

**MPN-1: UM MÓDULO DE COMPUTAÇÃO PARA A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE  
TRANSPORTE EM MULTIREGIÕES ATRAVÉS DO MÉTODO  $P_N$**

**Mitsuo Yamaguchi e José Rubens Maiorino**

**INFORMAÇÃO IPEN 10  
IPEN - Inf - 10**

**NOVEMBRO/1981**

## **CONSELHO DELIBERATIVO**

### **MEMBROS**

Prof. Dr. Luiz Cintra do Prado – Presidente

Dr. Edgardo Azevedo Soares Júnior – Vice-Presidente

### **CONSELHEIROS**

Dr. Hécio Modesto da Costa

Dr. Ivano Humbert Marchesi

Prof. Dr. Waldyr Muniz Oliva

Prof. Dr. José Augusto Martins

### **REPRESENTANTES**

Dr. Jacob Charcot Pereira Rios

Dr. Samuel Angarita Ferreira da Silva

### **SUPERINTENDENTE**

Hernani Augusto Lopes de Amorim

**MPN-1: UM MÓDULO DE COMPUTAÇÃO PARA A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE  
TRANSPORTE EM MULTIREGIÕES ATRAVÉS DO MÉTODO  $P_N$**

Mitsuo Yamaguchi e José Rubens Maiorino



**CENTRO DE ENGENHARIA NUCLEAR  
ÁREA DE FÍSICA DE REATORES**

**INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES  
SÃO PAULO - BRASIL**

Série INFORMAÇÃO IPEN

INIS Categories and Descriptors

F51

COMPUTER CODES: Fortran IV

NEUTRON TRANSPORT: Radiation transport

LÉGENBRE POLYNOMIALS: Polynomials

ANISOTROPY: Isotropy

ISOTROPY: Anisotropy

CEN

---

Recbida em Abril de 1981.

Aprovada para publicação em Julho de 1981.

Nota: A redação, ortografia, conceitos e revisão final são de responsabilidade dos Autores.

# MPN-1: UM MÓDULO DE COMPUTAÇÃO PARA A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE EM MULTIREGIÕES ATRAVÉS DO MÉTODO $P_N$

Mitsuo Yamaguchi e José Rubens Maiorino

## RESUMO

Este trabalho descreve o módulo MPN-1, o qual é um programa de computador, feito em linguagem FORTRAN IV, que utiliza o método  $P_N$  (expansão em polinômios de Legendre) para a solução da equação de transporte linear e monoenergética em geometria plana, multiregiões e meios espalhadores anisotrópicos, não multiplicadores e em estado estacionário.

O módulo possibilita um número máximo de 12 regiões, e com a ordem máxima da aproximação,  $N = 15$ . Além disso, o espalhamento anisotrópico em cada região é tratado por uma expansão em polinômios de Legendre de ordem  $L$ , sendo que a ordem máxima é  $L = 15$ . As condições de contorno são do tipo:

- I) superfície livre
- II) incidência isotrópica
- III) incidência cossenoidal (combinação polinomial do tipo  $a\mu^{\alpha_1} + b\mu^{\alpha_2} + c\mu^{\alpha_3}$ )
- IV) incidência monodirecional (função delta).
- V) reflexão total.

Os dados de entrada requeridos são: a ordem da aproximação  $P_N$ , o número médio de partículas secundárias em cada região, fontes externas, espessura de cada região, coeficientes de Legendre da função transferência em cada região e tipo de condições de contornos nas faces externas. As saídas do programa são: albedo, taxa de transmissão, fator de desvantagem (no caso de cálculos celulares), fluxo total, fluxo angular e corrente.

## 1 - INTRODUÇÃO

O módulo MPN-1 é um programa de computador que soluciona a equação linear de transporte em multiregiões, meios não multiplicadores e em estado estacionário, através do método  $P_N^{(11,2)}$ . A equação de transporte é uma equação integro-diferencial que descreve a evolução da distribuição espacial, angular, energética e temporal de partículas através de um meio material. Em particular, a forma linear desta equação é adequada para descrever o transporte de partículas não carregadas, tais como nêutrons e ftons, na medida em que, na sua derivação, despreza-se as colisões entre as partículas que são transportadas através do meio. Então, a equação de transporte é a equação básica para a descrição da distribuição de nêutrons, com aplicação no projeto do caroço de reatores nucleares, e no campo da transferência radiativa, com aplicações em transferência de calor por radiação, blindagem de radiação gama e no cálculo do transporte da luz na atmosfera.

O método matemático aqui usado para solucionar a equação de transporte é o chamado "método  $P_N^{(11,2)}$ ", o qual trata a dependência angular por uma expansão finita de polinômios de

Legendre truncada na ordem  $(N + 1)$ . Neste método, a equação integro-diferencial é transformada, devido à aproximação acima descrita, num conjunto de  $(N + 1)$  equações diferenciais acopladas para os coeficientes da expansão polinomial, as quais são solucionadas por técnicas convenientes.

MPN-1 é o primeiro programa de uma série que os autores pretendem desenvolver, visando os objetivos do "grupo de blindagem e transporte de radiação" da AFR-CEN, que é o desenvolvimento de capacidade computacional para projetos de blindagens. Dentro desta linha de pesquisa, o MPN-1, como o primeiro de uma série, ficou limitado à solução da equação de transporte monoenergética, e em geometria plana. Entretanto, o MPN-1, soluciona o transporte de radiação em multiregiões e permite o espalhamento anisotrópico em cada região, além de permitir várias opções de fontes externas e condições de contorno. Desta forma, o MPN-1 pode ser usado para cálculos preliminares em projeto de blindagens, principalmente para o cálculo do "albedo" e do "fator de transmissão". Além disso, o MPN-1 enquadra-se dentro da filosofia dos chamados "problemas padrões" ("benchmark problems"), qual seja: fornecer a solução mais precisa possível de determinados problemas, a fim de compará-la com outros métodos e fornecer uma indicação de qual destes métodos é mais conveniente na solução de problemas práticos.

Nesta publicação apresenta-se o desenvolvimento analítico usado na solução da equação de transporte, os métodos numéricos usados, as comparações com outros métodos dos resultados obtidos, a listagem do programa fonte e um manual de instrução de uso do MPN-1.

## 2 - ANÁLISE

Seja um meio consistindo de  $K$  regiões, conforme ilustrado na Figura 1. Então, a equação de transporte<sup>(2)</sup> em cada região pode ser escrita como:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi_i(x, \mu) + \psi_i(x, \mu) = C_i \sum_{\ell=0}^{L_i} \frac{2\ell+1}{2} f_{\ell}^{(i)} P_{\ell}(\mu)$$

$$\int_{-1}^1 P_{\ell}(\mu') \psi_i(x, \mu') + \frac{S_i}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, K, \quad (1)$$

onde  $\psi_i(x, \mu)$  é o fluxo angular na região  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, K$ ),  $\mu$  é o cosseno diretor da radiação propagando-se através do meio (medido a partir do eixo  $x$ ),  $C_i$  é o número de partículas secundárias produzidas na região  $i$  (no nosso caso não consideramos meios multiplicadores, e portanto  $C_i$  é a razão entre a seção de choque macroscópica de espalhamento e a seção de choque macroscópica total),  $L_i$  é a ordem de espalhamento anisotrópico na região  $i$ ,  $f_{\ell}^{(i)}$  são os coeficientes da expansão da função transferência em polinômios de Legendre,  $P_{\ell}(\mu)$ ,  $S_i$  é a intensidade da fonte externa, isotrópica, na região  $i$ , e  $x$  é a variável ótica\*.

O módulo MPN-1 soluciona a Eq. (1), sujeita às seguintes condições de contorno:

$$\psi_1(0, \mu) = f(\mu), \quad \mu > 0, \quad (2.a)$$

$$\psi_K(x_K, -\mu) = h(\mu), \quad \mu > 0, \quad (2.b)$$

$$\psi_i(x_i, \mu) = \psi_{i+1}(x_i, \mu), \quad \mu \in (-1, 1), \quad i = 1, 2, \dots, (K-1) \quad (2.c)$$

(\*) A variável ótica é adimensional, sendo definida como o produto da seção de choque macroscópica total pela dimensão linear,  $x = \sum_t z_t$ .

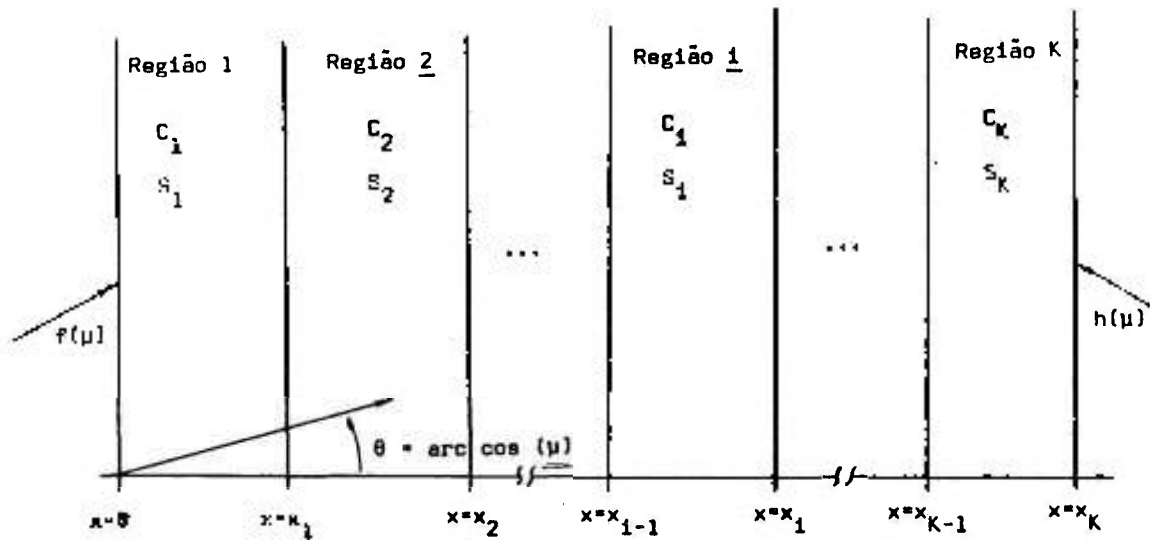


Figura 1 – Geometria usada no módulo MPN-1.

As condições acima refletem as seguintes situações físicas: a equação (2.a) indica que a distribuição incidente na face esquerda é especificada por uma função  $f(\mu)$ , a equação (2.b), que a distribuição incidente na face direita é especificada por uma função  $h(\mu)$ , (2.c), a continuidade da distribuição angular nas interfaces. Particularmente, no MPN-1, as seguintes opções foram usadas para as funções  $f(\mu)$  e  $h(\mu)$ :

- I) superfície livre;  $f(\mu) = 0$  e/ou  $h(\mu) = 0$ ,
- II) incidência isotrópica;  $f(\mu) = f_0$  e/ou  $h(\mu) = h_0$ ,
- III) incidência cossenoidal;  $f(\mu)$  e/ou  $h(\mu) = a\mu^{\alpha_1} + b\mu^{\alpha_2} + c\mu^{\alpha_3}$ ,
- IV) incidência monodirecional;  $f(\mu)$  e/ou  $h(\mu) = I_0 \delta(\mu - \mu_0)$ , onde  $I_0$  é a intensidade, e  $\mu_0$  o cosseno diretor do ângulo zenital de incidência, e
- V) reflexão total,  $\psi_1(0, \mu) = \psi_1(0, \bar{\mu})$  e/ou  $\psi_K(x_K, \mu) = \psi_K(x_K, \bar{\mu})$ ,  $\mu > 0$ .

Inicialmente, nota-se que uma solução particular da Eq. (1) pode facilmente ser obtida, como

$$\psi_i^p(x, \mu) = \frac{S_i}{2(1 - C_i)} \quad (3)$$

e, portanto pode-se usar o método  $P_N$  apenas para pesquisar a solução das equações homogêneas (desde que a solução geral possa ser obtida somando-se a particular à homogênea). Para tal, propõe-se como solução das equações homogêneas ( $S_i = 0$ ), a expansão em polinômios de Legendre,

$$\psi_i(x, \mu) = \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} \phi_n^{(i)}(x) P_n(\mu), \quad i = 1, 2, \dots, K, \quad (4)$$

onde as  $(N + 1)$  funções  $\phi_n^{(i)}(x)$ , para cada região, devem ser determinadas. Inserindo-se as soluções propostas, Eqs (4), nas equações homogêneas (Eq. (1) com  $S_i = 0$ ), pode-se obter, após fazer uso das propriedades de ortogonalidade e das relações de recorrência dos polinômios de Legendre, o seguinte conjunto de  $(N + 1)$  equações diferenciais acopladas para os coeficientes da expansão polinomial\*, em cada região  $i$ :

$$(n + 1) \frac{d\phi_{n+1}^{(i)}(x)}{dx} + n \frac{d\phi_{n-1}^{(i)}(x)}{dx} + (2n + 1) [1 - C_i f_n^{(i)}] \phi_n^{(i)}(x) = 0,$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (5)$$

Para se obter a solução do conjunto de equações diferenciais acopladas, Eqs. (5), em cada região, propõem-se:

$$\phi_n^{(i)}(x) = g_n^{(i)}(\nu) e^{-x/\nu}. \quad (6)$$

Inserindo as Eqs. (6) nas Eqs. (5) obtém-se o seguinte conjunto de  $(N + 1)$  equações lineares simultâneas,

$$\frac{(n+1)}{\nu} g_{n+1}^{(i)}(\nu) - \frac{n}{\nu} g_{n-1}^{(i)}(\nu) + (2n+1) [1 - C_i f_n^{(i)}] g_n^{(i)}(\nu) = 0,$$

$$n = 0, 1, \dots, N, \quad (7)$$

ou, em forma matricial

$$\underline{A}(\nu) \underline{G}^{(i)}(\nu) = \underline{0}, \quad (8)$$

onde, o vetor  $\underline{G}^{(i)}(\nu)$  é dado por:

$$\underline{G}^{(i)}(\nu) = \begin{pmatrix} g_0^{(i)}(\nu) \\ g_1^{(i)}(\nu) \\ \vdots \\ g_N^{(i)}(\nu) \end{pmatrix}$$

e a matriz tridiagonal,  $\underline{A}(\nu)$ ,  $[(N + 1) \times (N + 1)]$ , dado por:

(\*) A aproximação  $P_N$  requer que  $\frac{d\phi_{N+1}}{dx} = 0$ .

$$\underline{A}(\nu) = \begin{vmatrix}
 (1 - C_1 f_0^i) & -\frac{1}{\nu} & 0 & \dots & 0 \\
 -\frac{1}{\nu} & 3(1 - C_1 f_1^i) & -\frac{2}{\nu} & \dots & 0 \\
 0 & -\frac{2}{\nu} & 5(1 - C_1 f_2^i) & \dots & -\frac{N}{\nu} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & -\frac{N}{\nu} & \dots & (2N + 1)(1 - C_1 f_N^i)
 \end{vmatrix} \quad (10)$$

Para que o sistema de equações lineares possua solução não trivial, deve-se ter.

$$\det \underline{A}(\nu) = 0.$$

A Eq. (11) constitui-se numa equação polinomial de grau  $(N + 1)$  para a variável  $\nu$ , sendo que suas raízes fornecem os possíveis valores de  $\nu$  (auto-valores). Além disso, é possível mostrar<sup>(2)</sup> que se  $N$  é ímpar (como é o caso em que MPN-1 se restringe), os auto-valores aparecem em pares,  $\pm \nu_k$ . Desta forma, a solução proposta, Eq. (4), da equação homogênea, pode ser escrita como:

$$\psi_i^h(x, \mu) = \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} P_n(\mu) \sum_{k=1}^{(N+1)} A_k^{(i)} g_n^{(i)}(\nu_{ik}) e^{-x/\nu_{i,k}} \quad (12.a)$$

ou usando o fato que os auto-valores aparecem em pares,

$$\psi_i^h(x, \mu) = \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} P_n(\mu) \sum_{k=1}^{\frac{N+1}{2}} [A_{i,k}^+ e^{-x/\nu_{i,k}} + (-1)^n A_{i,k}^- e^{x/\nu_{i,k}}] g_n^{(i)}(\nu_{i,k}), \quad N \text{ ímpar} \quad (12.b)$$

e, portanto, a solução geral pode ser obtida como

$$\psi_i(x, \mu) = \psi_i^h(x, \mu) + \psi_i^p(x, \mu).$$

As auto funções  $g_n(\nu)$  são momentos adequados dos polinômios de Legendre, sendo que podem ser calculadas através das fórmulas de recorrência fornecidas por Siewert et al<sup>(14)</sup>, e discutidas na seção 3.

Para a determinação das constantes  $A_{i,k}$ , inicialmente nota-se que são necessários  $K \times (N + 1)$  condições de contorno, onde  $K$  é o número de regiões e  $N$  a ordem da aproximação. Por outro lado, as condições de contorno dadas pelas Eqs. (2) fornecem somente  $(K + 1)$  condições. Para contornar tal problema, usa-se a técnica clássica do método  $P_N$ , qual seja, as condições de contorno são geradas como momentos das condições de contorno dada pela Eq. (2) (condição de contorno tipo Marshak<sup>(2)</sup>) i.e, nas faces esquerda e direita tem-se:

$$\int_0^1 \mu^\ell \psi_i(0, \mu) d\mu = \int_0^1 \mu^\ell f(\mu) d\mu = L_\ell, \quad \ell = 1, 3, \dots, N, \quad (13.a)$$

$$\underline{A}(\nu) = \begin{vmatrix}
 (1 - C_1 f_0^i) & -\frac{1}{\nu} & 0 & \dots & 0 \\
 -\frac{1}{\nu} & 3(1 - C_1 f_1^i) & -\frac{2}{\nu} & \dots & 0 \\
 0 & -\frac{2}{\nu} & 5(1 - C_1 f_2^i) & \dots & -\frac{N}{\nu} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & -\frac{N}{\nu} & \dots & (2N + 1)(1 - C_1 f_N^i)
 \end{vmatrix} \quad (10)$$

Para que o sistema de equações lineares possua solução não trivial, deve-se ter.

$$\det \underline{A}(\nu) = 0.$$

A Eq. (11) constitui-se numa equação polinomial de grau  $(N + 1)$  para a variável  $\nu$ , sendo que suas raízes fornecem os possíveis valores de  $\nu$  (auto-valores). Além disso, é possível mostrar<sup>(2)</sup> que se  $N$  é ímpar (como é o caso em que MPN-1 se restringe), os auto-valores aparecem em pares,  $\pm \nu_k$ . Desta forma, a solução proposta, Eq. (4), da equação homogênea, pode ser escrita como:

$$\psi_i^h(x, \mu) = \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} P_n(\mu) \sum_{k=1}^{(N+1)/2} A_k^{(i)} g_n^{(i)}(\nu_{i,k}) e^{-x/\nu_{i,k}} \quad (12.a)$$

ou usando o fato que os auto-valores aparecem em pares,

$$\psi_i^h(x, \mu) = \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} P_n(\mu) \sum_{k=1}^{N+1} [A_{i,k}^+ e^{-x/\nu_{i,k}} + (-1)^n A_{i,k}^- e^{+x/\nu_{i,k}}] g_n^{(i)}(\nu_{i,k}), \quad N \text{ ímpar} \quad (12.b)$$

e, portanto, a solução geral pode ser obtida como

$$\psi_i(x, \mu) = \psi_i^h(x, \mu) + \psi_i^p(x, \mu).$$

As auto funções  $g_n(\nu)$  são momentos adequados dos polinômios de Legendre, sendo que podem ser calculadas através das fórmulas de recorrência fornecidas por Siewert et al<sup>(14)</sup>, e discutidas na seção 3.

Para a determinação das constantes  $A_{i,k}$ , inicialmente nota-se que são necessários  $K \times (N + 1)$  condições de contorno, onde  $K$  é o número de regiões e  $N$  a ordem da aproximação. Por outro lado, as condições de contorno dadas pelas Eqs. (2) fornecem somente  $(K + 1)$  condições. Para contornar tal problema, usa-se a técnica clássica do método  $P_N$ , qual seja, as condições de contorno são geradas como momentos das condições de contorno dada pela Eq. (2) (condição de contorno tipo Marshak<sup>(2)</sup>) i.e, nas faces esquerda e direita tem-se:

$$\int_0^1 \mu^\ell \psi_i(0, \mu) d\mu = \int_0^1 \mu^\ell f(\mu) d\mu = L_\ell, \quad \ell = 1, 3, \dots, N, \quad (13.a)$$

$$\int_{-1}^0 \mu^\ell \psi_K(x_K, \mu) d\mu = \int_{-1}^0 \mu^\ell h(\mu) d\mu = R_\ell, \quad \ell = 1, 3, \dots, N, \quad (13.b)$$

e nas interfaces,  $i = 1, 2, \dots, (K-1)$

$$\int_0^1 \mu^\ell \psi_i(x_i, \mu) d\mu = \int_0^1 \mu^\ell \psi_{i-1}(x_i, \mu) d\mu, \quad \ell = 1, 3, \dots, N, \quad (13.c)$$

e

$$\int_{-1}^0 \mu^\ell \psi_i(x_i, \mu) d\mu = \int_{-1}^0 \mu^\ell \psi_{i+1}(x_i, \mu) d\mu, \quad \ell = 1, 3, \dots, N, \quad (13.d)$$

Portanto, usando-se as  $K(N+1)$  condições de contorno dadas pelas Eqs. (13), obtém-se um sistema linear de  $K \times (N+1)$  equações, para as constantes  $A_{i,k}$ , i.e, nas faces direita e esquerda tem-se:

$$\sum_{k=1}^{N+1} A_{1,k} \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} g_n(\nu_{1,k}) \Delta_{\alpha,n} = L_\ell - \frac{1}{\ell+1} \frac{S_1}{2(1-C_1)}; \quad \ell = 1, 3, \dots, N; \quad \alpha = \ell - 1, \quad (14.a)$$

$$\sum_{k=1}^{N+1} A_{K,k} e^{-x_K/\nu_{K,k}} \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} g_n(\nu_{K,k}) (-1)^{\alpha+1+n} \Delta_{\alpha,n} = R_\ell + \frac{1}{(\ell+1)(1-C_K)} \frac{S_K}{2}; \quad \ell = 1, 3, \dots, N; \quad \alpha = \ell - 1, \quad (14.b)$$

e nas interfaces,  $i = 1, 2, \dots, (K-1)$ ,

$$\sum_{k=1}^{N+1} A_{i,k} e^{-x_i/\nu_{i,k}} \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} g_n(\nu_{i,k}) \Delta_{\alpha,n} - \sum_{k=1}^{N+1} A_{i+1,k} e^{-x_i/\nu_{i+1,k}} \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} g_n(\nu_{i+1,k}) \Delta_{\alpha,n} = \frac{1}{2(\ell+1)} \left[ \frac{S_{i+1}}{1-C_{i+1}} - \frac{S_i}{1-C_i} \right], \quad \ell = 1, 3, \dots, N; \quad \alpha = \ell - 1; \quad (14.c)$$

$$\sum_{k=1}^{N+1} A_{i,k} e^{-x_i/\nu_{i,k}} \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} g_n(\nu_{i,k}) (-1)^{1+\alpha+n} \Delta_{\alpha,n} - \sum_{k=1}^{N+1} A_{i+1,k} e^{-x_i/\nu_{i+1,k}} \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} g_n(\nu_{i+1,k}) (-1)^{1+\alpha+n} \Delta_{\alpha,n} =$$

$$= \frac{1}{2(\ell+1)} \left[ \frac{s_i}{1-C_i} - \frac{s_{i+1}}{1-C_{i+1}} \right], \quad \ell = 1, 3, \dots, N; \quad \alpha = \ell - 1, \tag{14.d}$$

onde:

$$\Delta_{\alpha, n} = \int_0^1 \mu^{\alpha+1} P_{\ell}(\mu) d\mu, \tag{15}$$

sendo que estes números podem ser gerados através da seguinte relação de recorrência<sup>(14)</sup>:

$$\Delta_{\alpha, \ell+2} = \frac{1+\alpha-\ell}{4+\alpha+\ell} \Delta_{\alpha, \ell}, \quad \ell = 0, 1, \dots, N-2, \tag{16.a}$$

com

$$\Delta_{\alpha, 0} = \frac{1}{\alpha+2}, \tag{16.b}$$

e

$$\Delta_{\alpha, 1} = \frac{1}{\alpha+3}. \tag{16.c}$$

Além disso, nota-se que quando as condições de contorno são do tipo de reflexão total, i.e

$$\psi_1(0, \mu) = \psi_1(0, -\mu), \quad \mu > 0 \tag{17.a}$$

e

$$\psi_K(x_K, \mu) = \psi_K(x_K, -\mu), \quad \mu > 0 \tag{17.b}$$

então as condições de contorno dadas pelas Eqs. (13.a) e (13.b) se alteram e, conseqüentemente, as Eqs. (14.a) e (14.b) modificam-se para a seguinte forma:

$$\sum_{k=1}^{N+1} A_{1,k} \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} \theta_n^{(i)}(\nu_{1,k}) \Delta_{\alpha, n} [1 - (-1)^n] = 0, \tag{18.a}$$

$$\ell = 1, 3, \dots, N; \quad \alpha = \ell - 1,$$

e

$$\sum_{k=1}^{N+1} A_{K,k} e^{-x/\nu_{K,k}} \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} g_n^{(i)}(\nu_{K,k}) \Delta_{\alpha,n} [1 - (-1)^n] = 0, \quad (18.b)$$

$$\ell = 1, 3, \dots, N; \quad \alpha = \ell - 1$$

Portanto, solucionando-se este sistema de equações lineares, para as constantes  $A_{i,k}$ , o fluxo angular pode ser calculado para qualquer valor das variáveis espacial e angular, através de:

$$\psi_i(x, \mu) = \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} P_n(\mu) \sum_{k=1}^{N+1} A_{i,k} g_n^{(i)}(\nu_{i,k}) e^{-x/\nu_{i,k}} + \frac{S_i}{2(1-C_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, K. \quad (19)$$

Uma vez conhecido o fluxo angular, todas as outras grandezas de interesse físico, podem ser calculadas. Assim, o fluxo total pode ser obtido por:

$$\phi_i(x) = \int_{-1}^1 \psi_i(x, \mu) d\mu, \quad i = 1, 2, \dots, K, \quad (20.a)$$

ou

$$\phi_i(x) = \sum_{k=1}^{N+1} A_{i,k} e^{-x/\nu_{i,k}} + \frac{S_i}{1-C_i}, \quad i = 1, 2, \dots, K, \quad (20.b)$$

e a corrente total,

$$j_i(x) = \int_{-1}^1 \mu \psi_i(x, \mu) d\mu, \quad i = 1, 2, \dots, K, \quad (21.a)$$

pode ser obtida através de,

$$j_i(x) = \sum_{k=1}^{N+1} A_{i,k} e^{-x/\nu_{i,k}} \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} g_n(\nu_{i,k}) \Delta_{\alpha,n} [1 + (-1)^{n+1}], \quad (21.b)$$

ou também como

$$j_i(x) = \sum_{k=1}^{N+1} A_{i,k} g_1(\nu_{i,k}) e^{-x/\nu_{i,k}}, \quad i = 1, 2, \dots, K, \quad (21.c)$$

Além disso, outras grandezas podem ser obtidas, tais como o "albedo", o qual é definido como a razão entre a corrente emergente e a corrente incidente na face esquerda, i.e,

$$\alpha = \frac{\int_0^1 \mu \psi_1(0, -\mu) d\mu}{\int_0^1 \mu \psi_1(0, \mu) d\mu}, \quad (22.a)$$

ou, lembrando que  $\psi_1(0, \mu) = f(\mu)$ , por:

$$\alpha = L^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^{N+1} A_{1,k} \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} g_n(\nu_{1,k}) (-1)^n \Delta_{0,n} + \frac{s_1}{4(1-C_1)} \right\} \quad (22.b)$$

e o fator de transmissão, o qual é definido como a razão da corrente transmitida na face direita pela corrente incidente na face esquerda,

$$\beta = \frac{\int_0^1 \mu \psi_K(x_K, \mu) d\mu}{\int_0^1 \mu \psi_1(0, \mu) d\mu} \quad (23.a)$$

ou,

$$\beta = L^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^{N+1} A_{K,k} e^{-x_K/\nu_{K,k}} \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} g_n(\nu_{K,k}) \Delta_{0,n} + \frac{s_K}{4(1-C_K)} \right\} \quad (23.b)$$

O fluxo total médio em cada região pode também ser obtido, através de:

$$\bar{\phi}_i = \frac{1}{(x_i - x_{i-1})} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, K, \quad (24.a)$$

ou

$$\bar{\phi}_i = \frac{1}{(x_i - x_{i-1})} \left\{ \sum_{k=1}^{N+1} A_{i,k} \nu_{i,k} (e^{-x_{i-1}/\nu_{i,k}} - e^{-x_i/\nu_{i,k}}) \right\} + \frac{s_i}{1-C_i}, \quad i = 1, 2, \dots, K. \quad (24.b)$$

Finalmente, no caso de problemas celulares, no qual tem-se apenas duas regiões com condições reflectivas nas duas faces, e fonte na segunda região, pode-se calcular o fator de desvantagem térmica, por:

$$\xi = \frac{\bar{\phi}_2}{\bar{\phi}_1} \quad (25)$$

### 3 - MÉTODOS NUMÉRICOS-COMPUTACIONAIS

Para se encontrar numericamente os valores das grandezas descritas na secção anterior, usou-se vários métodos numéricos, que serão descritos nesta secção.

A primeira grandeza que necessitou-se calcular são os auto-valores de cada região. Para tal, sabe-se que os auto-valores são raízes da eq. (11), a qual é uma equação polinomial de grau  $(N+1)$ . Para encontrar estes auto-valores, decompõe-se a matriz  $\underline{A}(\nu)$ , dada pela Eq. (10), em duas matrizes, i.é

$$\underline{A}(\nu) = \underline{B} - \nu \underline{C} \quad (26)$$

onde

$$\underline{B} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 2 & & \\ 0 & 2 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & N & 0 \end{vmatrix} \quad (27)$$

e,  $\underline{C}$  é a matriz diagonal

$$\underline{C} = \begin{vmatrix} (1 - Cf_0) & & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 3(1 - Cf_1) & & & \\ 0 & & & & \\ & & & & (2N + 1)(1 - Cf_N) \end{vmatrix} \quad (28)$$

Então, a Eq. (9) pode ser escrita como:

$$(\underline{B} - \nu \underline{C}) \underline{G}(\nu) = \underline{0} \quad (29)$$

onde não se usou o índice  $i$ , que representa a região por simplicidade. Desta forma, multiplicando-se a Eq. (29), pela esquerda, pela matriz  $\underline{C}^{-1}$ , tem-se

$$(\underline{C}^{-1} \underline{B} - \nu \underline{I}) \underline{G}(\nu) = \underline{0}, \quad (30)$$

onde  $\underline{I}$  é a matriz identidade. A Eq. (30) está na forma em que pode-se utilizar a subrotina NROOT e EIGEN, da SSP-IBM<sup>(15)</sup> ("Scientific Subroutine Package da IBM"). Estas subrotinas calculam os autovalores de uma matriz da forma  $\underline{C}^{-1} \underline{B}$ , através do "método da diagonalização de Jacobi"<sup>(15)</sup>, com as condições que  $\underline{B}$  seja simétrica e que  $\underline{C}$  seja positiva definida, sendo que as matrizes  $\underline{B}$  e  $\underline{C}$  dadas pelas Eqs. (27) e (28) satisfazem estas condições.

Outra grandeza que se necessita são as auto-funções  $g_\ell(\nu)$ , as quais podem ser calculadas pela relação de recorrência dada por Siewert et al<sup>(14)</sup>

$$g_{\ell+1}(\nu) = \frac{1}{\ell+1} [\nu h_\ell g_\ell(\nu) - \ell g_{\ell-1}(\nu)], \quad (31.a)$$

com

$$g_0(\nu) = 1 \text{ e } g_1(\nu) = \nu(1 - C), \quad (31.b)$$

onde

$$h_{\ell} = (2\ell + 1)(1 - Cf_{\ell}). \quad (31.c)$$

Entretanto, as fórmulas de recorrência dadas pelas Eqs. (31) não fornecem resultados numéricos que reproduzem o comportamento correto destas funções para valores  $|\nu| > 3$ , especialmente para valores grandes de  $\ell$ . Tal dificuldade ocorre, principalmente, por perdas de precisão numérica nas operações efetuadas no computador digital. Para contornar esta dificuldade, usa-se o fato conhecido<sup>(8)</sup>, que  $g_{\ell}(\nu)$ ,  $\ell > i$ , tende a zero quando  $\nu$  tende ao infinito. Define-se para valores grandes de  $\ell$ , por exemplo  $\ell = 40$ , as funções  $g_{\ell}^*(\nu) = 0$  e  $g_{\ell-1}^*(\nu) = 1$ , e então usa-se a relação de recorrência, Eqs. (31.a), de uma forma inversa, i.e.,

$$\ell g_{\ell-1}^*(\nu) = \nu h_{\ell} g_{\ell}^*(\nu) - (\ell + 1)g_{\ell+1}^*(\nu) \quad (32)$$

e desde que  $g_0(\nu) = 1$ , pode-se encontrar as funções  $g_{\ell}(\nu)$  através de:

$$g_{\ell}(\nu) = \frac{g_{\ell}^*(\nu)}{g_0^*(\nu)} \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (33)$$

Outras grandezas que necessitam ser calculadas são os números  $L_{\ell}$  e  $R_{\ell}$ ,  $\ell = 1, 3, \dots, N$ , os quais são definidos por:

$$L_{\ell} = \int_0^1 \mu^{\ell} f(\mu) d\mu, \quad \ell = 1, 3, \dots, N, \quad (34.a)$$

e

$$R_{\ell} = \int_{-1}^0 \mu^{\ell} h(\mu) d\mu, \quad \ell = 1, 3, \dots, N. \quad (34.b)$$

Obviamente, os números  $L_{\ell}$  e  $R_{\ell}$ , são funções da forma de  $f(\mu)$  e  $h(\mu)$ , e conseqüentemente das condições de contorno. Como discutido na secção 1, o módulo MPN-1, permite, opcionalmente, o uso de vários tipos de condições de contorno. Portanto, para cada tipo de opção obtém-se uma expressão para o cálculo de  $L_{\ell}$  e  $R_{\ell}$ . Então, tem-se:

I) superfície livre;  $f(\mu) = 0$  e/ou  $h(\mu) = 0 \rightarrow L_{\ell} = R_{\ell} = 0$

II) incidência isotrópica;  $f(\mu) = f_0$  e/ou  $h(\mu) = h_0 \rightarrow$

$$L_{\ell} = f_0 \frac{1}{\ell+1} \text{ e } R_{\ell} = h_0 \frac{(-1)^{\ell+2}}{\ell+1}, \quad \ell = 1, 3, \dots, N,$$

III) incidência cossenoidal:  $f(\mu)$  e/ou  $h(\mu) = a\mu^{\alpha_1} + b\mu^{\alpha_2} + c\mu^{\alpha_3} \rightarrow$

$$L_{\ell} = \frac{a}{\ell+\alpha_1+1} + \frac{b}{\ell+\alpha_2+1} + \frac{c}{\ell+\alpha_3+1} \text{ e}$$

$$R_{\ell} = \frac{a(-1)^{\ell+\alpha_1+2}}{\ell+\alpha_1+1} + \frac{b(-1)^{\ell+\alpha_2+2}}{\ell+\alpha_2+1} + \frac{c(-1)^{\ell+\alpha_3+2}}{\ell+\alpha_3+1}$$

IV) incidência monodirecional;  $f(\mu)$  e/ou  $h(\mu) = I_0 \delta(\mu - \mu_0) \rightarrow$

$$R_{\ell} = L_{\ell} = I_0 \mu_0^{\ell} \quad (\mu_0 = \text{cosseno do ângulo zenital de incidência}).$$

Com estas grandezas, e os números  $\Delta_{\alpha,n}$  os quais foram calculados diretamente através das Eqs. (16), pode-se solucionar o sistema linear de equações, dadas pelas Eqs. (14) e no caso de condições de contorno reflectivas pelas Eqs. (18), para os coeficientes  $A_{i,k}$ . Este sistema de equações é um conjunto de  $K \times (N + 1)$  equações, as quais podem ser escritas em forma matricial, por:

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$$

e, portanto, a simples inversão da matriz  $A$  fornece a solução do sistema ( $\underline{x} = \underline{A}^{-1} \underline{b}$ ). Para solucionar o sistema usou-se a subrotina SPAMA1<sup>(12)</sup>, a qual utiliza o método de eliminação de Gauss, aplicando técnicas de matrizes esparsas.

Uma vez determinado os coeficientes  $A_{i,k}$  todas as grandezas de interesse podem ser determinadas visando-se as equações discutidas na secção 2.

#### 4 – RESULTADOS NUMÉRICOS

Com o intuito de testar a confiabilidade do MPN-1, vários problemas, cujas soluções numéricas estão disponíveis na literatura ou podem ser obtidas usando-se outros códigos disponíveis no IPEN, foram solucionados; e seus resultados comparados com aqueles publicados.

O primeiro problema considerado foi um dos publicados por Devaux et al<sup>(3)</sup>, e consiste de uma placa, sem fonte, consistindo de um meio espalhador anisotrópico, sendo que na Tabela I reproduzimos a lei de espalhamento, com incidência isotrópica na face esquerda. Na Figura 2, ilustra-se a geometria deste problema. Na Tabela II, mostra-se os resultados obtidos, para o albedo e fator de transmissão, pelo MPN-1, junto com os resultados "exatos" publicados por Devaux et al<sup>(3)</sup>.

O segundo problema considerado foi um dos publicados por Ishiguro<sup>(7)</sup>, e consiste de dois meios espalhadores isotrópicos sem fonte, e com incidência cossenoidal na face esquerda. Considerou-se dois casos de incidência; caso 1:  $f(\mu) = \mu$ , e caso 2,  $f(\mu) = \mu^2$ . Na Tabela III, mostra-se o fator de transmissão calculado usando-se várias ordens do módulo MPN-1, bem como os resultados publicados por Ishiguro<sup>(7)</sup>.

O terceiro problema considerado foi o de três regiões espalhadores isotrópicos, com uma fonte unitária na região central, conforme ilustrado na Figura 2. Obviamente este problema é simétrico, e pode-se solucioná-lo como um problema de duas regiões, impondo-se a condição de reflexão na face de simetria ( $x = 0$ ). Este problema foi também solucionado usando-se o código de computação ANISN<sup>(5)</sup>, o qual soluciona a equação de transporte utilizando-se o método de ordenadas discretas, ou método  $S_N$ . Na Tabela IV, apresenta-se os valores do fluxo total normalizado em vários pontos, calculados pelo MPN-1 e pelo ANISN. A Figura 2 mostra os pontos para os quais o fluxo total foi calculado pelos dois métodos.

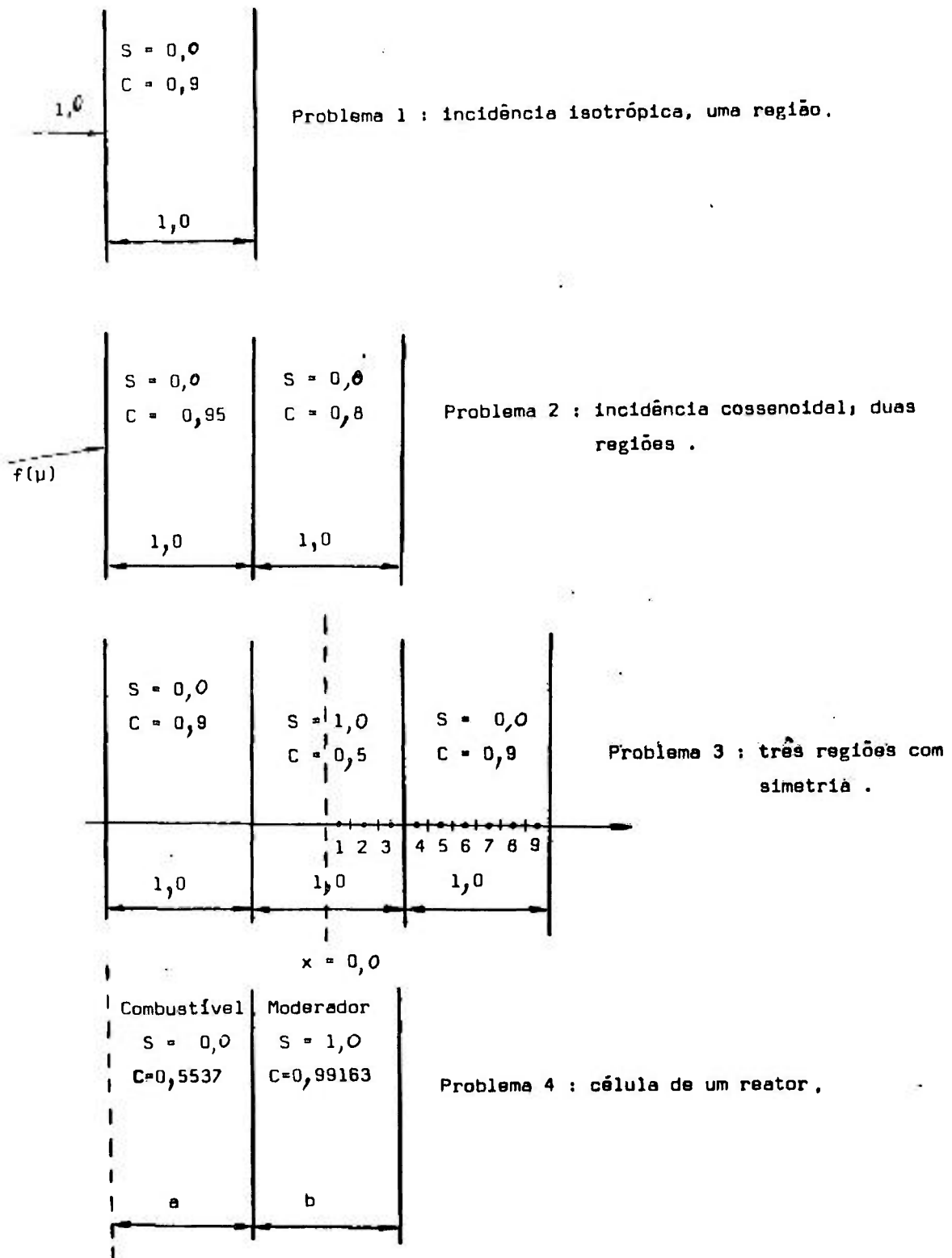


Figura 2 – Geometria dos problemas solucionados pelo MPN-1.

Tabela I

Lei de Espalhamento para o Problema 1

$l$	$(2l+1) f_l$
0	1,00000
1	2,00916
2	1,56339
3	0,67407
4	0,22215
5	0,04725
6	0,00671
7	0,00068
8	0,00005

Tabela II

Albedo e Fator de Transmissão para o Problema 1

	MPN-1								"Exatos"
	$P_1$	$P_3$	$P_5$	$P_7$	$P_9$	$P_{11}$	$P_{13}$	$P_{15}$	
Albedo	0,13771	0,16671	0,17008	0,17083	0,17117	0,17138	0,17152	0,17162	0,17192
Trans.	0,68209	0,65776	0,65555	0,65512	0,65488	0,65471	0,65459	0,65451	0,65427

Tabela III

Fator de Transmissão para o Problema 2

Casos	MPN-1								Ishiguro
	$P_1$	$P_3$	$P_5$	$P_7$	$P_9$	$P_{11}$	$P_{13}$	$P_{15}$	
1	0,24719	0,26697	0,26710	0,26735	0,26745	0,26749	0,26750	0,26750	0,26754
2	0,24719	0,27960	0,27963	0,27967	0,27980	0,27984	0,27985	0,27985	0,27988

**Tabela IV**  
Fluxo Total para o Problema

Posição	MPN-1 ( $P_{15}$ )	ANISN
1	1,22064	1,21930
2	1,17800	1,17796
3	1,07355	1,06236
4	0,873330	0,882895
5	0,726419	0,726682
6	0,611959	0,613214
7	0,511187	0,512359
8	0,416726	0,418000
9	0,320608	0,318090

Finalmente, consideramos o problema celular considerado previamente por Maiorino e Siewert<sup>(10)</sup>, os quais usaram o método  $F_N$ <sup>(13,6)</sup> para solucionar este problema, Eccleston e McCormick<sup>(4)</sup>, aqui denotados por E & M, por Laletin, Sultanov, Vlasov e Konjaev<sup>(9)</sup> aqui denotados por L-S-V-K e por Bond e Siewert<sup>(1)</sup>, aqui denotados por B & S. Neste problema considera-se a célula básica de um reator constituída de duas regiões, o combustível (região 1) e o moderador (região 2), com uma fonte de nêutrons no moderador, conforme ilustrado na Figura 2. Além disso, considerou-se que na região do combustível o espalhamento é isotrópico, enquanto que na região do moderador o espalhamento é anisotrópico, sendo que considerou-se vários casos de anisotropia. No Caso 1, considerou-se que ambas as regiões fossem espalhadoras isotrópicas, no Caso 2 considerou-se espalhamento linearmente anisotrópico no moderador com os coeficientes de expansão da função transferência dados por  $f_0 = 1,0$  e  $f_1 = 0,1$ , e no Caso 3 considerou-se  $f_0 = 1,0$ ,  $f_1 = 0,32362667$  e  $f_2 = 0,048856$ . Salienta-se que estes foram os casos considerados pelos autores previamente citados. Na Tabela V apresenta-se os resultados do fator de desvantagem térmica obtidos pelo MPN-1 e compara-se com aqueles obtidos pelos outros autores. Finalmente, pelos resultados obtidos confirma-se<sup>(10)</sup> que os resultados de E & M não são precisos para o Caso 3.

**Tabela V**  
Fluxo Total para o Problema 3

Casos	$P_1$	$P_3$	$P_5$	$P_7$	$P_9$	$P_{11}$	$P_{13}$	$P_{15}$	B&S	F-7	E&M	L-S-V-K
1*	1,2530	1,3550	1,3828	1,3939	1,3994	1,4023	1,4039	1,4049	1,4077	1,4075		
2*	1,2301	1,3323	1,3599	1,3712	1,3767	1,3796	1,3812	1,3822	1,3849	1,3848		
3**	1,3166	1,4515	1,4801	1,4902	1,4945	1,4966	1,4977	1,4984		1,5002	1,4049	1,5002

\* Dimensões da célula:  $a = 0,215$ ;  $b = 2,4465$ .

\*\* Dimensões da célula:  $a = 0,2868$ ;  $b = 3,262$ .

## 5 – CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou o desenvolvimento do módulo MPN-1, o qual soluciona a equação de transporte linear monoenergética em multiregiões espalhadoras anisotrópicas, não multiplicadoras e em estado estacionário. Em todos os problemas solucionados pelo MPN-1, os resultados numéricos foram comparados com aqueles publicados em outros trabalhos, e demonstram a capacidade do MPN-1 de fornecer resultados precisos. Desta forma, o MPN-1 pode ser usado para cálculos preliminares com relativa segurança, principalmente na área de blindagem de radiação. Assim, por exemplo, o cálculo da taxa de transmissão e do albedo em blindagens constituída de vários materiais pode ser obtido pelo MPN-1.

Finalmente, salienta-se que como continuação deste trabalho, pretende-se desenvolver um outro módulo (MPN-2), o qual levará em conta a dependência energética do campo de radiação, e que, se possível, acoplará o transporte de nêutrons e fótons.

## APÊNDICE – DADOS DE ENTRADA E LISTAGEM DO PROGRAMA MPN-1

Nesta seção apresenta-se as instruções para uso do programa MPN-1. Além disso, uma listagem do programa fonte é fornecida, bem como a saída de alguns problemas amostra discutidos na seção 4.

### INSTRUÇÕES PARA ENTRADA NO MPN-1

Cartão	Nome	Coluna	Formato	Descrição
1	Title	1-72	18A4	Título do problema.
2	N	1-3	I3	Ordem de aproximação do método (ímpar e $\leq 15$ ).
	NR	4-6	I3	Número de regiões ( $\leq 12$ ).
	LE	7-9	I3	Lei de espalhamento da seção de choque de espalhamento:  = 0 – espalhamento isotrópico. Não é necessário o cartão 6.  > 0 – lei de espalhamento igual para todas as regiões. Fornecer no cartão 6 apenas para uma região.  < 0 – lei de espalhamento diferente para as regiões.
	NFE	10-12	I3	Tipo de condição de contorno na face esquerda:  = 0 – superfície livre ou fluxo incidente. Ver cartão 7.  > 0 – refletida.
	NFD	13-15	I3	Tipo de condição de contorno na face direita:  = 0 – superfície livre ou fluxo incidente. Ver cartão 8.  > 0 – refletida.
3	C	1-72	6D12.0	Número médio de partículas secundárias, $C_i = \frac{\sum_{sj} s_j}{\sum_{ti} t_i}$ (NR elementos).

Cartão	Nome	Coluna	Formato	Descrição
4	S	1-72	6D12.0	Fonte externas normalizadas (NR elementos).
5	X	1-72	6D12.0	Espessura ótica das regiões (NR elementos).
6	F	1-72	6D12.0	Coeficientes da expansão em polinômios de Legendre da função de transferência. Ver LE do cartão 2. (N+1 elementos, cada região começando com um novo cartão)*.
7	NCE	1-3	I3	Condição de contorno na face esquerda com fluxo incidente dado por $f(\mu)$ , se NFE = 0:  $< 0 - f(\mu) = I_{01} \delta(\mu - \mu_{01})$ .  $= 0 - f(\mu) = 0$ (superfície livre).  $> 0 - f(\mu) = a_1 \mu^{\alpha_1} + a_2 \mu^{\alpha_2} + a_3 \mu^{\alpha_3}$
	NA1	4-6	I3	Valor de $a_1$ .
	NA2	7-9	I3	Valor de $a_2$ .
	NA3	10-12	I3	Valor de $a_3$ .
	A1	13-24	D12.0	Valor de $a_1$ .
	A2	25-36	D12.0	Valor de $a_2$ .
	A3	37-48	D12.0	Valor de $a_3$ .
	QE	49-60	D12.0	Valor de $I_{01}$ .
	COSE	61-72	D12.0	Valor de $\mu_{01}$ .
8	NCD	1-3	I3	Condição de contorno na face direita com fluxo incidente dado por $h(\mu)$ , se NFD = 0:  $< 0 - h(\mu) = I_{02} \delta(\mu - \mu_{02})$ .  $= 0 - h(\mu) = 0$ (superfície livre).  $> 0 - h(\mu) = b_1 \mu^{\beta_1} + b_2 \mu^{\beta_2} + b_3 \mu^{\beta_3}$ .

\*A ordem máxima da expansão deve ser N. Nos casos em que a ordem de expansão for menor que N, deve-se colocar zeros para os coeficientes de ordens maiores, até totalizar N+1 elementos.

Cartão	Nome	Coluna	Formato	Descrição
9	NB1	4-6	I3	Valor de $\beta_1$ .
	NB2	7-9	I3	Valor de $\beta_2$ .
	NB3	10-12	I3	Valor de $\beta_3$ .
	B1	13-24	D12.0	Valor de $b_1$ .
	B2	25-36	D12.0	Valor de $b_2$ .
	B3	37-48	D12.0	Valor de $b_3$ .
	QD	49-60	D12.0	Valor de $l_{02}$ .
	COSD	61-72	D12.0	Valor de $\mu_{02}$ .
	NP1	1-3	I3	Imprime o fluxo angular se $> 0$ .
	NP2	4-6	I3	Imprime o fluxo total se $> 0$ .
	NP3	7-9	I3	Imprime o albedo se $> 0$ .
	NP4	10-12	I3	Imprime a taxa de transmissão se $> 0$ .
	NP5	13-15	I3	Imprime a corrente total se $> 0$ .
	NP6	16-18	I3	Imprime o fluxo total médio se $> 0$ .
NP7	19-21	I3	Imprime o fator de desvantagem térmica (para o caso de células) se $> 0$ .	
10	ND	1-36	12I3	Obs.: no caso de células, o problema deve ter apenas 2 regiões, onde a região 1 é o combustível de meia espessura ótica X(1) e a região 2 é o moderador com espessura ótica X(2).
				Número de divisões ( $\leq 20$ ) de cada região para a impressão dos fluxos angular e total, e da corrente total (NR elementos). Este cartão deve ser fornecido somente se NP1 ou NP2 ou NP5 for $> 0$ .  O programa permite solucionar vários problemas, cada problema iniciado com um novo cartão 1.

```

C
C   MPN-1 E UM PROGRAMA DE COMPUTADOR QUE UTILIZA O
C   METODO PN PARA SOLUCAO DA EQUACAO DE TRANSPORTE DE
C   RADIAAO EM UM MEIO DE MULTIREGIES COM ESPALHAMENTO
C   ANISOTROPICO.
C
C   DIMENSIONAMENTO DAS VARIAVEIS -
C   KMAX = NUMERO MAXIMO DE REGIOES
C   NMAX = MAXIMA APROXIMACAO DO METODO + 1
C   NT   = (KMAX) X (NMAX).
C   NMD  = (NMAX) / 2
C   NMT  = 3 X (NMAX)
C   ADM  = NUMERO MAXIMO DE DIVISOES ESPACIAIS DAS REGIES + 1
C   NQU  = (NMAX) X (NMAX)
C
C   COMMON /DATA/ C(KMAX),S(KMAX),X(KMAX),F(KMAX,NMAX),
C   1             CF(NT),VNI(NT),VGL(NT,NMAX)
C   DIMENSION TITLE(18),ND(KMAX)
C
C   IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C   COMMON /DATA/ C(12),S(12),X(12),F(12,16),
C   1             CF(192),VNI(192),VGL(192,16)
C   COMMON /CCDNT/ NCL,NA1,NA2,NA3,A1,A2,A3,QE,COSE,
C   1             NCD,NB1,NB2,NB3,B1,B2,B3,QU,COSD,
C   2             NFE,NFD
C   DIMENSION TITLE(18),ND(12)
C
C   999 READ(5,100,END=998)(TITLE(I),I=1,18)
C   READ(5,110)N,NR,LE,NFE,NFD
C   READ(5,120)(C(I),I=1,NR)
C   READ(5,120)(S(I),I=1,NR)
C   READ(5,120)(X(I),I=1,NR)
C   N1=N+1
C   IF(LE)121,122,123
C   121 DO 130 I=1,NR
C   130 READ(5,120)(F(I,J),J=1,N1)
C   GO TO 125
C   122 DO 131 I=1,NR
C   F(I,1)=1.000
C   DO 131 J=2,N1
C   131 F(I,J)=0.000
C   GO TO 125
C   123 READ(5,120)(F(1,J),J=1,N1)
C   DO 132 I=2,NR
C   DO 132 J=1,N1
C   132 F(I,J)=F(1,J)
C   125 CCNTINUE
C   IF(NFE .EQ. 0)READ(5,133)NCE,NA1,NA2,NA3,A1,A2,A3,QE,COSE
C   IF(NFD .EQ. 0)READ(5,133)NCD,NB1,NB2,NB3,B1,B2,B3,QU,COSD
C   READ(5,110) NP1,NP2,NP3,NP4,NP5,NP6,NP7
C   IF(NP1 .GT. 0) GO TO 126
C   IF(NP2 .GT. 0) GO TO 126
C   IF(NP5 .LE. 0) GO TO 127
C   126 READ(5,110)(ND(I),I=1,NR)
C   127 CCNTINUE
C
C   100 FORMAT(18A4)
C   110 FORMAT(24I3)
C   120 FORMAT(6D12.0)
C   133 FORMAT(4I3,5D12.0)
C
C   WRITE(6,140)(TITLE(I),I=1,18)
C   140 FORMAT('1',IX,18A4)

```



```

      IF(NFE .GT. 0) GO TO 40
      IF(NCE)10,20,30
10   DC 11 L=1,N,2
11   CCE((L+1)/2)=QE*(COSE**L)
      GC TO 40
20   DO 21 L=1,N,2
21   CCE((L+1)/2)=0.000
      GC TO 40
30   DC 31 L=1,N,2
      X=DFLOAT(L+NA1+1)
      Y=DFLOAT(L+NA2+1)
      Z=DFLOAT(L+NA3+1)
31   CCE((L+1)/2)=A1/X+A2/Y+A3/Z
40   CONTINUE
      IF(NFD .GT. 0)RETURN
      IF(NCD)50,60,70
50   DC 51 L=1,N,2
51   CCD((L+1)/2)=QD*(COSD**L)
      RETURN
60   DO 61 L=1,N,2
61   CCD((L+1)/2)=0.000
      RETURN
70   DC 71 L=1,N,2
      X=(-1.000)**(L+NB1+2)/DFLOAT(L+NB1+1)
      Y=(-1.000)**(L+NB2+2)/DFLOAT(L+NB2+1)
      Z=(-1.000)**(L+NB3+2)/DFLOAT(L+NB3+1)
71   CCD((L+1)/2)=B1*X+B2*Y+B3*Z
      RETURN
      END
      SUBROUTINE ALBDFE (N)
C
C   CALCULO DO ALBEDO DA FACE ESQUERDA.
C
C   COMMON /DATA/ C(KMAX),S(KMAX),X(KMAX),F(KMAX,NMAX),
C 1     CF(NT),VNI(NT),VGL(NT,NMAX)
C   COMMON /DEL/ ALFA,DELTA(NMAX)
C
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMMON /DATA/ C(12),S(12),X(12),F(12,16),
C 1     CF(192),VNI(192),VGL(192,16)
      COMMON /CCONT/ NCE,NA1,NA2,NA3,A1,A2,A3,QE,COSE,
C 1     NCD,NB1,NB2,NB3,B1,B2,B3,QD,COSD,
C 2     NFE,NFD
      COMMON /DEL/ ALFA,DELTA(16)
C
      QP=0.500
      NI=N+1
      SI=C.000
      ALFA=0.000
      CALL FDELTA (N)
      DO 100 I=1,NI
      SJ=0.000
      DO 110 J=1,NI
      H=QP*DFLOAT(2*J-1)*((-1.000)**(J-1))
110  SJ=SJ+VGL(J,1)*H*DELTA(J)
      SI=SI+SJ*CF(I)
100  CONTINUE
      SI=SI+0.500*QP*(S(1)/(1.000-C(1)))
      IF(NCE .GT. 0)GO TO 111
      SC=QE*COSE
      GC TO 112
111  T=A1/DFLOAT(NA1+2)
      Y=A2/DFLOAT(NA2+2)

```

```

      Z=A3/DFLOAT(NA3+2)
      SD=T+Y+Z
112 CCNTINUE
      ALBD=SI/SD
      WRITE(6,121)
121 FORMAT(/, ' *****')
      WRITE(6,120) ALBD
120 FCRMAT(1X, 'ALBEDO DA FACE ESQUERDA = ',E15.8)
      WRITE(6,130)
130 FCRMAT(' *****')
      RETURN
      END
      SLBROUTINE TRANS(N, NR)
C
C   CALCULO DA TAXA DE TRANSMISSAO DA FACE DIREITA.
C
C   COMMON /DATA/ C(KMAX), S(KMAX), X(KMAX), F(KMAX, NMAX),
C   1             CF(NT), VNI(NT), VGL(NT, NMAX)
C   COMMON /DEL/ ALFA, DELTA(NMAX)
C
      IMPLICIT REAL*8(A-H, D-Z)
      COMMON /DATA/ C(12), S(12), X(12), F(12, 16),
1             CF(192), VNI(192), VGL(192, 16)
      COMMON /CCONT/ NCE, NA1, NA2, NA3, A1, A2, A3, QE, COSE,
1             NCD, NR1, NS2, NS3, B1, B2, B3, QD, COSU,
2             NFE, NFD
      COMMON /DEL/ ALFA, DELTA(16)
C
      QP=0.500
      N1=N+1
      SI=0.000
      NR1=(NR-1)*N1
      ALFA=0.000
      CALL FDELTA (N)
      DO 100 I=1, N1
      I1=NR1+I
      SJ=0.000
      DO 110 J=1, N1
      J1=NR1+J
110 SJ=SJ+QP*DFLOAT(2*J-1)*VGL(J1, I)*DELTA(J)
      SI=SI+SJ*CF(I1)*DEXP(-X(NR)/VNI(I1))
100 CCNTINUE
      SI=SI+0.500*QP*S(NR)/(1.000-C(NR))
      IF(NCE .GT. 0) GO TO 111
      SC=CE*COSE
      GO TO 112
111 T=A1/DFLOAT(NA1+2)
      Y=A2/DFLUAT(NA2+2)
      Z=A3/DFLUAT(NA3+2)
      SD=T+Y+Z
112 CCNTINUE
      TR=SI/SD
      WRITE(6,121)
121 FCRMAT(/, ' *****
1 ' )
      WRITE(6,120) TR
120 FCRMAT(1X, 'TAXA DE TRANSMISSAO NA FACE DIREITA = ',E15.8)
      WRITE(6,130)
130 FCRMAT(' *****')
      RETURN
      END
      SLBROUTINE AFLUX (N, NR, ND)
C

```

```

C      CALCULO E IMPRESSAO DO FLUXO ANGULAR.
C
C      COMMON /DATA/ C(KMAX),S(KMAX),X(KMAX),F(KMAX,NMAX),
C      L          CF(NT),VNI(NT),VGL(NT,NMAX)
C      DIMENSION P(NMAX),MI(21),XK(NDM),PSI(NDM,21),ND(KMAX)
C
C      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C      REAL*8 MI
C      COMMON /DATA/ C(12),S(12),X(12),F(12,16),
C      L          CF(192),VNI(192),VGL(192,16)
C      DIMENSION P(16),MI(21),XK(21),PSI(21,21),ND(12)
C
C      QP=C.500
C      WRITE(6,100)
100  FORMAT(/,1X,'FLUXO ANGULAR')
C      P(1)=1.000
C      NI=N+1
C      MI(1)=-1.000
C      DO 110 I=1,20
110  MI(I+1)=MI(I)+0.100
C      XK(1)=0.000
C      DO 120 K=1,NR
C      ND1=ND(K)+1
C      DO 130 I=1,ND1
C      DC 130 J=1,21
130  PSI(I,J)=0.000
C      DX=X(K)/DFLOAT(ND(K))
C      IF(K.NE.1) DX=(X(K)-X(K-1))/DFLOAT(ND(K))
C      NDK=ND(K)
C      DO 140 I=1,NDK
140  XK(I+1)=XK(I)+DX
C      DO 150 KX=1,ND1
C      DO 160 M=1,21
C      P(2)=MI(M)
C      DO 170 L=2,N
170  P(L+1)=(1.00/DFLOAT(L))*(DFLOAT(2*L-1)*MI(M)*P(L)-
C      L DFLOAT(L-1)*P(L-1))
C      DC 180 J=1,NI
C      J1=(N+1)*(K-1)+J
C      SI=0.000
C      DO 190 I=1,NI
C      I1=(N+1)*(K-1)+I
190  SI=SI+QP*DFLOAT(2*I-1)*VGL(I1,J)*P(I)
C      PSI(KX,M)=PSI(KX,M)+SI*CF(J1)*DEXP(-XK(KX)/VNI(J1))
180  CCNTINUE
C      PSI(KX,M)=PSI(KX,M)+QP*S(K)/(1.000-C(K))
160  CCNTINUE
150  CCNTINUE
C      WRITE(6,200)K
200  FORMAT(/,1X,'REGIAO ',I2)
C      DC 210 I=1,3
C      I1=7*(I-1)+1
C      I2=7*I
C      WRITE(6,220)(MI(J),J=I1,I2)
220  FORMAT(6X,'X',3X,7(9X,'MI=',F4.1))
C      DC 230 J=1,ND1
230  WRITE(6,240)XK(J),(PSI(J,I),L=11,12)
240  FORMAT(1X,F10.5,3X,7(1X,C15.8))
210  CCNTINUE
C      XK(1)=X(K)
120  CCNTINUE
C      RETURN
C      END

```

```

SUBROUTINE TFLUX (N,NR,ND)
C
C   CALCULO E IMPRESSAO DO FLUXO TOTAL.
C
C   COMMON /DATA/ C(KMAX),S(KMAX),X(KMAX),F(KMAX,NMAX),
1      CF(NT),VNI(NT),VGL(NT,NMAX)
C   DIMENSION XK(NDM),FI(NDM),ND(KMAX)
C
C   IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C   COMMON /DATA/ C(12),S(12),X(12),F(12,16),
1      CF(192),VNI(192),VGL(192,16)
C   DIMENSION XK(21),FI(21),ND(12)
C
C   QP=1.000
C   WRITE(6,100)
100  FCRMAT(/,1X,'FLUXO TOTAL')
C   N1=N+1
C   XK(1)=0.000
C   DO 110 K=1,NR
C   KN1=(K-1)*N1
C   AD1=ND(K)+1
C   DO 120 I=1,ND1
120  FI(I)=0.000
C   DX=X(K)/DFLOAT(ND(K))
C   IF(K .NE. 1) DX=(X(K)-X(K-1))/DFLOAT(ND(K))
C   NCK=ND(K)
C   DO 130 I=1,NDK
130  XK(I+1)=XK(I)+DX
C   DO 140 KX=1,ND1
C   DO 150 I=1,N1
C   I1=KN1+I
C   FI(KX)=FI(KX)+QP*CF(I1)*DEXP(-XK(KX)/VNI(I1))
150  CONTINUE
C   FI(KX)=FI(KX)+QP*S(K)/(1.000-C(K))
140  CCNTINUE
C   WRITE(6,180)K
180  FCRMAT(/,1X,'REGIAO ',I2)
C   ID=ND(K)/7
C   IC1=ID+1
C   DO 170 I=1,ID1
C   I1=7*(I-1)+1
C   I2=7*I
C   IF(I2 .GT. ND1) I2=ND1
C   WRITE(6,190)(XK(J),J=I1,I2)
190  FCRMAT(1X,'X',7(11X,F6.2))
C   WRITE(6,200)(FI(J),J=I1,I2)
200  FCRMAT(1X,'FI(X)',1X,7(2X,F15.8))
170  CCNTINUE
C   XK(1)=X(K)
110  CCNTINUE
C   RETURN
C   END
SUBROUTINE CORR (N,NR,ND)
C
C   CALCULO E IMPRESSAO DA CORRENTE TOTAL.
C
C   COMMON /DATA/ C(KMAX),S(KMAX),X(KMAX),F(KMAX,NMAX),
1      CF(NT),VNI(NT),VGL(NT,NMAX)
C   COMMON /DFL/ ALFA,DELTA(NMAX)
C   DIMENSION XK(NDM),CR(NDM),ND(KMAX)
C
C   IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C   COMMON /DATA/ C(12),S(12),X(12),F(12,16),

```

```

1          CF(192),VNI(192),VGL(192,16)
COMMON /DEL/ ALFA,DELTA(16)
DIMENSION XK(21),CR(21),ND(12)
C
QP=0.500
WRITE(6,100)
100 FORMAT(/,1X,'CORRENTE TOTAL')
N1=N+1
XK(1)=0.000
ALFA=0.000
CALL FDELTA(N)
DO 110 K=1,NR
KN1=(K-1)*N1
ND1=ND(K)+1
DO 120 I=1,ND1
120 CR(I)=0.000
DX=X(K)/DFLOAT(ND(K))
IF(K.NE.1) DX=(X(K)-X(K-1))/DFLOAT(ND(K))
NCK=ND(K)
DO 130 I=1,NCK
130 XK(I+1)=XK(I)+DX
DO 140 KX=1,ND1
DC 150 I=1,N1
I1=KN1+I
SI=0.000
DO 160 J=1,N1
J1=KN1+J
AUX=QP*DFLOAT(2*J-1)
ALY=1.000+(-1.000)**J
SI=SI+AUX*VGL(J1,I)*DELTA(J)*AUY
160 CCNTINUE
CR(KX)=CR(KX)+SI*CF(I1)*DEXP(-XK(KX)/VNI(I1))
150 CCNTINUE
140 CONTINUE
WRITE(6,180)K
180 FORMAT(/,1X,'REGIAO ',I2)
ID=ND(K)/7
ID1=ID+1
DO 170 I=1,ID1
I1=7*(I-1)+1
I2=7*I
IF(I2.GT. ND1) I2=ND1
WRITE(6,190)(XK(J),J=I1,I2)
190 FORMAT(1X,'X',7(11X,F6.2))
WRITE(6,200)(CR(J),J=I1,I2)
200 FORMAT(1X,'J(X)',2X,7(2X,E15.8))
170 CCNTINUE
XK(1)=X(K)
110 CCNTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE MFLUX (N,NR,NP6,NP7)
C
C   CALCULO E IMPRESSAO DO FLUXO TOTAL MEDIO
C   E FATOR DE DESVANTAGEM TERMICA DE UMA CELULA
C
C   COMMON /DATA/ C(KMAX),S(KMAX),X(KMAX),F(KMAX,NMAX),
C   1          CF(NT),VNI(NT),VGL(NT,NMAX)
C   DIMENSION FM(KMAX)
C
C   IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
COMMON /DATA/ C(12),S(12),X(12),F(12,16),
1          CF(192),VNI(192),VGL(192,16)

```

```

DIMENSION FM(12)
C
CP=1.000
N1=N+1
DC 100 K=1,NR
K1=(K-1)*N1
X1=0.000
IF(K .GT. 1) X1=X(K-1)
X2=X(K)-X1
S1=0.000
DC 110 I=1,N1
I1=K1+I
EX=DEXP(-X1/VNI(I1))-DEXP(-X(K)/VNI(I1))
S1=S1+QP*CF(I1)*EX*VNI(I1)
110 CCNTINUE
FM(K)=S1/X2+QP*S(K)/(1.000-C(K))
100 CCNTINUE
IF(NP6 .EQ. 0) GO TO 140
WRITE(6,90)
90  FORMAT(//,1X,'REGIAO, FLUXO TOTAL MEDIO')
WRITE(6,130)(I,FM(I),I=1,NR)
130  FORMAT(6(2X,12,1X,F15.8))
140 CCNTINUE
IF(NP7 .EQ. 0) RETURN
FDT=FM(2)/FM(1)
WRITE(6,150) FDT
150  FORMAT(//,1X,'FATOR DE DESVANTAGEM TERMICA = ',L15.3)
RETURN
END
SUBROUTINE FDELTA (N)
C
C  CALCULO DOS 'MOMENTOS' DOS POLINOMIOS DE LEGENDRE.
C
C  COMMON /DEL/ ALFA,DELTA(NMAX)
C
REAL*8 ALFA, DELTA, H
COMMON /DEL/ ALFA,DELTA(16)
C
DELTA(1)= 1.000/(ALFA+2.000)
DELTA(2)= 1.000/(ALFA+3.000)
IF(N .EQ. 1) RETURN
N2= N-1
DC 10 L=1,N2
H= DFLOAT(L)
10  DELTA(L+2)= ((2.000+ALFA-H)/(3.000+ALFA+H))*DELTA(L)
RETURN
END
SUBROUTINE COEFF (N,NR)
C
C  CALCULO DAS CONSTANTES DO FLUXO ANGULAR.
C
COMMON /G1/ A(NT,NMT),B(NT),IC(NT,NMT),INZ(NT),
1  IX(NT),IY(NT),IZ(NT)
COMMON /DATA/ C(KMAX),S(KMAX),X(KMAX),F(KMAX,NMAX),
1  CF(NT),VNI(NT),VGL(NT,NMAX)
COMMON /SCG/ CGE(NMD),CCD(NMD)
COMMON /DEL/ ALFA,DELTA(NMAX)
C
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
INTEGER*2 IC,INZ,IX,IY,IZ
COMMON /G1/ A(192,48),B(192),IC(192,48),INZ(192),
1  IX(192),IY(192),IZ(192)
COMMON /DATA/ C(12),S(12),X(12),F(12,16),

```

```

1          CF(192),VNI(192),VGL(192,16)
COMMON /CCONT/ NCE,NA1,NA2,NA3,A1,A2,A3,QE,CNCL,
1          NCD,NB1,NB2,NB3,B1,B2,B3,QU,CNSU,
2          NFE,NFD
COMMON /SCC/ CCE(8),CCD(8)
COMMON /DEL/ ALFA,DELTA(16)

CP=C.500
N1=N+1
N12=N1/2
N1D=2*N1
KN1=NR*N1
NRN=N1*(NR-1)
EPS=1.0D-12
IS=2
NZM=1
IF=KN1
CALL BCOND(N)
DO 140 I=1,KN1
DO 140 J=1,N1D
140 A(I,J)=0.0D0
IF(NFE .EQ. 0) GO TO 161
DO 151 L=1,N,2
ALFA=DFLOAT(L-1)
CALL FDELTA(N)
I=(L+1)/2
B(I)=0.0D0
DO 152 J=1,N1
DO 153 NS=1,N1
AUX=QP*DFLOAT(2*NS-1)*(1.0D0-(-1.0D0)**(NS-1))
A(I,J)=A(I,J)+AUX*VGL(NS,J)*DELTA(NS)
153 CCNTINUE
IC(I,J)=J
152 CCNTINUE
INZ(I)=N1
151 CCNTINUE
GO TO 162
161 CCNTINUE
DO 150 L=1,N,2
ALFA=DFLOAT(L-1)
CALL FDELTA(N)
I=(L+1)/2
B(I)=CCE(I)-QP*(S(I)/(1.0D0-C(I)))/DFLOAT(L+1)
DO 160 J=1,N1
DO 170 NS=1,N1
AUX=QP*DFLOAT(2*NS-1)
A(I,J)=A(I,J)+AUX*VGL(NS,J)*DELTA(NS)
170 CCNTINUE
IC(I,J)=J
160 CCNTINUE
INZ(I)=N1
150 CCNTINUE
162 CCNTINUE
IF (NR .EQ. 1) GO TO 290
K1=NR-1
DO 180 K=1,K1
NUKI=N1*(K-1)
NUK=N1*K
DO 190 L=1,N,2
ALFA=DFLOAT(L-1)
CALL FDELTA(N)
I=N12+NUKI+(L+1)/2
B(I)=QP*(S(K+1)/(1.0D0-C(K+1))-S(K)/(1.0D0-C(K)))/DFLOAT(L+1)

```

```

      DO 200 J=1,N1
      J1=NUK1+J
      DC 210 NS=1,N1
      AUX=QP*DFLOAT(2*NS-1)
      A(I,J)=A(I,J)+AUX*VGL(NUK1+NS,J)*DELTA(NS)
210  CCNTINUE
      A(I,J)=A(I,J)*DEXP(-X(K)/VNI(J1))
      IC(I,J)=J1
200  CCNTINUE
      DC 220 J=1,N1
      J1=NUK+J
      J2=N1+J
      DC 230 NS=1,N1
      AUX=QP*DFLOAT(2*NS-1)
      A(I,J2)=A(I,J2)+AUX*VGL(NUK+NS,J)*DELTA(NS)
230  CCNTINUE
      A(I,J2)=-A(I,J2)*DEXP(-X(K)/VNI(J1))
      IC(I,J2)=J1
220  CONTINUE
      INZ(I)=N1D
190  CCNTINUE
      DC 240 L=1,N,2
      ALFA=DFLOAT(L-1)
      CALL FDELTA(N)
      I=NUK+(L+1)/2
      B(I)=QP*(S(K)/(1.0D0-C(K))-S(K+1)/(1.0D0-C(K+1)))/DFLOAT(L+1)
      DC 250 J=1,N1
      J1=NUK1+J
      DO 260 NS=1,N1
      AUX=QP*DFLOAT(2*NS-1)
      AUY=(-1.0D0)**(L+NS-1)
      A(I,J)=A(I,J)+AUX*VGL(NUK1+NS,J)*AUY*DELTA(NS)
260  CCNTINUE
      A(I,J)=A(I,J)*DEXP(-X(K)/VNI(J1))
      IC(I,J)=J1
250  CCNTINUE
      DC 270 J=1,N1
      J1=NUK+J
      J2=N1+J
      DC 280 NS=1,N1
      AUX=QP*DFLOAT(2*NS-1)
      AUY=(-1.0D0)**(L+NS-1)
      A(I,J2)=A(I,J2)+AUX*VGL(NUK+NS,J)*AUY*DELTA(NS)
280  CCNTINUE
      A(I,J2)=-A(I,J2)*DEXP(-X(K)/VNI(J1))
      IC(I,J2)=J1
270  CCNTINUE
      INZ(I)=N1D
240  CCNTINUE
180  CCNTINUE
290  CCNTINUE
      IF(NFD .EQ. 0) GO TO 311
      DC 301 L=1,N,2
      ALFA=DFLOAT(L-1)
      CALL FDELTA(N)
      I=KN1-N12+(L+1)/2
      B(I)=0.0D0
      DC 302 J=1,N1
      J1=NRN+J
      DC 303 NS=1,N1
      AUX=QP*DFLOAT(2*NS-1)*(1.0D0-(-1.0D0)**(NS-1))
      A(I,J)=A(I,J)+AUX*VGL(NRN+NS,J)*DELTA(NS)
303  CCNTINUE

```

```

      A(I,J)=A(I,J)*DEXP(-X(NR)/VNI(J1))
      IC(I,J)=J1
302 CCNTINUE
      INZ(I)=N1
301 CCNTINUE
      GC TO 312
311 CCNTINUE
      DO 300 L=1,N,2
      ALFA=DFLOAT(L-1)
      CALL FDELTA(N)
      L2=(L+1)/2
      I=KN1-N12+L2
      B(I)=CCD(L2)+QP*(S(NR)/(1.00-C(NR)))/DFLOAT(L+1)
      DC 310 J=1,N1
      J1=NRN+J
      DC 320 NS=1,N1
      AUX=QP*DFLOAT(2*NS-1)
      AUY=(-1.00)**(L+NS-1)
      A(I,J)=A(I,J)+AUX*VGL(NRN+NS,J)*AUY*DELTA(NS)
320 CCNTINUE
      A(I,J)=A(I,J)*DEXP(-X(NR)/VNI(J1))
      IC(I,J)=J1
310 CCNTINUE
      INZ(I)=N1
300 CCNTINUE
312 CCNTINUE
      CALL SPAM1 (KN1,EPS,IS,NZM,IF)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE GENI(L,NR)
C
C      CALCULO DAS AUTOFUNCOES G(NI).
C
C      COMMON /DATA/ C(KMAX),S(KMAX),X(KMAX),F(KMAX,NMAX),
C      1          CF(NT),VNI(NT),VGL(NT,NMAX)
C      DIMENSION GLE(40)
C
C      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C      COMMON /DATA/ C(12),S(12),X(12),F(12,16),
C      1          CF(192),VNI(192),VGL(192,16)
C      DIMENSION GLE(40)
C
C      VGL - AUTOFUNCOES G(NI) DAS NR REGIOES. CADA L+1 LINHAS
C      DA MATRIZ CORRESPONDEM A UMA REGIAU. CADA COLUNA
C      CORRESPONDE A L+1 VALORES DE G PARA CADA VALOR DE NI.
C
      L1=L+1
      DC 5 M=1,NR
      M1=L1*(M-1)
      M11=M1+1
      M12=M1+2
      CALL AUTOV (L,NR)
      IF(L .NE. 1) GO TO 10
      VGL(M11,1)=1.000
      VGL(M11,2)=1.000
      VGL(M12,1)=VNI(M11)*(1.000-C(M))
      VGL(M12,2)=VNI(M12)*(1.000-C(M))
      GC TO 5
10 CCNTINUE
      DC 20 I=1,L1
20 VGL(M11,I)=1.000
      DO 30 K=1,L1
      K1=M1+K

```

```

IF(DABS(VNI(K1)) .GT. 3.000) GO TO 50
VGL(M12,K)=VNI(K1)*(1.000-C(M))
DO 40 I=2,L
IM=M1+I
H=DFLOAT(2*I-1)*(1.000-C(M)*F(M,I))
FH=1.000/DFLOAT(I)
40 VGL(IM+1,K)=HH*(VNI(K1)*H*VGL(IM,K)-DFLOAT(I-1)*VGL(IM-1,K))
GC TO 30
50 GLE(40) = 0.000
GLE(39) = 1.000
DO 60 I=1,38
J = 39-I+1
H=DFLOAT(2*J-1)
IF(J .LE. L1) H=H*(1.000-C(M)*F(M,J))
Z=1.000/DFLOAT(J-1)
60 GLE(J-1)=Z*(VNI(K1)*H*GLE(J)-DFLOAT(J)*GLE(J+1))
DO 70 I=1,L1
70 VGL(M1+I,K)=GLE(I)/GLE(1)
30 CCNTINUE
5 CCNTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE AUTOV (N,NR)
C
C CALCULO DOS AUTOVALORES DA MATRIZ DO METODO PN,
C CCLCCADA NA FORMA A-INVERSA VEZES B, ONDE A= MATRIZ
C DIAGONAL E POSITIVA DEFINIDA, E B= SIMETRICA.
C
C COMMON /DATA/ C(KMAX),S(KMAX),X(KMAX),F(KMAX,NMAX),
C 1 CF(NT),VNI(NT),VGL(NT,NMAX)
C COMMON /AV/ B(NQU),A(NQU),XV(NQU),XL(NMAX)
C
C IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C COMMON /AV/ B(256),A(256),XV(256),XL(16)
C COMMON /DATA/ C(12),S(12),X(12),F(12,16),
C 1 CF(192),VNI(192),VGL(192,16)
C
C XL - AUTOVALORES DA MATRIZ CALCULADOS PELA SUBROTINA NROOT.
C VNI - AUTOVALORES DAS NR REGIOES, ONDE CADA N+1 ELEMENTOS
C CORRESPONDEM A UMA REGIAO.
C
C NN=N+1
C N1=NN*NN
C DO 110 M=1,NR
C M1=NN*(M-1)
C DO 120 K=1,N1
C A(K)=0.000
C B(K)=0.000
120 CCNTINUE
C DO 130 I=1,NN
C KI=I+NN*(I-1)
C A(KI)=DFLOAT(2*I-1)*(1.000-C(M)*F(M,I))
130 CCNTINUE
C DO 140 I=1,N
C B(I+NN*I)=DFLOAT(I)
C B(I+1+NN*(I-1))=DFLOAT(I)
140 CCNTINUE
C CALL NRCOT(NN)
C DO 141 I=1,NN
C 141 VNI(M1+I)=XL(I)
110 CCNTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE SPAMAI(N, EPS, IS, NZM, IF)
C
C   SOLUCAO DE UM SISTEMA DE EQUACOES ALGEBRICAS AX=B,
C   ATRAVES DO METODO DE ELIMINACAO DE GAUSS, APLICANDO
C   TECNICAS PARA MATRIZES ESPARSAS.
C
C   COMMON /G1/ A(NT,NMT),B(NT),IC(NT,NMT),INZ(NT),
C   I       IX(NT),IY(NT),IZ(NT)
C   COMMON /DATA/ C(KMAX),S(KMAX),X(KMAX),F(KMAX,NMAX),
C   I       CF(NT),VNI(NT),VGL(NT,NMAX)
C
C   IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C   INTEGER*2 IC,INZ,IX,IY,IZ
C   COMMON /G1/ A(192,48),B(192),IC(192,48),INZ(192),
C   I       IX(192),IY(192),IZ(192)
C   COMMON /DATA/ C(12),S(12),XS(12),F(12,16),
C   I       X(192),VNI(192),VGL(192,16)
C
C   DO 1 I=1,N
C     IY(I)=I
C     I       IZ(I)=I
C     IF(NZM .EQ. 1) GO TO 205
C   ARRANJC CGS ELEM. DE A EM ORDEM CRESCENTE.
C     DO 200 I=1,N
C       J1=I
C       IK=I
C       NZ=INZ(I)
C       IF(INZ .EQ. 1) GO TO 200
C     204 DO 201 J=J1,N
C         DO 202 K1=IK,NZ
C           IF(IC(I,K1) .EQ. J) GO TO 203
C     202 CCNTINUE
C     201 CCNTINUE
C     203 IAU=IC(I,IK)
C         IC(I,IK)=IC(I,K1)
C         IC(I,K1)=IAU
C         AUX=A(I,IK)
C         A(I,IK)=A(I,K1)
C         A(I,K1)=AUX
C         IK=IK+1
C         IF(IK .GE. NZ) GO TO 200
C         J1=J+1
C         GO TO 204
C     200 CCNTINUE
C         NZM=1
C   DET. DA TOL DO SISTEMA.
C     205 AM=A(1,1)
C         DO 206 I=1,N
C           NZ=INZ(I)
C           DO 206 K=1,NZ
C             IF(DABS(AM) .GE. DABS(A(I,K))) GO TO 206
C           AM=A(I,K)
C     206 CCNTINUE
C         TCL=EPS*DABS(AM)
C         IF(IS .EQ. 2) GO TO 2
C         N1=N-1
C         DO 10 I2=1,N1
C           I=IZ(I2)
C           L=1
C           IX(I)=0
C           AM=0.000
C           N2=I2+IF
C           IF(N2 .GT. N) N2=N

```

```

DC 11 J1=I2,N2
J=IZ(J1)
IF(IC(J,1) .NE. I2) GO TO 11
L=L+1
IX(1)=IX(1)+1
IX(L)=J
IF(DABS(A(J,1)) .LE. DABS(AM)) GO TO 11
AM=A(J,1)
NJ=J
11 CCNTINUE
IF(CABS(AM) .GT. TOL) GO TO 12
GC TO 101
2 N1=N-1
DC 20 I2=1,N1
I=IZ(I2)
L=1
IX(1)=0
N2=I+IF
IF(N2 .GT. N) N2=N
DO 21 J1=I2,N2
J=IZ(J1)
IF(IC(J,1) .NE. I2) GO TO 21
L=L+1
IX(1)=IX(1)+1
IX(L)=J
21 CCNTINUE
NJ=IX(2)
IF(DABS(A(NJ,1)) .GT. TOL) GO TO 12
22 NZ=IX(1)+1
DC 23 K=2,NZ
NJ=IX(K)
IF(DABS(A(NJ,1)) .GT. TOL) GO TO 15
23 CCNTINUE
NJ=IX(2)
101 IS=-1
IF(IX(1) .EQ. 0) GO TO 150
12 IF(NJ .EQ. I) GO TO 14
C MUDANCA DE LINHAS.
15 CCNTINUE
DO 16 K=I2,N
IF(IZ(K) .EQ. NJ) GO TO 17
16 CCNTINUE
17 IZ(K)=I
IZ(I2)=NJ
J=IX(1)+1
DC 18 K=2,J
IF(IX(K) .EQ. NJ) GO TO 19
18 CCNTINUE
19 IX(K)=IX(2)
IX(2)=NJ
I=NJ
14 A1=A(I,1)
A(I,1)=0.0D0
B(I)=B(I)/A1
NZ=INZ(I)
DO 24 K=1,NZ
24 A(I,K)=A(I,K)/A1
C OPERACOES DE ELIMINACAO.
NM=IX(1)+1
IF(NM .GE. 3) GO TO 25
IF(IS .EQ. 2) GO TO 20
GC TO 10
25 DC 40 L=3,NM

```

```

      I1=IX(L)
      A2=A(I1,1)
      A(I1,1)=0.000
      NZ=INZ(I)
      IF(NZ .GT. 1) GO TO 57
C   DESLCCAMENTO DE ELEMENTOS NUMA LINHA.
      IF(INZ(I1) .EQ. 1) GO TO 56
      K3=INZ(I1)-1
      DC 303 K4=1,K3
      IC(I1,K4)=IC(I1,K4+1)
      A(I1,K4)=A(I1,K4+1)
303  CCNTINUE
      INZ(I1)=INZ(I1)-1
      GC TO 56
57   NN=IC(I,NZ)
      NZ1=INZ(I1)
      IF(IC(I1,NZ1) .GT. NN) NN=IC(I1,NZ1)
      DO 50 K=12,NN
50   X(K)=0.000
      IF(NZ1 .EQ. 1) GO TO 55
      DC 51 K1=2,NZ1
      K=IC(I1,K1)
      X(K)=A(I1,K1)
51   CCNTINUE
55   DC 52 K1=2,NZ
      K=IC(I1,K1)
      X(K)=X(K)-A2*A(I,K1)
52   CCNTINUE
      K1=0
      INZ(I1)=INZ(I1)-1
      DC 53 K=12,NN
      IF(X(K) .EQ. 0) GO TO 53
      K1=K1+1
      A(I1,K1)=X(K)
      IC(I1,K1)=K
53   CCNTINUE
      INZ(I1)=K1
56   B(I1)=B(I1)-A2*B(I)
      IF(INZ(I1) .GT. NZM) NZM=INZ(I1)
40   CCNTINUE
      IF(IS .EQ. 1) GO TO 10
20   CCNTINUE
      GC TO 33
10   CONTINUE
C   SUBSTITUICAO REGRESSIVA.
33   J=IZ(N)
      NZ=INZ(J)
      DC 30 K=1,NZ
      IF(IC(J,K) .NE. 0) GO TO 32
30   CCNTINUE
      GC TO 101
32   B(J)=B(J)/A(J,K)
      DC 90 J=2,N
      IB=N-J+1
      J1=IZ(IB)
      NZ=INZ(J1)
      IF(IC(J1,NZ) .EQ. 0) GO TO 90
      DC 90 K=1,NZ
      IA=IC(J1,K)
      I1=IZ(IA)
      B(J1)=B(J1)-A(J1,K)*B(I1)
90   CCNTINUE
      DO 94 I=1,N

```

```

      J=IY(I)
      K=IZ(J)
94  X(I)=B(K)
150 RETURN
      END
      SUBROUTINE NROOT(M)
C
C      CCMPUTE EIGENVALUES AND EIGENVECTORS OF A REAL NONSYMMETRIC
C      MATRIX OF THE FORM B-INVERSE TIMES A.
C
C      M - ORDER OF SQUARE MATRICES A, B, AND X.
C      A - INPUT MATRIX (M X M).
C      B - INPUT MATRIX (M X M).
C      XL- OUTPUT VECTOR OF LENGTH M CONTAINING EIGENVALUES OF
C          B-INVERSE TIMES A.
C      X - OUTPUT MATRIX (M X M) CONTAINING EIGENVECTORS COLUMNWISE.
C
C      CCMPON /AV/ A(NQU),B(NQU),X(NQU),XL(NMAX)
C
C      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C      CCMPON /AV/ A(256),B(256),X(256),XL(16)
C
C      COMPUTE EIGENVALUES AND EIGENVECTORS OF B
C
      K=1
      DO 100 J=2,M
      L=M*(J-1)
      DO 100 I=1,J
      L=L+1
      K=K+1
100  B(K)=B(L)
C
C      THE MATRIX B IS A REAL SYMMETRIC MATRIX
C
      MV=0
      CALL EIGEN (B,X,M,MV)
C
C      FORM RECIPROCAL OF SQUARE ROOT OF EIGENVALUES. THE RESULTS
C      ARE PREMULTIPLIED BY THE ASSOCIATED EIGENVECTORS.
C
      L=0
      DO 110 J=1,M
      L=L+J
110  XL(J)=1.000/DSQRT(DABS(B(L)))
      K=0
      DO 115 J=1,M
      DO 115 I=1,M
      K=K+1
115  B(K)=X(K)*XL(J)
C
C      FORM (B**(-1/2))PRIME * A * (B**(-1/2))
C
      DO 120 I=1,M
      N2=0
      DO 120 J=1,M
      N1=M*(I-1)
      L=M*(J-1)+I
      X(L)=0.000
      DO 120 K=1,M
      N1=N1+1
      N2=N2+1
120  X(L)=X(L)+B(N1)*A(N2)
      L=0

```

```

      DO 130 J=1,M
      DC 130 I=1,J
      N1=I-M
      N2=M*(J-1)
      L=L+1
      A(L)=0.000
      DC 130 K=1,M
      N1=N1+M
      N2=N2+1
130  A(L)=A(L)+X(N1)*B(N2)
C
C   COMPUTE EIGENVALUES AND EIGENVECTORS OF A
C
      CALL EIGEN (A,X,M,MV)
      L=0
      DC 140 I=1,M
      L=L+I
140  XL(I)=A(L)
C
C   COMPUTE THE NORMALIZED EIGENVECTORS
C
      DO 150 I=1,M
      N2=0
      DC 150 J=1,M
      N1=I-M
      L=M*(J-1)+I
      A(L)=0.000
      DO 150 K=1,M
      N1=N1+M
      N2=N2+1
150  A(L)=A(L)+B(N1)*X(N2)
      L=0
      K=0
      DO 180 J=1,M
      SUMV=0.000
      DO 170 I=1,M
      L=L+1
170  SUMV=SUMV+A(L)*A(L)
175  SUMV=DSQRT(SUMV)
      DC 180 I=1,M
      K=K+1
180  X(K)=A(K)/SUMV
      RETURN
      END
      SUBROUTINE EIGEN(A,R,N,MV)
C
C   COMPUTE EIGENVALUES AND EIGENVECTORS OF A REAL
C   SYMMETRIC MATRIX.
C
C   A - ORIGINAL MATRIX (SYMMETRIC), DESTROYED IN COMPUTATION.
C       RESULTANT EIGENVALUES ARE DEVELOPED IN DIAGONAL OF
C       MATRIX A IN DESCENDING ORDER.
C   R - RESULTANT MATRIX OF EIGENVECTORS (STORED COLUMNWISE,
C       IN SAME SEQUENCE AS EIGENVALUES).
C   N - ORDER OF MATRICES A AND R.
C   MV- INPUT CODE
C       0 COMPUTE EIGENVALUES AND EIGENVECTORS.
C       1 COMPUTE EIGENVALUES ONLY (R NEED NOT BE DIMENSIONED
C         BUT MUST STILL APPEAR IN CALLING SEQUENCE).
C
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION A(1),R(1)

```

```

C          GENERATE IDENTITY MATRIX
C
5  RANGE=1.00-12
  IF(MV-1) 10,25,10
10 IQ=-N
  DO 20 J=1,N
    IQ=IQ+N
  DC 20 I=1,N
    IJ=IQ+I
    R(IJ)=0.000
    IF(I-J) 20,15,20
15 R(IJ)=1.000
20 CCNTINUE

C          COMPUTE INICIAL AND FINAL NORMS (ANORM AND ANORMX)
C
25 ANCRM=0.000
  DO 35 I=1,N
    DC 35 J=1,N
      IF(I-J) 30,35,30
30 IA=I+(J-J)/2
  ANCRM=ANCRM+A(IA)*A(IA)
35 CCNTINUE
  IF(ANCRM) 165,165,40
40 ANCRM=1.41400*DSQRT(ANCRM)
  ANRMX=ANCRM*RANGE/DFLOAT(N)

C          INICIALIZE INDICATORS AND COMPUTE THRESHOLD, THR
C
  IND=0
  THR=ANCRM
45 THR=THR/DFLOAT(N)
50 L=1
55 M=L+1

C          COMPUTE SIN AND COS
C
60 MQ=(M*M-M)/2
  LQ=(L*L-L)/2
  LM=L+MQ
62 IF(DABS(A(LM))-THR) 130,65,65
65 IND=1
  LL=L+LQ
  MM=M+MQ
  X=0.500*(A(LL)-A(MM))
68 Y=-A(LM)/DSQRT(A(LM)*A(LM)+X*X)
  IF(X) 70,75,75
70 Y=-Y
75 SINX=Y/DSQRT(2.000*(1.000+(DSQRT(1.000-Y*Y))))
  SINX2=SINX*SINX
78 CCSX=DSQRT(1.000-SINX2)
  CCSX2=COSX*COSX
  SINCS=SINX*COSX

C          ROTATE L AND M COLUMNS
C
  ILQ=N*(L-1)
  IMQ=N*(M-1)
  DC 125 I=1,N
    IQ=(I*I-I)/2
    IF(I-L) 80,115,80
80 IF(I-M) 85,115,90
85 IM=I+MQ

```

```

      GO TO 95
    90 IM=M+IQ
    95 IF(I-L) 100,105,105
    100 IL=I+LQ
      GO TO 110
    105 IL=L+IQ
    110 X=A(IL)*COSX-A(IM)*SINX
      A(IM)=A(IL)*SINX+A(IM)*COSX
      A(IL)=X
    115 IF(MV-1) 120,125,120
    120 ILR=ILQ+I
      IMR=IMQ+I
      X=R(ILR)*COSX-R(IMR)*SINX
      R(IMR)=R(ILR)*SINX+R(IMR)*COSX
      R(ILR)=X
    125 CCNTINUE
      X=2.000*A(LM)*SINCS
      Y=A(LL)*COSX2+A(MM)*SINX2-X
      X=A(LL)*SINX2+A(MM)*COSX2+X
      A(LM)=(A(LL)-A(MM))*SINCS+A(LM)*(COSX2-SINX2)
      A(LL)=Y
      A(MM)=X
C
C     TESTS FOR COMPLETION
C
C     TEST FOR M = LAST COLUMN
C
    130 IF(M-N) 135,140,135
    135 M=M+1
      GO TO 60
C
C     TEST FOR L = SECOND FROM LAST COLUMN
C
    140 IF(L-(N-1)) 145,150,145
    145 L=L+1
      GO TO 55
    150 IF(IND-1) 160,155,160
    155 IND=0
      GO TO 50
C
C     COMPARE THRESHOLD WITH FINAL NORM
C
    160 IF(THR-ANRMX) 165,165,45
C
C     SORT EINGENVALUES AND EIGENVECTORS
C
    165 IC=-N
      DC 185 I=1,N
      IQ=IQ+N
      LL=I+(I*I-1)/2
      JQ=N*(I-2)
      DO 185 J=I,N
      JQ=JQ+N
      MP=J+(J*J-J)/2
      IF(A(LL)-A(MM))170,185,185
    170 X=A(LL)
      A(LL)=A(MM)
      A(MM)=X
      IF(MV-1) 175,185,175
    175 DO 180 K=1,N
      ILR=IQ+K
      IMR=JQ+K
      X=R(ILR)

```

```

R(I,LR)=R(IMR)
180 R(IMR)=X
185 CONTINUE
RETURN
END

```

PROBLEMA AMOSTRA 1 DO MPN-1.

```

15 4 -1 0 0
0.5      0.7      0.9      0.95
0
2.5      2.0      2.0      3.6
1.0

```

```

0
0
1.0      0.3333333333
0
0
1.0      0.6      0.2      0.0285714286
0
0
1.0      0.7142857143 .3571428571 .119047619 .0238095238 .0021645022
0
0
-1 0 0 0      1.0      1.0
0
0 1 1 1 1 1 0
10 8 8 12

```

```

06 1A
06 1B
06 1C
06 2A
06 2B
06 2C
06 3A
06 3B
06 3C
06 4A
06 4B
06 4C

```

```

0
0 1 1 1 1 1 0
10 8 8 12

```

PROBLEMA AMOSTRA 2 DO MPN-1.

```

15 2 0 1 0
0.5      0.9
1.0      0.0
0.5      1.0
0

```

```

1 1 0 0 1 1 0
6 12

```

PROBLEMA AMOSTRA 3 DO MPN-1.

```

15 2 -1 1 1
0.5537      0.99163
0.0      1.0
0.2868      3.262
1.0
0
0
1.0      .32362666667 .048856
0
0
0 1 0 0 0 1. 1
5 10

```

```

06 1A
06 1B
06 1C
06 2A
06 2B
06 2C
06 2C
09
10

```

PROBLEMA AMOSTRA 1 00 MM-H-L

ORDEN DE APROXIMACION = 15  
 NUMERO DE REGIONES = 4

REGIÃO 1  
 NUMERO DE PARTICULAS SECUNDARIAS = 0.50000000 00  
 FONTES EXTERNAS = 0.0  
 ESPESURA ILCP1 = 0.20000000 01  
 COEFICIENTES DE EXPANSAO FIC1...F1N1 =  
 0.10000000 01 0.0 0.0 0.0  
 0.0

0.0 0.0 0.0  
 0.0 0.0 0.0

REGIÃO 2  
 NUMERO DE PARTICULAS SECUNDARIAS = 0.10000000 00  
 FONTES EXTERNAS = 0.0  
 ESPESURA ILCP1 = 0.20000000 01  
 COEFICIENTES DE EXPANSAO FIC1...F1N1 =  
 0.10000000 01 0.0 0.0 0.0  
 0.0

0.0 0.0 0.0  
 0.0 0.0 0.0

REGIÃO 3  
 NUMERO DE PARTICULAS SECUNDARIAS = 0.10000000 00  
 FONTES EXTERNAS = 0.0  
 ESPESURA ILCP1 = 0.20000000 01  
 COEFICIENTES DE EXPANSAO FIC1...F1N1 =  
 0.10000000 01 0.0 0.0 0.0  
 0.0

0.0 0.0 0.0  
 0.0 0.0 0.0

REGIÃO 4  
 NUMERO DE PARTICULAS SECUNDARIAS = 0.50000000 00  
 FONTES EXTERNAS = 0.0  
 ESPESURA ILCP1 = 0.30000000 01  
 COEFICIENTES DE EXPANSAO FIC1...F1N1 =  
 0.10000000 01 0.0 0.0 0.0  
 0.0

0.0 0.0 0.0  
 0.0 0.0 0.0

CONDICIONES DE CONTORNO - FACE ESQUERDA  
 - 1 0 0 0 0.0

0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0

CONDICIONES DE CONTORNO - FACE DEREITA  
 0 0 0 0 0.0

0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0

FLUIDO TOTAL

REGIÃO 1  
 A 0.0 0.25 0.30 0.75 1.00 1.25 1.50  
 F1(K) 0.119071250 01 0.19401150 04 0.013004250 00 0.00000000 00 0.00000000 00 0.00000000 00 0.00000000 00  
 X 1.75 2.25 2.50  
 F1(K) 0.303711250 00 0.298844440 00 0.245521660 00 0.204608940 00  
 REGIÃO 2  
 A 2.10 2.75 3.00 7.25  
 F1(K) 0.200417500 00 0.240325000 00 0.167700000 01 0.140325000 00 0.110000000 00 0.000000000 00  
 X 4.25

FIIX) C.84713377D-01 0.76096998C-01

REGIAC 1

X	4.50	4.75	5.00	5.25	5.50	5.75	6.00
FI(X)	C.76096989D-01	0.73750764D-01	0.69910651D-01	0.65684332D-01	0.61371769D-01	0.57121411D-01	0.53026120D-01
X	6.25	6.50					
FI(X)	C.49160617D-01	0.45681753C-C1					

REGIAC 4

X	6.50	6.80	7.10	7.40	7.70	8.00	8.30
FI(X)	C.45681790D-01	0.43073967D-01	0.40309433D-01	0.37546918D-01	0.34824375D-01	0.32158076D-01	0.29553441D-01
X	8.60	8.90	9.20	9.50	9.80	10.10	
FI(X)	0.27007305D-01	0.24507332C-C1	0.22027575D-01	0.19517890D-01	0.16838797D-01	0.13138165D-01	

ALBEDI CA FACE ESCUERDA = 0.12478439D 00

TAXA DE TRANSMISSAO NA FACE DIREITA = 0.78105557D-C2

CORRENTE TCTAL

REGIAC 1

X	0.0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50
J(X)	0.87521561D 00	0.73932079D 00	0.60174192D 00	0.48889000D 00	0.39670443D 00	0.32114394D 00	0.25922440D 00
X	1.75	2.00	2.25	2.50			
J(X)	C.20857002D 00	0.16717850D 00	0.13330409D 00	0.10526093D 00			

REGIAC 2

X	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00
J(X)	0.10526093D 00	0.90340683D-C1	0.76957282D-C1	0.65188893D-01	0.54921379D-01	0.45993231D-01	0.38228560D-01
X	4.25	4.50					
J(X)	0.31446533D-01	0.25443880D-01					

REGIAC 3

X	4.50	4.75	5.00	5.25	5.50	5.75	6.00
J(X)	0.25443880D-01	0.23564821C-01	0.21767702D-01	0.20072368D-01	0.18484171D-01	0.17003246D-01	0.15626803D-01
X	6.25	6.50					
J(X)	C.14350037D-01	0.13165652D-C1					

REGIAC 4

X	6.50	6.80	7.10	7.40	7.70	8.00	8.30
J(X)	0.13165692D-01	0.12499559C-01	0.11874143D-01	0.11290254D-01	0.10747533D-01	0.10245240D-01	0.97824808D-02
X	8.60	8.90	9.20	9.50	9.80	10.10	
J(X)	0.93583430D-02	0.89720288D-02	0.86230162D-02	0.83113330D-02	0.80382641D-02	0.78105557D-02	

REGIAC, FLUXO TCTAL MEDIO

1 0.61556374D 00 2 0.13302842D 00 3 0.61390938D-01 4 0.29750757D-01

PROBLEMA AMOSTRA 2 DO MPN-1.

CADEN DE APROXIMACAO - 15  
 NUMERO DE REGIOES \* 2

REGIAO 1  
 NUMERO DE PARTICULAS SECUNDARIAS = 0.500000000 00  
 PONTES EXTERNAS = 0.10000000 01  
 ESPESURA ILCRI = 0.50000000 00  
 COEFICIENTES DE EXPANSAO FIO...FINI -  
 C.10000000 01 0.0 0.0  
 0.0 0.0

REGIAO 2  
 NUMERO DE PARTICULAS SECUNDARIAS = 0.900000000 00  
 PONTES EXTERNAS = 0.0  
 ESPESURA ILCRI = 0.10000000 01  
 COEFICIENTES DE EXPANSAO FIO...FINI -  
 C.10000000 01 0.0 0.0  
 0.0 0.0

CONDICAO DE CONTENCIM = FACE ESQUERDA  
 REFERIDA

CONDICAO DE CONTENCIM = FACE DIREITA  
 0.0

FLUXO ANGULAR

REGIAO 1	PI=1.0	PI=0.9	PI=0.8	PI=0.7	PI=0.6	PI=0.5	PI=0.4
0.0	0.420041950 00	0.447637400 00	0.478710490 00	0.533814520 00	0.553663190 00	0.598958590 00	0.6510305740 00
0.08333	0.587914530 00	0.611356040 00	0.644894290 00	0.705695410 00	0.716525470 00	0.762528150 00	0.812521470 00
0.16667	0.843102310 00	0.872238980 00	0.905322830 00	0.943110960 00	0.94248190 00	0.951944590 00	0.9568721930 00
0.25000	0.961690070 00	0.980850580 00	0.993763010 00	0.998390000 00	0.998261650 00	0.998261650 00	0.998261650 00
0.33333	0.981459330 00	0.987644740 00	0.990279530 00	0.991364460 00	0.991774900 00	0.991871540 00	0.991871540 00
0.41667	0.99047670 00	0.992438630 00	0.992622370 00	0.992849000 00	0.992890660 00	0.992890660 00	0.992890660 00
0.50000	0.994832210 00	0.994722260 00	0.994528260 00	0.994296770 00	0.993955740 00	0.993419460 00	0.99279570 00
0.0	0.706147590 00	0.755785330 00	0.799708950 00	0.814596000 00	0.799708950 00	0.759733330 00	0.706147590 00
0.08333	0.813137470 00	0.846640040 00	0.872252300 00	0.8813081230 00	0.802816430 00	0.772778410 00	0.730985140 00
0.16667	0.910384910 00	0.91659630 00	0.914233970 00	0.902765510 00	0.802816430 00	0.780209140 00	0.749107460 00
0.25000	0.976821580 00	0.968151380 00	0.952214510 00	0.925738080 00	0.799660260 00	0.785162310 00	0.781293940 00
0.33333	0.990406490 00	0.982706400 00	0.9702198150 00	0.949715210 00	0.793862240 00	0.788511440 00	0.781674770 00
0.41667	0.976458510 00	0.955504120 00	0.920593550 00	0.712508250 00	0.705212270 00	0.795542270 00	0.787444040 00
0.50000	0.930390760 00	0.912237570 00	0.884635830 00	0.840668340 00	0.773472210 00	0.817395760 00	0.756720500 00
0.0	0.650305740 00	0.698558590 00	0.753663190 00	0.7814520 00	0.478716480 00	0.447637400 00	0.420041950 00
0.08333	0.68096920 00	0.725791740 00	0.785958110 00	0.817651930 00	0.510134510 00	0.480343370 00	0.454198030 00
0.16667	0.762520060 00	0.815583390 00	0.881378270 00	0.927306580 00	0.538286060 00	0.508166300 00	0.483113260 00
0.25000	0.822343030 00	0.878495650 00	0.937442160 00	0.962642760 00	0.563461030 00	0.530714800 00	0.511900360 00
0.33333	0.873490470 00	0.894667910 00	0.897445780 00	0.822921630 00	0.58664720 00	0.557163440 00	0.531928860 00
0.41667	0.913713070 00	0.911205440 00	0.874598680 00	0.826000780 00	0.609077620 00	0.572466230 00	0.536400510 00
0.50000	0.922333150 00	0.930133970 00	0.898024960 00	0.834447830 00	0.635620990 00	0.576375450 00	0.534762710 00

REGIAO 2

0-50000	0.22851170	00	0.17064260	00	0.18027620	00	0.19281620	00	0.20169670	00	0.21675940	00	0.25111960	00	0.31267950	00
0-58133	0.17192740	00	0.15064630	00	0.16381770	00	0.16381770	00	0.17172430	00	0.19411860	00	0.21302530	00	0.26674830	00
0-68667	0.13007470	00	0.11064970	00	0.11064970	00	0.11064970	00	0.11064970	00	0.11064970	00	0.11064970	00	0.11064970	00
0-75000	0.11064970	00	0.11064970	00	0.11064970	00	0.11064970	00	0.11064970	00	0.11064970	00	0.11064970	00	0.11064970	00
0-83133	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00
0-91667	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00
1-00000	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00
1-08133	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00
1-16667	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00
1-25000	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00
1-33133	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00
1-41667	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00
1-50000	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00	0.0813170	00

PLUXIC TOTAL

REGIAD 1	0-0	0-C8	0-D17	0-E25	0-F33	0-G42	0-H50	0-I58	0-J66	0-K74	0-L82	0-M90	0-N98	0-O106	0-P114	0-Q122
FLUXI	0.12750740	0.17200370	0.12701110	0.11779970	0.11361780	0.10735450	0.10768030	0.10768030	0.10768030	0.10768030	0.10768030	0.10768030	0.10768030	0.10768030	0.10768030	0.10768030

COMMENTE TOTAL

REGIAD 1	0-0	0-C8	0-D17	0-E25	0-F33	0-G42	0-H50	0-I58	0-J66	0-K74	0-L82	0-M90	0-N98	0-O106	0-P114	0-Q122
FLUXI	0.07144510	0.23336010	0.65091280	0.98730690	0.13370340	0.47100180	0.21144780	0.21144780	0.21144780	0.21144780	0.21144780	0.21144780	0.21144780	0.21144780	0.21144780	0.21144780

X		0.50	0.58	0.67	0.75	0.83	0.92	1.00
JWX	Q-21146478C 00	V-2CJ77818D 00	Q-19684665D 00	G-19051818P 00	Q-10471715D 00	Q-17939170D 00	Q-17450875D 00	
X		1.08	1.17	1.25	1.33	1.42	1.50	
JWX	Q-17004512D 00	Q-16598457D 00	Q-162317C2D 00	E-15903971D 00	Q-15616125D 00	Q-15371113D 00		

REGIAC, FLUXC TOTAL PEC1G  
 1 0.115416C9D C1 2 0.57733646D 0X

PROBLEMA AMOSTRA 3 DO MPN-1.

CRDEM DE APROXIMACAO = 15  
NUMERO DE REGIOES = 2

REGIAO 1  
NUMERO DE PARTICULAS SECUNDARIAS = 0.55370000 00  
FONTES EXTERNAS = 0.0  
ESPESSURA (LCM) = 0.28680000 00  
COEFICIENTES DE EXPANSAO F(0)...F(N) -  
0.10000000 01 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0  
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0

REGIAO 2  
NUMERO DE PARTICULAS SECUNDARIAS = 0.99163000 00  
FONTES EXTERNAS = 0.10000000 01  
ESPESSURA (LCM) = 0.32620000 01  
COEFICIENTES DE EXPANSAO F(0)...F(N) -  
0.10000000 01 0.32362667 00 0.48856000 01 0.0 0.0 0.0 0.0  
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0

CONDICAOES DE CONTORNO - FACE ESQUERDA  
REFLETIDA

CONDICAOES DE CONTORNO - FACE DIREITA  
REFLETIDA

FLUXO TOTAL

REGIAO 1  
X 0.0 0.06 0.11 0.17 0.23 0.29  
F(x) 0.18586516 02 0.18663015 02 0.18900392 02 0.19324664 02 0.19987917 02 0.20984430 02

REGIAO 2  
X 0.29 0.61 0.94 1.27 1.59 1.92 2.24  
F(x) 0.20984430 02 0.24446033 02 0.26314282 02 0.27746189 02 0.28904845 02 0.29847267 02 0.30600013 02  
X 2.57 2.90 3.22 3.55  
F(x) 0.31176710 02 0.31584754 02 0.31828215 02 0.31909158 02

REGIAC, FLUXO TOTAL MEDIC  
1 0.19312177 02 2 0.28936947 02

FATOR DE DESVANTAGEM TERMICA = 0.14583783 01

## ABSTRACT

This work describes the MPN-1, which is a computer program made in FORTRAN IV. The MPN-1 uses  $P_N$  method to solve the one-speed, anisotropic linear steady-state transport equation in non-multiplying multiregions, slab geometry.

The MPN-1 allows a maximum number of 12 regions, and maximum order of approximation,  $N=15$ . Besides, the anisotropic scattering is treated by an expansion in Legendre polynomial up to maximum degree of  $L=15$ . The boundary conditions used are:

- I) free surface
- II) isotropic incidence
- III) cosine incidence ( $a\mu^{\alpha_1} + b\mu^{\alpha_2} + c\mu^{\alpha_3}$ )
- IV) monodirectional incidence (delta function)
- V) total reflection

The required input are: order of approximation  $P_N$ , average number of secondary particles in each region, external sources, thickness of each region, coefficients in a Legendre expansion of the transfer function in each region, and type of boundary conditions at the boundaries. The output are: albedo, transmission factor, disadvantage factor, total and angular fluxes and current.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS\*

1. BOND, G. R. & SIEWERT, C. E. The effect of linearly anisotropic neutron scattering on disadvantage factor calculation. *Nucl. Sci. Engng*, 35:277-82, 1969.
2. DAVIDSON, B. *Neutron transport theory*. London, Oxford University, 1957.
3. DEVAUX, C.; GRANDJEAN, P.; ISHIGURO, Y.; SIEWERT, C. E. On multiregion problems in radiative transfer. *Astrophys. Space Sci.*, 62:225-33, 1979.
4. ECCLESTON, G. W. & McCORMICK, N. J. One speed transport disadvantage factor calculation for general anisotropic scattering. *J. Nucl. Energy*, 24:23-34, 1970.
5. ENGLE JR., W. W. *ANISN, a one dimensional discrete-ordinates transport code with anisotropic scattering*. Oak Ridge, Oak Ridge National Laboratory, Mar. 1967. (K-1693).
6. GRANDJEAN, P. & SIEWERT, C. E. The  $F_n$  method in neutron transport theory. Part. II. Applications and numerical results. *Nucl. Sci. Engng*, 69:161-8, 1979.
7. ISHIGURO, Y. *Multiregion problems in plane geometry and numerical techniques in one group transport theory*. São Paulo, Instituto de Energia Atômica, Out. 1977. (IEA-491; CEN-AFR-52).
8. KUSCER, I. Milne's problem for anisotropic scattering. *J. Math. Phys.*, 34:256-66, 1956.
9. LALETIN, N. I.; SULTANOV, N. V.; VLASOV, Y. A.; KONIAEV, S. I. The Effect of the anisotropic scattering on the thermal utilization factor. *Ann. Nucl. Sci. Engng*, 1:333-8, 1974.

(\*) As referências bibliográficas relativas a documentos localizados pelo IPEN foram revistas e enquadradas na NB-66 da Associação Brasileira de Normas Técnicas.

- 
10. MAIORINO, J. R. & SIEWERT, C. E. On multi-media calculations in the theory of neutron diffusion. *Ann. Nucl. Energy*, 7(10):535, 1980.
  11. MARK, J. C. *The spherical harmonics method*. Chalk River, Ont., National Research Council of Canada, 1957. (CRT-340).
  12. RODRIGUES, A. F. *Solução de sistemas esparsos de equação algébricas lineares por métodos diretos*. São Paulo, Universidade de São Paulo, 1979. (Dissertação de Mestrado).
  13. SIEWERT, C. E. & BENOIST, P. The Fn method in neutron transport theory. Part I: theory and applications. *Nucl. Sci. Engng*, 69:156-60, 1979.
  14. SIEWERT, C. E.; MAIORINO, J. R.; ÖZISIK, M. N. The use of the Fn method for radiative transfer problems with reflective boundary conditions. *J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer*, London, 23:565-73, 1980.
  15. *SYSTEM/860 scientific subroutine package. Version. III-Programmer's manual*. IBM, Aug. 1970. (GH20-0205-4).