=-\infty}^{\infty} X \left(w_1 + \frac{2 \cdot \pi \cdot r_1}{T}, \dots, w_{n-1} + \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{n-1}}{T} \right) \quad (\text{A.4.2-12})$$

Analisando (A.4.2-12), vê-se que $X^d(w_1 \cdot T, \dots, w_{n-1} \cdot T)$ é uma somatória de termos $X(w_1, \dots, w_{n-1})$ centrados nos pontos $\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot r_1}{T}, \dots, \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{n-1}}{T} \right)$ das coordenadas (w_1, \dots, w_{n-1}) com o fator multiplicador $1/T^{n-1}$.

Para não haver sobreposição dos diversos termos deve-se ter

$$X(w_1, \dots, w_{n-1}) = 0 \quad \text{para} \quad |w_i| \geq \frac{\pi}{T} \quad (\text{A.4.2-13})$$

Então para $|u_i| \leq \pi$ ou $|w_i| \leq \frac{\pi}{T}$ (com $1 \leq i \leq n-1$), tem-se o espectro

$X(w_1, \dots, w_{n-1})$, ou seja,

$$X^d(u_1, \dots, u_{n-1}) = \frac{1}{T^{n-1}} \cdot X\left(\frac{u_1}{T}, \dots, \frac{u_{n-1}}{T}\right) \quad \text{para} \quad |u_i| \leq \pi \quad (\text{A.4.2-14})$$

ou

$$X^d(w_1 \cdot T, \dots, w_{n-1} \cdot T) = \frac{1}{T^{n-1}} \cdot X(w_1, \dots, w_{n-1}) \quad \text{para} \quad |w_i| \leq \frac{\pi}{T} \quad (\text{A.4.2-15})$$

Seja w_{max} a frequência tal que $X(w_1, \dots, w_{n-1}) = 0$ para $|w_i| > w_{max}$. Então a condição (A.4.2-13) é equivalente a

$$T < \frac{\pi}{w_{max}} \quad (\text{condição de Nyquist}) \quad (\text{A.4.2-16})$$

Observe-se que os resultados (A.4.2-14 e 15) são similares aos obtidos no domínio unidimensional [Oppenheim e Schaffer, 1975].

A.4.3 Filtros ideais : cálculo para o terceiro cumulante

De (4.4-31), (4.4-34) e da figura 4-25, pode-se escrever

• Cálculo de $J_{3,\Delta}$

$$J_{3,\Delta} = \frac{1}{u_{p2}^2} \cdot \int_{\Delta} \int_{\Delta} \cos(u_1 \cdot l_1 + u_2 \cdot l_2) \cdot du_1 \cdot du_2 = \frac{1}{u_{p2}^2} \cdot \int_{u_{p1}}^{u_{p2}-u_{p1}} \int_{u_{p1}}^{u_{p2}-u_2} \cos(u_1 \cdot l_1 + u_2 \cdot l_2) \cdot du_1 \cdot du_2 \quad (\text{A.4.3-1})$$

Desenvolvendo

$$\begin{aligned}
 J_{3,\Delta} \cdot u_{p2}^2 &= \frac{1}{l_1} \cdot \int_{u_{p1}}^{u_{p2}-u_{p1}} \left(\text{sen}\left(\left(u_{p2} - u_2\right) \cdot l_1 + u_2 \cdot l_2\right) - \text{sen}\left(u_{p1} \cdot l_1 + u_2 \cdot l_2\right) \right) \cdot du_2 \\
 &= \frac{1}{l_1 \cdot (l_2 - l_1)} \cdot \left(-\cos\left(\left(u_{p2} - u_{p1}\right) \cdot (l_2 - l_1) + u_{p2} \cdot l_1\right) + \cos\left(u_{p1} \cdot (l_2 - l_1) + u_{p2} \cdot l_1\right) \right) \\
 &\quad + \frac{1}{l_1 \cdot l_2} \cdot \left(\cos\left(u_{p1} \cdot l_1 + \left(u_{p2} - u_{p1}\right) \cdot l_2\right) - \cos\left(u_{p1} \cdot l_1 + u_{p1} \cdot l_2\right) \right)
 \end{aligned}
 \tag{A.4.3-2}$$

Reorganizando

$$\begin{aligned}
 J_{3,\Delta} \cdot u_{p2}^2 &= \frac{1}{l_1 \cdot (l_2 - l_1)} \cdot \left(\cos\left(\left(u_{p2} - u_{p1}\right) \cdot l_1 + u_{p1} \cdot l_2\right) - \cos\left(u_{p1} \cdot l_1 + \left(u_{p2} - u_{p1}\right) \cdot l_2\right) \right) \\
 &\quad + \frac{1}{l_1 \cdot l_2} \cdot \left(\cos\left(u_{p1} \cdot l_1 + \left(u_{p2} - u_{p1}\right) \cdot l_2\right) - \cos\left(u_{p1} \cdot l_1 + u_{p1} \cdot l_2\right) \right)
 \end{aligned}
 \tag{A.4.3-3}$$

Agrupando os termos comuns

$$\begin{aligned}
 J_{3,\Delta_1} \cdot u_{p2}^2 &= \frac{1}{l_1 \cdot (l_2 - l_1)} \cdot \cos\left(\left(u_{p2} - u_{p1}\right) \cdot l_1 + u_{p1} \cdot l_2\right) \\
 &\quad - \frac{1}{l_2 \cdot (l_2 - l_1)} \cdot \cos\left(u_{p1} \cdot l_1 + \left(u_{p2} - u_{p1}\right) \cdot l_2\right) \\
 &\quad - \frac{1}{l_1 \cdot l_2} \cdot \cos\left(u_{p1} \cdot (l_1 + l_2)\right)
 \end{aligned}
 \tag{A.4.3-4}$$

Fazendo $u_{p2} \cdot l_1 = a$ e $u_{p2} \cdot l_2 = b$ e considerando que $\frac{u_{p1}}{u_{p2}} = k_u$, resulta

$$\begin{aligned}
 J_{3,\Delta_1} &= \frac{1}{a \cdot (b - a)} \cdot \cos\left((1 - k_u) \cdot a + k_u \cdot b\right) - \frac{1}{b \cdot (b - a)} \cdot \cos\left(k_u \cdot a + (1 - k_u) \cdot b\right) \\
 &\quad - \frac{1}{a \cdot b} \cdot \cos\left(k_u \cdot (a + b)\right)
 \end{aligned}
 \tag{A.4.3-5}$$

• Cálculo de J_{3,Δ_2}

$$J_{3,\Delta_2} = \int \int_{\Delta_2} \cos(u_1 \cdot l_1 + u_2 \cdot l_2) \cdot du_1 \cdot du_2 = \int_{2u_{p1}}^{u_{p2}} \int_{u_{p1}-u_{p2}}^{-u_{p1}} \cos(u_1 \cdot l_1 + u_2 \cdot l_2) \cdot du_1 \cdot du_2 \quad (\text{A.4.3-6})$$

Desenvolvendo

$$\begin{aligned} J_{3,\Delta_2} \cdot u_{p2}^2 &= \frac{1}{l_1} \cdot \int_{2u_{p1}}^{u_{p2}} \left(\text{sen}(-u_{p1} \cdot l_1 + u_2 \cdot l_2) - \text{sen}((u_{p1} - u_2) \cdot l_1 + u_2 \cdot l_2) \right) \cdot du_2 \\ &= \frac{1}{l_1 \cdot l_2} \cdot \left(-\cos(-u_{p1} \cdot l_1 + u_{p2} \cdot l_2) + \cos(-u_{p1} \cdot l_1 + 2 \cdot u_{p1} \cdot l_2) \right) \\ &\quad + \frac{1}{l_1 \cdot (l_2 - l_1)} \cdot \left(\cos(u_{p1} \cdot l_1 + u_{p2} \cdot (l_2 - l_1)) - \cos(u_{p1} \cdot l_1 + 2 \cdot u_{p1} \cdot (l_2 - l_1)) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.4.3-7})$$

Reorganizando

$$\begin{aligned} J_{3,\Delta_2} \cdot u_{p2}^2 &= \frac{1}{l_1 \cdot l_2} \cdot \left(\cos(u_{p1} \cdot l_1 - 2 \cdot u_{p1} \cdot l_2) - \cos(u_{p1} \cdot l_1 - u_{p2} \cdot l_2) \right) \\ &\quad + \frac{1}{l_1 \cdot (l_2 - l_1)} \cdot \left(\cos((u_{p2} - u_{p1}) \cdot l_1 - u_{p2} \cdot l_2) - \cos(u_{p1} \cdot l_1 - 2 \cdot u_{p1} \cdot l_2) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.4.3-8})$$

Agrupando os termos comuns

$$\begin{aligned} J_{3,\Delta_2} \cdot u_{p2}^2 &= \frac{1}{l_1 \cdot (l_2 - l_1)} \cdot \cos((u_{p2} - u_{p1}) \cdot l_1 - u_{p2} \cdot l_2) - \frac{1}{l_2 \cdot (l_2 - l_1)} \cdot \cos(u_{p1} \cdot l_1 - 2 \cdot u_{p1} \cdot l_2) \\ &\quad - \frac{1}{l_1 \cdot l_2} \cdot \cos(u_{p1} \cdot l_1 - u_{p2} \cdot l_2) \end{aligned} \quad (\text{A.4.3-9})$$

Fazendo $u_{p2} \cdot l_1 = a$ e $u_{p2} \cdot l_2 = b$ e considerando que $\frac{u_{p1}}{u_{p2}} = k_u$, resulta

$$J_{3,\Delta_2} = \frac{1}{a \cdot (b - a)} \cdot \cos((1 - k_u) \cdot a - b) - \frac{1}{b \cdot (b - a)} \cdot \cos(k_u \cdot (a - 2 \cdot b)) - \frac{1}{a \cdot b} \cdot (k_u \cdot a - b) \quad (\text{A.4.3-10})$$

▪ Cálculo de $J_{3,\Delta 3}$

$$J_{3,\Delta 3} = \frac{1}{u_{p2}^2} \cdot \int \int_{\Delta 3} \cos(u_1 \cdot l_1 + u_2 \cdot l_2) \cdot du_1 \cdot du_2 = \int_{u_{p1}}^{u_{p2}-u_{p1}} \int_{-u_{p2}}^{-u_{p1}-u_2} \cos(u_1 \cdot l_1 + u_2 \cdot l_2) \cdot du_1 \cdot du_2 \quad (\text{A.4.3-11})$$

Desenvolvendo

$$\begin{aligned} J_{3,\Delta 3} \cdot u_{p2}^2 &= \frac{1}{l_1} \cdot \int_{u_{p1}}^{u_{p2}-u_{p1}} \left(\text{sen}\left((-u_{p1}-u_2) \cdot l_1 + u_2 \cdot l_2\right) - \text{sen}\left(-u_{p2} \cdot l_1 + u_2 \cdot l_2\right) \right) \cdot du_2 \\ &= \frac{1}{l_1 \cdot (l_2 - l_1)} \cdot \left(-\cos\left((u_{p2}-u_{p1}) \cdot (l_2 - l_1) - u_{p1} \cdot l_1\right) + \cos\left(u_{p1} \cdot (l_2 - l_1) - u_{p1} \cdot l_1\right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{l_1 \cdot l_2} \cdot \left(\cos\left(-u_{p2} \cdot l_1 + (u_{p2}-u_{p1}) \cdot l_2\right) - \cos\left(-u_{p2} \cdot l_1 + u_{p1} \cdot l_2\right) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.4.3-12})$$

Reorganizando

$$\begin{aligned} J_{3,\Delta 3} \cdot u_{p2}^2 &= \frac{1}{l_1 \cdot (l_2 - l_1)} \cdot \left(\cos\left(2 \cdot u_{p1} \cdot l_1 - u_{p1} \cdot l_2\right) - \cos\left(u_{p2} \cdot l_1 - (u_{p2}-u_{p1}) \cdot l_2\right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{l_1 \cdot l_2} \cdot \left(\cos\left(u_{p2} \cdot l_1 - (u_{p2}-u_{p1}) \cdot l_2\right) - \cos\left(u_{p2} \cdot l_1 - u_{p1} \cdot l_2\right) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.4.3-13})$$

Agrupando os termos comuns

$$\begin{aligned} J_{3,\Delta 3} \cdot u_{p2}^2 &= \frac{1}{l_1 \cdot (l_2 - l_1)} \cdot \cos\left(2 \cdot u_{p1} \cdot l_1 - u_{p1} \cdot l_2\right) - \frac{1}{l_2 \cdot (l_2 - l_1)} \cdot \cos\left(u_{p2} \cdot l_1 - (u_{p2}-u_{p1}) \cdot l_2\right) \\ &\quad - \frac{1}{l_1 \cdot l_2} \cdot \cos\left(u_{p2} \cdot l_1 - u_{p1} \cdot l_2\right) \end{aligned} \quad (\text{A.4.3-14})$$

Fazendo $u_{p2} \cdot l_1 = a$ e $u_{p2} \cdot l_2 = b$ e considerando que $\frac{u_{p1}}{u_{p2}} = k_u$, resulta

$$J_{3,\Delta 3} = \frac{1}{a \cdot (b-a)} \cdot \cos(k_u \cdot (2 \cdot a - b)) - \frac{1}{b \cdot (b-a)} \cdot \cos(a - (1 - k_u) \cdot b) - \frac{1}{a \cdot b} \cdot \cos(a - k_u \cdot b) \quad (\text{A.4.3-15})$$

A.4.4 Filtros ideais : quarto cumulante

Propõe-se calcular $C_{4,v,p,rad}[0,l,l]$ por meio de transformadas e convoluções unidimensionais. Seja então

$$C_{4,v,p,rad}[0,l,l] \cong \lambda_{rad} \cdot E\{Q_{rad}^4\} \cdot g_{4,p}[0,l,l] \quad (\text{A.4.4-1})$$

com

$$g_{4,p}[0,l,l] = T \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_p^2[m] \cdot h_p^2[m+l] \quad (\text{A.4.4-2})$$

Seja a função

$$h_{p2}[k] = h_p^2[k] \quad (\text{A.4.4-3})$$

então

$$g_{4,p}[0,l,l] = T \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{p2}[m] \cdot h_{p2}[m+l] \quad (\text{A.4.4-4})$$

Aplicando a transformada unidimensional de Fourier em relação a l , obtém-se

$$F_l^d \{g_{4,p}[0,l,l]\} = F_l^d \left\{ T \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{p2}[m] \cdot h_{p2}[m+l] \right\} = T \cdot H_{p2}^d(u) \cdot H_{p2}^d(-u) \quad (\text{A.4.4-5})$$

sendo

$$h_{p2}[k] \leftrightarrow H_{p2}^d(u) \quad (\text{A.4.4-6})$$

e podendo ser calculada como

$$H_{p2}^d(u) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot H_p^d(u) * H_p^d(u) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} H_p^d(\xi) \cdot H_p^d(u - \xi) \cdot d\xi \quad (\text{A.4.4-7})$$

Assim, o termo $g_{4,p}[0,l,l]$ pode ser escrito como

$$g_{4,p}[0,l,l] = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot T \cdot \int_{-\pi}^{\pi} H_{p2}^d(u) \cdot H_{p2}^d(-u) \cdot e^{j \cdot u \cdot l} \cdot du \quad (\text{A.4.4-8})$$

com $H_{p2}^d(u)$ dado por (A.4.4-7).

A partir de $H_p^d(u)$, utilizando (A.4.4-7 e 8), pode-se calcular $g_{4,p}[0,l,l]$, e portanto $C_{4,v,p,rad}[0,l,l]$. No entanto, neste apêndice, calcula-se apenas $C_{4,v,p,rad}[0,0,0]$.

A figura A.4-2 apresenta $H_{p2}^d(u)$ normalizada correspondente a um filtro passa-faixa ideal com resposta $H_p^d(u)$:

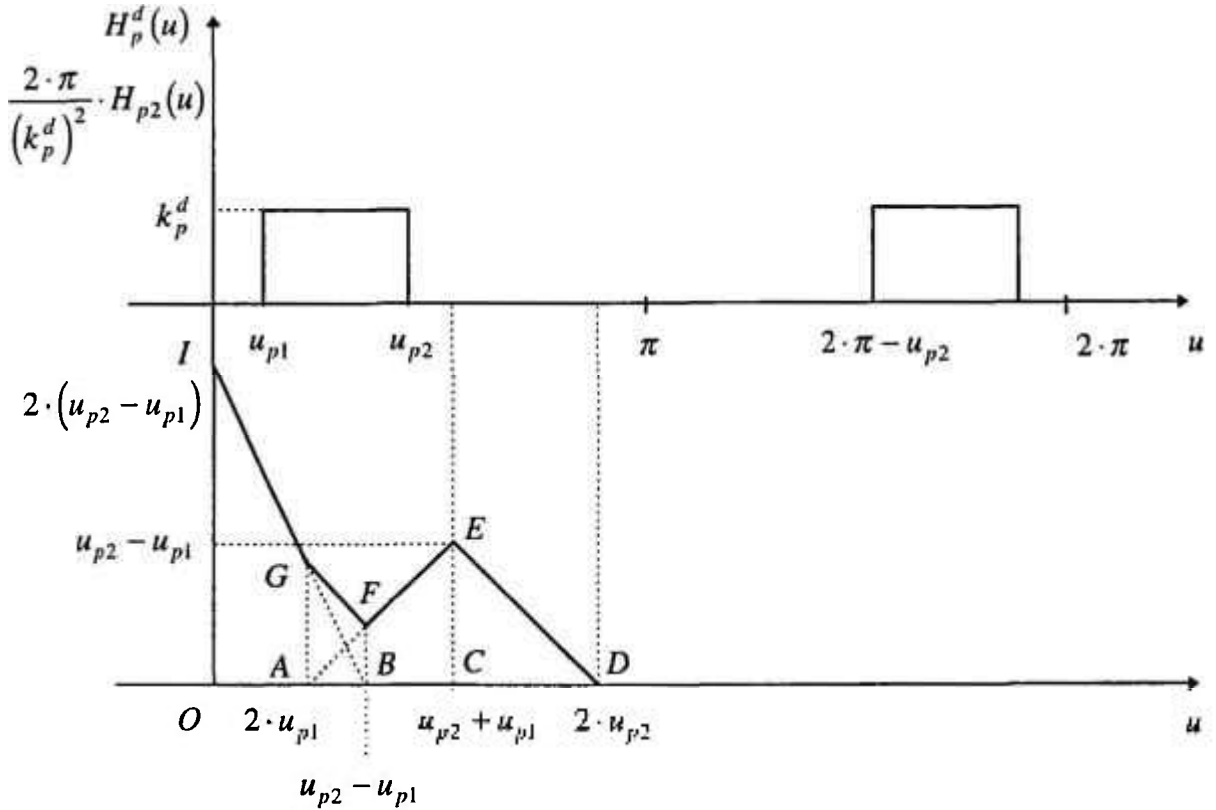


Figura A.4-2 : $H_{p2}^d(u)$ normalizada correspondente ao filtro passa-faixa ideal ($u \geq 0$)

Observe-se que para o cálculo de $g_{4,p}[0,l,l]$ deve-se ter

$$2 \cdot u_{p2} < \pi \quad (\text{A.4.4-9})$$

Utilizando (A.4.4-8), calcula-se $g_{4,p}[0,0,0]$. Resulta

$$g_{4,p}[0,0,0] = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot T \cdot \int_{-\pi}^{\pi} H_{p2}^d(u) \cdot H_{p2}^d(-u) \cdot du \quad (\text{A.4.4-10})$$

Considerando a figura A.4-2, pode-se escrever

$$g_{4,p}[0,0,0] = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{(k_p^d)^4 \cdot T}{4 \cdot \pi^2} \cdot 2 \cdot (g_{OAGI} + g_{ABFG} + g_{BCEF} + g_{CDE}) \quad (\text{A.4.4-11})$$

No cálculo dos diversos termos de (A.4.4-11) que se segue, omite-se a função degrau $U(u_{p2} - 3 \cdot u_{p1})$ até o final do desenvolvimento.

• trapézio OAGI

$$g_{OAGI} = \int_0^{2 \cdot u_{p1}} \left(-2 \cdot \xi + 2 \cdot (u_{p2} - u_{p1}) \right)^2 \cdot d\xi = 4 \cdot \int_0^{2 \cdot u_{p1}} \left(-\xi + u_{p2} - u_{p1} \right)^2 \cdot d\xi = 4 \cdot \int_{u_{p2} - 3 \cdot u_{p1}}^{u_{p2} - u_{p1}} \varphi^2 \cdot d\varphi \quad (\text{A.4.4-12})$$

com $\varphi = -\xi + u_{p2} - u_{p1}$

Logo

$$g_{OAGI} = \frac{4}{3} \cdot \left[(u_{p2} - u_{p1})^3 - (u_{p2} - 3 \cdot u_{p1})^3 \right] \quad (\text{A.4.4-13})$$

• trapézio ABFG

$$g_{ABFG} = \int_0^{u_{p2} - 3 \cdot u_{p1}} \left(-\xi + 2 \cdot (u_{p2} - 3 \cdot u_{p1}) \right)^2 \cdot d\xi = \int_{u_{p2} - 3 \cdot u_{p1}}^{2(u_{p2} - 3 \cdot u_{p1})} \varphi^2 \cdot d\varphi \quad (\text{A.4.4-14})$$

com $\varphi = -\xi + 2 \cdot (u_{p2} - 3 \cdot u_{p1})$

Logo

$$g_{ABFG} = \frac{7}{3} \cdot (u_{p2} - 3 \cdot u_{p1})^3 \quad (\text{A.4.4-15})$$

• trapézio BCEF

$$g_{BCEF} = \int_0^{2 \cdot u_{p1}} \left(\xi + u_{p2} - 3 \cdot u_{p1} \right)^2 \cdot d\xi = \int_{u_{p2} - 3 \cdot u_{p1}}^{u_{p2} - u_{p1}} \varphi^2 \cdot d\varphi \quad (\text{A.4.4-16})$$

com $\varphi = \xi + u_{p2} - 3 \cdot u_{p1}$

Logo

$$g_{BCEF} = \frac{1}{3} \cdot \left[(u_{p2} - u_{p1})^3 - (u_{p2} - 3 \cdot u_{p1})^3 \right] \quad (\text{A.4.4-17})$$

• triângulo CDE

$$g_{CDE} = \frac{1}{3} \cdot (u_{p2} - u_{p1})^3 \quad (\text{A.4.4-18})$$

Substituindo (A.4.4-13, 15, 17 e 18) em (A.4.4-11) e inserindo a função degrau, vêm

$$g_{4,p}[0,0,0] = \frac{(k_p^d)^4 \cdot T}{4 \cdot \pi^3} \cdot \left(2 \cdot (u_{p2} - u_{p1})^3 + \frac{2}{3} \cdot (u_{p2} - 3 \cdot u_{p1})^3 \cdot U(u_{p2} - 3 \cdot u_{p1}) \right) \quad (\text{A.4.4-19})$$

ou

$$g_{4,p}[0,0,0] = \frac{1}{2 \cdot \pi^3} \cdot (k_p^d \cdot T)^4 \cdot \left(\frac{u_{p2}}{T} \right)^3 \cdot \left((1 - k_u)^3 + \frac{1}{3} \cdot (1 - 3 \cdot k_u)^3 \cdot U(1 - 3 \cdot k_u) \right) \quad (\text{A.4.4-20})$$

Substituindo em (A.4.4-1) com $l = 0$, obtém-se

$$\boxed{C_{4,v_{p,rad}}[0,0,0] \cong \frac{1}{2 \cdot \pi^3} \cdot \lambda_{rad} \cdot E\{Q_{rad}^4\} \cdot (k_p^d \cdot T)^4 \cdot \left(\frac{u_{p2}}{T} \right)^3 \cdot \left((1 - k_u)^3 + \frac{1}{3} \cdot (1 - 3 \cdot k_u)^3 \cdot U(1 - 3 \cdot k_u) \right)} \quad (\text{A.4.4-21})$$

A.4.5 Variança do terceiro cumulante

Fazendo $x[k] = v_{p,rad}[k] \cdot v_{p,rad}[k + l_1] \cdot v_{p,rad}[k + l_2]$, calcula-se $S_{2,x}^d(0)$, a partir do cumulante

$$C_{2,x}[\delta] = E\{x[k] \cdot x[k + \delta]\} - E^2\{x[k]\} \quad (\text{A.4.5-1})$$

com

$$\begin{aligned} & E\{x[k] \cdot x[k + \delta]\} \\ &= E\{v_{p,rad}[k] \cdot v_{p,rad}[k + l_1] \cdot v_{p,rad}[k + l_2] \cdot v_{p,rad}[k + \delta] \cdot v_{p,rad}[k + l_1 + \delta] \cdot v_{p,rad}[k + l_2 + \delta]\} \end{aligned} \quad (\text{A.4.5-2})$$

e

$$E^2\{x[k]\} = E^2\{v_{p,rad}[k] \cdot v_{p,rad}[k + l_1] \cdot v_{p,rad}[k + l_2]\} \quad (\text{A.4.5-3})$$

Como interessa calcular a variança apenas na origem ($l_1 = l_2 = 0$), pode-se escrever

$$C_{2,x}[\delta] = E\{v_{p,rad}^3[k] \cdot v_{p,rad}^3[k + \delta]\} - E^2\{v_{p,rad}^3[k]\} \quad (\text{A.4.5-4})$$

Para expressar (A.4.5-4) na forma de cumulantes, é necessário conhecer as relações entre momentos e cumulantes de sexta ordem (ver apêndice A.2.1). Obtém-se

$$\begin{aligned}
C_{2,x}[\delta] = & C_{6,v,p,rad}[0,0,\delta,\delta,\delta] + 3 \cdot C_{4,v,p,rad}[\delta,\delta,\delta] \cdot C_{2,v,p,rad}[0] \\
& + 9 \cdot C_{4,v,p,rad}[0,\delta,\delta] \cdot C_{2,v,p,rad}[\delta] + 3 \cdot C_{4,v,p,rad}[0,0,\delta] \cdot C_{2,v,p,rad}[0] \\
& + 9 \cdot C_{3,v,p,rad}[\delta,\delta] \cdot C_{3,v,p,rad}[0,\delta] + 6 \cdot C_{2,v,p,rad}^2[\delta] + 9 \cdot C_{2,v,p,rad}^2[0] \cdot C_{2,v,p,rad}[\delta]
\end{aligned} \tag{A.4.5-5}$$

Desenvolve-se cada termo de (A.4.5-5) e aplica-se a transformada de Fourier em δ , ($F_{\delta}^d\{\cdot\}$), com o objetivo de calcular $S_{2,x}^d(0)$. Para obter uma expressão analítica, utiliza-se para $H_p^d(u)$ um filtro passa-faixa ideal (figura A.4-2).

Desenvolvimento dos termos de (A.4.5-5)

No cálculo que se segue considera-se que ($u_{p2} > 2 \cdot u_{p1}$) e omite-se a função degrau $U(u_{p2} - 3 \cdot u_{p1})$ até o final do desenvolvimento.

Sejam os sete termos de (A.4.5-5) designados em sequência por *A, B, C, D, E, G, I*.

a) Termo $A = C_{6,v,p,rad}[0,0,\delta,\delta,\delta]$

$$A \cong \lambda_{rad} \cdot E\{Q_{rad}^6\} \cdot T \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_p^3[m] \cdot h_p^3[m + \delta] \tag{A.4.5-6}$$

$$F_{\delta}^d\{A\} \cong \lambda_{rad} \cdot E\{Q_{rad}^6\} \cdot T \cdot H_{p3}^d(u) \cdot H_{p3}^d(-u) \tag{A.4.5-7}$$

com

$$h_{p3}[k] = h_p^3[k] \quad \text{e} \quad h_{p3}[k] \leftrightarrow H_{p3}^d(u) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot H_{p2}^d(u) * H_p^d(u) \tag{A.4.5-8}$$

Calculando em $u = 0$

$$F_{\delta}^d\{A\} \Big|_{u=0} \cong \lambda_{rad} \cdot E\{Q_{rad}^6\} \cdot T \cdot \left(H_{p3}^d(0)\right)^2 \tag{A.4.5-9}$$

com

$$H_{p3}^d(0) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot H_{p2}^d(u) * H_p^d(u) \Big|_{u=0} = 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot k_p^d \cdot \int_{u_{p1}}^{u_{p2}} H_{p2}^d(\xi) \cdot d\xi \tag{A.4.5-10}$$

$$H_{p3}^d(0) = \frac{1}{\pi} \cdot k_p^d \cdot \frac{(k_p^d)^2}{2 \cdot \pi} \cdot \left(2 \cdot \frac{(u_{p2} - 2 \cdot u_{p1})^2}{2} + \frac{(u_{p2} - 2 \cdot u_{p1})^2}{2} \right) = \frac{3}{4 \cdot \pi^2} \cdot (k_p^d)^3 \cdot (u_{p2} - 2 \cdot u_{p1})^2 \quad (\text{A.4.5-11})$$

Substituindo em (A.4.5-7)

$$F_{\delta}^d \{A\} \equiv \frac{9}{16 \cdot \pi^4} \cdot \lambda_{rad} \cdot E\{Q_{rad}^6\} \cdot T \cdot (k_p^d)^6 \cdot (u_{p2} - 2 \cdot u_{p1})^4 \quad (\text{A.4.5-12})$$

b) Termo B = $3 \cdot C_{4,v,p,rad}[\delta, \delta, \delta] \cdot C_{2,v,p,rad}[0]$

$$B \equiv 3 \cdot \left(\lambda_{rad} \cdot E\{Q_{rad}^4\} \cdot T \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_p[m] \cdot h_p^3[m + \delta] \right) \cdot C_{2,v,p,rad}[0] \quad (\text{A.4.5-13})$$

$$F_{\delta}^d \{B\} \Big|_{u=0} \equiv 3 \cdot \lambda_{rad} \cdot E\{Q_{rad}^4\} \cdot T \cdot H_{p3}^d(0) \cdot H_p^d(-0) \cdot C_{2,v,p,rad}[0] \quad (\text{A.4.5-14})$$

Logo

$$F_{\delta}^d \{B\} \Big|_{u=0} = 0 \quad \text{pois } H_p^d(0) = 0 \quad (\text{A.4.5-15})$$

c) Termo C = $9 \cdot C_{4,v,p,rad}[0, \delta, \delta] \cdot C_{2,v,p,rad}[\delta]$

$$C \equiv 9 \cdot \left(\lambda_{rad} \cdot E\{Q_{rad}^4\} \cdot T \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_p^2[m] \cdot h_p^2[m + \delta] \right) \cdot \left(\lambda_{rad} \cdot E\{Q_{rad}^2\} \cdot T \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_p[m] \cdot h_p[m + \delta] \right) \quad (\text{A.4.5-16})$$

$$F_{\delta}^d \{C\} \Big|_{u=0} \equiv \frac{9}{2 \cdot \pi} \cdot \lambda_{rad}^2 \cdot E\{Q_{rad}^2\} \cdot E\{Q_{rad}^4\} \cdot T^2 \cdot \left(H_{p2}^d(u) \cdot H_{p2}^d(-u) \right) * \left(H_p^d(u) \cdot H_p^d(-u) \right) \Big|_{u=0} \quad (\text{A.4.5-17})$$

com

$$\left(H_{p2}^d(u) \cdot H_{p2}^d(-u) \right) * \left(H_p^d(u) \cdot H_p^d(-u) \right) \Big|_{u=0} = 2 \cdot (k_p^d)^2 \cdot \int_{u_{p1}}^{u_{p2}} H_{p2}^d(\xi) \cdot H_{p2}^d(-\xi) \cdot d\xi \quad (\text{A.4.5-18})$$

e da figura A.4-2 :

$$= 2 \cdot (k_p^d)^2 \cdot \frac{(k_p^d)^4}{4 \cdot \pi^2} \cdot \left(4 \cdot \int_{u_{p1}}^{2u_{p1}} \left((u_{p2} - u_{p1}) - \xi \right)^2 \cdot d\xi + \int_0^{u_{p2}-3u_{p1}} \left(2 \cdot (u_{p2} - 3 \cdot u_{p1}) - \xi \right)^2 \cdot d\xi + \int_0^{u_{p1}} \left(\xi + (u_{p2} - 3 \cdot u_{p1}) \right)^2 \cdot d\xi \right) \quad (\text{A.4.5-19})$$

$$= \frac{1}{2 \cdot \pi^2} \cdot (k_p^d)^6 \cdot \left(4 \cdot \int_{u_{p2}-3u_{p1}}^{u_{p2}-2u_{p1}} \varphi^2 \cdot d\varphi + \int_{u_{p2}-3u_{p1}}^{2(u_{p2}-3u_{p1})} \varphi^2 \cdot d\varphi + \int_{u_{p2}-3u_{p1}}^{u_{p2}-2u_{p1}} \varphi^2 \cdot d\varphi \right) \\ = \frac{1}{6 \cdot \pi^2} \cdot (k_p^d)^6 \cdot \left(5 \cdot \left((u_{p2} - 2 \cdot u_{p1})^3 - (u_{p2} - 3 \cdot u_{p1})^3 \right) + 7 \cdot (u_{p2} - 3 \cdot u_{p1})^3 \right) \quad (\text{A.4.5-20})$$

Logo

$$\left(H_{p2}^d(u) \cdot H_{p2}^d(-u) \right) * \left(H_p^d(u) \cdot H_p^d(-u) \right) \Big|_{u=0} = \\ = \frac{1}{6 \cdot \pi^2} \cdot (k_p^d)^6 \cdot \left(5 \cdot (u_{p2} - 2 \cdot u_{p1})^3 + 2 \cdot (u_{p2} - 3 \cdot u_{p1})^3 \right) \quad (\text{A.4.5-21})$$

Substituindo (A.4.5-21) em (A.4.5-17)

$$F_\delta^d \{ C \} \Big|_{u=0} \\ \equiv \frac{3}{4 \cdot \pi^3} \cdot \lambda_{rad}^2 \cdot E \{ Q_{rad}^2 \} \cdot E \{ Q_{rad}^4 \} \cdot T^2 \cdot (k_p^d)^6 \cdot \left(5 \cdot (u_{p2} - 2 \cdot u_{p1})^3 + 2 \cdot (u_{p2} - 3 \cdot u_{p1})^3 \right) \quad (\text{A.4.5-22})$$

$$d) \text{ Termo } D = 3 \cdot C_{4,v,p,rad} [0,0,\delta] \cdot C_{2,v,p,rad} [0]$$

$$D \equiv 3 \cdot \left(\lambda_{rad} \cdot E \{ Q_{rad}^4 \} \cdot T \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_p^3[m] \cdot h_p[m+\delta] \right) \cdot C_{2,v,p,rad} [0] \quad (\text{A.4.5-23})$$

$$F_\delta^d \{ D \} \Big|_{u=0} \equiv 3 \cdot \lambda_{rad} \cdot E \{ Q_{rad}^4 \} \cdot T \cdot H_p^d(0) \cdot H_{p3}^d(-0) \cdot C_{2,v,p,rad} [0] \quad (\text{A.4.5-24})$$

Logo

$$F_\delta^d \{ D \} \Big|_{u=0} = 0 \quad \text{pois } H_p^d(0) = 0 \quad (\text{A.4.5-25})$$

e) Termo $E = 9 \cdot C_{3,v_p,rad}[\delta, \delta] \cdot C_{3,v_p,rad}[0, \delta]$

$$E \equiv 9 \cdot \left(\lambda_{rad} \cdot E\{Q_{rad}^3\} \cdot T \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_p[m] \cdot h_p^2[m + \delta] \right) \cdot \left(\lambda_{rad} \cdot E\{Q_{rad}^3\} \cdot T \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_p^2[m] \cdot h_p[m + \delta] \right) \quad (\text{A.4.5-26})$$

$$F_{\delta}^d\{E\}\Big|_{u=0} \equiv \frac{9}{2 \cdot \pi} \cdot \lambda_{rad}^2 \cdot E^2\{Q_{rad}^3\} \cdot T^2 \cdot \left(H_{p2}^d(u) \cdot H_p^d(-u) \right) * \left(H_p^d(u) \cdot H_{p2}^d(-u) \right) \Big|_{u=0} \quad (\text{A.4.5-27})$$

com

$$\left(H_{p2}^d(u) \cdot H_p^d(-u) \right) * \left(H_p^d(u) \cdot H_{p2}^d(-u) \right) \Big|_{u=0} = 2 \cdot (k_p^d)^2 \cdot \int_{u_{p1}}^{u_{p2}} H_{p2}^d(\xi) \cdot H_p^d(-\xi) \cdot d\xi \quad (\text{A.4.5-28})$$

e portanto idêntico a (A.4.5-21), ou seja,

$$\begin{aligned} & \left(H_{p2}^d(u) \cdot H_p^d(-u) \right) * \left(H_p^d(u) \cdot H_{p2}^d(-u) \right) \Big|_{u=0} \\ &= \frac{1}{6 \cdot \pi^2} \cdot (k_p^d)^6 \cdot \left(5 \cdot (u_{p2} - 2 \cdot u_{p1})^3 + 2 \cdot (u_{p2} - 3 \cdot u_{p1})^3 \right) \end{aligned} \quad (\text{A.4.5-29})$$

Substituindo (A.4.5-29) em (A.4.5-27)

$$\begin{aligned} & F_{\delta}^d\{E\}\Big|_{u=0} \\ & \equiv \frac{3}{4 \cdot \pi^3} \cdot \lambda_{rad}^2 \cdot E^2\{Q_{rad}^3\} \cdot T^2 \cdot (k_p^d)^6 \cdot \left(5 \cdot (u_{p2} - 2 \cdot u_{p1})^3 + 2 \cdot (u_{p2} - 3 \cdot u_{p1})^3 \right) \end{aligned} \quad (\text{A.4.5-30})$$

f) Termo $G = 6 \cdot C_{2,v_p,rad}^3[\delta]$

$$G \equiv 6 \cdot \left(\lambda_{rad} \cdot E\{Q_{rad}^2\} \cdot T \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_p[m] \cdot h_p[m + \delta] \right)^3 \quad (\text{A.4.5-31})$$

$$\begin{aligned} & F_{\delta}^d\{G\}\Big|_{u=0} \\ & \equiv 6 \cdot \lambda_{rad}^3 \cdot E^3\{Q_{rad}^2\} \cdot T^3 \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi^2} \cdot \left(H_p^d(u) \cdot H_p^d(-u) \right) * \left(H_p^d(u) \cdot H_p^d(-u) \right) * \left(H_p^d(u) \cdot H_p^d(-u) \right) \Big|_{u=0} \end{aligned} \quad (\text{A.4.5-32})$$

com

$$\frac{1}{4 \cdot \pi^2} \cdot \left(H_p^d(u) \cdot H_p^d(-u) \right) * \left(H_p^d(u) \cdot H_p^d(-u) \right) * \left(H_p^d(u) \cdot H_p^d(-u) \right) \Big|_{u=0} = \left(k_p^d \right)^3 \cdot H_{p3}^d(0) \quad (\text{A.4.5-33})$$

sendo $H_{p3}^d(0)$ dado por (A.4.5-11).

Substituindo (A.4.5-11 e 33) em (A.4.5-32)

$$F_\delta^d \{G\} \Big|_{u=0} \cong \frac{9}{2 \cdot \pi^2} \cdot \lambda_{rad}^3 \cdot E^3 \{Q_{rad}^2\} \cdot T^3 \cdot \left(k_p^d \right)^6 \cdot \left(u_{p2} - 2 \cdot u_{p1} \right)^2 \quad (\text{A.4.5-34})$$

g) Termo $I = 9 \cdot C_{2,v,p,rad}^2 [0] \cdot C_{2,v,p,rad} [\delta]$

É fácil ver que

$$F_\delta^d \{I\} \Big|_{u=0} = 0 \quad (\text{A.4.5-35})$$

Cálculo da variância

Pode-se escrever

$$\text{var} \left(\hat{C}_{3,v,p,rad} [0,0] \right) \cong \frac{1}{2 \cdot M + 1} \cdot S_{2,x}^d(0) \quad (\text{A.4.5-36})$$

com

$$S_{2,x}^d = F_\delta^d \{A\} + F_\delta^d \{B\} + F_\delta^d \{C\} + F_\delta^d \{D\} + F_\delta^d \{E\} + F_\delta^d \{G\} + F_\delta^d \{I\} \quad (\text{A.4.5-37})$$

Considerando (A.4.5-12, 15, 22, 25, 30, 34 e 35), calcula-se $\text{var} \left(\hat{C}_{3,v,p,rad} [0,0] \right)$:

$$\begin{aligned} \text{var} \left(\hat{C}_{3,v,p,rad} [0,0] \right) &\cong \frac{1}{2 \cdot M + 1} \cdot \left(\frac{9}{16 \cdot \pi^4} \cdot \lambda_{rad} \cdot E \{Q_{rad}^6\} \cdot T \cdot \left(k_p^d \right)^6 \cdot \left(u_{p2} - 2 \cdot u_{p1} \right)^4 \right. \\ &+ \frac{3}{4 \cdot \pi^4} \cdot \lambda_{rad}^2 \cdot E \{Q_{rad}^2\} \cdot E \{Q_{rad}^4\} \cdot T^2 \cdot \left(k_p^d \right)^6 \cdot \left(5 \cdot \left(u_{p2} - 2 \cdot u_{p1} \right)^3 + 2 \cdot \left(u_{p2} - 3 \cdot u_{p1} \right)^3 \right) \\ &- \frac{3}{4 \cdot \pi^4} \cdot \lambda_{rad}^2 \cdot E^2 \{Q_{rad}^1\} \cdot T^2 \cdot \left(k_p^d \right)^6 \cdot \left(5 \cdot \left(u_{p2} - 2 \cdot u_{p1} \right)^3 + 2 \cdot \left(u_{p2} - 3 \cdot u_{p1} \right)^3 \right) \\ &\left. + \frac{9}{2 \cdot \pi^2} \cdot \lambda_{rad}^3 \cdot E^3 \{Q_{rad}^2\} \cdot T^3 \cdot \left(k_p^d \right)^6 \cdot \left(u_{p2} - 2 \cdot u_{p1} \right)^2 \right) \quad (\text{A.4.5-38}) \end{aligned}$$

ou agrupando e inserindo a função degrau

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{C}_{3,v,p,rad}[0,0]) \cong & \frac{9}{16 \cdot \pi^4} \cdot \lambda_{rad}^2 \cdot E^2\{Q_{rad}^3\} \cdot T^2 \cdot (k_p^d)^6 \cdot (u_{p2} - 2 \cdot u_{p1})^4 \\ & \cdot \frac{1}{(2 \cdot M + 1) \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{\lambda_{rad}} \cdot \frac{E\{Q_{rad}^6\}}{E^2\{Q_{rad}^3\}} \right. \\ & + \frac{4 \cdot \pi}{3} \cdot \left(\frac{E\{Q_{rad}^2\} \cdot E\{Q_{rad}^4\}}{E^2\{Q_{rad}^3\}} + 1 \right) \cdot \frac{5 + 2 \cdot \left(\frac{u_{p2} - 3 \cdot u_{p1}}{u_{p2} - 2 \cdot u_{p1}} \right)^3 \cdot U(u_{p2} - 3 \cdot u_{p1})}{\frac{u_{p2}}{T} - 2 \cdot \frac{u_{p1}}{T}} \\ & \left. + 8 \cdot \pi^2 \cdot \lambda_{rad} \cdot \frac{E^3\{Q_{rad}^2\}}{E^2\{Q_{rad}^3\}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{u_{p2}}{T} - 2 \cdot \frac{u_{p1}}{T} \right)^2} \right) \end{aligned}$$

(A.4.5-39)

para $u_{p2} > 2 \cdot u_{p1}$.

A variância normalizada em relação a $C_{3,v,p,rad}^2[0,0]$ de (4.4-41) pode ser escrita

como

$$\begin{aligned} \frac{\text{var}(\hat{C}_{3,v,p,rad}[0,0])}{C_{3,v,p,rad}^2[0,0]} \cong & \frac{1}{(2 \cdot M + 1) \cdot T} \cdot \left(\frac{1}{\lambda_{rad}} \cdot \frac{E\{Q_{rad}^6\}}{E^2\{Q_{rad}^3\}} \right. \\ & + \frac{4 \cdot \pi}{3} \cdot \left(\frac{E\{Q_{rad}^2\} \cdot E\{Q_{rad}^4\}}{E^2\{Q_{rad}^3\}} + 1 \right) \cdot \frac{5 + 2 \cdot \left(\frac{u_{p2} - 3 \cdot u_{p1}}{u_{p2} - 2 \cdot u_{p1}} \right)^3 \cdot U(u_{p2} - 3 \cdot u_{p1})}{\frac{u_{p2}}{T} - 2 \cdot \frac{u_{p1}}{T}} \\ & \left. + 8 \cdot \pi^2 \cdot \lambda_{rad} \cdot \frac{E^3\{Q_{rad}^2\}}{E^2\{Q_{rad}^3\}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{u_{p2}}{T} - 2 \cdot \frac{u_{p1}}{T} \right)^2} \right) \end{aligned}$$

(A.4.5-40)

para $u_{p2} > 2 \cdot u_{p1}$.

SIMBOLOGIA

O objetivo destas notas é facilitar a leitura do trabalho.

No lugar de procurar apresentar uma lista de símbolos exaustiva, que seria muito extensa, optou-se por apresentar algumas regras que orientaram a escolha e montagem dos símbolos utilizados.

Notas gerais

- Como regra geral, para a representação de variáveis, parâmetros, operadores e funções, utilizam-se símbolos já consagrados pelo uso e associações mnemônicas.
- Símbolos : em itálico (ex.: a , $x(t)$, V_d).
- Variáveis aleatórias e processos estocásticos : em negrito (ex.: \mathbf{P} , $\mathbf{x}[k]$).
- Vetores : em maiúscula (ex.: V , \mathbf{P}).
- Subscritos : separados por vírgula (ex.: $v_{p,dig,rad}[k]$).
- Superescrito d : designa função da frequência correspondente ao domínio tempo-discreto ou transformada de Fourier discreta (ex.: $H^d(u)$, $F^d\{\cdot\}$).
- Transformada de Fourier : $F\{\cdot\}$ contínua, $F^d\{\cdot\}$ discreta, $F_\delta^d\{\cdot\}$ discreta na variável δ .
- Função impulsiva : $\delta(\cdot)$ contínua, $\delta[\cdot]$ discreta.
- Função degrau : $U(\cdot)$ contínua, $U[\cdot]$ discreta.
- Função densidade de probabilidade : $f(\cdot)$ ou $f(\cdot)$.
- Expectância : $E\{\cdot\}$.
- Probabilidade : $p\{\cdot\}$.
- Variância : $var(\cdot)$.
- Tempo-contínuo genérico : t (ex.: $x(t)$).
- Tempo-discreto genérico : k (ex.: $\mathbf{x}[k]$).
- Atrasos (“lags”) contínuos, utilizados para processos estacionários : τ , τ_i (ex.: $C_{2,x}(\tau)$).
- Atrasos (“lags”) discretos, utilizados para processos estacionários : l , l_i (ex.: $C_{3,x}[l_1, l_2]$).
- Frequência correspondente ao tempo-contínuo : w , w_i (ex.: $S_{n,x}(w_1, \dots, w_{n-1})$).
- Frequência correspondente ao tempo-discreto : u , u_i (ex.: $S_{n,x}^d(u_1, \dots, u_{n-1})$).

Símbolos lógico-matemáticos

*	convolução.
\cong	aproximadamente igual a.
\approx	da ordem de grandeza de.
\propto	proporcional.
()	utilizado para funções contínuas (ex.: $v_p(t)$).
[]	utilizado para funções discretas (sequências) (ex.: $v_p[k]$).
\cup, \cap	símbolos lógicos (união, intersecção).

Subscritos principais

<i>a</i>	adaptador de sinal.
<i>ana</i>	parte analógica.
<i>d</i>	detector de radiação.
<i>dig</i>	parte digital.
<i>ele</i>	elétron(s).
<i>f</i>	filtro, filme (depósito sensível a nêutrons) ou final.
<i>fpbi</i>	filtro passa-baixas ideal.
<i>g</i>	gás.
<i>ion</i>	íon(s).
<i>p</i>	processador de sinal.
<i>pf</i>	pré-filtro.
<i>n</i>	ordem da função estatística ou nêutron (radiação).
<i>rad, radi</i>	radiações nucleares primárias (<i>rad1, rad2...</i>).
<i>rex</i>	ruído extrínseco.
<i>rin</i>	ruído intrínseco.
α	radiação (partícula) alfa.
γ	radiação gama.
π	portador de carga $\pi = ion$ ou $\pi = ele =$ elétron.

Superescritos

<i>d</i>	discreto(a).
----------	--------------

Variáveis e parâmetros

- As variáveis e parâmetros normalmente utilizam subscritos mnemônicos. Ex.:
 k_{v_π} constante da velocidade v_π do portador de carga π .
 m_ε constante do campo elétrico ε .
 $q_{h_d,\pi}$, q_{h_d} , $q_{h_d,\pi,rad}$, $q_{h_d,rad}$ carga do pulso de corrente indicado pelo subscrito.
 λ_{rad} taxa média de eventos (de pulsos ou de pontos de Poisson), correspondente à radiação *rad*.

Processos estocásticos (sinais)

- Representação : $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}[k]$ normalmente de entrada.
 $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{y}[k]$ normalmente de saída.
- O sinal é identificado, normalmente na saída do bloco, por meio de subscritos mnemônicos separados por vírgulas. Ex.:
 $i_d(t)$, $i_{d,rad}(t)$ correntes geradas pelo detector.
 $v_{p,ana,rad}(t)$ sinal na saída da parte analógica do processador, antes do conversor C/D, correspondente à radiação *rad*.
 $v_{p,ana,rad}[k]$ sinal na saída da parte analógica do processador, após conversor C/D, correspondente à radiação *rad*.
 $v_{p,dig,rad}[k]$ sinal na saída da parte digital do processador, correspondente à radiação *rad*.
 $v_p(t)$, $v_p[k]$, $v_{p,rad}(t)$, $v_{p,rad}[k]$ sinais na saída da parte linear do processador, entrada do estimador.

Respostas dos blocos

- Utiliza-se a representação convencional, eventualmente com a inclusão de parâmetros aleatórios. Ex.:
 $h(t) \leftrightarrow H(w)$ respostas de um sistema linear tempo-contínuo e invariante no tempo.
 $h[k] \leftrightarrow H^d(u)$ respostas de um sistema linear tempo-discreto e invariante no tempo.
 $h(t, P) \leftrightarrow H(w, P)$ respostas de um sistema linear invariante no tempo, dependentes do vetor de parâmetros aleatórios P .

$h(t, \xi, \mathbf{P})$ resposta de um sistema linear a um impulso gerado no instante ξ ,
dependente do vetor de parâmetros aleatórios \mathbf{P} .

- O par de respostas (resposta impulsiva e resposta em frequência) de um ou mais blocos (ou sistema) são identificadas por meio de subscritos mnemônicos separados por vírgulas. Ex.:

$h_{d,\pi,rad}(t, \mathbf{P}_{rad}) \leftrightarrow H_{d,\pi,rad}(w, \mathbf{P}_{rad})$ respostas do detector, correspondentes ao
movimento do portador π e à radiação rad .

$h_p(t) \leftrightarrow H_p(w)$ respostas do processador (tempo-contínuo).

$h_{p,dig}[k] \leftrightarrow H_{p,dig}^d(u)$ respostas da parte digital do processador.

Funções estatísticas

- As funções estatísticas de ordem n , associadas a um processo estocástico, são representadas utilizando alguns princípios da nomenclatura encontrada em Mendel [1991] e Therrien [1992] e associados aos princípios utilizados neste trabalho para a representação de sinais. Ex.:

$C_{n,x}[k_1, \dots, k_n]$ cumulante de ordem n de $x[k]$.

$C_{n,v_p}[l_1, \dots, l_{n-1}]$ cumulante de ordem n de $v_p[k]$ (estacionário).

$C_{n,x}(t_1, \dots, t_n)$ cumulante de ordem n de $x(t)$.

$C_{n,v_{p,rad}}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$ cumulante de ordem n de $v_{p,rad}(t)$ (estacionário).

$f_{n,x}(x_1, \dots, x_n), f_{n,x}(X)$ função densidade de probabilidade de ordem n de $x(t)$ ou $x[k]$.

$M_{n,x}[k_1, \dots, k_n]$ momento de ordem n de $x[k]$.

$M_{n,v_p}[l_1, \dots, l_{n-1}]$ momento de ordem n de $v_p[k]$ (estacionário).

$S_{n,x}(w_1, \dots, w_{n-1})$ espectro de ordem n de $x(t)$ (estacionário).

$S_{n,v_{p,rad}}^d(u_1, \dots, u_{n-1})$ espectro de ordem n de $v_{p,rad}[k]$ (estacionário).

$\Phi_{n,x}(v_1, \dots, v_n), \Phi_{n,x}(V)$ primeira função característica de ordem n de $x(t)$ ou $x[k]$.

$\Psi_{n,x}(v_1, \dots, v_n), \Psi_{n,x}(V)$ segunda função característica de ordem n de $x(t)$ ou $x[k]$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alexander J.M. e Gazdik M.F. [1960]. *Recoil properties of fission products*. Physical Review, v. 120, n. 3, p. 874-886.
- Baratte G. [1987]. *Module numérique pour la mesure de débit de fluence neutronique par la méthode des fluctuations*. Gif-sur-Yvette: Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay. (CEA-N-2515).
- Benedict M., Pigford T.H. e Levi H.W. [1981]. *Nuclear chemical engineering*. 2. ed. New York, N.Y.: McGraw-Hill.
- Benomar K.O. [1994]. *Modélisation et traitement des signaux issus des détecteurs neutroniques: séparation neutrons / gammas*. Paris. Thèse (Grade de Docteur), Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay. (Orsay-3025).
- Bortner T.E., Hurst G.S. e Stone W.G. [1957]. *Drift velocities of electrons in some commonly used counting gases*. The Review of Scientific Instruments, v. 28, n. 2, p. 103-108.
- Burel J.P. e Bruel M. [1983]. *Mesures neutroniques : surveillance et protection du coeur (Centrales 900 et 1300 MW)*. Revue Générale Nucléaire, n. 5.
- Campbell N.R. e Francis V.J. [1946]. *A theory of valve and circuit noise*. Journal of the Institution of Electrical Engineers, v. 93, part III, n. 21, p. 45-52.
- DuBridge R.A., Neissel J.P., Boyd L.R., Green W.K. e Pielage H.W. [1965]. *Reactor control systems based on counting and cambelling techniques*. San Jose, Calif.: General Electric Company, July. (GEAP-4900).
- DuBridge R.A. [1967]. *Campbell theorem - System concepts and results*. IEEE Transactions on Nuclear Science , v. 14, n. 1, p. 241-246.
- Ellis W.H., Cooper Jr. J.L. e Sanders G.H. [1973]. *Gamma compensated pulsed ionization chamber wide range neutron / reactor power measurement system*. IEEE Transactions on Nuclear Science , v. 20, n. 1, p. 639-648.

- Endo Y., Ito T. e Seki E. [1982]. *A counting-campbelling neutron measurement system and its experimental results by test reactor*. IEEE Transactions on Nuclear Science, v. 29, n. 1, p. 714-717.
- Evans R.D. [1985]. *The atomic nucleus*. 2. ed. Malabar, Flo.: Krieger.
- Flynn B.J., Brothers M.H. e Shugars H.G. [1990]. *Nuclear instrument upgrade at Connecticut Yankee Atomic Power Station*. In: International Conference on Control & Instrumentation in Nuclear Installations, May 8-10. *Proceedings...* Glasgow: Institution of Nuclear Engineers, paper 3.
- Frank P.W. [1964]. *Recoil range of fission fragments*. Pennsylvania, Pa.: Bettis Atomic Power Laboratory, Apr. (WAPD-BT-30).
- Franzen W. e Cochran L.W. [1962]. *Pulse ionization chambers and proportional counters*. In: [Snell A H., [1962] Nuclear instruments and their uses. New York, N.Y.: John Wiley & Sons. vol.1.
- Goodings A. e Fowler E.P. [1990]. *Reactor instrumentation techniques in the UK*. In: International Conference on Control & Instrumentation in Nuclear Installations, May 8-10. *Proceedings...* Glasgow: Institution of Nuclear Engineers, paper 1.
- Gwinn D.A. e Trenholme W.M. [1963] *A log N and period amplifier utilizing statistical fluctuation signals from a neutron detector*. IEEE Transactions on Nuclear Science, v. 10, n. 2, p. 1-9.
- Harrer J.M. e Beckerley J.G. [1973]. *Nuclear power reactor instrumentation systems handbook*. 2. ed. U.S. Atomic Energy Commission. v. 1. (TID-25952-P1).
- Hornbeck J.A. [1951]. *The drift velocities of molecular and atomic ions in helium, neon and argon*. Physical Review, v. 84, n. 4, p. 615-620.
- ICRU 31 [1979]. International Commission on Radiation Units and Measurements. *Average energy required to produce an ion pair*. May 1. (ICRU REPORT 31).
- ICRU 49 [1993]. International Commission on Radiation Units and Measurements. *Stopping Powers and Ranges for Protons and Alpha Particles*. May 15. (ICRU REPORT 49).

- Kahn S., Harman R. e Forgue V. [1965]. *Energy distributions of fission fragments from uranium dioxide films*. Nuclear Science and Engineering, v. 23, p. 8-20.
- Knoll G.F. [1989]. *Radiation detection and measurement*. 2. ed. New York, N.Y.: John Wiley & Sons.
- Kowalski, E. [1970]. *Nuclear Electronics*. Berlin: Springer.
- Lamphere R.W. [1960]. *Fission detectors*. In.: [Marion J.B. e Fowler J.L., 1960] Fast Neutron Physics. New York, N.Y.: Interscience. Part 1.
- Lederer, C.M. [1967]. *Table of Isotopes*. 6. ed. New York, N.Y.: John Wiley & Sons.
- Lichtenstein R.M. [1959]. *Radiation measuring instrument*. US Pat. 2903591, Sept. 8.
- Marmier P. e Sheldon E. [1969]. *Physics of nuclei and particles*. New York, N.Y.: Academic. v.1.
- McKenzie J.M. [1959]. *Making fission counters for neutron monitoring*. Nucleonics, v. 17, n. 1, p. 60-65.
- Mendel J.M. [1991]. *Tutorial on higher-order statistics (spectra) in signal processing and system theory : theoretical results and some applications*. Proceedings of IEEE, v.79, n.3, p. 278-305.
- Millman J. e Halkias C.C. [1972]. *Integrated electronics: analog and digital circuits and systems*. Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha.
- Motchenbacher C.D. e Fitchen F.C. [1973]. *Low noise electronic design*. New York, N.Y.: John Wiley & Sons.
- Nicholson P.W. [1974]. *Nuclear electronics*. London: John Wiley & Sons.
- Nikias C.L. e Mendel J.M. [1993]. *Signal processing with higher-order spectra*. In.: Signal Processing Technology and Applications. New York, N.Y.: Ackenhusen J.G., 1995. (IEEE Technology Update Series).

- Oda M., Wada M. e Badono S. [1976]. *A wide range counting-campbelling nuclear instrumentation system*. IEEE Transactions on Nuclear Science, v. 23, n. 1, p. 304-305.
- Oppenheim A.V. e Schafer R.W. [1975]. *Digital signal processing*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.
- Oppenheim A.V. e Schafer R.W. [1989]. *Discrete-time signal processing*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.
- Ott H.W. [1988]. *Noise reduction techniques in electronic systems*. 2. ed. New York, N.Y.: John Wiley & Sons.
- Papoulis A. [1991]. *Probability, random variables and stochastic processes*. 3. ed. New York, N.Y.: McGraw-Hill.
- Plaige Y. e Quenee R. [1967]. *Use of Campbell's method in nuclear reactor control instrumentation*. IEEE Transactions on Nuclear Science, v. 14, n. 1, p. 247-252.
- Plaige Y., Vaux C. e Lyscar J. [1970]. *Mesure du flux neutronique par la méthode des fluctuations*. Gif-sur-Yvette: Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay. (CEA-R-4119).
- Plaige Y., Libs G., Peirano F. e Vaux C. [1978]. *Nouvelle instrumentation pour la protection et la conduite des réacteurs nucléaires*. In: Symposium on Nuclear Power Plant Control Instrumentation, Apr. 24-28. *Proceedings...* Cannes: IAEA, v. 2, p. 363-370.
- Popper G.F., Lipinski W.C. e Harrer J.M. [1967]. *A wide range counting-campbelling neutron-flux detection system*. Argonne, Ill.: Argonne National Laboratory, Apr. (ANL-7224).
- Popper G.F. e Harrer J.M. [1968]. *The performance of counting-mean-square voltage channel in the EBR II*. IEEE Transactions on Nuclear Science, v. 15, p. 22-27.
- Popper G.F. [1979]. *LMFBR neutron monitoring systems - A review of the state-of-the-art*. IEEE Transactions on Nuclear Science, v. 21, n. 1, p. 741-749.
- Price, W.J. [1964]. *Nuclear radiation detection*. 2. ed. New York, N.Y.: McGraw-Hill.

- Shanmugan K.S. e Breipohl A M. [1988]. *Random signals: detection, estimation and data analysis*. New york, N.Y.: John Wiley & Sons.
- Sharpe J. [1955]. *Nuclear radiation detectors*. New York, N.Y.: John Wiley & Sons.
- Therrien C.W. [1992]. *Discrete random signals and statistical signal processing*. Englewood Cliffs: N.J.: Prentice Hall.
- Thomas H.A. e McBride A.C [1967]. *Gamma discrimination and sensitivities of averaging and RMS type detector circuits for campbelling channels*. San Diego: Calif.: Gulf Electronic Systems, Oct. (GA-8035).
- Thomas J.B. [1971]. *An introduction to applied probability and random processes*. New York, N.Y.: John Wiley & Sons.
- Trenholme W.M. e Keefe D.J. [1967]. *A neutron flux measuring channel covering ten decades of reactor power with a single fixed-position detector*. IEEE Transactions on Nuclear Science, v. 14, n. 1, p. 253-260.
- Valentine K.H., Shepard R.L., Falter K.G. e Reese W.B. [1988]. *Development of a 10-decade single-mode reactor flux monitoring system*. Specialists' Meeting on In Core Instrumentation and Reactor Assesment, June 7-10. *Proceedings...* Cadarache: Nuclear Energy Agency, p. 195-204.
- Wilkinson D.H. [1950]. *Ionization chambers and counters*. Cambridge: University Press.