



AUTARQUIA ASSOCIADA À UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

**ANÁLISE VIA SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DE UMA
ESTRUTURA DE ONDAS LENTAS**

EIK TENÓRIO

Tese apresentada como parte dos
requisitos para obtenção do Grau de
Doutor em Ciências na Área de
Tecnologia Nuclear - Aplicações.

Orientador:
Dr. Cláudio Costa Motta

Co-Orientador:
Prof. Dr. Paulo Reginaldo Pascholati

**São Paulo
2004**

INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES
Autarquia associada à Universidade de São Paulo

**ANÁLISE VIA SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DE
UMA ESTRUTURA DE ONDAS LENTAS**

EIK TENÓRIO



Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do Grau de Doutor em Ciências na Área de Tecnologia Nuclear – Aplicações.

Orientador:
Dr. Cláudio Costa Motta

Co-orientador:
Prof. Dr. Paulo Reginaldo Pascholati

EXEMPLAR REVISADO PELO AUTOR

SÃO PAULO

2004

A Deus, por tudo.
A meus pais pelo amor, carinho,
incentivo e sacrifícios.

AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Cláudio Costa Motta pela orientação, apoio e incentivo durante todo o desenvolvimento do trabalho.

Ao Prof. Dr. Paulo Pascholati pelo apoio, colaboração, amizade, sinceridade e co-orientação.

A todos os professores responsáveis pela minha formação acadêmica.

A minha família que sempre me apoiou e colaborou desde o início de minha caminhada.

Aos amigos Manzoli, Rivelino, Marcelo Silva e Adriano pela amizade, incentivo, sinceridade e algumas discussões.

Ao amigo CT Paulo Rocha pela amizade, apoio, sinceridade, incentivo e colaboração.

A Lilian M. e Silva pelo carinho, afeto, compreensão e apoio.

Ao Carlos Eduardo F. Silva, Gamaliel, Sto Paschoa, Sto Maria Luiza, Sto Coutinho, Cabo Leal, CT Mário Alves pela amizade e colaboração.

A Sônia pelos serviços de secretaria e ao CF Ricardo Sbragio pela confiança depositada quando assina uma CI.

A Johnson D. Angelo, Cristiane, Élio, Nivaldo, Claudinho e todo o grupo do laboratório de microondas de potência por eventuais cooperações.

A todo o pessoal (Vera Lúcia, Clóvis, Marcelo, Rui, Aparecido, Luciano Dias e não citados) da divisão de informática e do departamento técnico do CTMSP pelas cooperações e suporte.

A todos os funcionários do CTMSP e do Instituto de Física que, de uma maneira geral, contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

Ao CTMSP pelas instalações e suporte para o desenvolvimento do trabalho.

A FAPESP pelo suporte financeiro.

ANÁLISE VIA SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DE UMA ESTRUTURA DE ONDAS LENTAS

EIK TENÓRIO

RESUMO

Neste trabalho investigou-se uma estrutura de ondas lentas e suas condições de contorno, via simulação computacional, pelo método de elementos finitos.

Todo o formalismo teórico desenvolvido para investigar o problema é baseado na formulação fraca da Equação de Helmholtz, via método de Galerkin, utilizando-se a análise vetorial de aresta tridimensional (3-D) e escalar em duas dimensões (2-D) aplicadas em guias de onda homogêneas e não-homogêneas. A partir deste formalismo escreveu-se os códigos capazes de resolver numericamente o problema de autovalor para estruturas periódicas com descontinuidades.

ANÁLISE VIA SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DE UMA ESTRUTURA DE ONDAS LENTAS

EIK TENÓRIO

ABSTRACT

In this work it was investigated a slow-wave structure and the boundary conditions by computational simulation by finite element methods.

All the theoretical formalism developed to investigate the problem is based on the weak formulation of the Helmholtz equation, applying Galerkin method, by using of the three-dimensional (3D) vectorial edge analysis for cavities and two dimensions (2D) for homogeneous and inhomogeneous periodic structures. Starting from this formalism it was written the codes that were be able to compute the eigenvalue problem for periodic structures and with discontinuities.

SUMÁRIO

RESUMO	i
ABSTRACT	ii
LISTA DE FIGURAS	v
LISTA DE SÍMBOLOS	vi
CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO	1
1.1. TWT: A MOTIVAÇÃO.....	1
1.2. O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	2
1.2.1. TEOREMA DE FLOQUET	3
1.2.2. MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS	4
CONSTRUÇÃO DE UMA FORMULAÇÃO INTEGRAL.....	4
ESPECIFICAÇÃO DO DOMÍNIO DO PROBLEMA	4
A EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL	5
CONDIÇÃO DE CONTORNO	5
1.2.3. FORMULAÇÃO DOS RESÍDUOS PONDERADOS	6
1.3. DISCRETIZAÇÃO DA FORMULAÇÃO INTEGRAL EM TERMOS DAS FUNÇÕES INTERPOLAÇÃO NOS ELEMENTOS FINITOS E CONSTRUÇÃO DA EQUAÇÃO MATRICIAL	7
1.3.1. DISCRETIZAÇÃO DA FORMULAÇÃO INTEGRAL	7
1.3.2. CONSTRUÇÃO DA EQUAÇÃO MATRICIAL	9
1.3.3. A ESCOLHA DOS ELEMENTOS.....	9
1.3.4. GERAÇÃO DE MALHA.....	10
1.3.5. SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO MATRICIAL.....	10
1.3.6. PÓS-PROCESSAMENTO	11
1.4. ESTRUTURA DE APRESENTAÇÃO DO TRABALHO	11
CAPÍTULO 2: MODELOS TEÓRICOS PARA A ESTRUTURA HELICOIDAL	14
2.1. INTRODUÇÃO	14
2.2. DECOMPOSIÇÃO DOS CAMPOS EM COMPONENTES PERPENDICULAR E PARALELA À DIREÇÃO DE PROPAGAÇÃO.....	15
2.3. OBTENÇÃO DAS COMPONENTES \vec{e}_\perp E \vec{h}_\perp A PARTIR DAS COMPONENTES e_z E h_z	17
2.4. SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ - ONDAS LENTAS	17
2.5. SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DA PROPAGAÇÃO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO SUSTENTADO POR UMA HÉLICE NO INTERIOR DE UMA GUIA DE ONDAS CIRCULAR	20
2.7. MODELO DE PIERCE.....	23
2.8. CÁLCULO DA POTÊNCIA	29
2.9. CÁLCULO DA IMPEDÂNCIA DE INTERAÇÃO	34
2.10. A HÉLICE DE FITA: O MODELO DE SENSIPER	37
Teorema de Floquet.....	38
Desenvolvimento da relação de dispersão para o modelo da hélice fita.....	39
Regiões Proibidas da Hélice de Fita	41
Desenvolvimento da relação de dispersão	43
2.11. CONCLUSÃO DO CAPÍTULO	52

CAPÍTULO 3: SOLUÇÃO DO PROBLEMA ELETROMAGNÉTICO PARA CAVIDADES RESSONANTES - ANÁLISE NODAL E ANÁLISE UTILIZANDO ELEMENTOS DE ARESTA	53
3.1. INTRODUÇÃO	53
3.2. DESENVOLVIMENTO DA FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS UTILIZANDO-SE ANÁLISE NODAL	54
3.3. DESENVOLVIMENTO DA FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS UTILIZANDO-SE ELEMENTOS DE ARESTA VETORIAIS.....	56
3.4. ANÁLISE DAS CAVIDADES DE MICROONDAS	59
3.5. CONCLUSÃO DO CAPÍTULO	62
CAPÍTULO 4: ANÁLISE DE ESTRUTURAS PERIÓDICAS SIMPLES EM 2 - D E 3 - D.....	63
4.1. INTRODUÇÃO	63
4.2. GUIA CORRUGADA 2-D.....	63
A) DESENVOLVIMENTO DA FORMULAÇÃO FRACA	65
B) APLICAÇÃO DA CONDIÇÃO DE CONTORNO PERIÓDICA	67
C) ANÁLISE DOS RESULTADOS	70
4.3. GUIA DE ONDAS CIRCULAR.....	73
A) ANÁLISE DOS RESULTADOS	75
4.4. CONCLUSÃO DO CAPÍTULO	76
CAPÍTULO 5: PROBLEMAS DE PROPAGAÇÃO EM ESTRUTURAS PERIÓDICAS EM 3D.....	77
5.1. INTRODUÇÃO	77
5.2. FORMULAÇÃO FRACA PARA ESTRUTURAS PERIÓDICAS 3-D COM DESCONTINUIDADES	78
5.3. APLICAÇÃO DA CONDIÇÃO DE CONTORNO PERIÓDICA	85
5.4. DESENVOLVIMENTO DA EXPRESSÃO PARA O CÁLCULO DA POTÊNCIA.....	86
5.5. DESENVOLVIMENTO DA EXPRESSÃO PARA O CÁLCULO DA IMPEDÂNCIA DE INTERAÇÃO.....	95
5.6. ANÁLISE DA ESTRUTURA DE ONDAS LENTAS PROPOSTA POR BIRDSALL E EVERHART	96
5.7. CONCLUSÃO DO CAPÍTULO	100
CAPÍTULO 6: CONCLUSÃO DO TRABALHO	101
PERSPECTIVAS FUTURAS	102
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	103
APÊNDICES	108
ANEXO.....	169

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Esquema geral de uma TWT.	1
Figura 2 - Estrutura periódica: guia de onda corrugada com largura (eixo y) infinita.	3
Figura 3 - Elemento vetorial de aresta utilizando um prisma reto.	10
Figura 4 - Fluxograma da plataforma computacional.	12
Figura 5 - a) Representação da modelo da falsa hélice e b) diagrama dos vetores unitários ortogonais ao plano da hélice e à direção de propagação.	23
Figura 6 - Curvas de dispersão no modelo da falsa hélice no interior de uma guia de ondas circular ($b = 2a$ ângulo de passo de 10° , 20° e 30°) e diferentes valores de permissividade ϵ_r	27
Figura 7 - Impedância de interação no modelo da falsa hélice no interior de guia de onda circular para diferentes valores de permissividade ϵ_r , $b = 2a$, ângulo de passo de 10° , 20° e 30°	36
Figura 8 - Esquema de uma estrutura de ondas lentas helicoidal do tipo fita e parâmetros característicos: o comprimento do passo p , a largura da fita δ , o raio interno da hélice a , o raio externo da hélice b , o raio do guia c e o ângulo de passo Ψ , em uma estrutura periódica helicoidal.	37
Figura 9 – Regiões proibidas no diagrama de dispersão.	42
Figura 10 – Conjunto de translações das regiões proibidas no diagrama de dispersão.	42
Figura 11 - Relação de dispersão de Sensiper para o modelo da hélice de fita.	49
Figura 12 - Relação de dispersão de Sensiper para o modelo da hélice de fita no interior de uma guia circular de raio $b = 2a$ com dielétrico ϵ_r	51
Figura 13 - Cavidade de microondas retangular e discretização da cavidade.	59
Figura 14 - Cavidade de microondas circular com a discretização do domínio.	60
Figura 15 - Guia de ondas corrugada em paredes laterais abertas, para $y = \pm\infty$	64
Figura 16 - Domínio periódico do problema do guia corrugado.	67
Figura 17 - Estrutura corrugada. Análise 2-D: $p = 1$, $h = 1$, $d = 2$ e $l = p/2$	70
Figura 18 – Relação de dispersão para a estrutura corrugada. Análise 2-D: $p = 1$, $h = 1$, $l = p/2$ e $d = 1, 2$ e 3	72
Figura 19 - Relação de dispersão teórica para o guia de ondas circular de raio a	75
Figura 20 – a) Hélices propostas por Birdsall e Everhart; e b) Guia circular carregada com uma das hélices e os suportes dielétricos: discretização com elementos tipo prisma reto de base triangular.	96
Figura 21 - Conservação da potência: potência de saída normalizada pela potência de entrada versus distância axial normalizada pelo comprimento periódico p	98
Figura 22 - Relação de dispersão: razão entre diâmetro da guia pelo diâmetro da hélice ($b/a = 2$).	98
Figura 23 - Relação de dispersão: velocidade de fase versus frequência ($k_r a_i$).	99
Figura 24 - Impedância de Interação para a estrutura ($b/a = 2$).	99

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras romanas maiúsculas

A_{ij}, B_{ij} – elementos de matriz ($A_{11}, \dots, A_{NN}, B_{11}, \dots, B_{NN}$)

A_n, B_n – constantes de integração

$A_{1n\phi}, A_{1nz}, C_{1n\phi}, C_{1nz}$ – coeficientes

A_{1n}, C_{1n} – constantes definidas pelos coeficientes $A_{1n\phi}, A_{1nz}, C_{1n\phi}, C_{1nz}$

$A_{2n}, B_{1n}, B_{2n}, C_{2n}, D_{1n}, D_{2n}$ – constantes definidas por funções modificadas de Bessel

$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ – matrizes do problema de autovalor generalizado - $\hat{A} \cdot \hat{f} = \lambda \hat{B} \cdot \hat{f}$

C_i – coeficientes de expansão das funções de interpolação

\vec{E} - vetor campo elétrico

$\vec{E}_{//}$ - componente vetor campo elétrico

\vec{F}^u - solução aproximada

\vec{F} - solução exata

F_1, F_2 – fatores que relacionam as funções G_{ij}

G_{ij} – função que relaciona funções de Bessel modificadas de ordem zero ($i, j = 0, 1$)

G_{ij}^n – função que relaciona funções de Bessel modificadas de primeira ordem para um dado n e $i, j = 0, 1$

\vec{H} - vetor campo magnético

\hat{I} - matriz identidade

$I_0(x)$ - função modificada de Bessel de ordem zero do primeiro tipo com argumento imaginário

$I_1(x)$ - função de Bessel modificada de primeira ordem do primeiro tipo com argumento imaginário

$I_n(x)$ - função de Bessel modificada do primeiro tipo de ordem n com argumento imaginário

$|J|$ - determinante do Jacobiano

J - densidade superficial de corrente

$J_{//}$ - componente paralela da densidade superficial de corrente

J_{\perp} - componente perpendicular da densidade superficial de corrente

J_0 - amplitude da densidade superficial de corrente

J_ϕ, J_z - componentes da densidade superficial de corrente nas direções (ϕ, z)

K - impedância de interação

\bar{K} - impedância normalizada de interação

$K_0(x)$ - função modificada de Bessel de ordem zero do segundo tipo com argumento imaginário

$K_1(x)$ - função modificada de Bessel de primeira ordem do segundo tipo com argumento imaginário

K_m - subespaço de Krylov

$K_n(x)$ - função modificada de Bessel de ordem n do segundo tipo com argumento imaginário

L - operador diferencial, ou matriz triangular inferior

L^T - transposta de uma matriz triangular inferior

L_{ij}^e - funções de base tridimensionais

\vec{K}_i - função de base vetorial

\vec{M}_i - função de base vetorial

N - ordem de uma matriz $(N \times N)$

\vec{N}_i - função de base vetorial

\vec{P}_i - função interpolação

P_i - potência propagada pela estrutura de ondas lentas

P_1 - potência propagada no interior da hélice

Q - matriz ortogonal (Q_m)

Q^{-1} - matriz inversa da matriz Q (Q_m^{-1})

Q^T - transposta da matriz ortogonal Q (Q_m^T)

R - resíduo

$\vec{S}(x, y, z)$ - vetor de Poyting para o fluxo de potência

\vec{S}_1 - vetor de Poyting para a região interior à hélice

$\vec{S}_2, \vec{S}_{21}, \vec{S}_{22}, \vec{S}_{23}$ - vetores de Poyting para a região entre a hélice e a guia circular

T - matriz tridiagonal

\vec{W}_i^e - vetores de base (forma de Nedelec) - $i = 1, 2, 3$

W - função ponderação

$U(r, \phi)$ - função de duas variáveis

V - volume do elemento

Z_0 - impedância do espaço livre

Letras romanas minúsculas

a – raio da falsa hélice, ou raio da hélice de fita, ou largura da corrugação no Teorema de Floquet, ou dimensão da guia nos eixo dos x

a_1 – raio interno da hélice de fita

a_2 – raio externo da hélice de fita

$\hat{a}_x, \hat{a}_y, \hat{a}_z$ – versores do sistema de coordenadas cartesiano

$\hat{a}_r, \hat{a}_\phi, \hat{a}_z$ – versores do sistema de coordenadas cilíndricas

a_{ij}, a_{ik}, a_{ip} – elementos de matrizes locais, ou coeficientes da função triangular N_{ij}

b_{ij}, b_{ik}, b_{ip} – elementos de matrizes locais, ou coeficientes da função triangular N_{ij}

b – raio interno da guia circular sem o material dielétrico que sustenta a hélice, ou altura da corrugação, ou dimensão da guia retangular no eixo dos y

c_{ij}, c_{ik}, c_{ip} – elementos de matrizes locais, ou coeficientes da função triangular N_{ij}

c – velocidade da luz, ou raio da guia com o material dielétrico

$\cot x$ - função trigonométrica cotangente - $1/\tan x$

d – comprimento da cavidade no eixo dos z , ou altura da corrugação ou espessura do material dielétrico

d_1 – largura da hélice de fita (Birdsall e Everhart)

d_2 – largura do intervalo de espaçamento da hélice de fita (Birdsall e Everhart)

e – espessura do dielétrico

\vec{e}_\perp – componente perpendicular do campo elétrico

\vec{e}_z – componente longitudinal do campo elétrico

\vec{h}_\perp – componente perpendicular do campo magnético

h_z – componente longitudinal do campo magnético

\vec{f}_c - função fonte independente

f - frequência da onda

f_0 - frequência da onda no espaço livre

f_i – coeficiente de expansão

\vec{g} - função fonte independente

h – altura da corrugação

h_n – autovalor nas regiões entre o eixo axial da hélice e a guia circular ($n = 1, 2$)

\vec{h}_\perp – componente perpendicular do campo magnético

h_z – componente longitudinal do campo magnético

h_1 – autovalor na região interior a hélice

h_2 – autovalor na região entre a hélice e a guia circular

h^e – altura do prisma reto de base triangular - $h^e = z_2^e - z_1^e$

j - parte imaginária de um número complexo ($a + jb$).

i, j, k, l, m, n, p – índices cíclicos

$\hat{j}_{\phi_n}, \hat{j}_{z_n}$ - amplitudes complexas de Fourier da densidade superficial de correntes associadas com o n -ésimo harmônico espacial

k_{nm} - número de onda para cavidades tridimensionais

k_0 - número de onda do espaço livre

k_c - número de onda de corte

l_{ij} - comprimento da aresta ij

l - largura da corrugação da guia corrugada

n - índice para indicar ordem da função ou modo

\hat{n} - versor normal à direção da superfície

p - tamanho do passo da hélice, período da corrugação

$\vec{q}_{i,j}$ - vetores ortogonais

r – coordenada cilíndrica radial, raio da guia de ondas

$\text{sen } x$ - função trigonométrica seno

$\text{tan } x$ - função trigonométrica tangente

v_f - velocidade de fase

v_g - velocidade de grupo

\vec{x} - conjunto de autovetores do problema de autovalor ordinário ($\vec{A} \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}$)

x - abscissa do sistema de coordenadas cartesiano

$x_{i,j}^e, y_{i,j}^e$ – coordenadas da aresta ij

y - ordenada do sistema de coordenadas cartesiano

z – coordenada longitudinal no sistema de coordenadas cartesiano

z^e – coordenada longitudinal (z) do prisma reto de base triangular

z_1^e, z_2^e – coordenadas z do prisma reto de base triangular

Letras gregas

α_i - elementos de uma matriz tridiagonal de ordem N ($t_{ii} = \alpha_1 \dots \alpha_N$)

β_i - elementos de uma matriz tridiagonal de ordem N ($t_{i+1,i} = \beta_1 \dots \beta_N$)

β - constante de propagação - $\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g}$

β_0 - constante de propagação do modo fundamental β_n ($n = 0$)

$\beta_0 p$ - deslocamento de fase por passo da hélice - $\frac{\beta_0 p}{2\pi} = \frac{\beta_0 a}{\cot \Psi}$

δ - largura da hélice de fita

Δ^c - área de um elemento triangular

∂ - operador diferencial parcial

ϵ_0 - permissividade do espaço livre

ϵ_r - permissividade relativa do meio

ϕ - coordenada cilíndrica

$\Phi(x, z)$ - função potencial

Φ - função geratriz

μ_0 - permeabilidade magnética do espaço livre

μ_r - permeabilidade magnética relativa do meio

Γ - região de fronteira da integral de linha

λ - autovalor da equação de autovalores, ou comprimento de onda

λ_0 - comprimento de onda no espaço livre

λ_g - comprimento de onda guiado - $\lambda_g = p$

∇ - operador diferencial nãbla

$\vec{\nabla}_{//}$ - operador gradiente da função na direção paralela à superfície

$\vec{\nabla}_{\perp}$ - operador gradiente da função na direção perpendicular à superfície

Ψ - ângulo de passo da hélice

π - constante de valor 3,14159265...

σ - condutividade elétrica

$\sigma_{//}$ - componente paralela da condutividade elétrica

σ_{\perp} - componente perpendicular da condutividade elétrica

ω - frequência angular

Ω - domínio

CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO

1.1. TWT: A motivação

Os amplificadores de microondas do tipo TWT (“traveling-wave tube”) foram concebidos no início dos anos 50 e desde então são utilizados na amplificação de sinais eletromagnéticos nas frequências de microondas e regiões milimétricas. As TWT têm diversas aplicações tais como: na tecnologia de radares, em comunicações via satélite e sistemas que operam em microondas de alta potência. São dispositivos que utilizam um feixe eletrônico e, portanto, trabalham internamente sob vácuo. Além disso, utilizam uma estrutura de ondas lentas [1]-[3] construída de tal maneira que seja possível a interação do campo eletromagnético sustentado por esta estrutura com as ondas de carga espacial sustentadas pelo feixe de elétrons que propaga no interior da estrutura. Nestas condições, ocorrerá a transferência de parte da energia cinética do feixe para o campo eletromagnético e, desta forma, a amplificação do sinal de microondas desejado. O fato da TWT utilizar uma estrutura de ondas lentas, ao invés de cavidades ressonantes, possibilita ao dispositivo um comportamento banda larga. Em particular, a estrutura de ondas lentas nas TWT pode ser obtida utilizando-se uma estrutura helicoidal metálica no interior de um guia de onda circular, conforme mostra a Fig. 1.

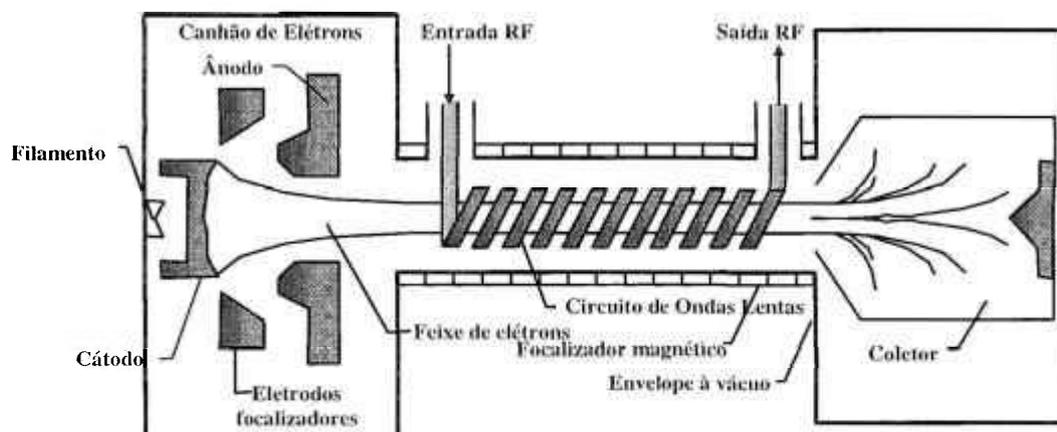


Figura 1 - Esquema geral de uma TWT.

Uma análise cuidadosa da TWT revela que um dos pontos críticos para um desempenho satisfatório é a estrutura de ondas lentas. Existem problemas que os modelos teóricos comumente empregados não abordam, entre eles pode-se citar: a condutividade finita do metal utilizado na fabricação da estrutura helicoidal, a espessura da mesma e o efeito dos materiais dielétricos utilizados para apoiar e centrar a hélice.

A utilização de modelos simplificados implica na realização de inúmeros ensaios experimentais para obter fatores de correção empíricos, demandando um aumento no tempo e custo para o desenvolvimento de modelos realísticos de TWT.

Somente a partir de 1998, descreve-se na literatura, [4]-[6], uma metodologia capaz de resolver, utilizando simulação computacional pelo método "Particle in cell" (PIC) [7]-[11], não somente o cálculo da estrutura de ondas lentas como também uma TWT completa. Este modelo foi capaz de produzir resultados com excelente concordância com o experimento. Foi possível, pela primeira vez, incluindo efeitos não lineares, obter a relação de dispersão, atenuação, impedância e ganho de pequenos sinais.

O objetivo deste trabalho constituiu-se na elaboração de uma plataforma computacional, para ambiente windows ou linux, baseada no método de elementos finitos (MEF), capaz de modelar tridimensionalmente com boa precisão uma guia de ondas circular infinita carregada com uma estrutura helicoidal, a espessura, bem como os efeitos de suportes dielétricos. A condutividade ainda é considerada infinita, mas o código poderá ser modificado no futuro, de modo a incluir este efeito, assim como, o comprimento finito da guia.

O projeto foi desenvolvido no Laboratório de Microondas do Centro Tecnológico da Marinha em São Paulo, CTMSP, como resultado de um esforço com o objetivo de dominar a tecnologia relativa a tais dispositivos.

O Laboratório do Acelerador Linear (LAL) e o CTMSP desenvolvem trabalho de cooperação técnica na área de microondas de potência. O Laboratório de Microondas, até o presente momento, domina as técnicas para a construção de conjuntos catodo-grade, bombas iônicas, brasagem em fornos de alto vácuo e em atmosfera de hidrogênio, tecnologia de ultra-alto-vácuo, brasagem cerâmica-metal, construção de hélices para estruturas de ondas lentas, moduladores pulsados de potência, focalizadores magnéticos e o condicionamento de materiais empregados na fabricação de válvulas de microondas [12].

1.2. O método dos elementos finitos

O método dos elementos finitos foi escolhido como ferramenta matemática para o modelamento das estruturas analisadas neste trabalho pelas seguintes razões principais:

- método possibilita modelar estruturas não-homogêneas, apresentando descontinuidade e com geometrias complexas; e

- permite a aplicação do método dos resíduos ponderados de Galerkin para o modelamento de estruturas espacialmente periódicas.

Muito embora o número de períodos na estrutura tenha sido considerado infinito, de maneira a ser possível utilizar o teorema de Floquet, os resultados obtidos pela presente análise constituem-se em informações relevantes como ferramenta de projeto para dispositivos desde que esses apresentem um número grande, mas finito, de períodos.

1.2.1. Teorema de Floquet

Nos problemas de autovalores, objeto deste trabalho, o que se deseja obter é a curva de dispersão $\beta = \beta(\omega)$, onde β é denominada de constante de propagação, sendo um número real por hipótese, isto é, neste trabalho as perdas não serão consideradas. O teorema de Floquet, válido para estruturas espacialmente periódicas e infinitas, pode ser enunciado como:

Para uma dada frequência em regime permanente, para um dado modo de propagação, os campos eletromagnéticos em uma seção transversal da estrutura de guiagem diferem daqueles espaçados por um período somente por uma constante complexa.

Em termos matemáticos o teorema de Floquet pode ser escrito como

$$\vec{F}[x, y, z + d] = \vec{F}(x, y, z) e^{-j\beta d}, \quad (1.1)$$

onde \vec{F} representa a grandeza vetorial em análise (campo elétrico ou magnético) e d o período. Na Fig. 2 ilustra-se uma estrutura periódica, que consiste de uma guia de ondas corrugada ao longo da direção de propagação, direção z , e com dimensão infinita na direção y . Os campos na posição (x, y, z) e $(x, y, z + d)$, se diferem somente pela constante complexa $e^{-j\beta d}$.

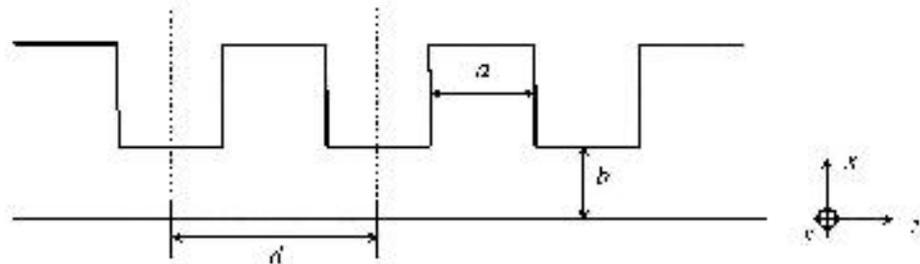


Figura 2 - Estrutura periódica: guia de onda corrugada com largura (eixo y) infinita.

1.2.2. Método dos resíduos ponderados

O método dos resíduos ponderados de Galerkin foi utilizado para modelar todas as estruturas analisadas neste trabalho. Uma outra possibilidade seria utilizar o método variacional, que se baseia na variação de um funcional construído para cada problema. Contudo, conforme discutido em [13], essa formulação é mais difícil de construir quando comparada com a formulação utilizando o método dos resíduos ponderados e, portanto, não foi utilizado neste trabalho.

No que se segue, apresenta-se uma descrição geral do método dos elementos finitos e como esse foi aplicado para modelar a estrutura helicoidal periódica. A descrição apresentada aqui, e também apresentada em muitos livros textos [14], [15] e [16]. Contudo, acredita-se que tal apresentação possa contribuir, sob o ponto de vista didático, para referência futura.

A aplicação do método de Galerkin a problemas eletromagnéticos compreende as seguintes etapas:

- construção de uma formulação integral;
- discretização da formulação integral utilizando-se funções de interpolação de elementos finitos e construção de uma equação matricial; e
- solução da equação matricial.

A seguir discute-se mais detalhadamente cada etapa.

Construção de uma formulação integral

Para a construção da formulação integral deve-se especificar os seguintes fatores:

- domínio do problema;
- a equação diferencial parcial que descreve o fenômeno físico no domínio do problema em termos da função incógnita: campos \vec{E} ou \vec{H} ; e
- especificação da condição de contorno em cada ponto do contorno que encerra o domínio de maneira que o problema apresente solução única.

Especificação do domínio do problema

Tendo em vista que as estruturas analisadas neste trabalho são espacialmente periódicas é suficiente considerar uma única célula unitária a fim de modelar o comportamento eletromagnético da estrutura completa. Em geral escolhe-se a célula com menor tamanho possível, a fim de economizar memória computacional disponível.

A equação diferencial parcial

As equações de Maxwell, leis fundamentais da teoria eletromagnética, são utilizadas para obter a solução do problema por meio da variável de trabalho que é o campo elétrico \vec{E} ou o campo magnético \vec{H} . Neste trabalho admite-se uma variação temporal harmônica descrita segundo a expressão $e^{j\omega t}$, onde $\omega = 2\pi f$ é a frequência angular do campo eletromagnético. Nesta situação as equações Maxwell, na ausência de fontes, são escritas como:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -j\omega\mu_0\mu_r \vec{H}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= j\omega\epsilon_0\epsilon_r \vec{E}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= 0,\end{aligned}\tag{1.2}$$

onde μ_0 e ϵ_0 são a permeabilidade magnética e a permissividade elétrica, ambas para o vácuo, respectivamente. As correspondentes relativas μ_r e ϵ_r são, para este trabalho, $\mu_r = 1$ e ϵ_r real.

As equações de Maxwell podem ser escritas na seguinte forma

$$L\{\vec{F}\} + \vec{g} = \vec{0}, \quad \text{no domínio } \Omega, \tag{1.3}$$

onde L representa um operador diferencial, $L = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times -k_0^2 \epsilon_r$ quando $\vec{F} = \vec{E}$ e $L = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times -k_0^2$ quando $\vec{F} = \vec{H}$. A função \vec{g} denota a função fonte independente de \vec{F} , que neste trabalho será considerada nula, $\vec{g} = \vec{0}$. O domínio Ω é o domínio compreendido pela célula unitária periódica.

Condição de contorno

O teorema de Floquet é a condição de contorno utilizada ao longo do contorno periódico da célula unitária. Para condutores perfeitos tem-se que a componente tangencial do campo elétrico deve ser nula, isto é,

$$\hat{n} \times \vec{E} = \vec{0}, \quad (1.4)$$

e, para o caso magnético, a componente normal deve ser nula,

$$\hat{n} \cdot \vec{H} = 0, \quad (1.5)$$

onde \hat{n} denota o vetor unitário normal à superfície do condutor perfeito.

1.2.3. Formulação dos resíduos ponderados

Tendo em vista que o método dos elementos finitos é um método que gera uma solução aproximada para o problema, denota-se por \vec{F}^a a solução aproximada para diferenciar de \vec{F} a solução exata. Desta forma a Eq. (1.3) pode ser escrita em termos de \vec{F}^a , como

$$\vec{R}_\Omega(\vec{F}^a) = L(\vec{F}^a) + \vec{g}, \quad (1.6)$$

onde \vec{R}_Ω denota um erro residual, podendo-se inferir que $\vec{R}_\Omega = \vec{0}$ se e somente se $\vec{F}^a = \vec{F}$. No método dos resíduos ponderados o erro residual \vec{R}_Ω é multiplicado por uma função arbitrária \vec{W} , denominada de função ponderação e, então, o produto resultante integrado sobre o domínio Ω do problema, isto é,

$$\psi(\vec{F}^a) = \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \vec{R}_\Omega(\vec{F}^a) d\Omega = \int_{\Omega} \vec{W} \cdot [L(\vec{F}^a) + \vec{g}] d\Omega. \quad (1.7)$$

De acordo com o método dos resíduos ponderados, é possível encontrar funções ponderação \vec{W} de tal maneira que $\psi(\vec{F}^a) = 0$.

1.3. Discretização da formulação integral em termos das funções interpolação nos elementos finitos e construção da equação matricial

1.3.1. Discretização da formulação integral

No método dos elementos finitos, a função solução aproximada \vec{F}^a é representada por meio de um número finito de incógnitas (ou graus de liberdade do problema). Quando se impõe que $\psi(\vec{F}^a) = 0$, espera-se obter valores corretos da função campo incógnita em toda a extensão do domínio Ω . Em geral, isto não é verdadeiro, em virtude do número finito de graus de liberdade. Contudo, escolhendo o tipo, a extensão dos elementos de discretização e posterior refino da discretização pode-se obter valores de \vec{F}^a muito próximos a \vec{F} .

As condições de contorno devem estar explicitamente incluídas na Eq. (1.7) de maneira a obter-se solução única. Com este intuito a Eq. (1.7) é integrada por partes. No caso da equação de Helmholtz e também na equação de onda vetorial, a integração por partes implica em duas conseqüências:

- redução da ordem da derivada de ordem mais elevada da variável de trabalho e aumento de uma ordem a derivada de maior ordem da função de ponderação; e
- surgimento de uma integral de superfície que permite que as condições de contorno do problema sejam incorporadas à formulação.

Desta forma, integrando-se por partes a Eq. (1.7) obtém-se a seguinte equação, também conhecida como formulação integral fraca,

$$\psi(\vec{F}^a) = \int_{\Omega} L(\vec{W}) \cdot L(\vec{F}^a) d\Omega + \int_{\Omega} \vec{W} \cdot L(\vec{F}^a) d\Omega + \int_{\Omega} \vec{W} \cdot \vec{g} d\Omega + \oint_{\Gamma} \vec{W} \cdot \vec{B}(\vec{F}^a) d\Gamma = 0. \quad (1.8)$$

A condição de contorno pode ser expressa, no caso mais geral, como

$$\vec{B}(\vec{F}^a) + \vec{r} = \vec{B}_1(\vec{F}^a) + \vec{B}_2(\vec{F}^a) + \vec{r} = \vec{0}, \quad (1.9)$$

onde \vec{B}_1 e \vec{B}_2 são operadores diferenciais e \vec{r} uma função constante independente de \vec{F} .

A fim de representar \vec{F}^a por meio de um número finito de graus de liberdade, o domínio Ω é discretizado em domínios menores, denotados por Ω^e , sendo denominados de elementos finitos. No interior de cada elemento a variável de trabalho é representada por uma

combinação linear de funções de interpolação (vetorial ou escalar), denotada por \vec{N}_i , com coeficiente de expansão f_i , de maneira que \vec{F}^a possa ser escrita como:

$$\vec{F}^a = \sum_{i=1}^N \vec{N}_i f_i = \vec{N}^T \cdot \vec{f}_e. \quad (1.10)$$

As funções de interpolação vetoriais \vec{N} são escolhidas a partir de um conjunto completo de funções (que possuem as propriedades de ortogonalidade e fechamento). Neste sentido as funções de interpolação são também referenciadas como funções de base. A função de ponderação é também representada no interior de cada elemento, como uma combinação linear das funções de interpolação vetorial \vec{P}_i escolhidas, também, a partir de um conjunto completo, isto é,

$$\vec{W} = \sum_{i=1}^N \vec{C}_i \vec{P}_i = \vec{C}^T \cdot \vec{P}_e. \quad (1.11)$$

Os coeficientes de expansão C_i das funções de interpolação são arbitrários. Além disso, segundo o método de Galerkin, toma-se

$$\vec{P}_i = \vec{N}_i. \quad (1.12)$$

Em virtude do domínio Ω ser discretizado em regiões de elementos finitos Ω^e , a integral da Eq. (1.9) é representada como um somatório de integrais de cada elemento

$$\Psi = \sum_{e=1}^{N_e} \Psi^e(\vec{F}^a), \quad (1.13)$$

onde

$$\begin{aligned} \Psi^e(\vec{F}^a) = & \vec{C}^{eT} \cdot \left[\int_{\Omega^e} L(\vec{N}) \cdot L(\vec{N}^T) d\Omega \right] \vec{f}_e + \vec{C}^{eT} \cdot \left[\int_{\Omega^e} \vec{N} \cdot L(\vec{N}^T) d\Omega \right] \vec{f}_e \\ & - \vec{C}^{eT} \cdot \left[\int_{\Gamma^e} \vec{q} \vec{N} \cdot \vec{B}(\vec{N}^T) d\Gamma \right] \vec{f}_e + \vec{C}^{eT} \cdot \left[\int_{\Omega^e} \vec{N} \cdot \vec{g} d\Omega \right] - \vec{C}^{eT} \cdot \left[\int_{\Gamma^e} \vec{q} \vec{N} \cdot \vec{r} d\Gamma \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Escrevendo-se a equação diferencial em uma forma adequada, pode-se verificar que a integral de superfície de um dado elemento cancela-se com a integral de superfície do elemento adjacente ao longo de seus contornos comuns.

1.3.2. Construção da equação matricial

A Eq. (1.14) pode ser escrita na seguinte forma vetorial

$$\vec{\Psi}^e = \vec{C}^T \cdot \left(\vec{A}^e \cdot \vec{f}_e \right) - \lambda \vec{C}^T \cdot \left(\vec{B}^e \cdot \vec{f}_e \right) = \vec{0}. \quad (1.15)$$

Para os problemas de autovalores abordados neste trabalho todas as condições de contorno são homogêneas. A Eq. (1.15) é válida para cada elemento finito. As matrizes \vec{A}^e e \vec{B}^e são conhecidas como matrizes rigidez do elemento. A equação matricial para a região discretizada (“malhada”) completa é obtida a partir da contribuição da matriz rigidez de cada elemento, utilizando o número de graus de liberdade global. Este procedimento é descrito, por exemplo, em [16], [17] e [18]. A equação matricial resultante, após o cancelamento do coeficiente \vec{C} arbitrário, pode ser escrita como:

$$\vec{A} \cdot \vec{f} = \lambda \vec{B} \cdot \vec{f}, \quad (1.16)$$

onde λ é o autovalor do problema.

1.3.3. A escolha dos elementos

Como um dos objetivos deste trabalho é a construção de uma plataforma computacional básica, capaz de modelar estruturas periódicas de ondas lentas, não houve preocupação de utilizar elementos finitos com polinômios de ordem superior. Este problema será abordado em trabalhos futuros.

Utilizou-se três tipos de elementos. São eles: para a abordagem 2-D nodal, utilizou-se elementos triangulares de primeira ordem. Para abordagem 3-D nodal, utilizou-se prismas retos e para a abordagem 3-D utilizando elementos vetoriais de arestas, utilizou-se, também, prismas retos. Os elementos triangulares de primeira ordem são aqueles discutidos em [15] e [17] e todas as integrais dos elementos triangulares foram calculadas analiticamente. Na formulação 3-D, utilizando elementos vetoriais de aresta, tem-se garantida a continuidade da componente tangencial

da variável de trabalho vetorial através da aresta que é compartilhada por dois elementos vetoriais adjacentes, mas não se impõe a continuidade da componente normal da variável, como ocorre no caso do elemento nodal. Conseqüentemente os elementos vetoriais apresentam três propriedades relevantes:

- evitam o aparecimento de soluções espúrias (não fisicamente possíveis) do problema de autovalores [17], [19], [20] e [21];
- calculam satisfatoriamente, sem custo adicional extra, quantidades globais, como frequência de ressonância em regiões que contém pontos de descontinuidades; e
- permitem que o campo elétrico seja usado em regiões com descontinuidades na permissividade elétrica e o campo magnético usado em regiões com descontinuidades na permeabilidade magnética.

Na formulação de elementos finitos em 3-D, as integrais foram discretizadas utilizando-se um prisma reto com 6 nós e 9 arestas, conforme ilustrado na Fig. 3.

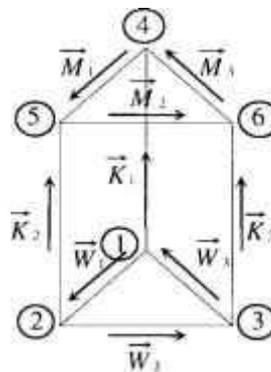


Figura 3 - Elemento vetorial de aresta utilizando um prisma reto.

1.3.4. Geração de malha

Não era objetivo inicial do trabalho o desenvolvimento de um código para geração de malha para a região de interesse. Contudo, devido ao fato de optar-se por um elemento com a forma de prisma reto, construiu-se um programa, bastante simples, baseado em planilha eletrônica, para a geração de malha espacial. O usuário pode escolher o número de elementos por comprimento de onda e os parâmetros do material (ϵ , neste trabalho).

1.3.5. Solução da equação matricial

A matriz \vec{A} da Eq. (1.16) é complexa, porém hermitiana. Já a matriz \vec{B} é simétrica, definida e positiva [21]. A solução do sistema é desenvolvida utilizando-se inicialmente a

decomposição de Cholesky da matriz \vec{B} . Posteriormente, utilizou-se um algoritmo de redução de Householder para obter a forma tridiagonal. Finalmente os autovalores são obtidos utilizando-se o método QL implícito. O método Jacobi mostrou-se computacionalmente ineficiente para a determinação dos autovalores. Todos os códigos utilizados neste trabalho foram escritos tomando-se como base [19], exceto aqueles para a construção da matriz rigidez, condensação das condições de contorno de Dirichlet e de Floquet.

Outra propriedade das matrizes \vec{A} e \vec{B} é que elas são esparsas. Esta propriedade foi utilizada em várias etapas do processamento da solução. Outro fato a ser considerado na análise dos autovalores do problema é que em circuitos de microondas a determinação com exatidão dos autovalores dominantes ou constantes de propagação é essencial para o projeto de dispositivos. Uma análise da Eq. (1.16), revela que aplicação do MEF resulta no problema de autovalores generalizados. Em geral costuma-se dizer que análise do problema de autovalores decorrente da aplicação do método dos elementos finitos apresenta um grau maior de complicação em virtude de três fatores:

- as matrizes são esparsas;
- a aplicação do método conduz ao problema de autovalores generalizado; e
- somente alguns poucos e selecionados autovalores são desejados.

Em vista destes fatos implementou-se uma rotina adicional à plataforma, baseada nos algoritmos de Lanczos [21], para a determinação dos autovalores. O código livre EISPACK [22] trata de matrizes densas e ocuparia um grande volume de memória se fosse utilizado.

1.3.6. Pós-processamento

Como parte do pós-processamento, implementou-se uma rotina para a verificação do teorema da conservação da potência. Na Fig. 4 mostra-se o fluxograma da plataforma computacional desenvolvida para a análise de estruturas periódicas de ondas lentas.

1.4. Estrutura de apresentação do trabalho

A estrutura de capítulos utilizada neste trabalho segue a seqüência cronológica utilizada para a construção da plataforma computacional desenvolvida. No capítulo 2, apresenta-se o modelo da falsa hélice desenvolvida por Pierce [1]-[2] e o modelo da hélice de fita desenvolvida por Sensiper [23]. Os dois modelos são discutidos e apresenta-se uma solução do problema da propagação do campo eletromagnético em uma guia circular carregada pela falsa hélice e pela hélice de fita. Por meio da solução da equação transcendental obtém-se a curva de dispersão para a estrutura. O importante conceito de impedância de interação do campo eletromagnético com a

estrutura de guiagem constituída pela hélice e a guia circular é também abordado segundo o modelo de Pierce, posteriormente, no capítulo 5 estes resultados serão comparados com aqueles obtidos segundo a solução numérica.

Nos capítulos 3, 4 e 5 apresentam-se o desenvolvimento do código computacional na análise 3-D da estrutura de ondas lentas obtida pela utilização de estrutura helicoidal. Os resultados são apresentados em ordem crescente de complexidade da análise. Iniciando pelo capítulo 3, onde são investigados os problemas das frequências de ressonância de cavidades.

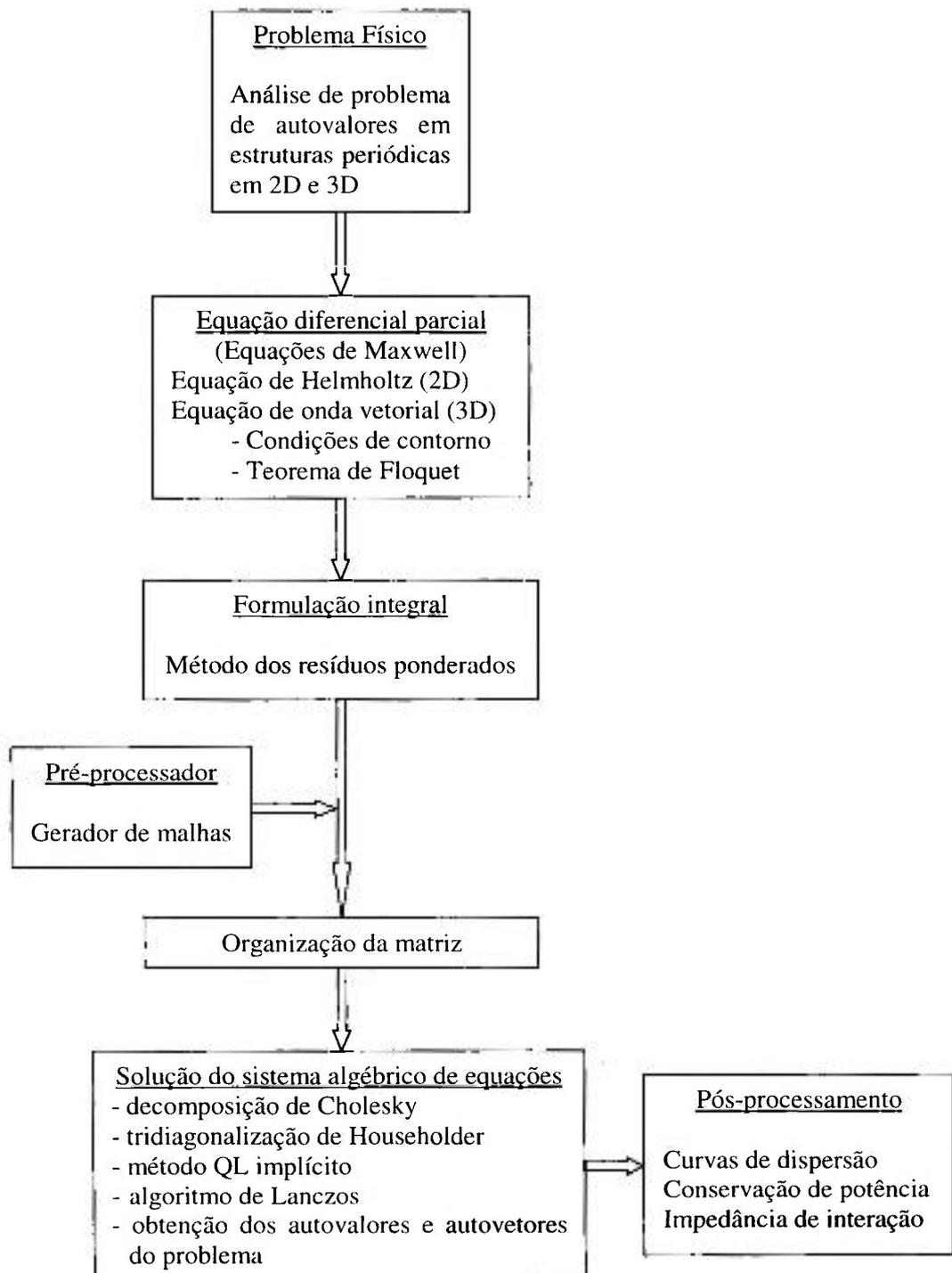


Figura 4 - Fluxograma da plataforma computacional.

Análise via simulação computacional de uma estrutura de ondas lentas

São investigados dois tipos de cavidades: retangular e circular. Inicialmente utiliza-se análise nodal e posteriormente análise utilizando elementos vetoriais de arestas. A análise é conduzida em termos do refino das malhas e capacidade de memória computacional necessária para resolver os problemas.

No capítulo 4, implementa-se a condição de contorno periódica, isto é, o teorema de Floquet. A rotina é então verificada em um problema 2D utilizando análise nodal. Posteriormente, verifica-se a validade da rotina 3D implementada com elementos vetoriais de aresta, resolvendo o problema da propagação em uma guia circular homogênea. Os resultados são apresentados na forma de curvas de dispersão.

No capítulo 5, finalmente, investiga-se o comportamento do campo eletromagnético em estruturas periódicas. Para isto, modifica-se o código validado no capítulo 4, de modo a descrever o carregamento devido a estrutura periódica.

Os resultados obtidos são expressos por meio de curvas de dispersão, assim como o efeito dos suportes dielétricos nestas curvas. Na etapa do pós-processamento verifica-se a validade do teorema da conservação de energia.

Como parte original deste trabalho, cita-se a modificação na equação de onda vetorial, de maneira a incluir a descontinuidade ao longo do eixo dos z (eixo de propagação) devido ao carregamento da estrutura helicoidal. Todas as integrais utilizadas na construção da formulação fraca, decorrentes desta modificação estão apresentadas no apêndice D.

No capítulo conclusões e perspectivas futuras, apresentam-se algumas observações sobre a eficiência da metodologia utilizada com base nos resultados obtidos e sugestões para trabalhos futuros. Por último, encontra-se uma lista de referências bibliográficas e anexo os trabalhos (“papers”) publicados como resultados preliminares durante o desenvolvimento da tese.

CAPÍTULO 2: MODELOS TEÓRICOS PARA A ESTRUTURA HELICOIDAL

2.1. Introdução

Neste capítulo apresentam-se e discutem-se os modelos teóricos comumente encontrados na literatura [23]-[27] para a análise de uma estrutura capaz de suportar a propagação de ondas lentas, construída a partir de uma estrutura helicoidal inserida no interior de um guia de ondas circular. A discussão é orientada com o intuito de se mostrar as propriedades e limitações dos modelos e as hipóteses consideradas de modo a tornar o modelo tratável analiticamente. O capítulo inicia com a decomposição das equações de Maxwell nas direções paralela e perpendicular à direção de propagação do campo eletromagnético, considerada como a direção z . A seguir, obtém-se a equação de Helmholtz para a estrutura sob a hipótese que tal estrutura possa ser capaz de sustentar a propagação de ondas lentas. Divide-se o problema em duas regiões. A região 1, compreendida para $r \leq a$, onde a é o raio da estrutura helicoidal e a região 2, compreendida para $a \leq r \leq b$, onde b é o raio da guia circular. Aplicando-se as condições de contorno de Dirichlet para a parede em $r = b$ e a de simetria para $r = 0$, obtém-se expressões para os campos em termos de séries de Fourier-Bessel. As soluções para as duas regiões são então casadas na superfície da estrutura helicoidal, localizada em $r = a$. Os modelos teóricos existentes para modelar a estrutura helicoidal são denominados: modelo de Pierce [1], ou modelo da falsa hélice, e o modelo de Sensiper [23], ou modelo da hélice de fita. O modelo de Pierce, que é o modelo mais simples, é capaz de descrever corretamente a redução da velocidade de propagação da velocidade de fase em função do ângulo de passo da hélice, porém não é capaz de descrever os harmônicos espaciais na equação de dispersão da estrutura. O modelo de Sensiper já descreve corretamente os harmônicos espaciais. Contudo ambos os modelos consideram a espessura da estrutura helicoidal desprezível. Esta hipótese é fundamental, pois permite tratar a estrutura como contínua e a hélice é descrita como condição de contorno em $r = a$. Tal restrição é removida no capítulo 5 deste trabalho, onde se construiu uma solução utilizando o método dos elementos finitos. Após obter expressões para a solução dos campos, equação de dispersão, utiliza-se então o princípio da conservação de potência para a determinação da impedância de interação da hélice. Estes conceitos serão então comparados com aqueles resultados obtidos pela solução numérica desenvolvida e apresentada no capítulo 5.

Ao final do capítulo discute-se também o problema da hélice de fita para projetos de TWT para aplicação em alta potência. Neste caso a hélice de fita não é a estrutura mais adequada, tendo em vista que outros modos de propagação, além do modo fundamental, passam a apresentar impedância de interação da mesma ordem de grandeza do modo fundamental, e desta forma podendo ser excitados. Este problema foi discutido por Chodorow e Chu [28], que propuseram um modelo alternativo de hélice onde se utilizam duas hélices idênticas, ao invés de uma, intercaladas, mas enroladas ao contrário. Esses autores demonstram que tal estrutura é capaz de atenuar a propagação de modos superiores. Contudo o modelo proposto não é de fácil construção prática. Um outro modelo, baseado no mesmo conceito das hélices duplas enroladas no sentido contrário, foi proposto por Birdsall e Everhart [29]. Tendo em vista que a geometria proposta por esses autores encontra considerável importância prática em TWT de alta potência, essa geometria foi escolhida para realizar-se a análise computacional. Embora os autores não tenham reportado o desenvolvimento teórico analítico, talvez, por este ser extremamente complexo, eles apresentaram um conjunto de resultados experimentais que servirão como comparação com os resultados computacionais obtidos neste trabalho. O desenvolvimento teórico [30] – [33] apresentado neste capítulo com o objetivo de se obter formas fechadas para a relação de dispersão e a impedância de interação seguiu os procedimentos apresentados em [34] – [36].

2.2. Decomposição dos campos em componentes perpendicular e paralela à direção de propagação

Admitindo-se que os campos elétrico e magnético possam ser escritos em termos das componentes perpendicular (\perp) e paralela (\parallel) à direção de propagação, direção z , e que a dependência em z possa ser representada segundo $e^{-j\beta z}$, pode-se escrever os vetores campo elétrico e magnético, respectivamente, como:

$$\begin{aligned}\vec{E}(r, \phi, z) &= \vec{E}_{\perp}(r, \phi, z) + \vec{E}_{\parallel}(r, \phi, z) = \vec{e}_{\perp}(r, \phi) e^{-j\beta z} + \vec{e}_{\parallel}(r, \phi) e^{-j\beta z} \\ &= \vec{e}_{\perp}(r, \phi) e^{-j\beta z} + \hat{a}_z e_z(r, \phi) e^{-j\beta z},\end{aligned}\quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}\vec{H}(r, \phi, z) &= \vec{H}_{\perp}(r, \phi, z) + \vec{H}_{\parallel}(r, \phi, z) = \vec{h}_{\perp}(r, \phi) e^{-j\beta z} + \vec{h}_{\parallel}(r, \phi) e^{-j\beta z} \\ &= \vec{h}_{\perp}(r, \phi) e^{-j\beta z} + \hat{a}_z h_z(r, \phi) e^{-j\beta z}.\end{aligned}\quad (2.2)$$

Nestas condições o operador $\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_\perp + \vec{\nabla}_\parallel$ pode ser escrito como $\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_\perp - j\beta \hat{a}_z$. Desta forma a lei de Faraday, em termos das componentes perpendicular e paralela, se escreve:

$$\vec{\nabla}_\perp \times \vec{e}_\perp = -j\omega\mu_0 h_z \hat{a}_z, \text{ e} \quad (2.3)$$

$$\hat{a}_z \times \vec{\nabla}_\perp e_z + j\beta \hat{a}_z \times \vec{e}_\perp = j\omega\mu_0 \vec{h}_\perp. \quad (2.4)$$

A lei de Ampère-Maxwell toma a seguinte forma:

$$\vec{\nabla}_\perp \times \vec{h}_\perp = j\omega\epsilon_0 e_z \hat{a}_z, \text{ e} \quad (2.5)$$

$$\hat{a}_z \times \vec{\nabla}_\perp h_z + j\beta \hat{a}_z \times \vec{h}_\perp = -j\omega\epsilon_0 \vec{e}_\perp. \quad (2.6)$$

As equações para a divergência resultam em:

$$\vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{h}_\perp = j\beta h_z, \text{ e} \quad (2.7)$$

$$\vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{e}_\perp = j\beta e_z. \quad (2.8)$$

Por outro lado, a equação de Helmholtz:

$$\nabla^2 \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{Bmatrix} + k_0^2 \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{Bmatrix} = \vec{0}, \quad (2.9)$$

se transforma, segundo $\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_\perp - j\beta \hat{a}_z$ e $\nabla^2 = \nabla_\perp^2 - \beta^2$, em

$$\nabla_\perp^2 \begin{Bmatrix} \vec{e}_\perp \\ \vec{h}_\perp \end{Bmatrix} + (k_0^2 - \beta^2) \begin{Bmatrix} \vec{e}_\perp \\ \vec{h}_\perp \end{Bmatrix} = \vec{0}, \quad (2.10)$$

$$\nabla_\perp^2 \begin{Bmatrix} e_z \\ h_z \end{Bmatrix} + (k_0^2 - \beta^2) \begin{Bmatrix} e_z \\ h_z \end{Bmatrix} = 0. \quad (2.11)$$

2.3. Obtenção das componentes \vec{e}_\perp e \vec{h}_\perp a partir das componentes e_z e h_z

É possível obter as componentes \vec{e}_\perp e \vec{h}_\perp a partir das componentes e_z e h_z , solução da Eq. (2.11) utilizando as Eqs. (2.4) e (2.6) que constituem o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} j\omega\mu_0\vec{h}_\perp - j\beta\hat{a}_z \times \vec{e}_\perp = \hat{a}_z \times \vec{\nabla}_\perp e_z \\ -j\beta\hat{a}_z \times \vec{h}_\perp - j\omega\epsilon_0\vec{e}_\perp = \hat{a}_z \times \vec{\nabla}_\perp h_z \end{cases}$$

que resolvido para \vec{e}_\perp e \vec{h}_\perp resulta em:

$$\vec{h}_\perp = -\frac{j\beta}{k_c^2} \vec{\nabla}_\perp h_z - \frac{j\omega\epsilon_0}{k_c^2} \hat{a}_z \times \vec{\nabla}_\perp e_z, \quad (2.12)$$

$$\vec{e}_\perp = -\frac{j\beta}{k_c^2} \vec{\nabla}_\perp e_z - \frac{j\omega\mu_0}{k_c^2} \hat{a}_z \times \vec{\nabla}_\perp h_z, \quad (2.13)$$

onde $k_c^2 = k_0^2 - \beta^2$.

2.4. Solução da equação de Helmholtz - ondas lentas

A Eq. (2.11) escrita em coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) , para $U = \begin{Bmatrix} e_r \\ h_z \end{Bmatrix}$ tem a seguinte forma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} - h^2 U = 0, \quad (2.14)$$

onde $h^2 = \beta^2 - k_0^2$, tendo em vista que se deseja obter uma estrutura de ondas lentas, isto é, $v_f < c$, onde v_f é a velocidade de fase e c a velocidade da luz. Aplicando a técnica de separação de variáveis $U(r, \phi) = f_1(r) f_2(\phi)$, a Eq. (2.14) se transforma em

$$\frac{f_2}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df_1}{dr} \right) + \frac{f_1}{r^2} \frac{d^2 f_2}{d\phi^2} - h^2 f_1 f_2 = 0.$$

Dividindo a equação anterior por $f_1 f_2$ e multiplicando por r^2 , obtém-se

$$\frac{r}{f_1} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df_1}{dr} \right) + \frac{1}{f_2} \frac{d^2 f_2}{d\phi^2} - h^2 r^2 = 0$$

que pode ser escrita como

$$\frac{r}{f_1} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df_1}{dr} \right) - h^2 r^2 = - \frac{1}{f_2} \frac{d^2 f_2}{d\phi^2}$$

Tendo em vista que o lado esquerdo da equação acima é somente função da variável independente r e o lado direito da variável independente ϕ , para que a igualdade se verifique para quaisquer valores de r e ϕ , ambos os lados da equação devem ser, necessariamente, iguais a uma constante, que será denotada por n^2 . Desta forma, obtém-se o seguinte par de equações:

$$\frac{d^2 f_2}{d\phi^2} = -n^2 f_2. \quad (2.15)$$

e

$$\frac{d^2 f_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_1}{dr} - \left(h^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) f_1 = 0. \quad (2.16)$$

Em vista da simetria azimutal n deve ser um número inteiro e, portanto a solução da Eq. (2.15) é do tipo

$$f_2(\phi) = e^{in\phi}, \quad (2.17)$$

com n inteiro, e a solução da Eq. (2.16) pode ser escrita como:

$$f_1(r) = A_n I_n(hr) + B_n K_n(hr), \quad (2.18)$$

onde I_n e K_n são as funções de Bessel modificadas e A_n e B_n são constantes de integração. As autofunções $U_n(r, \phi)$ para o problema podem ser escrita como:

$$U_n(r, \phi) = [A_n I_n(hr) - B_n K_n(hr)] e^{-jn\phi} \quad (2.19)$$

onde, segundo o teorema da expansão em termos de funções ortogonais, a solução geral para o problema é expressa segundo:

$$U(r, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n(r, \phi).$$

Portanto, as soluções gerais para a região $r \leq a$, podem ser escritas como

$$\vec{E}_{H1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_{1n} I_n(h_{1n}r) + B_{1n} K_n(h_{1n}r)] e^{jn\phi - j\beta z} \hat{a}_z, \quad (2.20)$$

$$\vec{H}_{H1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [C_{1n} I_n(h_{1n}r) + D_{1n} K_n(h_{1n}r)] e^{jn\phi - j\beta z} \hat{a}_z, \quad (2.21)$$

e para a região $a \leq r \leq b$ como

$$\vec{E}_{H2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_{2n} I_n(h_{2n}r) - B_{2n} K_n(h_{2n}r)] e^{jn\phi - j\beta z} \hat{a}_z, \quad (2.22)$$

$$\vec{H}_{H2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [C_{2n} I_n(h_{2n}r) + D_{2n} K_n(h_{2n}r)] e^{jn\phi - j\beta z} \hat{a}_z, \quad (2.23)$$

onde $h_{1n}^2 = \beta_n^2 - k_0^2$ e $h_{2n}^2 = \beta_n^2 - \epsilon_r k_0^2$, sendo ϵ_r a permissividade relativa do meio 2, região $a \leq r \leq b$. Os coeficientes A_{in} , B_{in} , C_{in} e D_{in} são constantes a serem determinadas pela aplicação apropriada das condições de contorno.

Utilizando as Eqs. (2.12) e (2.13) escritas para $k_c \rightarrow -h^2$ em termos das componentes radial e axial, pode-se escrever:

$$e_r = \frac{j\beta}{h^2} \frac{\partial e_z}{\partial r} - \frac{j\omega\mu_0}{h^2} \frac{1}{r} \frac{\partial h_z}{\partial \phi}$$

$$e_\phi = \frac{j\beta}{h^2} \frac{1}{r} \frac{\partial e_z}{\partial \phi} + \frac{j\omega\mu_0}{h^2} \frac{\partial h_z}{\partial r}$$

$$h_r = \frac{j\beta}{h^2} \frac{\partial h_z}{\partial r} - \frac{j\omega\epsilon_0}{h^2} \frac{1}{r} \frac{\partial e_z}{\partial \phi},$$

$$h_\phi = \frac{j\beta}{h^2} \frac{1}{r} \frac{\partial h_z}{\partial \phi} + \frac{j\omega\epsilon_0}{h^2} \frac{\partial e_z}{\partial r},$$

que substituindo as expressões para e_z e h_z resultam em

$$e_z = \sum_n \left\{ \frac{j\beta}{h_m^2} [A_m I_n'(h_m r) + B_m K_n'(h_m r)] - \frac{n\omega\mu_0}{h_m^2} \frac{1}{r} [C_m I_n(h_m r) + D_m K_n(h_m r)] \right\} e^{jn\phi}, \quad (2.24)$$

$$e_\phi = \sum_n \left\{ -\frac{n\beta}{h_m^2} \frac{1}{r} [A_m I_n(h_m r) + B_m K_n(h_m r)] + \frac{j\omega\mu_0}{h_m^2} [C_m I_n'(h_m r) + D_m K_n'(h_m r)] \right\} e^{jn\phi}, \quad (2.25)$$

$$h_r = \sum_n \left\{ \frac{j\beta}{h_m^2} [C_m I_n'(h_m r) + D_m K_n'(h_m r)] + \frac{n\omega\epsilon_0}{h_m^2} \frac{1}{r} [A_m I_n(h_m r) + B_m K_n(h_m r)] \right\} e^{jn\phi}, \quad (2.26)$$

$$h_\phi = \sum_n \left\{ -\frac{n\beta}{h_m^2} \frac{1}{r} [C_m I_n(h_m r) + D_m K_n(h_m r)] + \frac{j\omega\epsilon_0}{h_m^2} [A_m I_n'(h_m r) + B_m K_n'(h_m r)] \right\} e^{jn\phi}, \quad (2.27)$$

onde $i = 1, 2$ denota as regiões 1 e 2, respectivamente.

2.5. Solução para o problema da propagação do campo eletromagnético sustentado por uma hélice no interior de uma guia de ondas circular

Quando a estrutura helicoidal de raio $r = a$ está no interior de um guia de ondas de raio $r = b$, $b > a$, as seguintes condições de contorno devem ser satisfeitas:

- para $r = 0$, os campos devem ser finitos; e
- para $r = b$, a componente de \vec{E} paralela à superfície do condutor deve ser nula, $\vec{E} \times \hat{n} = \vec{0}$, como também a componente de \vec{H} normal $\vec{H} \cdot \hat{n} = 0$.

Isto implica que B_{n1} e D_{n1} deverão ser nulos nas Eqs. (2.24)-(2.27), e que

$$H_{z1} = -\frac{I_n(h_{2n}, b)}{K_n(h_{2n}, b)} A_{2n}$$

$$D_{2n} = -\frac{I'_n(h_{2n}, b)}{K'_n(h_{2n}, b)} C_{2n}$$

que garante $E_z = E_\phi = 0$ para $r = b$, e implica em $H_r = 0$.

Pode-se escrever o conjunto das componentes dos campos:

a) $0 \leq r \leq a$

Campo elétrico:

$$E_{z1}(r, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{1n} I_n(h_{1n} r) e^{jn\phi - j\beta_n z} \quad (2.28)$$

$$E_{r1}(r, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{j\beta_n}{h_{1n}} A_{1n} I'_n(h_{1n} r) - \frac{j\omega\epsilon_0 n}{h_{1n}^2} C_{1n} I_n(h_{1n} r) \right] e^{jn\phi - j\beta_n z} \quad (2.29)$$

$$E_{\phi 1}(r, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-\frac{\beta_n n}{h_{1n}^2} A_{1n} I_n(h_{1n} r) - \frac{j\omega\mu_0}{h_{1n}} C_{1n} I'_n(h_{1n} r) \right] e^{jn\phi - j\beta_n z} \quad (2.30)$$

Campo magnético:

$$H_{z1}(r, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{1n} I_n(h_{1n} r) e^{jn\phi - j\beta_n z} \quad (2.31)$$

$$H_{r1}(r, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{j\beta_n}{h_{1n}} C_{1n} I'_n(h_{1n} r) + \frac{j\omega\epsilon_0 n}{h_{1n}^2} A_{1n} I_n(h_{1n} r) \right] e^{jn\phi - j\beta_n z} \quad (2.32)$$

$$H_{\phi 1}(r, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-\frac{\beta_n n}{h_{1n}^2} C_{1n} I_n(h_{1n} r) + \frac{j\omega\epsilon_0}{h_{1n}} A_{1n} I'_n(h_{1n} r) \right] e^{jn\phi - j\beta_n z} \quad (2.33)$$

b) $a \leq r \leq b$

Campo elétrico:

$$E_{z2}(r, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{2n} [I_n(h_{2n}r) K_n(h_{2n}b) - I_n(h_{2n}b) K_n(h_{2n}r)] e^{jn\phi - j\beta_n z}, \quad (2.34)$$

$$E_{r2}(r, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{j\beta_n}{h_{2n}} A_{2n} [I'_n(h_{2n}r) K_n(h_{2n}b) - I_n(h_{2n}b) K'_n(h_{2n}r)] \right. \\ \left. + \frac{\omega\mu_0}{h_{2n}^2} \frac{n}{r} C_{2n} [I_n(h_{2n}r) K'_n(h_{2n}b) - I'_n(h_{2n}b) K_n(h_{2n}r)] \right\} e^{jn\phi - j\beta_n z}, \quad (2.35)$$

$$E_{\phi2}(r, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{\beta_n}{h_{2n}^2} \frac{n}{r} A_{2n} [I_n(h_{2n}r) K_n(h_{2n}b) - I_n(h_{2n}b) K_n(h_{2n}r)] \right. \\ \left. + \frac{j\omega\mu_0}{h_{2n}} C_{2n} [I'_n(h_{2n}r) K'_n(h_{2n}b) - I'_n(h_{2n}b) K'_n(h_{2n}r)] \right\} e^{jn\phi - j\beta_n z}; \quad (2.36)$$

Campo magnético:

$$H_{z2}(r, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n} [I_n(h_{2n}r) K'_n(h_{2n}b) - I'_n(h_{2n}b) K_n(h_{2n}r)] e^{jn\phi - j\beta_n z}, \quad (2.37)$$

$$H_{r2}(r, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{j\beta_n}{h_{2n}} C_{2n} [I'_n(h_{2n}r) K'_n(h_{2n}b) - I'_n(h_{2n}b) K'_n(h_{2n}r)] \right. \\ \left. + \frac{\omega\epsilon_0}{h_{2n}^2} \frac{n}{r} A_{2n} [I_n(h_{2n}r) K_n(h_{2n}b) - I_n(h_{2n}b) K_n(h_{2n}r)] \right\} e^{jn\phi - j\beta_n z}, \quad (2.38)$$

$$H_{\phi2}(r, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{\beta_n}{h_{2n}^2} \frac{n}{r} C_{2n} [I_n(h_{2n}r) K_n(h_{2n}b) - I_n(h_{2n}b) K_n(h_{2n}r)] \right.$$

$$1 - \frac{j\omega\epsilon_0\epsilon_r}{j\beta_{z,0}} A_{z,0} [J_0'(h_{z,0}r)K_0(h_{z,0}b) - J_0(h_{z,0}b)K_0'(h_{z,0}r)] e^{i\omega t - i\beta_{z,0}z} \quad (2.39)$$

2.7. Modelo de Pierce

O modelo de Pierce ou modelo da falsa hélice é um modelo fictício de uma hélice de fita que apresenta um diagrama de dispersão, curva $\omega - \beta$, próximo ao diagrama de dispersão da hélice de fita. No modelo da falsa hélice a corrente elétrica sobre a superfície da falsa hélice, localizada em $r = a$, é vinculada a fluir sob o ângulo de passo Ψ . A superfície da falsa hélice é considerada como uma superfície anisotrópica no sentido que ela sustenta a propagação das componentes \vec{E}_\perp , \vec{H}_\parallel e \vec{H}_\perp , mas curto-circuita a componente \vec{E}_\parallel , onde (\perp) e (\parallel) são definidas nas direções \hat{a}_\perp e \hat{a}_\parallel da superfície da falsa hélice, conforme ilustrado na Fig. 5.

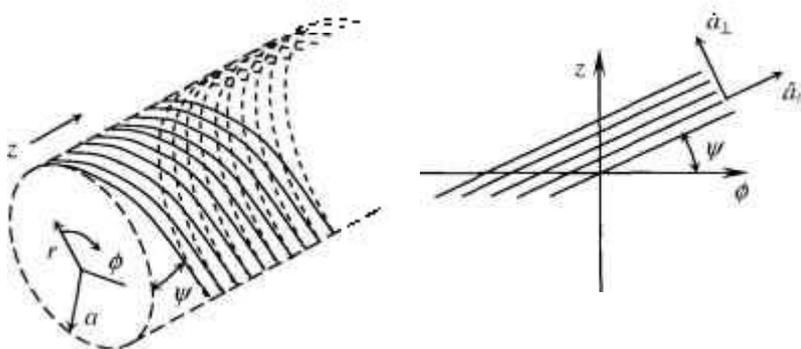


Figura 5 - a) Representação da modelo da falsa hélice e b) diagrama dos vetores unitários ortogonais ao plano da hélice e à direção de propagação.

Nestas condições pode-se utilizar um modelo anisotrópico para a condutividade elétrica σ , isto é,

$$\sigma_\parallel = \infty$$

$$\sigma_\perp = 0,$$

em que σ_\perp e σ_\parallel denotam as componentes perpendicular e paralela da condutividade elétrica, respectivamente. Para $r = a$, as condições de contorno para o campo elétrico podem ser aproximadas pelas condições de contorno para um condutor perfeito na direção paralela e um isolante perfeito na direção perpendicular a direção z da hélice.

Com a utilização destas condições de contorno é possível encontrar soluções de onda para a estrutura de ondas lentas em questão, e pode-se verificar que a velocidade de fase do campo eletromagnético é reduzida pelo fator $v_f = c \sin \Psi$, em que c é a velocidade da luz no vácuo, além do comportamento banda larga da estrutura. Porém o modelo da falsa hélice não é capaz de descrever a estrutura dos harmônicos espaciais. Contudo, vale ressaltar que este modelo somente descreve os resultados experimentais para frequências em que o tamanho do passo p for muito menor do que λ_g , o comprimento de onda guiado. Se esta condição não se verifica tem-se uma hélice verdadeira e um modelo mais elaborado deverá ser utilizado.

O diagrama de dispersão é obtido utilizando-se o conjunto de Eqs. (2.28)-(2.39), mais as condições de contorno para $r = a$, impostas pelo modelo da falsa hélice, onde os modos se acoplam. Observando que a componente do campo elétrico perpendicular à hélice, tangenciando a superfície, deve ser contínua, visto que a condutividade elétrica nesta direção é nula, tem-se que $\vec{E}_{\perp 1}(r = a) = \vec{E}_{\perp 2}(r = a)$. Desta forma, pode-se escrever:

$$E_{zn1} = E_{zn2} \text{ ou } E_{\phi n1} = E_{\phi n2}. \quad (2.40)$$

Por outro lado, ao longo da direção da hélice, o campo elétrico tangencial deve ser nulo, tendo em vista que a condutividade elétrica infinita. Desta forma, pode-se escrever:

$$\vec{E}_{//1}(r = a) = \vec{E}_{//2}(r = a) = \vec{0},$$

o que implica em:

$$E_{zn1} \sin \Psi + E_{\phi n1} \cos \Psi = 0, \text{ e} \quad (2.41)$$

$$E_{zn2} \sin \Psi + E_{\phi n2} \cos \Psi = 0. \quad (2.42)$$

Finalmente, a componente do campo magnético, tangente à direção da hélice, deve também ser contínua, visto que não há fluxo de corrente elétrica naquela direção. Assim,

$$\vec{H}_{//1}(r = a) = \vec{H}_{//2}(r = a),$$

o que resulta em,

$$H_{z_{n1}} \operatorname{sen} \Psi + H_{\phi_{n1}} \cos \Psi - H_{z_{n2}} \operatorname{sen} \Psi - H_{\phi_{n2}} \cos \Psi = 0. \quad (2.43)$$

O sistema formado pelas Eqs. (2.40) a (2.42) é um sistema homogêneo que permite obter uma expressão que relaciona h_n e β_n . Omitindo-se o termo $e^{jn\phi - j\beta_n z}$ que é comum a todos os termos, e conduzindo a análise somente para o modo fundamental, $n = 0$, pode-se escrever:

$$I_0(h_1 a) A_{10} - G_{00}(h_2 a, h_2 b) A_{20} = 0, \quad (2.44)$$

$$\operatorname{sen} \Psi I_0(h_1 a) A_{10} + \frac{j\omega\mu_0}{h_1} I_1(h_1 a) \cos \Psi C_{20} = 0, \quad (2.45)$$

$$\operatorname{sen} \Psi G_{00}(h_2 a, h_2 b) A_{20} - j \frac{\omega\mu_0}{h_2} G_{11}(h_2 a, h_2 b) \cos \Psi C_{20} = 0, \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} & \frac{j\omega\epsilon_0}{h_1} I_1(h_1 a) \cos \Psi A_{10} + I_0(h_1 a) \operatorname{sen} \Psi C_{10} + \\ & + \frac{j\omega\epsilon_0}{h_2} G_{10}(h_2 a, h_2 b) \cos \Psi A_{20} - G_{01}(h_2 a, h_2 b) \operatorname{sen} \Psi C_{20} = 0, \end{aligned} \quad (2.47)$$

onde $G_{ij}(h_2 a, h_2 b)$ são definidos segundo:

$$G_{00}(h_2 a, h_2 b) = I_0(h_2 a) K_0(h_2 b) - I_0(h_2 b) K_0(h_2 a),$$

$$G_{11}(h_2 a, h_2 b) = I_1(h_2 a) K_1(h_2 b) - I_1(h_2 b) K_1(h_2 a),$$

$$G_{01}(h_2 a, h_2 b) = I_0(h_2 a) K_1(h_2 b) + I_1(h_2 b) K_0(h_2 a),$$

$$G_{10}(h_2 a, h_2 b) = I_1(h_2 a) K_0(h_2 b) + I_0(h_2 b) K_1(h_2 a),$$

onde utiliza-se as seguintes relações entre as funções de Bessel modificadas:

$$I'_0(x) = I'_1(x) \text{ e}$$

$$K'_0(x) = -K'_1(x).$$

O sistema de Eqs. (2.44)-(2.47) pode ser expresso na forma matricial resultando

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{n1} \\ C_{n1} \\ A_{n2} \\ C_{n2} \end{bmatrix} = 0, \quad (2.48)$$

onde

$$a_{11} = I_0(h_1 a).$$

$$a_{22} = -G_{00}(h_2 a, h_2 b),$$

$$a_{21} = I_0(h_1 a) \sin \Psi,$$

$$a_{33} = \frac{j\omega\mu_0}{h_2} I_1(h_1 a) \cos \Psi,$$

$$a_{34} = G_{00}(h_2 a, h_2 b) \sin \Psi,$$

$$a_{41} = -\frac{j\omega\mu_0}{h_2} G_{11}(h_2 a, h_2 b) \cos \Psi,$$

$$a_{42} = \frac{j\omega\epsilon_0}{h_1} I_1(h_1 a) \cos \Psi,$$

$$a_{43} = I_0(h_1 a) \sin \Psi,$$

$$a_{44} = \frac{j\omega\epsilon_0}{h_2} G_{10}(h_2 a, h_2 b) \cos \Psi,$$

$$a_{44} = -G_{01}(h_2 a, h_2 b) \sin \Psi.$$

A equação de dispersão pode ser obtida desenvolvendo-se o determinante do sistema linear homogêneo da Eq. (2.48), que resulta em

$$\frac{(k_0 a)^2 \cot^2 \Psi}{(h_1 a)^2} = \frac{I_0^2(h_1 a) - \left(\frac{h_2 a}{h_1 a}\right) I_0(h_1 a) I_1(h_1 a) \frac{G_{01}(h_2 a, h_2 b)}{G_{11}(h_2 a, h_2 b)}}{I_1^2(h_1 a) - \epsilon_r \left(\frac{h_1 a}{h_2 a}\right) I_0(h_2 a) I_1(h_1 a) \frac{G_{10}(h_2 a, h_2 b)}{G_{00}(h_2 a, h_2 b)}} \quad (2.49)$$

A Fig. 6 mostra as curvas de dispersão para diferentes valores de ϵ_r e ângulo de passo Ψ . Nesta figura apresenta-se uma comparação entre as curvas obtidas utilizando-se a Eq. (2.49) e àquelas apresentadas por Collin [25]-[26] para o modelo da falsa hélice. Pode-se observar que o modelo da falsa hélice descreve o comportamento banda larga da estrutura e que a velocidade de fase é reduzida pelo seno do ângulo de passo. A presença do material dielétrico na região $a \leq r \leq b$, reduz também a velocidade de fase.

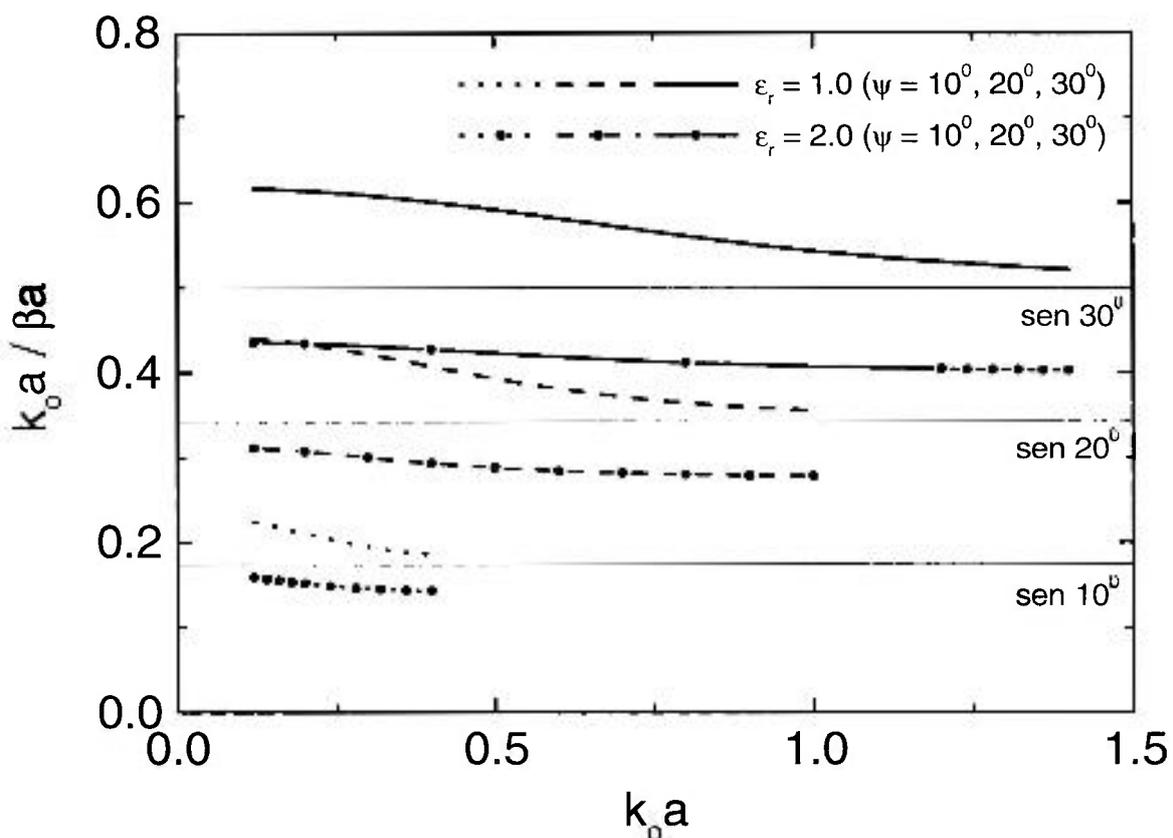


Figura 6 - Curvas de dispersão no modelo da falsa hélice no interior de uma guia de ondas circular ($b = 2a$ ângulo de passo de 10° , 20° e 30°) e diferentes valores de permissividade ϵ_r .

Adicionalmente, as constantes de integração, C_{10} , A_{20} e C_{20} podem ser resolvidas em termos de A_{01} . Para a obtenção dos coeficientes de integração em função de A_{01} , pode-se escrever o sistema como

$$\begin{bmatrix} a_{22} & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{10} \\ A_{20} \\ C_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(a_{11} + a_{21})A_{10} \\ 0 \\ -a_{41}A_{10} \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

As expressões para os campos, desta forma, podem ser escritas como, para $A_{10} = A_0$.

a) $0 \leq r \leq a$

Campo elétrico:

$$E_{z1}(r, \phi, z) = A_0 I_0(h_1 r) e^{-j\beta z}; \quad (2.51)$$

$$E_{r1}(r, \phi, z) = \frac{j\beta}{h} A_0 I_1(h_1 r) e^{-j\beta z}; \quad (2.52)$$

$$E_{\phi 1}(r, \phi, z) = -A_0 \frac{I_0(h_1 a)}{I_1(h_1 a)} \text{tg}\Psi I_1(h_1 r) e^{-j\beta z}; \quad (2.53)$$

Campo magnético:

$$H_{z1}(r, \phi, z) = j \frac{h}{\omega \mu_0} A_0 \left[\frac{I_0(h_1 a)}{I_1(h_1 a)} \text{tg}\Psi \right] I_1(h_1 r) e^{-j\beta z}; \quad (2.54)$$

$$H_{r1}(r, \phi, z) = -\frac{\beta}{\omega \mu_0} A_0 \left[\frac{I_0(h_1 a)}{I_1(h_1 a)} \text{tg}\Psi \right] I_1(h_1 r) e^{-j\beta z}; \quad (2.55)$$

$$H_{\phi 1}(r, \phi, z) = \frac{j\omega \epsilon_0}{h_1} A_0 I_1(h_1 r) e^{-j\beta z}; \quad (2.56)$$

b) $a \leq r \leq b$

Campo elétrico:

$$E_{z2}(r, \phi, z) = \frac{I_0(h_1 a)}{G_{01}(h_1 a, h_2 b)} A_0 [I_0(h_2 r) K_0(h_2 b) - I_0(h_2 b) K_0(h_2 r)] e^{-j\beta z}, \quad (2.57)$$

$$E_{r2}(r, \phi, z) = \frac{j\beta}{h_2} \frac{I_0(h_1 a)}{G_{10}(h_2 a, h_2 b)} A_0 [I_1(h_2 r) K_0(h_2 b) + I_0(h_2 b) K_1(h_2 r)] e^{-j\beta z}, \quad (2.58)$$

$$E_{\phi 2}(r, \phi, z) = -\frac{I_0(h_1 a) t g \Psi}{G_{11}(h_2 a, h_2 b)} A_0 [I_1(h_2 r) K_1(h_2 b) - I_1(h_2 b) K_1(h_2 r)] e^{-j\beta z}, \quad (2.59)$$

Campo magnético:

$$H_{z2}(r, \phi, z) = j \frac{h_2}{\omega \mu_0} \frac{I_0(h_1 a) t g \Psi}{G_{11}(h_2 a, h_2 b)} A_0 [I_0(h_2 r) K_1(h_2 b) + I_1(h_2 b) K_0(h_2 r)] e^{-j\beta z}, \quad (2.60)$$

$$H_{r2}(r, \phi, z) = -\frac{\beta}{\omega \mu_0} \frac{I_0(h_1 a) t g \Psi}{G_{11}(h_2 a, h_2 b)} A_0 [I_1(h_2 r) K_1(h_2 b) - I_1(h_2 b) K_1(h_2 r)] e^{-j\beta z}, \quad (2.61)$$

$$H_{\phi 2}(r, \phi, z) = j \frac{\omega \epsilon_0 \epsilon_r}{h_2} \frac{I_0(h_1 a)}{G_{00}(h_2 a, h_2 b)} A_0 [I_1(h_2 r) K_0(h_2 b) + I_0(h_2 b) K_1(h_2 r)] e^{-j\beta z}. \quad (2.62)$$

2.8. Cálculo da Potência

Segundo o teorema da Poynting, o fluxo de potência é dado segundo:

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*), \quad (2.63)$$

onde o asterisco representa a conjugação complexa. Para a determinação do vetor de Poynting para a estrutura deve-se dividir a região em duas partes. A região interior a hélice, $0 \leq r \leq a$ e a região entre a hélice e a guia circular $a \leq r \leq b$.

a) $0 \leq r \leq a$

$$\begin{aligned} \vec{S}_1 &= \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}_1 \times \vec{H}_1^*), \\ \vec{S}_1 \cdot \hat{a}_z &= \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}_1 \times \vec{H}_1^*) \cdot \hat{a}_z = \frac{1}{2} \text{Re}(E_{r1} H_{\phi 1}^* - E_{\phi 1} H_{r1}^*), \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left[\frac{j\beta}{h_1} A_0 I_1(h_1 r) \right] \left[\frac{j\omega \epsilon_0}{h_1} A_0^* I_1(h_1 r) \right] - \left[A_0 \frac{I_0(h_1 a)}{I_1(h_1 a)} \text{tg} \Psi I_1(h_1 r) \right] \left[\frac{\beta}{\omega \mu_0} A_0^* \frac{I_0(h_1 a)}{I_1(h_1 a)} \text{tg} \Psi I_1(h_1 r) \right] \\ \vec{S}_1 \cdot \hat{a}_z &= \frac{1}{2} \frac{\beta}{h_1^2} \frac{k_0}{Z_0} |A_0|^2 I_1^2(h_1 r) \left\{ 1 + \left[\frac{k_z \text{tg} \Psi}{h} \frac{I_0(h_1 a)}{I_1(h_1 a)} \right]^2 \right\}, \end{aligned} \quad (2.64)$$

onde Z_0 é a impedância do espaço livre, definida segundo:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}. \quad (2.65)$$

b) $a \leq r \leq b$

$$\begin{aligned} \vec{S}_2 &= \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}_2 \times \vec{H}_2^*), \\ \vec{S}_2 \cdot \hat{a}_z &= \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}_2 \times \vec{H}_2^*) \cdot \hat{a}_z = \frac{1}{2} \text{Re}(E_{r2} H_{\phi 2}^* - E_{\phi 2} H_{r2}^*), \\ &= \left[-\frac{j\beta}{h_2} \frac{I_0(h_1 a)}{G_{00}(h_2 a, h_2 b)} A_0 [I_1(h_2 r) K_0(h_2 b) + I_0(h_2 b) K_1(h_2 r)] \right] \\ &\quad \left[j \frac{\omega \epsilon_0}{h_2} \frac{\beta}{\omega \mu_0} \frac{I_0(h_1 a)}{G_{00}(h_2 a, h_2 b)} A_0^* [I_1(h_2 r) K_0(h_2 b) + I_0(h_2 b) K_1(h_2 r)] \right] \\ &\quad - \left[-\frac{I_0(h_1 a) \text{tg} \Psi}{G_{11}(h_2 a, h_2 b)} A_0 [I_1(h_2 r) K_1(h_2 b) - I_1(h_2 b) K_1(h_2 r)] \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ -\frac{\beta}{\omega\mu_0} \frac{I_0(h_1a)tg\Psi}{G_{11}(h_2a, h_2b)} A_0^* [I_1(h_2r)K_1(h_2b) - I_1(h_2b)K_1(h_2r)] \right\}, \\
 & \left\{ \frac{\beta}{k_z} \frac{k_y}{Z_0} |A_0|^2 I_0^2(h_1a) \left[\frac{I_1(h_2r)K_0(h_2b) + I_0(h_2b)K_1(h_2r)}{G_{00}(h_2a, h_2b)} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{h_2tg\Psi}{k_z} \frac{I_1(h_2r)K_1(h_2b) - I_1(h_2b)K_1(h_2r)}{G_{11}(h_2a, h_2b)} \right]^2 \right\}, \quad (2.66)
 \end{aligned}$$

Cálculo da potência

Para se obter a potência transportada pela onda que se propaga na estrutura deve-se integrar o vetor de Poynting.

a) $0 \leq r \leq a$

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int \vec{S} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[(\vec{E}_1 \times \vec{H}_1^*) \cdot \hat{a}_z \right] r dr d\phi = \pi \operatorname{Re} \int_0^a \left[E_{z1} H_{z1}^* - E_{\phi 1} H_{\phi 1}^* \right] r dr. \\
 P_1 &= \pi \frac{\beta}{k_z} \frac{k_y}{Z_0} |A_0|^2 \left\{ 1 + \left[\frac{k_0 tg\Psi}{k_z} \frac{I_0(k_1a)}{I_1(k_1a)} \right]^2 \right\} \int_0^a I_1^2(h_1r) r dr.
 \end{aligned}$$

Utilizando o resultado

$$\int_0^a I_1^2(hx) x dx = -\frac{1}{2} \left[I_2^2(hx) - \left(1 + \frac{1}{(hx)^2} \right) I_1^2(hx) \right]_0^a,$$

e a relação de recorrência

$$xI_1'(x) = -I_1(x) + xI_0(x),$$

obtm-se a seguinte expressão para P_1 :

$$P_1 = \frac{\pi}{2} a^2 \frac{\beta}{h_1^2} \frac{k_0}{Z_0} |A_0|^2 \left[1 + \frac{h_1 \operatorname{tg} \Psi}{k_0} \frac{I_0(h_1 a)}{I_1(h_1 a)} \right] \left[I_1^2(h_1 a) - I_0^2(h_1 a) + \frac{2I_1(h_1 a)I_0(h_1 a)}{h_1 \alpha} \right] \quad (2.67)$$

b) $a \leq r \leq b$

$$P_2 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{\vec{S}_2} \vec{S}_2 \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_a^{b} \int_0^{2\pi} \left(\vec{E}_2 \times \vec{H}_2^* \right) \cdot \hat{\rho} \, d\varphi \, dr - \pi \operatorname{Re} \int_a^b \left(\vec{E}_{z,0} H_{z,0}^* - E_{z,1} H_{z,1}^* \right) dr$$

A integral pode ser expressa como a soma de três contribuições:

$$P_2 = P_{21} + P_{22} + P_{23}$$

A primeira contribuição pode ser escrita como:

$$P_{21} = \frac{\beta}{h_1^2} \frac{k_0}{Z_0} |A_0|^2 I_0^2(h_1 a) \left[\frac{K_0^2(h_2 b)}{G_{00}^2(h_2 a, h_2 b)} + \frac{(h_2 \operatorname{tg} \Psi)^2}{k_0} \frac{K_1^2(h_2 b)}{G_{11}^2(h_2 a, h_2 b)} \right] \int_a^b I_1^2(h_2 r) r \, dr$$

resultando em:

$$P_{21} = \frac{\pi}{2} \frac{\beta}{h_1^2} \frac{k_0}{Z_0} |A_0|^2 I_0^2(h_1 a) \left[\frac{K_0^2(h_2 b)}{G_{00}^2(h_2 a, h_2 b)} + \frac{(h_2 \operatorname{tg} \Psi)^2}{k_0} \frac{K_1^2(h_2 b)}{G_{11}^2(h_2 a, h_2 b)} \right] \left\{ b^2 \left[I_1^2(h_2 b) - I_0^2(h_2 b) + \frac{2I_1(h_2 b)I_0(h_2 b)}{h_2 b} \right] + a^2 \left[I_1^2(h_2 a) - I_0^2(h_2 a) + \frac{2I_1(h_2 a)I_0(h_2 a)}{h_2 \alpha} \right] \right\} \quad (2.68)$$

A segunda contribuição se escreve como:

$$P_{22} = 4\pi \beta \frac{k_0}{h_1^2} \frac{|A_0|^2}{Z_0} I_0^2(h_1 a) \left[\frac{I_0(h_2 b)K_0(h_2 b)}{G_{00}^2(h_2 a, h_2 b)} - \frac{(h_2 \operatorname{tg} \Psi)^2}{k_0} \frac{I_1(h_2 b)K_1(h_2 b)}{G_{11}^2(h_2 a, h_2 b)} \right] \int_a^b I_1(h_2 r)K_1(h_2 r)r \, dr$$

resultando em:

$$\begin{aligned}
 P_{22} = 2\pi\epsilon_r \frac{\beta}{h_2^2} \frac{k_0}{Z_0} |A_0|^2 I_0^2(h_1 a) & \left[\frac{I_0(h_2 b) K_0(h_2 b)}{G_{00}^2(h_2 a, h_2 b)} + \left(\frac{h_2 \operatorname{tg} \Psi}{k_0} \right)^2 \frac{I_1(h_2 b) K_1(h_2 b)}{G_{11}^2(h_2 a, h_2 b)} \right] \\
 & \cdot \left\{ b^2 [I_0(h_2 b) K_0(h_2 b) + I_1(h_2 b) K_1(h_2 b)] + \frac{b}{h_2} [I_0(h_2 b) K_1(h_2 b) - I_1(h_2 b) K_0(h_2 b)] + \right. \\
 & \left. a^2 [I_0(h_2 a) K_0(h_2 a) - I_1(h_2 a) K_1(h_2 a)] - \frac{\pi}{h_2} [I_0(h_2 a) K_1(h_2 a) - I_1(h_2 a) K_0(h_2 a)] \right\}. \quad (2.69)
 \end{aligned}$$

e, finalmente para a terceira contribuição tem-se:

$$P_{23} = 2\pi\epsilon_r \frac{\beta}{h_2^2} \frac{k_0}{Z_0} |A_0|^2 I_0^2(h_1 a) \left[\frac{I_0^2(h_2 b)}{G_{00}^2(h_2 a, h_2 b)} + \left(\frac{h_2 \operatorname{tg} \Psi}{k_0} \right)^2 \frac{I_1^2(h_2 b)}{G_{11}^2(h_2 a, h_2 b)} \right] \int_a^b K_1^2(h_1 r) r dr$$

resultando em:

$$\begin{aligned}
 P_{23} = \frac{\pi}{2} \epsilon_r \frac{\beta}{h_2^2} \frac{k_0}{Z_0} |A_0|^2 I_0^2(h_1 a) & \left[\frac{I_0^2(h_2 b)}{G_{00}^2(h_2 a, h_2 b)} + \left(\frac{h_2 \operatorname{tg} \Psi}{k_0} \right)^2 \frac{I_1^2(h_2 b)}{G_{11}^2(h_2 a, h_2 b)} \right] \\
 & \cdot \left\{ a^2 \left[K_0^2(h_1 a) - K_1^2(h_2 a) + \frac{2K_1(h_2 a) K_0(h_2 a)}{h_2 a} \right] - b^2 \left[K_0^2(h_2 b) - K_1^2(h_2 b) + \frac{2K_1(h_2 b) K_0(h_2 b)}{h_2 b} \right] \right\}, \quad (2.70)
 \end{aligned}$$

As duas últimas integrais acima são calculadas utilizando os seguintes resultados:

$$\int_a^b K_1^2(hx) x dx = \frac{x^2}{2} \left[K_1'^2(hx) - \left(1 + \frac{1}{(hx)^2} \right) K_1^2(hx) \right],$$

e a relação de recorrência:

$$xK_1'(x) = -K_1(x) - xK_0(x),$$

e

$$\int_0^x I_1(hx)K_1(hx)xdx = \frac{x^2}{2} [I_0(hx)K_0(hx) + I_1(hx)K_1(hx)] + \frac{x}{2h} [I_0(hx)K_1(hx) - I_1(hx)K_0(hx)].$$

Desta forma a potência total é dada segundo:

$$P = P_1 + P_2.$$

2.9. Cálculo da Impedância de Interação

A impedância de interação é definida segundo a expressão

$$K = \frac{E_z^2(r=0)}{2\beta^2 P}, \quad (2.71)$$

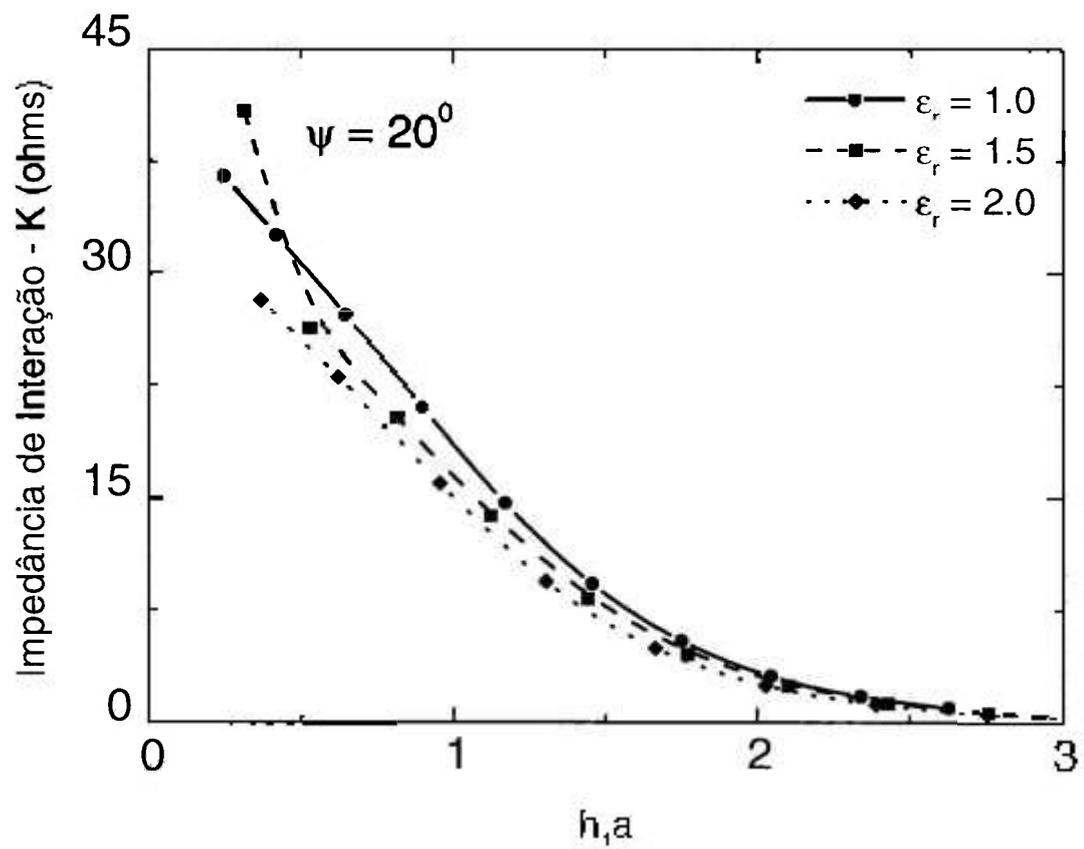
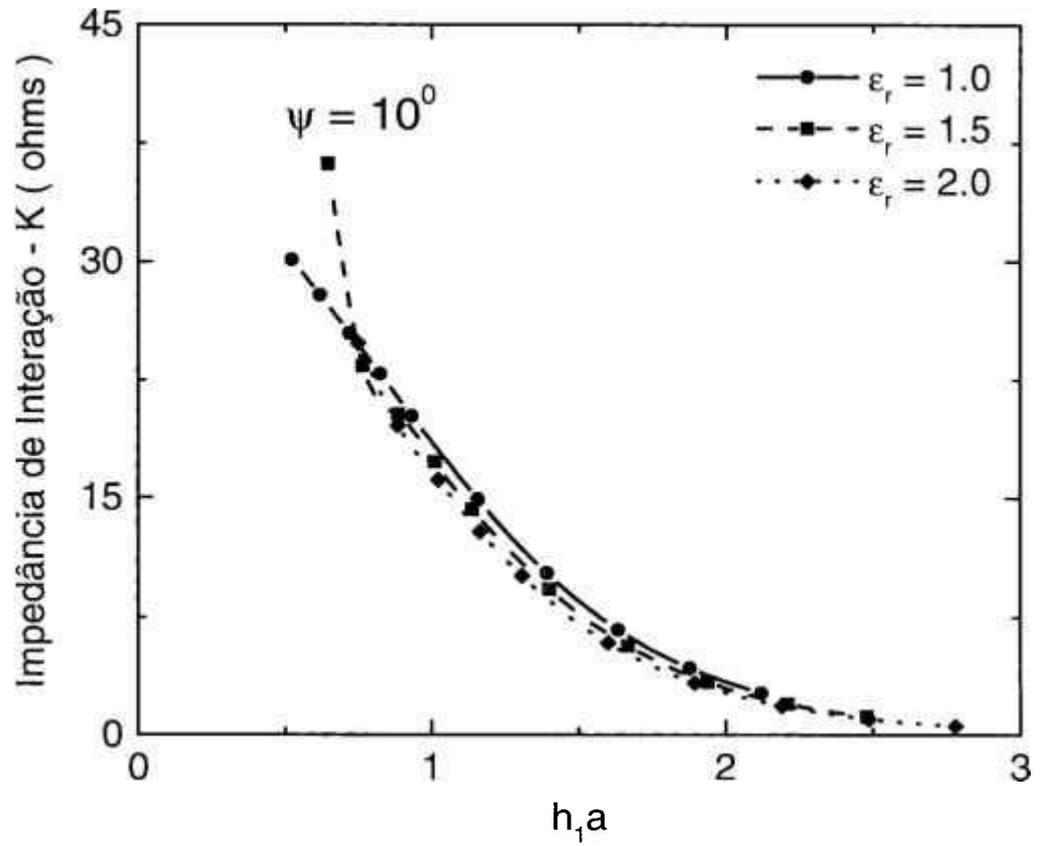
onde $E_z(r=0)$ é o valor máximo do campo elétrico axial sobre o eixo da estrutura helicoidal sustentando a propagação de uma onda eletromagnética de potência P e com uma constante de fase β .

A impedância de interação é um parâmetro de considerável importância prática, pois permite calcular o nível de casamento de impedância entre a estrutura de onda lentas e os sistemas de acoplamento de entrada e saída de microondas. Substituindo a expressão para o campo elétrico $E_z(r=0)$ da onda eletromagnética, a impedância de interação pode ser escrita como

$$K = \frac{|A_1|^2}{2\beta^2 P}, \quad (2.72)$$

tendo em vista que $I_0(0)=1$. Pode-se, desta forma, obter uma expressão fechada para a impedância de interação tendo em vista que o fator $|A_0|^2$ é comum em todos os termos de P .

A Fig. (7) mostra a impedância de interação para diferentes valores de ϵ_r e ângulo de passo Ψ . Pode-se observar que a impedância de interação é função decrescente de $(h_1 a)^2 = (\beta_n a)^2 - (k_0 a)^2$.



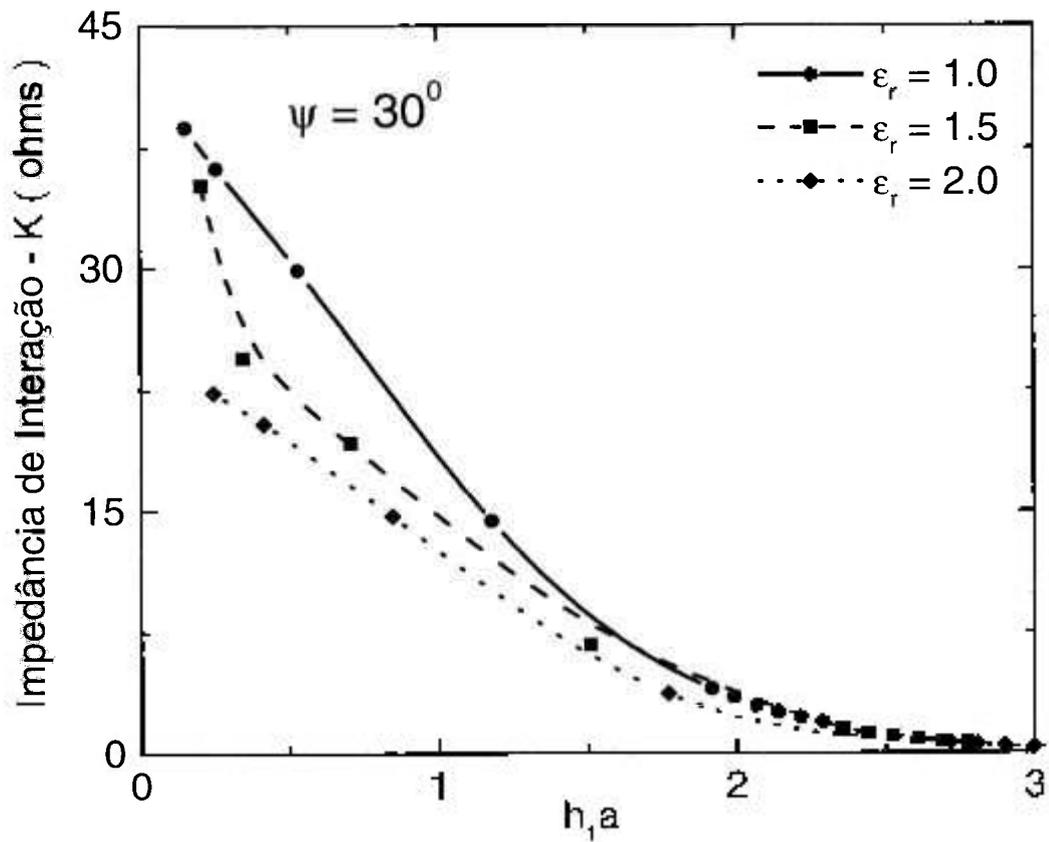


Figura 7 - Impedância de interação no modelo da falsa hélice no interior de guia de onda circular para diferentes valores de permissividade ϵ_r , $b = 2a$, ângulo de passo de 10° , 20° e 30° .

2.10. A hélice de fita: o modelo de Sensiper

A hélice de fita é um modelo fisicamente mais próximo da hélice verdadeira. Este modelo foi primeiramente investigado por Sensiper, sendo até hoje, motivo de continuada investigação. Neste modelo a fita apresenta uma largura δ e uma espessura desprezível. A fita é considerada perfeitamente condutora em todas as direções. Seu diâmetro é $2a$, o ângulo de passo Ψ e o período p . O período e o ângulo de passo estão relacionados pela seguinte expressão, conforme pode ser observado na Fig. 8:

$$\cot \Psi = \frac{2\pi a}{p}, \quad (2.72)$$

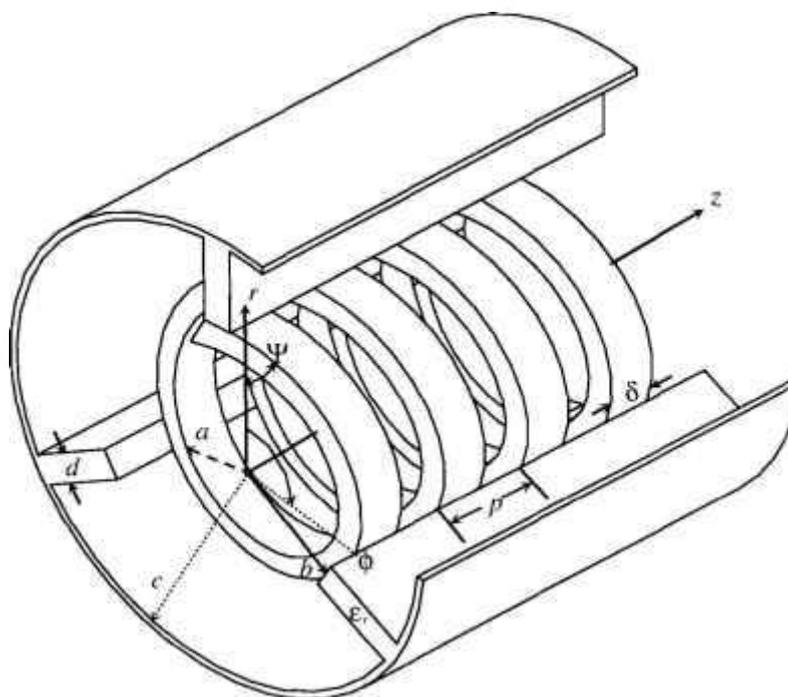


Figura 8 - Esquema de uma estrutura de ondas lentas helicoidal do tipo fita e parâmetros característicos: o comprimento do passo p , a largura da fita δ , o raio interno da hélice a , o raio externo da hélice b , o raio do guia c e o ângulo de passo Ψ , em uma estrutura periódica helicoidal.

Na construção do modelo da hélice fita, o teorema de Floquet tem um papel fundamental.

Teorema de Floquet

O teorema de Floquet afirma que se pode expressar os campos sustentados por uma estrutura periódica infinita de ondas lentas em uma forma especial, adequada à simetria da estrutura. A aplicação do teorema implica que as componentes do campo elétrico e magnético deslocam-se por um fator $e^{-j\beta_0 p}$ quando se move qualquer ponto z para o ponto $z + p$, sendo p o comprimento periódico. Observa-se pela Fig. 8 que a geometria da hélice se mantém invariante sob a transformação do ponto (r, ϕ, z) para um novo ponto $\left(r, \phi + \frac{2\pi}{p} z_1, z + z_1 \right)$, sendo z_1 uma translação arbitrária. Então uma componente arbitrária \vec{F} do campo elétrico ou magnético no segundo ponto deve diferir somente por um fator complexo daquele do primeiro ponto, isto é,

$$\vec{F} \left[r, \phi + \frac{2\pi}{p} z_1, z + z_1 \right] = f(z_1) \vec{F}(r, \phi, z). \quad (2.73)$$

Agora, movendo-se a partir do segundo ponto z_1 para um terceiro ponto por translação z_2 e uma rotação sob um ângulo $\left(\frac{2\pi}{p} z_2 \right)$, pode-se relacionar a nova componente de campo com aquela do segundo ponto:

$$\vec{F} \left[r, \phi + \frac{2\pi}{p} (z_1 + z_2), z + z_1 + z_2 \right] = f(z_2) f(z_1) \vec{F}(r, \phi, z).$$

Contudo, o efeito das duas transformações rotação-translação é equivalente à translação axial $z_1 + z_2$ e rotação do ângulo $\frac{2\pi}{p} (z_1 + z_2)$, de maneira que se pode escrever

$$\vec{F} \left[r, \phi + \frac{2\pi}{p} (z_1 + z_2), z + z_1 + z_2 \right] = f(z_2 + z_1) \vec{F}(r, \phi, z).$$

A única função para a qual $f(z_2) f(z_1) = f(z_2 + z_1)$ para dados os valores de z_2 e z_1 é a função exponencial, de modo que a Eq. (2.73) pode ser escrita como

$$\vec{F} \left[r, \phi + \frac{2\pi}{p} z_1, z + z_1 \right] = e^{-j\beta_0 z_1} \vec{F}(r, \phi, z), \quad (2.74)$$

para todos os valores de (r, ϕ, z) e qualquer z_1 , e portanto para $z_1 = p$.

Desenvolvimento da relação de dispersão para o modelo da hélice fita

A relação de dispersão pode ser obtida utilizando-se o conjunto de Eqs. (2.28)–(2.36), mais as condições de contorno para $r = a$, de maneira similar ao construído para a falsa hélice. Por outro lado, e tendo em vista que o tratamento deve considerar os harmônicos espaciais, as expressões para os campos devem ser generalizadas segundo:

$$E_{z_1}(r, \phi, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{1, mn} I_m(h_{1n} r) e^{jm\phi - j\beta_n z} \quad (2.75)$$

onde

$$\beta_n = \beta_0 + n \cot g\Psi = \beta_0 + n \frac{2\pi a}{p} \quad (2.76)$$

e de maneira similar para as demais componentes. Por outro lado, observa-se que se a hélice for translacionada por uma distância menor que p , e então rotacionada por um certo ângulo Ψ , a hélice coincide com ela mesma. Sejam então as transformações:

$$z \rightarrow z' + z \quad (2.77)$$

$$\phi \rightarrow \phi' + \frac{2\pi}{p} z \quad (2.78)$$

onde $2\pi z / p$ é o ângulo através do qual a hélice deve ser rotacionada para que ela possa coincidir com ela mesma. Substituindo estas transformações na Eq. (2.75), obtém-se

$$E_{z_1}(r, \phi, z) = e^{-j\beta_0 z} e^{-j\beta_0 z'} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{1, mn} I_m(h_{1n} r) e^{-j(m+n)\frac{2\pi}{p} z} e^{-jm\phi'} e^{-jn\frac{2\pi}{p} z'} \quad (2.79)$$

Mas, de acordo com o teorema de Floquet, a solução como uma função das variáveis (ϕ', z') deve ser da mesma forma que para as variáveis (ϕ, z) . Isto deve ser verdadeiro para todos

os valores de z e, inclusive para $z = p$. Para assegurar que esta propriedade seja satisfeita é necessário que $m = -n$ e para $m \neq -n$, $A_{1mn} = 0$. Desse modo o duplo somatório se reduz a somente um, e a Eq. (2.75) passa a ser escrita como

$$E_{z1}(r, \phi, z) = e^{-j\beta_0 z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{1n} I_n(h_{1n} r) e^{-jn \left(\frac{2\pi}{p} z - \phi \right)} \quad (2.80)$$

A mesma argumentação se verifica para as demais equações do conjunto de Eqs. (2.28) – (2.36).

Admitindo uma densidade de superfície de corrente J fluindo sobre a superfície da fita em $r = a$, as condições de contorno a serem satisfeitas por uma onda são:

- a componente tangencial do campo elétrico é contínua para todo par (ϕ, z) ; e
- a descontinuidade no campo magnético tangencial é igual a densidade superficial de corrente total.

Isto pode ser descrito por meio das seguintes equações:

$$\begin{aligned} E_{\phi 1}(r = a) &= E_{\phi 2}(r = a), \\ E_{1z}(r = a) &= E_{2z}(r = a), \\ H_{z1}(r = a) - H_{z2}(r = a) &= J_{\phi} \quad \text{e} \\ H_{\phi 1}(r = a) - H_{\phi 2}(r = a) &= J_z, \end{aligned} \quad (2.81)$$

onde J_{ϕ} e J_z denotam as componentes da densidade superficial de corrente nas direções (ϕ, z) , respectivamente. A corrente \vec{J} pode, também, ser expandida em harmônicos espaciais da mesma forma funcional que a solução da Eq. (2.80):

$$J_{\phi}(\phi, z) = e^{-j\beta_0 z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{J}_{\phi n} e^{-jn \left(\frac{2\pi}{p} z - \phi \right)} \quad (2.82)$$

$$J_z(\phi, z) = e^{-j\beta_0 z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{J}_{zn} e^{-jn \left(\frac{2\pi}{p} z - \phi \right)} \quad (2.83)$$

onde $\hat{j}_{\theta n}$ e $\hat{j}_{z n}$ denotam as amplitudes complexas de Fourier da densidade superficial de correntes associadas com o n-ésimo harmônico espacial.

Regiões Proibidas da Hélice de Fita

Se para qualquer harmônico espacial, o autovalor do problema $h_n^2 = \beta_n^2 - k_0^2$, tornar-se imaginário, isto implicará que o campo se propagará com uma velocidade de fase maior que a da luz ao longo do eixo dos z . As funções de Bessel modificadas darão lugar a funções Hankel correspondendo as ondas progressivas na direção radial. Ao mesmo tempo, a componente radial do vetor de Poynting terá um valor médio não-nulo. Devido a estes fatos o diagrama de dispersão $\omega - \beta$ apresentará certas regiões proibidas. A restrição básica é especificada pela expressão:

$$|\beta_0 a| > |k_0 a|, \quad (2.84)$$

e dividindo por $\cot g\Psi$, obtém-se

$$\left| \frac{\beta_0 a}{\cot g\Psi} \right| > \frac{k_0 a}{\cot g\Psi}, \quad (2.85)$$

ou

$$\frac{k_0 a}{\cot g\Psi} = \frac{\beta_0 a}{\cot g\Psi} \quad \text{para} \quad 0 \leq \frac{\beta_0 a}{\cot g\Psi} < \infty$$

e

$$\frac{k_0 a}{\cot g\Psi} = - \frac{\beta_0 a}{\cot g\Psi} \quad \text{para} \quad \infty < \frac{\beta_0 a}{\cot g\Psi} \leq 0$$

que corresponde ao gráfico da Fig. 9.

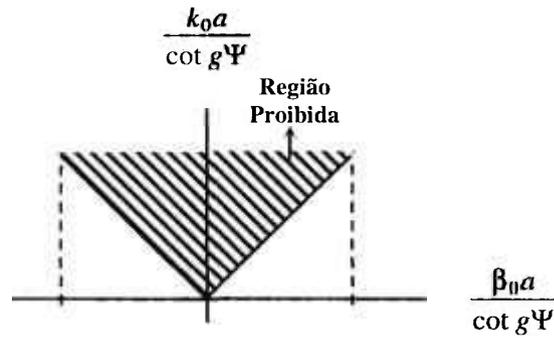


Figura 9 – Regiões proibidas no diagrama de dispersão.

Substituindo a Eq. (2.76) na Eq. (2.84), obtém-se

$$\frac{k_0 a}{\cot g \Psi} = 1 \left(\frac{\beta_n a}{\cot g \Psi} + n \right) \quad (2.89)$$

Este fato produzirá um conjunto infinito de translações da região ilustrada pela Fig. 10.

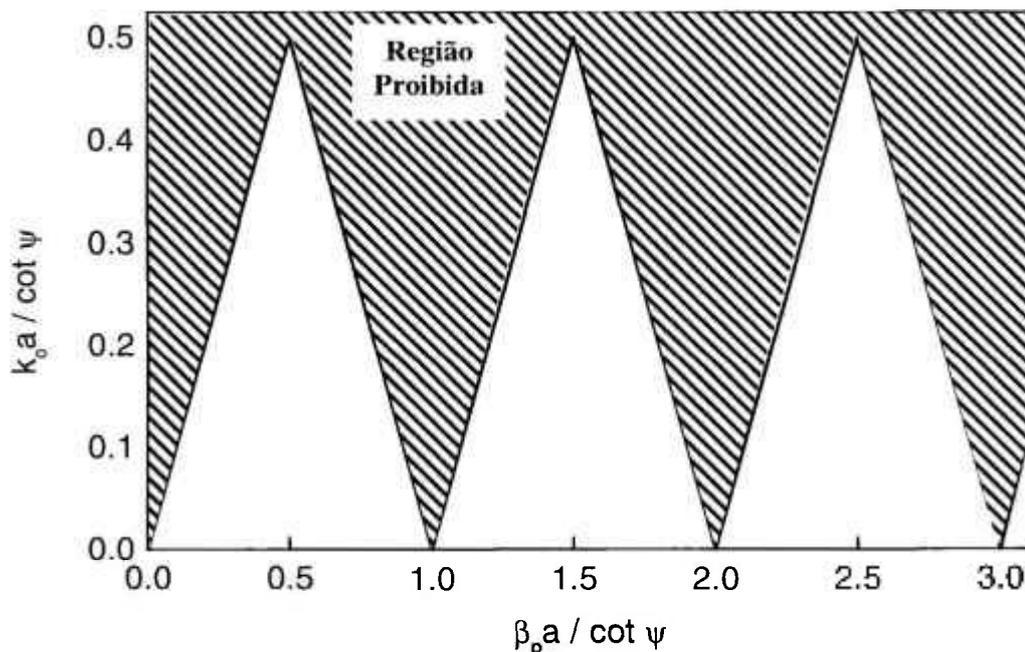


Figura 10 – Conjunto de translações das regiões proibidas no diagrama de dispersão.

Desenvolvimento da relação de dispersão

A solução exata para relação de dispersão pode ser obtida, em princípio, substituindo as expressões para os campos nas condições de contorno para $r = a$ no modelo da hélice de fita. Quando isto é feito, obtém-se um conjunto de equações simultâneas que poderia ser resolvida para a constante de propagação β_0 . É possível, contudo uma abordagem mais direta, porém aproximada, mas muito boa aproximação. O desenvolvimento segue os seguintes passos:

- admite-se uma distribuição de corrente fisicamente razoável para a fita;
- calculam-se os termos da distribuição de corrente admitida. A seguir calcula-se a componente do campo elétrico total paralelo à direção da fita como função de (ϕ, z) para $r = a$, e
- admite-se que a componente do campo elétrico paralelo à direção da fita seja nula ao longo da linha central da fita.

Conforme se mencionou, estas hipóteses constituem-se em aproximações, que têm sua verificação experimental comprovada para fitas finas.

Normalmente considera-se que a distribuição de corrente seja expressa segundo:

$$\begin{aligned}
 J_{\perp} &= 0 \\
 J_{\parallel} &= \begin{cases} J_0 e^{-j\frac{\beta_n z}{2\pi}} & \frac{\rho\phi}{2\pi} - \frac{\delta}{2} \leq z \leq \frac{\rho\phi}{2\pi} + \frac{\delta}{2} \\ 0 & \text{outro valor} \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{2.90}$$

onde J_0 é amplitude da densidade superficial de corrente, admitida como constante. A transformada de Fourier da densidade de corrente é determinada como segue

$$\hat{j}_{\parallel n} = J_0 \int_{\frac{\rho\phi}{2\pi} - \frac{\delta}{2}}^{\frac{\rho\phi}{2\pi} + \frac{\delta}{2}} e^{-j\beta_n \left(z - \frac{\rho\phi}{2\pi} \right)} dz = J_0 \left(\frac{\delta}{\rho} \right) \frac{\text{sen} \frac{\beta_n \delta}{2}}{\beta_n \delta}
 \tag{2.91}$$

Além disso as componentes $\hat{j}_{\phi n}$ e \hat{j}_{zn} da transformada de Fourier da densidade de corrente ao longo das direções (ϕ, z) são escritas como

$$\hat{j}_{\phi n} = \hat{j}_{\parallel n} \cos\phi,$$

$$\hat{J}_{zn} = \hat{J}_{//n} \text{sen}\phi. \quad (2.92)$$

A componente paralela do campo elétrico total pode ser escrita em termos das projeções em (ϕ, z) da seguinte forma

$$E_{z1}(\phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_{z1n} \cos \Psi + E_{z2n} \text{sen} \Psi. \quad (2.93)$$

Substituindo as expressões para os campos das Eqs. (2.28) e (2.30) e rearranjando os termos para A_{1n} e C_{1n} , tem-se a seguinte expressão para a Eq.(2.93)

$$E_{z1}(\phi, z) = e^{-j\beta_n z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[-\frac{n\beta_n}{h_{1n}^2} I_n(h_{1n}a) \cos \Psi + I_n(h_{1n}a) \text{sen} \Psi \right] A_{1n} \right. \\ \left. - j \frac{\omega\mu_0}{h_{1n}} I_n'(h_{1n}a) \cos \Psi C_{1n} \right\} e^{-j\beta_n (z_0 - z)}. \quad (2.94)$$

Devido a ortogonalidade dos modos na direção angular, a corrente satisfaz as condições de contorno expressas na Eq. (2.81) para a n -ésima componente independentemente. Quando isto é feito as amplitudes A_{1n} , C_{1n} , A_{2n} , e C_{2n} , do conjunto de expressões (2.28)-(2.30) são determinadas em função dos coeficientes de Fourier da corrente na fita J_{ϕ_n} e J_{zn} , resultando no seguinte sistema de equações

$$I_n(h_{1n}a)A_{1n} - G_{00}^n(h_{2n}a, h_{2n}b)A_{2n} = 0, \quad (2.95)$$

$$-\frac{n\beta_n}{h_{1n}^2} I_n(h_{1n}a)A_{1n} + j \frac{\omega\mu_0}{h_{1n}} I_n'(h_{1n}a)C_{1n} = -\frac{n\beta_n}{h_{2n}^2} G_{00}^n(h_{2n}a, h_{2n}b)A_{2n} + j \frac{\omega\mu_0}{h_{2n}} G_{11}^n(h_{2n}a, h_{2n}b)C_{2n}, \quad (2.96)$$

$$I_n(h_{1n}a)C_{1n} - G_{01}^n(h_{2n}a, h_{2n}b)C_{2n} = J_{\phi_n}, \quad (2.97)$$

$$j \frac{\omega\epsilon_0\epsilon_r}{h_{2n}} G_{10}^n(h_{2n}a, h_{2n}b)A_{2n} - \frac{n\beta_n}{h_{1n}^2} G_{00}^n(h_{2n}a, h_{2n}b)C_{2n} - j \frac{\omega\epsilon_0}{h_{1n}} I_n'(h_{1n}a)A_{1n} + \frac{n\beta_n}{h_{1n}^2} I_n(h_{1n}a)C_{1n} = J_{zn}, \quad (2.98)$$

onde $G_{ij}^n(h_{2n}a, h_{2n}b)$ agora são definidos segundo:

$$G_{00}^n(a, b) = I_n(h_{2n}a)K_n(h_{2n}b) - I_n(h_{2n}b)K_n(h_{2n}a),$$

$$G_{11}^n(a, b) = I'_n(h_{2n}a)K'_n(h_{2n}b) - I'_n(h_{2n}b)K'_n(h_{2n}a),$$

$$G_{01}^n(a, b) = I_n(h_{2n}a)K'_n(h_{2n}b) - I'_n(h_{2n}b)K_n(h_{2n}a) \text{ e}$$

$$G_{10}^n(a, b) = I'_n(h_{2n}a)K_n(h_{2n}b) - I_n(h_{2n}b)K'_n(h_{2n}a).$$

O sistema de Eqs. (2.95)-(2.98) pode ser resolvido para as constantes A_{1n} , C_{1n} , resultando em

$$\frac{n\beta_n}{h_{2n}^2 a} I_n(h_{2n}a) \left[1 - \left(\frac{h_{2n}}{h_{1n}} \right)^2 \right] A_{1n} - j \frac{\omega\mu_0}{h_{2n}} \left[\frac{G_{11}^n(a, b)}{G_{01}^n(a, b)} - \frac{h_{2n}}{h_{1n}} \frac{I'_n(h_{1n}a)}{I_n(h_{1n}a)} \right] C_{1n} = -j \frac{\omega\mu_0}{h_{2n}} \frac{G_{11}^n(a, b)}{G_{01}^n(a, b)} J_{\phi n}$$

$$j \frac{\omega\epsilon_0}{h_{2n}} I_n(h_{1n}a) \left[\epsilon_r \frac{G_{10}^n(a, b)}{G_{00}^n(a, b)} - \frac{h_{2n}}{h_{1n}} \frac{I'_n(h_{1n}a)}{I_n(h_{1n}a)} \right] A_{1n} + \frac{n\beta_n}{h_{1n}^2 a} I_n(h_{1n}a) \left[\frac{G_{00}^n(a, b)}{G_{01}^n(a, b)} - 1 \right] C_{1n} =$$

$$= J_{zn} - \frac{n\beta_n}{h_{2n}^2 a} \frac{G_{10}^n(a, b)}{G_{01}^n(a, b)} J_{\phi n}.$$

Resolvendo obtém-se:

$$C_{1n} = C_{1n\phi} J_{\phi n} + C_{1nz} J_{zn} \tag{2.99}$$

onde os coeficientes $C_{1n\phi}$ e C_{1nz} são dados segundo as expressões:

$$C_{1n\phi} = \frac{\frac{n\beta_n}{h_{1n}^2 a} \left[1 - \left(\frac{h_{2n}}{h_{1n}} \right)^2 \right]}{j \frac{\omega\mu_0}{h_{2n}} F_1} \frac{1}{j \frac{\omega\epsilon_0}{h_{2n}} I_n(h_{1n}a) F_2 + \frac{n\beta_n}{h_{1n}^2 a} \left[1 - \left(\frac{h_{2n}}{h_{1n}} \right)^2 \right]} \tag{2.100}$$

$$C_{1n\phi} = \frac{G_{11}^n}{G_{01}^n} \frac{1}{I_n(h_{1n}a)F_1} + \frac{\frac{n\beta_n}{h_{1n}^2 a} \left[1 - \left(\frac{h_{2n}}{h_{1n}} \right)^2 \right]}{j \frac{\omega\mu_0}{h_{2n}} F_1} \frac{\frac{n\beta_n}{h_{1n}^2 a} \left[\frac{G_{00}^n(a,b)}{G_{01}^n(a,b)} - \left(\frac{G_{00}^n(a,b)}{G_{01}^n(a,b)} - 1 \right) \frac{G_{11}^n(a,b)}{G_{01}^n(a,b)} \right]}{j \frac{\omega\epsilon_0}{h_{2n}} I_n(h_{1n}a)F_2 + \frac{\frac{n\beta_n}{h_{1n}^2 a} \left[1 - \left(\frac{h_{2n}}{h_{1n}} \right)^2 \right]}{j \frac{\omega\mu_0}{h_{2n}} F_1}}, \quad (2.101)$$

$$A_{1n} = A_{1n\phi} J_{1n} + A_{1nz} J_{0n}, \quad (2.102)$$

onde os coeficientes $A_{1n\phi}$ e A_{1nz} são dados segundo as expressões

$$A_{1n\phi} = \frac{\frac{n\beta_n}{h_{1n}^2 a} \frac{G_{00}^n(a,b)}{G_{01}^n(a,b)} - \left(\frac{G_{00}^n(a,b)}{G_{01}^n(a,b)} - 1 \right) \frac{G_{11}^n(a,b)}{G_{01}^n(a,b)} \frac{1}{F_1}}{j \frac{\omega\epsilon_0}{h_{2n}} I_n(h_{1n}a)F_2 + \frac{\frac{n\beta_n}{h_{1n}^2 a} \left[1 - \left(\frac{h_{2n}}{h_{1n}} \right)^2 \right]}{j \frac{\omega\mu_0}{h_{2n}} F_1}}, \quad (2.103)$$

e

$$A_{1nz} = \frac{1}{j \frac{\omega\epsilon_0}{h_{2n}} I_n(h_{1n}a)F_2 + \frac{\frac{n\beta_n}{h_{1n}^2 a} \left[1 - \left(\frac{h_{2n}}{h_{1n}} \right)^2 \right]}{j \frac{\omega\mu_0}{h_{2n}} F_1}}. \quad (2.104)$$

Os fatores F_1 e F_2 são dados segundo as expressões:

$$F_1 = \frac{G_{11}^n(a,b)}{G_{01}^n(a,b)} - \frac{h_{2n}}{h_{1n}} \frac{I'_n(h_{1n}a)}{I_n(h_{1n}a)} \quad (2.105)$$

e

$$F_2 = \epsilon_r \frac{G_{11}^n(a,b)}{G_{00}^n(a,b)} - \frac{h_{2n}}{h_{1n}} \frac{I'_n(h_{1n}a)}{I_n(h_{1n}a)}. \quad (2.106)$$

Estas expressões são completamente gerais para uma hélice de fita no interior de uma guia circular de raio b com dielétrico ϵ_r . Para se obter a relação de dispersão de Sensiper [27] deve-se fazer as seguintes simplificações:

Análise via simulação computacional de uma estrutura de ondas lentas

$$\epsilon_r = 1;$$

$$h_{1n} = h_{2n};$$

$$b \rightarrow \infty;$$

$$\frac{G_{00}^{\text{in}}(a,b)}{G_{00}^{\text{out}}(a,b)} \rightarrow \frac{K_n(h_n a)}{K_n(h_n a)} = 1;$$

$$\frac{G_{00}^{\text{in}}(a,b)}{G_{01}^{\text{in}}(a,b)} \rightarrow \frac{K_n'(h_n a)}{K_n(h_n a)}.$$

Além de usar a relação entre as funções de Bessel modificadas:

$$I_n(h_n a)K_n'(h_n a) - I_n'(h_n a)K_n(h_n a) = \frac{1}{h_n a}.$$

As seguintes expressões para constantes A_{1n} , C_{1n} , são obtidas:

$$A_{1n} = -\frac{h_n^2 a K_n(h_n a)}{j\omega\epsilon_0} \left[J_{1n} \sin \Psi - \frac{n\beta_n}{h_n^2 a} J_{1n} \cos \Psi \right],$$

$$C_{1n} = -h_n a K_n'(h_n a) J_{1n} \cos \Psi.$$

Substituindo estas expressões na Eq. (2.94) obtém-se

$$E_{H1}(r=a, \phi, z) = e^{-\beta_0 z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} j \frac{\sin^2 \Psi}{\omega\epsilon_0 a} J_{1n} \left[\frac{n\beta_n a}{h_n a} \cot g\Psi - h_n a \right]^2 I_n(h_n a) K_n(h_n a) \\ + (k_0 a)^2 I_n'(h_n a) K_n'(h_n a) \left\{ e^{-j\left(\frac{2\pi z}{a} - \phi\right)} \right\}$$

A expressão para a densidade de corrente dada pela Eq. (2.91)

$$E_{//}(r = a, \phi, z) = e^{-j\beta_0 z} j \frac{\text{sen}^2 \Psi}{\omega \epsilon_i a} J_0 \left(\frac{\delta}{\rho} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{n\beta_n a}{h_n a} \cot g^2 \Psi - h_n a \right]^2 I_n(h_n a) K_n(h_n a) + (k_0 a)^2 I'_n(h_n a) K'_n(h_n a) \left\{ \frac{\text{sen} \frac{\beta_n \delta}{2}}{\frac{\beta_n \delta}{2}} e^{-j \frac{2\pi}{p} z} \right\}$$

Aplicando a hipótese que o campo é nulo para o centro da fita, isto é, para

$$z = \frac{p\phi}{2\pi}$$

a expressão acima resulta em

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\frac{n\beta_n a}{h_n a} \cot g^2 \Psi - h_n a \right]^2 I_n(h_n a) K_n(h_n a) + (k_0 a)^2 I'_n(h_n a) K'_n(h_n a) \right\} \frac{\text{sen} \frac{\beta_n \delta}{2}}{\frac{\beta_n \delta}{2}} = 0$$

que é a expressão obtida por Sensiper. Esta expressão pode ser simplificada utilizando as expressões aproximadas, válidas para $|n| \geq 1$

$$I_n(h_n a) K_n(h_n a) \cong \frac{1}{2} \frac{1}{[n^2 + h_n^2 a^2]^{1/2}}$$

$$I'_n(h_n a) K'_n(h_n a) = -\frac{1}{2} \frac{[n^2 + h_n^2 a^2]^{1/2}}{h_n^2 a^2}$$

resultando em:

$$0 = \left[(h_0 a)^2 I_0(h_0 a) K_0(h_0 a) - (k_0 a)^2 \cot g^2 \Psi I_1(h_0 a) K_1(h_0 a) \right] \frac{\text{sen}(\beta_0 \delta / 2)}{(\beta_0 \delta / 2)} +$$

$$+ \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{n=\infty} \left\{ \left[(h_0 a)^2 + (k_0 a)^2 \frac{n^2 \cot g^2 \Psi}{(h_n a)^2} \right] \frac{1}{2\sqrt{n^2 + (h_n a)^2}} - (k_0 a)^2 \cot g^2 \Psi \frac{\sqrt{n^2 + (h_n a)^2}}{2(h_n a)^2} \right\} \frac{\text{sen}(\beta_n \delta / 2)}{(\beta_n \delta / 2)} \quad (2.109)$$

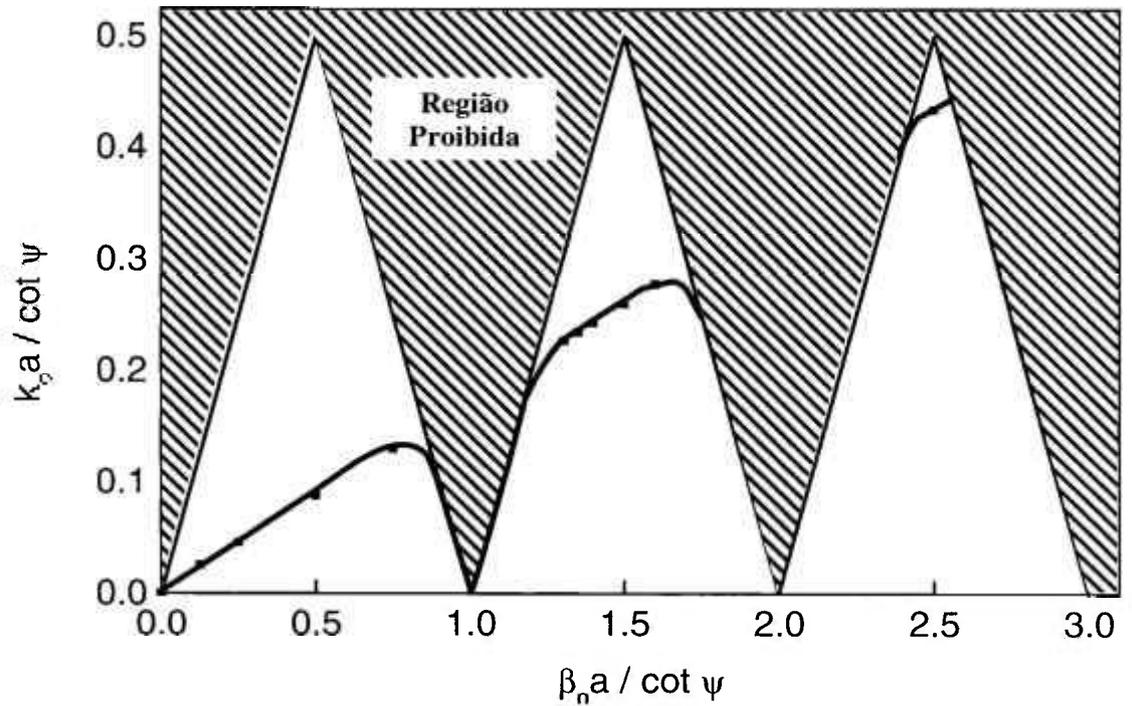


Figura 11 - Relação de dispersão de Sensiper para o modelo da hélice de fita.

A expressão geral para uma hélice de fita no interior de uma guia circular de raio b com dielétrico ϵ_r pode ser obtida utilizando as expressões aproximadas, válidas para $n=0$, e as seguintes simplificações:

$$M_0 = (h_0 a)^2 I_0(h_0 a) K_0(h_0 a),$$

$$N_0 = -(k_0 a)^2 \cot^2 \psi I_1(h_0 a) K_1(h_0 a),$$

$$\alpha_{11} = \frac{1}{1 - \frac{I_0(h_0 a) K_0(h_0 b)}{I_0(h_0 b) K_0(h_0 a)}} \left[1 + (\epsilon_r - 1) \frac{I_0(h_0 a) K_1(h_0 a)}{K_1(h_0 a) I_0(h_0 b)} \right] \left[1 + \frac{I_1(h_0 a) K_0(h_0 b)}{K_1(h_0 a) I_0(h_0 b)} \right],$$

$$b_0 = 1 - \frac{I_1(h_0 a) K_1(h_0 b)}{K_1(h_0 a) I_1(h_0 b)},$$

$$M_n = \left[\frac{n(\beta_n a)}{(h_n a)} \cot g \Psi - (h_n a) \right] I_n(h_n a) K_n(h_n a),$$

$$N_n = (k_0 a)^2 \cot g^2 \Psi I'_n(h_n a) K'_n(h_n a),$$

$$a_n = \frac{1}{1 - \frac{I_n(h_n a) K_n(h_n b)}{I_n(h_n b) K_n(h_n a)}} \left[1 - (\epsilon_r - 1)(h_n a) I_n(h_n a) K'_n(h_n a) \left[1 - \frac{I'_n(h_n a) K_n(h_n b)}{K'_n(h_n a) I_n(h_n b)} \right] \right],$$

3

$$b_n = 1 - \frac{I'_n(h_n a) K'_n(h_n b)}{K'_n(h_n a) I'_n(h_n b)}$$

Aplicando-se a relação de recorrência

$$K'_n(x) = -K_{n-1}(x) - \frac{n}{x} K_n(x)$$

4

$$I'_n(x) = I_{n-1}(x) - \left(\frac{n}{x} \right) I_n(x)$$

tem-se que o termo da soma para $n = 0$ fica dado por

$$\left[\frac{M_0}{a_0} + N_0 b_0 \right] \frac{\text{sen}(\beta_0 \delta / 2)}{(\beta_0 \delta / 2)}$$

e, finalmente, a expressão geral para a relação de dispersão pode ser representada como:

$$\left[\frac{M_0}{a_0} + N_0 b_0 \right] \frac{\text{sen}(\beta_0 \delta / 2)}{(\beta_0 \delta / 2)} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \left[\frac{M_n}{a_n} + N_n b_n \right] \frac{\text{sen}(\beta_n \delta / 2)}{(\beta_n \delta / 2)} = 0. \quad (2.109)$$

Na Fig. 12 mostra-se as curvas de dispersão para uma guia circular de raio $b = 2a$, onde a é o raio da hélice. Observa-se que a velocidade de fase é função decrescente com o aumento da frequência.

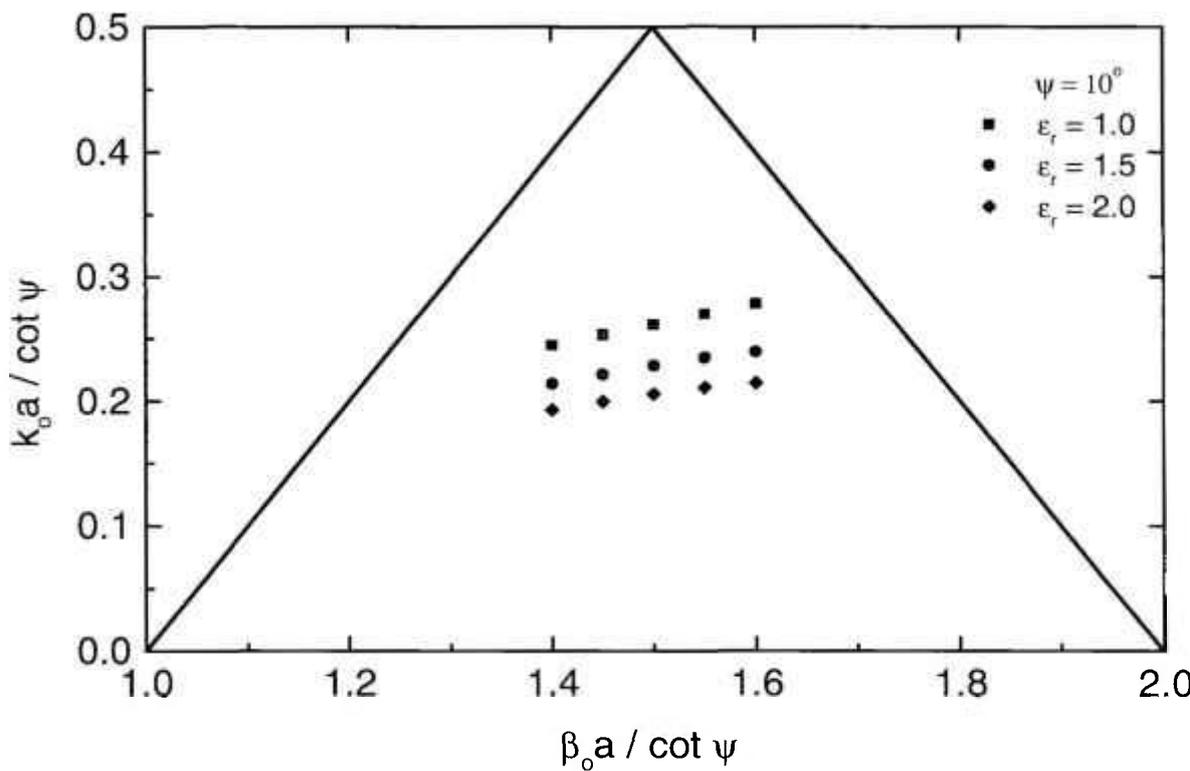
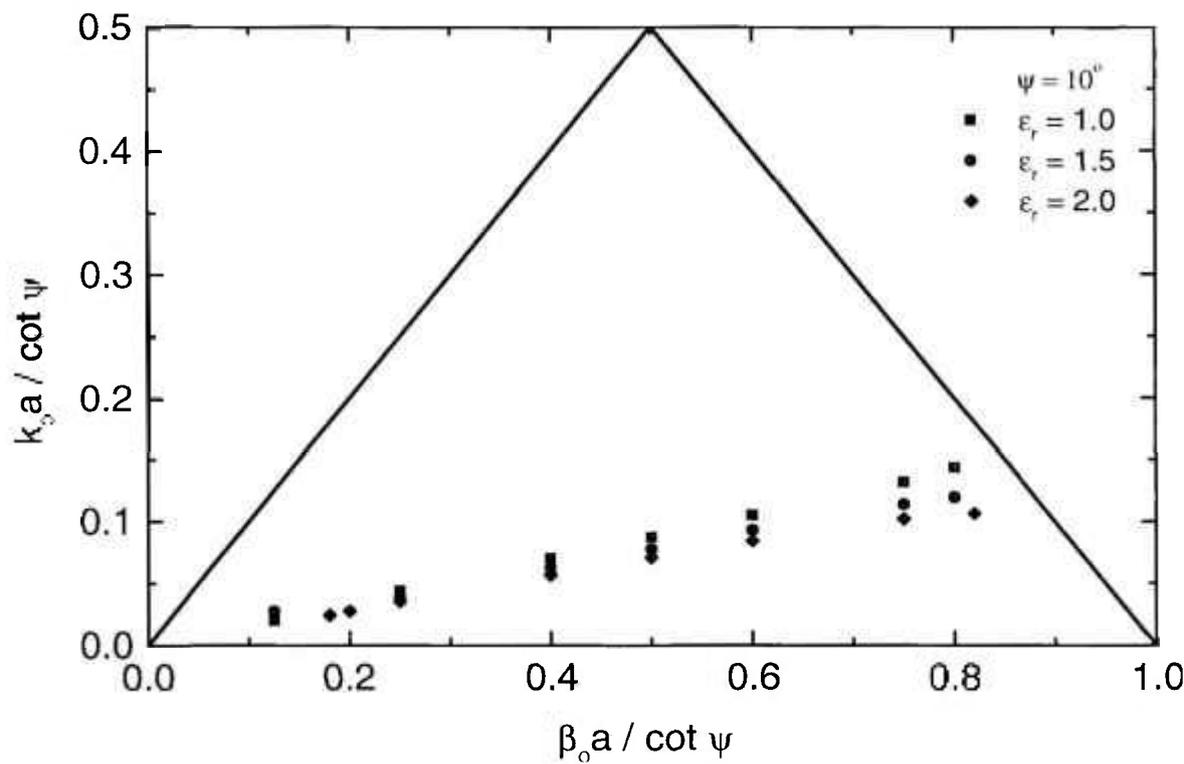


Figura 12 - Relação de dispersão de Sensiper para o modelo da hélice de fita no interior de uma guia circular de raio $b = 2a$ com dielétrico ϵ_r .

Análise via simulação computacional de uma estrutura de ondas lentas

2.11. Conclusão do capítulo

Neste capítulo apresentou-se uma revisão dos modelos teóricos que descrevem o comportamento do campo eletromagnético ao se propagar no interior de uma guia circular carregada com uma estrutura helicoidal. As seguintes propriedades das estruturas de ondas lenas são observadas:

- A velocidade de fase é função decrescente com o aumento da frequência;
- A impedância de interação decresce com o aumento da frequência; e
- A impedância de interação decresce com o aumento da permissividade relativa no material que envolve a hélice.

CAPÍTULO 3: SOLUÇÃO DO PROBLEMA ELETROMAGNÉTICO PARA CAVIDADES RESSONANTES - ANÁLISE NODAL E ANÁLISE UTILIZANDO ELEMENTOS DE ARESTA

3.1. Introdução

Neste capítulo descreve-se os resultados obtidos da primeira parte do desenvolvimento do código computacional para a análise da estruturas de ondas lentas. Para tal implementou-se um conjunto de rotinas computacionais para a determinação dos autovalores (números de onda) para cavidades ressonantes de microondas. Tal escolha baseou-se nas seguintes considerações:

- Os números de onda para cavidades com geometrias regulares tais como as cavidades retangular, circular e coaxial apresentam expressões analiticamente fechadas. Desta forma a análise computacional possibilita testar a validade parcial do código;
- Em particular, as cavidades circular e coaxial podem ser utilizadas como estruturas protótipos para o problema das estruturas de ondas lentas, tendo em vista que tais estruturas podem ser construídas por meio de modificações adequadas das condições de contorno e inclusão de descontinuidades no interior das cavidades; e
- Estimativa do número de elementos, nós e arestas necessários para a adequada discretização do domínio, a fim de se obter resultados com exatidão satisfatória por meio da utilização do método dos elementos finitos.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: inicialmente apresenta-se a formulação do problema via o método dos elementos finitos utilizando-se a análise nodal tridimensional. Na seção seguinte apresenta-se a formulação do mesmo problema, mas utilizando-se a análise tridimensional com elementos de arestas vetoriais. A análise utilizada gera as três componentes espaciais das grandezas vetoriais de interesse, o campo elétrico ou seu dual, magnético e, portanto, se denomina análise de onda completa.

Na seção 3.2 apresenta-se o desenvolvimento da formulação do MEF para a análise nodal e a seção 3.3 apresenta o desenvolvimento para a formulação de aresta vetorial. A seção 3.4 apresenta a análise via simulação computacional de uma estrutura de ondas lentas.

apresenta os resultados da análise nodal para a cavidade retangular e de ambas as análises (nodal e de arestas) para a cavidade circular, e finalmente na seção 3.5 apresenta-se a conclusão do capítulo.

3.2. Desenvolvimento da formulação do método dos elementos finitos utilizando-se análise nodal

O problema das cavidades ressonantes consiste na solução da equação Helmholtz, dadas as condições de contorno Dirichlet ou Neumann, dependendo do que se deseja, para a obtenção do espectro de autovalores k_0 , número de onda do espaço livre e, como consequência as frequências de ressonância. Para a construção da formulação fraca, parte-se da equação de Helmholtz,

$$\nabla^2 \begin{Bmatrix} h_z \\ e_z \end{Bmatrix} = -k_0^2 \begin{Bmatrix} h_z \\ e_z \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

Multiplicando-se ambos os lados da equação acima pela função de ponderação escalar W , integrando-se no volume e , aplicando o teorema da divergência, a Eq. (3.1) passa a ser escrita como:

$$-\int_V \nabla W \cdot \nabla \begin{Bmatrix} h_z \\ e_z \end{Bmatrix} d^3\vec{r} + \int_{\Gamma} W \nabla \begin{Bmatrix} h_z \\ e_z \end{Bmatrix} \cdot \hat{n} ds = -k_0^2 \int_V W \begin{Bmatrix} h_z \\ e_z \end{Bmatrix} d^3\vec{r} \quad (3.2)$$

onde Γ representa a superfície que limita o volume V e \hat{n} denota o vetor unitário normal a essa superfície apontando para fora. Dividindo o domínio em N^e elementos finitos, a Eq. (3.2) torna-se

$$-\sum_{e=1}^{N^e} \int_{V_e} \nabla W^e \cdot \nabla \begin{Bmatrix} h_z^e \\ e_z^e \end{Bmatrix} d^3\vec{r} + \int_{\Gamma_e} W^e \nabla \begin{Bmatrix} h_z^e \\ e_z^e \end{Bmatrix} \cdot \hat{n} ds = -k_0^2 \sum_{e=1}^{N^e} \int_{V_e} W^e \begin{Bmatrix} h_z^e \\ e_z^e \end{Bmatrix} d^3\vec{r} \quad (3.3)$$

Tendo em vista que na presente análise não se trata do problema de cavidades parcialmente preenchidas com dielétrico, a integral de superfície se anula e a Eq. (3.3) passa a ser escrita como:

$$\sum_{e=1}^{N^e} \int_{V_e} \nabla W^e \cdot \nabla \begin{Bmatrix} h_z^e \\ e_z^e \end{Bmatrix} d^3\vec{r} = k_0^2 \sum_{e=1}^{N^e} \int_{V_e} W^e \begin{Bmatrix} h_z^e \\ e_z^e \end{Bmatrix} d^3\vec{r} \quad (3.4)$$

Decompondo as funções incógnitas em termos de funções de base tridimensionais $L_i^e(x, y, z)$, definidas no apêndice A, pode-se escrever:

$$e_z^e(x, y, z) = \sum_{i=1}^6 L_i^e(x, y, z) e_{zi}^e, \quad (3.5)$$

$$h_z^e(x, y, z) = \sum_{i=1}^6 L_i^e(x, y, z) h_{zi}^e, \quad (3.6)$$

e segundo o método de Galerkin,

$$W^e(x, y, z) = \sum_{i=1}^6 L_i^e(x, y, z). \quad (3.7)$$

A substituição das Eqs. (3.5) – (3.7) resultará na seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} [A]_e & 0 \\ 0 & [A]_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{e_z\}_e \\ \{h_z\}_e \end{Bmatrix} = \kappa_e \begin{bmatrix} [B]_e & 0 \\ 0 & [K]_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{e_z\}_e \\ \{h_z\}_e \end{Bmatrix}, \quad (3.8)$$

onde $[A]_e$ e $[B]_e$ são matrizes quadradas de ordem 6 denominadas de matrizes rigidez do elemento finito e cujos elementos são definidos seguindo:

$$a_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \nabla L_i^e \cdot \nabla L_j^e d^3r, \quad (3.9)$$

$$b_{ij}^e = \int_{\Omega^e} L_i^e L_j^e d^3r. \quad (3.10)$$

Considerando que cada nó do elemento, que neste caso foi utilizado um prisma reto, é compartilhado com os elementos adjacentes, garantindo a continuidade da função incógnita, a matriz rigidez global pode então ser montada resultando no seguinte problema de autovalor generalizado para matrizes reais. Neste caso as matrizes $[A]$ e $[B]$ são reais e simétricas e, em particular, a matriz $[B]$ é positiva definida possuindo decomposição de Cholesky.

$$\begin{bmatrix} [A] & 0 \\ 0 & [A] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{e_z\} \\ \{h_z\} \end{Bmatrix} = k_0^2 \begin{bmatrix} [B] & 0 \\ 0 & [B] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{e_z\} \\ \{h_z\} \end{Bmatrix}. \quad (3.11)$$

As condições de contorno do problema devem ser agora incorporadas ao problema. No caso de cavidades homogêneas, sem perdas e limitada por condutores ideais, tem-se que nas superfícies condutoras os campos devem satisfazer as seguintes condições:

$$\hat{n} \cdot \vec{H} = 0 \quad (3.12)$$

$$\hat{n} \times \vec{E} = \vec{0}. \quad (3.13)$$

Portanto, a componente paralela do campo elétrico deve se anular na superfície do condutor ideal assim como a componente normal do campo magnético. Quando estas condições de contorno são incorporadas ao sistema da Eq. (3.11), a matriz associada ao campo elétrico terá tantos elementos nulos na diagonal principal quantos forem os localizados no contorno. Isto implicará na redução da ordem da matriz global. Em termos numéricos isto é computado por meio de uma reordenação da matriz particionada para o campo elétrico. Tal reordenação não altera as propriedades da matriz global.

O autovalor k_0^2 do problema generalizado é então obtido segundo o fluxograma de solução apresentado no capítulo 1. Uma vez que os autovetores do problema sejam determinados os campos são obtidos segundo

$$e_z(x, y, z) = \sum_{r=1}^{N_e} \sum_{i=1}^6 L_i^e(x, y, z) e_{zi}^e \quad (3.14)$$

$$h_z(x, y, z) = \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^6 L_i^e(x, y, z) h_{zi}^e \quad (3.15)$$

3.3. Desenvolvimento da formulação do método dos elementos finitos utilizando-se elementos de aresta vetoriais

Nesta abordagem utiliza-se a equação de onda vetorial

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} = \vec{0}, \quad (3.16)$$

Multiplicando-se escalarmente a Eq. (3.16) pela função de ponderação vetorial \vec{W} , obtém-se

$$\vec{W} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} - k_0^2 \epsilon_r \vec{W} \cdot \vec{E} = 0. \quad (3.17)$$

Aplicando a identidade vetorial

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{A} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \right] = (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}),$$

para $\vec{W} = \vec{A}$ e $\vec{E} = \vec{B}$, tem-se que:

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{W} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right] = (\vec{\nabla} \times \vec{W}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{W} \cdot \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}),$$

$$\vec{W} \cdot \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = (\vec{\nabla} \times \vec{W}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{W} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right].$$

Substituindo estes resultados na Eq. (3.17) e, integrando no volume do elemento, resulta em

$$\int_V (\vec{\nabla} \times \vec{W}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) d^3\vec{r} - \int_V \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{W} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right] d^3\vec{r} - k_0^2 \int_V \vec{W} \cdot \epsilon_r \vec{E} d^3\vec{r} = 0.$$

De maneira similar ao desenvolvimento realizado na análise nodal, aplica-se esta equação para cada elemento do domínio:

$$\sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega^e} (\vec{\nabla} \times \vec{W}^e) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}^e) d^3\vec{r} - \int_{\Omega^e} \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{W}^e \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}^e) \right] d^3\vec{r} - k_0^2 \int_{\Omega^e} \vec{W}^e \cdot \epsilon_r \vec{E}^e d^3\vec{r} = 0. \quad (3.18)$$

Utilizando o teorema da divergência a segunda integral pode ser transformada em um integral de superfície

$$\int_{\Omega^e} \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{W} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}^e) \right] d^3\vec{r} = \int_{\Gamma^e} \left[\vec{W} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}^e) \right] \cdot \hat{n} ds.$$

Não havendo descontinuidades tangenciais entre elementos que compartilham a mesma aresta, as integrais se superfícies se anularão mutuamente e a Eq. (3.18) se torna

$$\sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega^e} (\vec{\nabla} \times \vec{W}^e) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}^e) d^3\vec{r} = k_0^2 \sum_{e=1}^{N_e} \epsilon_r \int_{\Omega^e} \vec{W}^e \cdot \vec{E}^e d^3\vec{r}. \quad (3.19)$$

Diferentemente da análise nodal, na análise utilizando-se elementos de aresta vetoriais é necessário especificar a direção das funções de ponderação. Assim considerando-se três funções ponderação vetoriais \vec{W}_i , \vec{M}_i e \vec{K}_i , onde \vec{W}_i e \vec{M}_i são perpendiculares a direção z de propagação e \vec{K}_i é paralela direção z . As expressões para estas funções encontram-se no apêndice D. Nestas condições campo elétrico ou magnético é então decomposto em termos das funções de base

$$\vec{E}^e = \sum_{i=1}^3 \vec{W}_i^e E_{iW}^e + \vec{M}_i^e E_{iM}^e + \vec{K}_i^e E_{iK}^e, \quad (3.20)$$

onde os coeficientes da expansão E_{iW}^e , E_{iM}^e e E_{iK}^e representam os valores médios das componentes do campo ao longo da direção da respectiva aresta em um sistema 9×9 para as matrizes rigidez do elemento,

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{W}\mathbf{W}]_A^e & [\mathbf{W}\mathbf{N}]_A^e & [\mathbf{W}\mathbf{K}]_A^e \\ [\mathbf{N}\mathbf{W}]_A^e & [\mathbf{N}\mathbf{N}]_A^e & [\mathbf{N}\mathbf{K}]_A^e \\ [\mathbf{K}\mathbf{W}]_A^e & [\mathbf{K}\mathbf{N}]_A^e & [\mathbf{K}\mathbf{K}]_A^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{E\}_W^e \\ \{E\}_N^e \\ \{E\}_K^e \end{Bmatrix} = k_0^2 \epsilon_r \begin{bmatrix} [\mathbf{W}\mathbf{W}]_B^e & [\mathbf{W}\mathbf{N}]_B^e & [\mathbf{W}\mathbf{K}]_B^e \\ [\mathbf{N}\mathbf{W}]_B^e & [\mathbf{N}\mathbf{N}]_B^e & [\mathbf{N}\mathbf{K}]_B^e \\ [\mathbf{K}\mathbf{W}]_B^e & [\mathbf{K}\mathbf{N}]_B^e & [\mathbf{K}\mathbf{K}]_B^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{E\}_W^e \\ \{E\}_N^e \\ \{E\}_K^e \end{Bmatrix}, \quad (3.21)$$

onde as expressões explícitas para cada elemento de matriz foram desenvolvidas e estão apresentados no apêndice D. Para a montagem da matriz rigidez global do sistema o mesmo raciocínio utilizado para a análise nodal pode ser empregado resultando no seguinte problema de autovalor generalizado para matrizes simétricas reais

$$[\mathbf{A}]\{E\} = -k_0^2 \epsilon_r [\mathbf{B}]\{E\}. \quad (3.22)$$

As condições de contorno para o problema são agora incorporadas ao problema. No caso das condições de contorno de Dirichlet, estas reduzem a ordem da matriz global e possibilitam uma reordenação da matriz. A matriz B continua apresentando a propriedade de ser positiva e definida possuindo decomposição de Cholesky. As mesmas técnicas numéricas utilizadas para o problema da análise nodal são utilizadas para este caso utilizando elementos de aresta vetoriais.

Uma vez que os autovetores foram determinados o campo elétrico no domínio poderá ser obtido por meio da expressão:

$$\vec{E}(x, y, z) = \sum_{\varepsilon=1}^{N_e} \sum_{i=1}^3 \vec{W}_i^{\varepsilon}(x, y, z) E_{iW}^{\varepsilon} + \vec{N}_i^{\varepsilon}(x, y, z) E_{iN}^{\varepsilon} + \vec{K}_i^{\varepsilon}(x, y, z) E_{iK}^{\varepsilon} . \quad (3.23)$$

3.4. Análise das cavidades de microondas

Com o objetivo de validar o código computacional desenvolvido, foram analisados vários problemas tridimensionais. O primeiro destes problemas foi a cavidade retangular de microondas.

A) Cavidade Retangular

A Fig. 13 apresenta uma cavidade retangular de microondas em três dimensões. Utilizou-se para este tipo de cavidade elementos triangulares de primeira ordem, em um total de 1100 elementos e 772 nós.

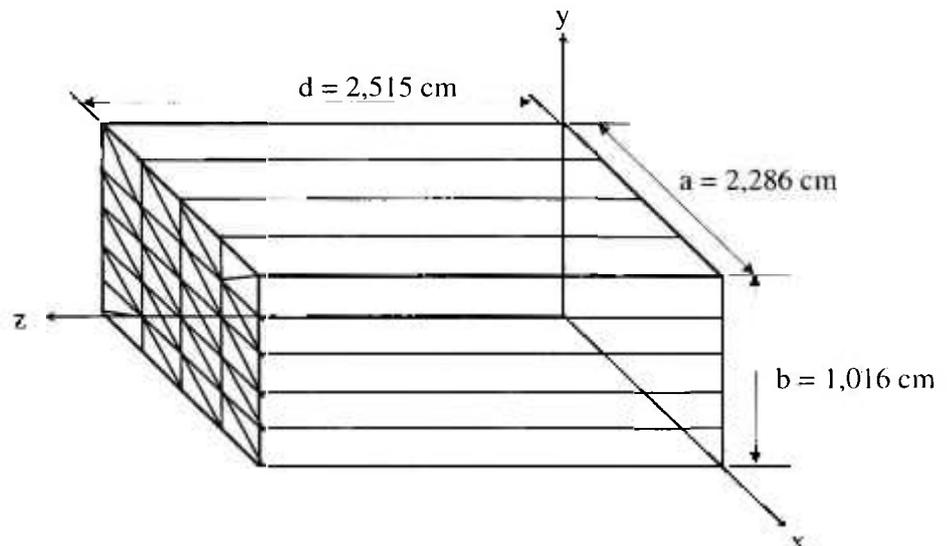


Figura 13 - Cavidade de microondas retangular e discretização da cavidade.

Comparando os autovalores obtidos pela solução das Eqs. (3.11) e (3.22) com os valores teóricos da cavidade retangular

$$k_{nml} = \left[\left(\frac{l\pi}{d} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.24)$$

montou-se a tabela abaixo:

TABELA 3.1 - Comparação entre valores teóricos e numéricos para cavidade retangular :
($a = 2,286 \text{ cm}$, $b = 1,016 \text{ cm}$, $d = 2,515 \text{ cm}$)

Modo	k_{nml} (teórico) cm^{-1}	k_{nml} (MEF) - nodal cm^{-1}	Erro %
TE ₁₀₁	1,857	1,865	0,43
TE ₀₁₁	3,335	3,384	1,45
TE ₂₀₁	3,019	2,534	16,06
TM ₁₁₀	3,384	3,474	2,59
TE ₁₁₁	3,607	3,691	2,28
TM ₁₁₁	3,607	3,694	2,36

B) Cavidade circular

A Fig. 14 apresenta uma cavidade circular de microondas em três dimensões. Para este tipo de cavidade utilizou-se elementos triangulares de primeira ordem (prismas retos), em um total de 1470 elementos, 3538 arestas e 1012 nós.

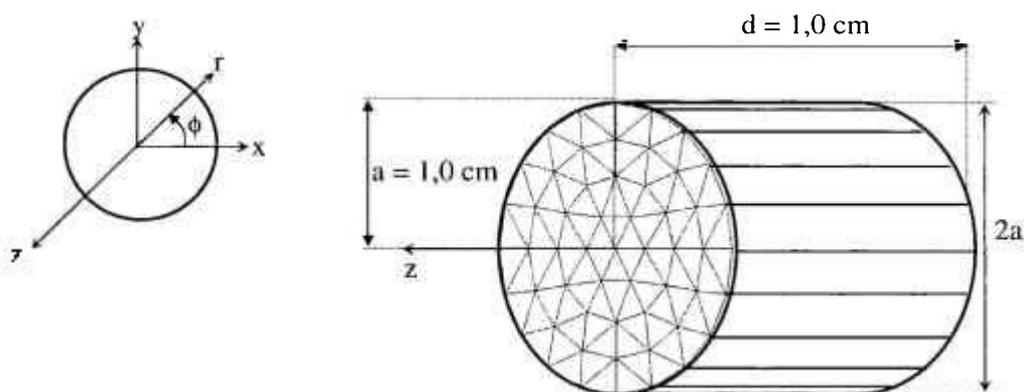


Figura 14 - Cavidade de microondas circular com a discretização do domínio

Para uma cavidade circular os números de onda são obtidos teoricamente [26] por meio das Eqs. (3.25) e (3.26) e das Tabelas 3.2 e 3.3 para os casos TE e TM, respectivamente. Para o caso TE tem-se:

$$k_{nm}(TE) = \left[\left(\frac{l\pi}{d} \right)^2 + \left(\frac{p_{nm}}{a} \right)^2 \right]^{1/2} \tag{3.25}$$

e para o caso TM

$$k_{nm}(TM) = \left[\left(\frac{l\pi}{d} \right)^2 + \left(\frac{p_{nm}}{a} \right)^2 \right]^{1/2} \tag{3.26}$$

TABELA 3.2 - Valores de p_{nm} para modos TE de uma guia circular

n (TE _{nm})	p_{n1}	p_{n2}	p_{n3}
0	3,832	7,016	10,174
1	1,841	5,331	8,536
2	3,054	6,706	9,970

TABELA 3.3 - Valores de p_{nm} para modos TM de uma guia circular

n (TM _{nm})	p_{n1}	p_{n2}	p_{n3}
0	2,405	5,520	8,654
1	3,832	7,016	10,174
2	5,135	8,417	11,620

Na Tab. 3.4 apresentam-se os resultados da análise para uma cavidade circular. Trata-se de uma comparação entre os valores teóricos e os calculados via MEF aplicando-se a análise nodal e análise por elementos vetoriais de aresta.

TABELA 3.4 - Comparação entre valores teóricos e numéricos para cavidade circular: (a = 1,0 cm, d = 1,0 cm)

Modo	k_{uml}				
	Teórico (cm ⁻¹)	MEF (cm ⁻¹) Nodal	Erro%	MEF (cm ⁻¹) Aresta	Erro%
TM ₀₁₀	2,405	2,424	0,78	2,428	0,95
TE ₁₁₁	3,641	3,628	0,36	3,642	0,03
TM ₁₁₀	3,832	3,815	0,45	3,857	0,65
TM ₀₁₁	3,956	3,930	0,66	3,956	0,00
TE ₂₁₁	4,381	4,326	1,30	4,365	0,37

3.5. Conclusão do capítulo

Neste capítulo analisou-se duas geometrias de ressonadores eletromagnéticos comumente utilizados em microondas. São elas as cavidades retangular e circular. A análise foi conduzida segundo o método dos elementos finitos utilizando tanto a abordagem nodal em três dimensões para as cavidades retangular e circular como também os elementos de aresta vetoriais somente para a cavidade circular em três dimensões. Por meio da comparação com os valores teóricos dos números de onda, foi possível obter a quantidade mínima de elementos a serem utilizados para a discretização do domínio do problema.

CAPÍTULO 4: ANÁLISE DE ESTRUTURAS PERIÓDICAS SIMPLES EM 2 - D E 3 - D

4.1. Introdução

Neste capítulo descreve-se as modificações inseridas no código computacional em desenvolvimento de maneira a incluir a propriedade da periodicidade nas estruturas de guiagem de ondas eletromagnéticas. O teorema de Floquet é utilizado para este fim e sua implementação computacional ocorreu por meio de uma condição de contorno a ser satisfeita pelos campos incógnitas em $z=0$ e $z=p$ onde p é o comprimento periódico. A consequência em termos do método dos elementos finitos consistiu de uma reordenação da matriz rigidez global tornando as matrizes globais complexas, porém hermitianas.

O código computacional desenvolvido no capítulo 3 é agora ampliado de maneira a incluir estruturas periódicas simples e estas modificações foram validadas utilizando dois casos. Estes casos foram escolhidos porque apresentam solução analítica. São eles: o guia corrugado bidimensional e a guia de ondas circular homogêneo. A análise da guia de onda corrugado bidimensional é conduzida utilizando-se análise nodal, enquanto a análise da guia circular é conduzida utilizando-se elementos vetoriais de arestas tridimensionais.

Como resultado, em ambos casos os valores obtidos apresentaram excelente concordância com os resultados previstos pela teoria.

4.2. Guia corrugada 2-D

Uma estrutura periódica que pode ser analisada utilizando o MEF em 2-D com análise nodal é aquela mostrada na Fig. 15. A estrutura consiste de um guia de ondas corrugado com período p . Esta estrutura sustenta a propagação de campo eletromagnético com velocidade de fase aproximadamente uniforme sobre uma larga banda de frequência. A estrutura se estende ao infinito nas direções $\pm y$.

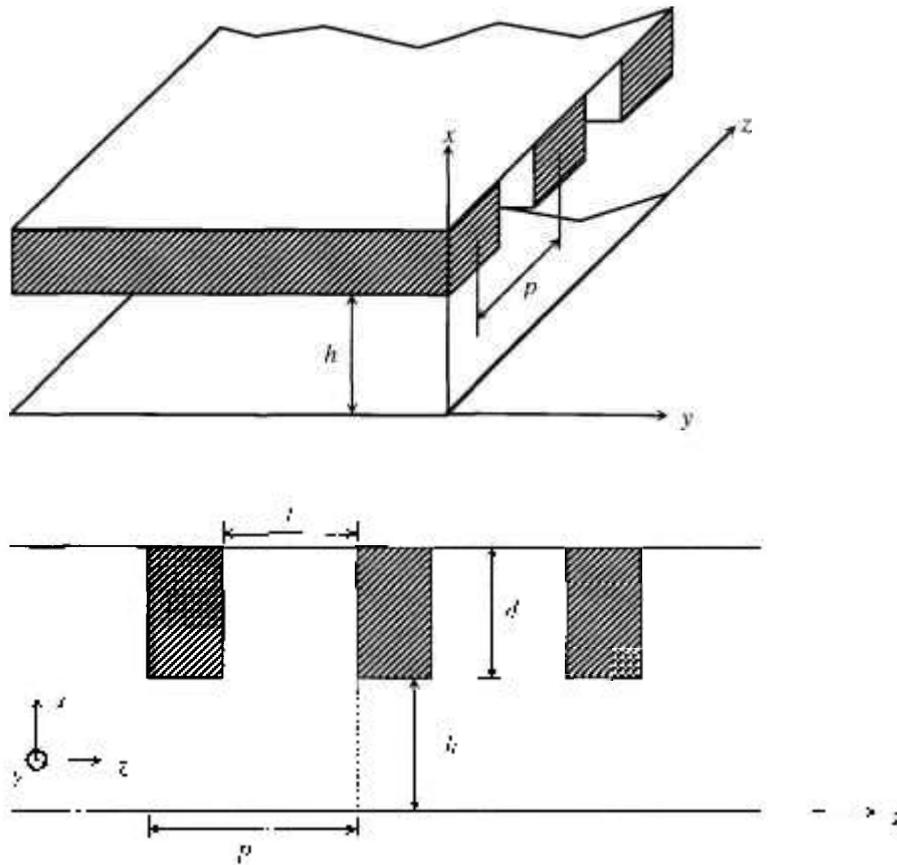


Figura 15 - Guia de ondas corrugada em paredes laterais abertas, para $y = \pm \infty$.

Para a abordagem utilizando-se o MEF a função incógnita, potencial $[\phi(x, z) = h_z(x, z)]$, ou $[\phi(x, z) = e_z(x, z)]$, tem as seguintes propriedades:

$$\phi(x, z) = \omega_p(x, z) e^{-i\beta z}, \quad (4.1)$$

que implica em admitir que o campo se propagará ao longo do eixo z com constante de propagação $\beta = \beta(\omega)$. Adicionalmente, a dependência de ϕ com z é mantida de modo a descrever a característica corrugada da guia. Este fato implicará em uma matriz rigidez complexa. O índice p indica que o campo é periódico, com período p , isto é, segundo o teorema de Floquet:

$$\phi(x, z + L) = \phi_p(x, z) e^{-i\beta L}. \quad (4.2)$$

Esta expressão entrará na matriz rigidez global com uma condição de contorno para $z = 0$ e $z = p$, que mais uma vez produzirá elementos complexos, porém como a estrutura

não tem perdas, por hipótese, isto é, β real, a matriz ainda manterá sua propriedade hermitiana e ter-se-á como resultado autovalores reais, ou seja k_0 , o número de onda.

A) Desenvolvimento da formulação fraca

Partindo-se da equação de Helmholtz escalar

$$\nabla^2 \phi + k_0^2 \phi = 0, \quad (4.3)$$

multiplicando por W , a função ponderação, e integrando ambos os lados, obtêm-se

$$\int_V W \nabla^2 \phi \, d\Omega - k_0^2 \int_V W \phi \, d\Omega = 0.$$

Utilizando-se a identidade vetorial $\vec{\nabla} \cdot W \vec{\nabla} \phi = \vec{\nabla} W \cdot \vec{\nabla} \phi + W \nabla^2 \phi$, e aplicando o teorema da divergência,

$$\begin{aligned} - \int_V \vec{\nabla} W \cdot \vec{\nabla} \phi \, d^3\vec{r} + \int_V \vec{\nabla} \cdot (W \vec{\nabla} \phi) \, d^3\vec{r} + k_0^2 \int_V W \phi \, d^3\vec{r} &= 0, \\ - \int_V \vec{\nabla} W \cdot \vec{\nabla} \phi \, d^3\vec{r} + \int_V W \vec{\nabla} \phi \cdot \hat{n} \, ds + k_0^2 \int_V W \phi \, d^3\vec{r} &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Dividindo o domínio do problema em N_e elementos finitos a Eq. (4.4) passa a ser escrita

$$- \sum_{e=1}^{N_e} \int_{V_e} \vec{\nabla} W^e \cdot \vec{\nabla} \phi^e \, d^3\vec{r} + \int_{V_e} W^e \vec{\nabla} \phi^e \cdot \hat{n} \, ds = -k_0^2 \sum_{e=1}^{N_e} \int_{V_e} W^e \phi^e \, d^3\vec{r}. \quad (4.5)$$

Admitindo-se que não haja descontinuidade entre elementos adjacentes as integrais de superfície se anularão mutuamente, resultando em

$$\sum_{e=1}^{N_e} \int_{V_e} \vec{\nabla} W^e \cdot \vec{\nabla} \phi^e \, d^3\vec{r} = k_0^2 \sum_{e=1}^{N_e} \int_{V_e} W^e \phi^e \, d^3\vec{r}. \quad (4.6)$$

Sob a hipótese da descrita pela Eq. (4.1) e admitindo-se $W(x, z) = W_p(x, z)e^{j\beta z}$ [15], a Eq. (4.6) se transforma em

$$\sum_{e=1}^{N_e} \int_{V_e} \left(\frac{\partial W^e}{\partial x} \frac{\partial \phi_p^e}{\partial x} + \frac{\partial W^e}{\partial z} \frac{\partial \phi_p^e}{\partial z} \right) d^3\bar{r} + j\beta \int_{V_e} \left(W^e \frac{\partial \phi_p^e}{\partial z} - \phi_p^e \frac{\partial W^e}{\partial z} \right) d^3\bar{r} + \beta^2 \int_{V_e} W^e \phi_p^e d^3\bar{r} =$$

$$= k_0^2 \sum_{e=1}^{N_e} \int_{V_e} W^e \phi_p^e d^3\bar{r} \quad (4.7)$$

Desta matriz rigidez do e-ésimo elemento terá a seguinte forma

$$\{[A_e] + j\beta[C_e] + \beta^2[B_e]\}\{\phi_p^e\} = k_0^2 [B_e]\{\phi_p^e\} \quad (4.8)$$

onde

$$a_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \right) d\Omega, \quad (4.9)$$

$$c_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \left(N_i^e \frac{\partial N_j^e}{\partial z} - N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \right) d\Omega, \text{ e} \quad (4.10)$$

$$b_{ij}^e = \int_{\Omega^e} N_i^e N_j^e d\Omega, \quad (4.11)$$

onde os $N_{i,j}^e$ são as funções de forma de primeira ordem. As integrais (4.9)-(4.11) foram calculadas no apêndice C. Denotando-se por $[A_C]$ a matriz rigidez global formada a partir de matrizes rigidez locais, $[A_e] + j\beta[C_e] + \beta^2[B_e]$ será também uma matriz complexa, de forma que ela pode ser rearranjada e expressa da seguinte forma:

$$[A_C] = [A_C^R] + j[A_C^I], \quad (4.12)$$

onde $[A_C^R]$ e $[A_C^I]$ denotam as partes real e imaginária da matriz $[A_C]$. Assim pode-se escrever a matriz rigidez global na forma

$$[A_C(\beta, \beta^2)]\{\phi\} = k_0^2 [B]\{\phi\}, \quad (4.13)$$

onde foram explicitados os argumentos β e β^2 da matriz A_C . Deve ser observado que $[B]$ é real, simétrica e positiva definida.

B) Aplicação da condição de contorno periódica

Para a aplicação da condição de contorno periódica, segue-se o seguinte procedimento: divide-se o domínio do problema em três regiões, conforme a Fig. 16, de forma que

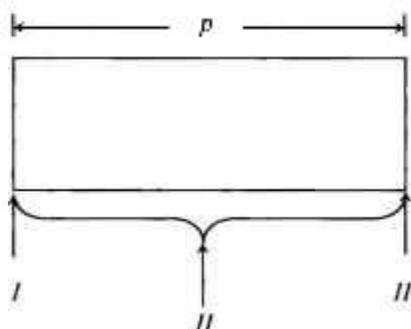


Figura 16 - Domínio periódico do problema do guia corrugado.

denotando por ϕ^I um subconjunto das funções incógnitas do problema que correspondem aos nós em $z = 0$, ϕ^{II} um subconjunto das funções incógnitas do problema que não correspondem nem aos nós em $z = 0$ e nem em $z = p$ e, finalmente ϕ^{III} um subconjunto das funções incógnitas do problema que correspondem aos nós $z = p$. Desta forma pode-se escrever Eq. (4.13) da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} [A_{11}^C] & [A_{12}^C] & [A_{13}^C] \\ [A_{21}^C] & [A_{22}^C] & [A_{23}^C] \\ [A_{31}^C] & [A_{32}^C] & [A_{33}^C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\phi\}^I \\ \{\phi\}^{II} \\ \{\phi\}^{III} \end{Bmatrix} = k_0^2 \begin{bmatrix} [B_{11}] & [B_{12}] & [B_{13}] \\ [B_{21}] & [B_{22}] & [B_{23}] \\ [B_{31}] & [B_{32}] & [B_{33}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\phi\}^I \\ \{\phi\}^{II} \\ \{\phi\}^{III} \end{Bmatrix}. \quad (4.14)$$

Mas segundo o teorema de Floquet $\{\phi\}^{III} = \{\phi\}^I e^{-j\beta p}$ e, portanto a Eq. (4.14) se transforma em

$$\begin{bmatrix} ([A_{11}^C] + [A_{13}^C]e^{-j\beta L} + [A_{31}^C]e^{+j\beta L} + [A_{33}^C]) & ([A_{12}^C] + [A_{32}^C]e^{-j\beta L}) \\ ([A_{21}^C] + [A_{23}^C]e^{-j\beta L}) & [A_{22}^C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\phi\}^I \\ \{\phi\}^{II} \end{Bmatrix}$$

$$= k_0^2 \begin{bmatrix} ([B_{11}] + [B_{11}]e^{-i\beta L} + [B_{31}]e^{+i\beta L} + [B_{33}]) & ([B_{12}] + [B_{32}]e^{+j\beta L}) \\ ([B_{21}] + [B_{23}]e^{-j\beta L}) & [B_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\phi\}^i \\ \{\phi\}^o \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

Tendo em vista que sempre existe mais que um elemento entre os contornos periódicos, ($A_{13} = A_{31} = B_{13} = B_{31}$), o sistema fica reduzido à seguinte expressão

$$= k_0^2 \begin{bmatrix} ([A_{11}^c] + [A_{33}^c]) & ([A_{12}^c] + [A_{32}^c]e^{-i\beta L}) \\ ([A_{21}^c] + [A_{23}^c]e^{-j\beta L}) & [A_{22}^c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\phi\}^i \\ \{\phi\}^o \end{Bmatrix} \\ = k_0^2 \begin{bmatrix} ([B_{11}] + [B_{33}]) & ([B_{12}] + [B_{32}]e^{+j\beta L}) \\ ([B_{21}] + [B_{23}]e^{-j\beta L}) & [B_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\phi\}^i \\ \{\phi\}^o \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

Portanto, a aplicação da condição de contorno periódica implica em uma reordenação da matriz global. A matriz passa a ser complexa também, a ordem do sistema é reduzida pelo número de incógnitas no contorno periódico, porém o autovalor continua real, pois as matrizes ainda se mantêm hermitianas.

Para tratar-se as matrizes complexas seguiu-se o procedimento descrito a seguir: escreve-se as matrizes A e B em termos de suas partes real e imaginária, onde se utilizou os índices r e i para indicar as partes real e imaginária, respectivamente;

$$[A^c] = \begin{bmatrix} ([A_{11}^r] + [A_{33}^r]) + j([A_{11}^i] + [A_{33}^i]) & ([A_{12}^r] + [A_{32}^r] \cos \beta p + [A_{32}^i] \sen \beta p) + \\ ([A_{21}^r] + [A_{23}^r] \cos \beta p - [A_{23}^i] \sen \beta p) + & j([A_{12}^i] + [A_{32}^i] \cos \beta p - [A_{32}^r] \sen \beta p) \\ j([A_{21}^i] + [A_{23}^i] \sen \beta p + [A_{23}^r] \cos \beta p) & [A_{22}^r] + j[A_{22}^i] \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

que pode ser escrita de uma maneira condensada como

$$[A^c] = [A]^r + j[A]^i, \quad (4.18)$$

onde as partes real e imaginária de $[A^c]$ são dadas por

$$[A]^r = \begin{bmatrix} ([A_{11}^r] + [A_{33}^r]) & ([A_{12}^r] + [A_{32}^r] \cos \beta L - [A_{32}^i] \sen \beta p) \\ ([A_{21}^r] + [A_{23}^r] \cos \beta p + [A_{23}^i] \sen \beta p) & [A_{22}^r] \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

e

$$[A^i] = \begin{bmatrix} [A_{11}^i] + [A_{33}^i] & [A_{12}^i] + [A_{32}^i] \cos \beta p - [A_{32}^r] \sin \beta p \\ ([A_{21}^i] - [A_{23}^r] \sin \beta p + [A_{23}^i] \cos \beta p) & [A_{22}^i] \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

De maneira similar para a matriz B tem-se

$$[B] = [B^r] + j [B^i] \quad (4.21)$$

onde

$$[B^r] = \begin{bmatrix} [B_{11}] + [B_{33}] & ([B_{12}] + [B_{32}] \cos \beta p) \\ ([B_{21}] + [B_{23}] \cos \beta p) & [B_{22}] \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

e

$$[B^i] = \begin{bmatrix} 0 & [B_{32}] \sin \beta p \\ -[B_{23}] \sin \beta p & 0 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

A equação de autovalores generalizada pode então ser escrita como

$$\left[\left([A^r] + j [A^i] \right) - k_0^2 [B^r] + j [B^i] \right] \{ \phi \} = 0 \quad (4.24)$$

Tendo em vista que as matrizes A e B são complexas e o autovalor k_0^2 é, por hipótese real, o autovetor ϕ deverá ser, necessariamente, complexo e, portanto será denotado por $\phi = u + j v$, onde u e v são reais. Assim, a Eq. (4.24) passa a ser escrita como

$$\left(\left[[A^r] + j [A^i] \right] (u + j v) - k_0^2 \left[[B^r] + j [B^i] \right] (u + j v) \right) = 0 \quad (4.25)$$

que, igualando-se as partes real e imaginária, pode-se escrever um outro sistema de ordem $2N \times 2N$:

Análise via simulação computacional de uma estrutura de ondas lentas

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} A^r \\ A^i \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} A^i \\ A^r \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = k_0^2 \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} B^r \\ B^i \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} B^i \\ B^r \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

As matrizes particionadas do sistema de Eqs. (4.26) são reais, obtidas pelo reordenamento de matrizes hermitianas, com os autovalores reais, como foi apontado no início da discussão. O sistema de Eqs. (4.26) pode ser tratado, então, utilizando-se as técnicas tradicionais, decomposição de Cholesky e diagonalização de Jacobi para a determinação dos autovalores. Contudo utilização do procedimento de Jacobi é, computacionalmente; ineficiente. Para matrizes de ordem moderada ($n = 1500$), a utilização do procedimento para a tridiagonalização de Householder seguindo pelo procedimento QL mostrou-se adequado.

Deve-se observar ainda que β é um parâmetro de entrada no sistema e k_0^2 será então obtido para um determinado β . Ao final tem-se a curva de dispersão da estrutura periódica ($\beta \times k_0$).

C) Análise dos resultados

Para a análise da estrutura da Fig. 17, considerou-se a seguinte geometria:

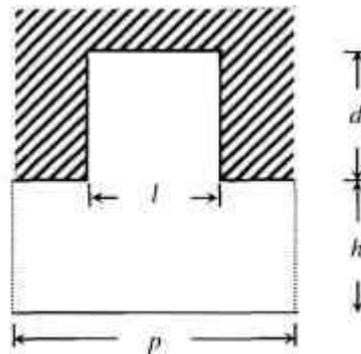


Figura 17 - Estrutura corrugada. Análise 2-D: $p = 1$, $h = 1$, $d = 2$ e $l = p/2$.

O sistema foi resolvido para condições de contorno de Neumann homogêneas. Utilizou-se elementos triangulares de primeira ordem, em um total de 800 elementos e 451 nós, 80 pontos sob o contorno sujeito a condições de contorno de Neumann homogêneas e 11 pontos $z = p$ sob condições de contorno periódicas (teorema de Floquet).

Na Fig. 18 apresenta-se a relação de dispersão do sistema. Pode-se observar excelente concordância com aquelas teóricas obtidas por Bevenssee [24]. Mostra-se um conjunto de curvas que correspondem aos modos superiores de propagação. Pode-se observar o surgimento dos harmônicos espaciais no intervalo entre 0 a 4π .

A expressão teórica da relação de dispersão é dada por

$$\frac{p \cot g \left[(k_0 p) \frac{d}{p} \right]}{(k_0 p)} = \frac{\cot gh \left[(h_0 p) \frac{h}{p} \right]}{(h_0 p)} \left[\frac{\text{sen} \left[\left(\frac{\beta_0 p}{2} \right) \frac{l}{p} \right]}{\left[\left(\frac{\beta_0 p}{2} \right) \frac{l}{p} \right]} \right] + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{\cot gh \left[(h_n p) \frac{h}{p} \right]}{(h_n p)} \left[\frac{\text{sen} \left[\left(\frac{\beta_n p}{2} \right) \frac{l}{p} \right]}{\left[\left(\frac{\beta_n p}{2} \right) \frac{l}{p} \right]} \right]$$

onde

$$h_0 p = \sqrt{(\beta_0 p)^2 - (k_0 p)^2},$$

$$h_n p = \sqrt{(\beta_n p)^2 - (k_0 p)^2},$$

$$\beta_n p = \beta_0 p + 2\pi n,$$

e o intervalo de $\beta_0 p$ é

$$0 \leq \beta_0 p \leq 2\pi.$$

Os valores a serem encontrados para $h_0 p$ devem estar situados entre $0 \leq k_0 p < 1.4$. A região proibida é definida por $h_0 p = \beta_0 p$ para $0 \leq \beta_0 p \leq \pi$ e $h_0 p = 2\pi - \beta_0 p$ para $\pi \leq \beta_0 p \leq 2\pi$.

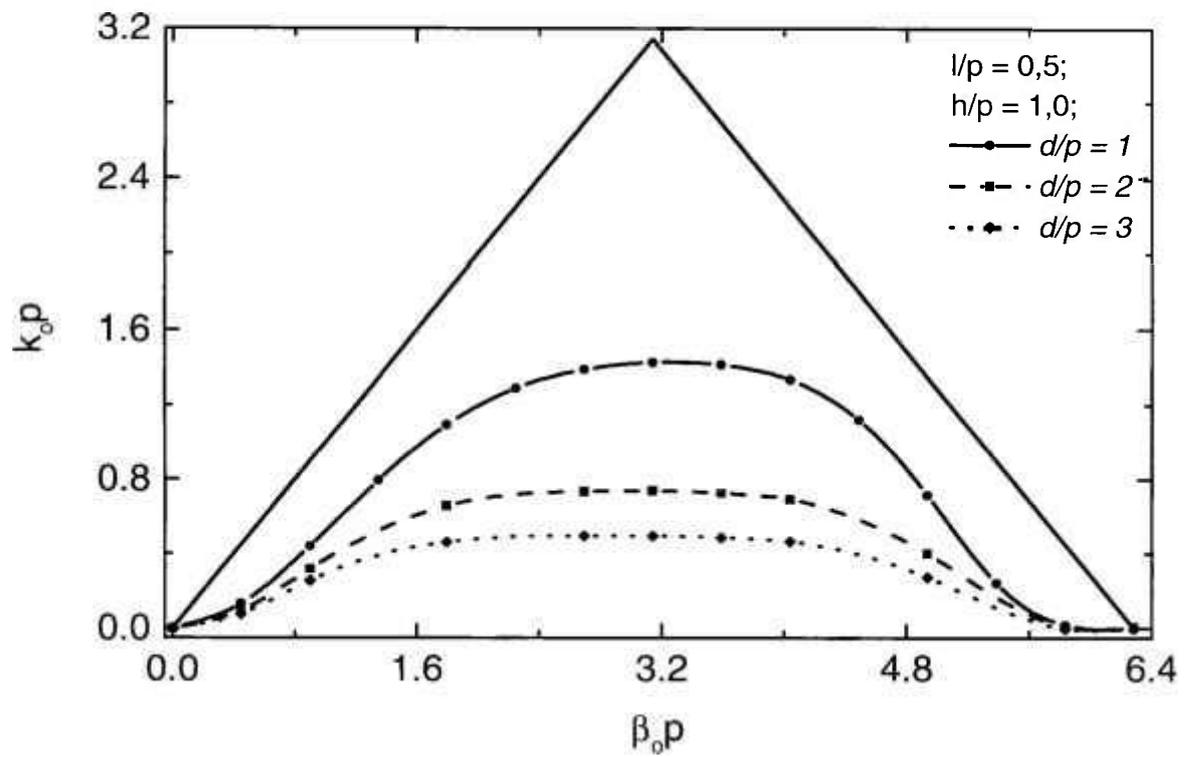


Figura 18 – Relação de dispersão para a estrutura corrugada. Análise 2-D: $p = 1$, $h = 1$, $l = p/2$ e $d = 1, 2$ e 3 .

4.3. Guia de ondas circular

Como primeiro protótipo de estrutura periódica a ser analisado em 3-D escolheu-se a guia de ondas circular homogênea. Uma guia de onda é uma estrutura periódica no seguinte sentido: denotando por λ_g o comprimento de onda guiado, a constante de propagação β se relaciona com λ_g por meio da seguinte expressão:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g}. \quad (4.27)$$

Portanto, se para um dado valor de β como entrada, o comprimento período p for escolhido igual a λ_g , isto é, $p = \lambda_g$, ter-se-á uma estrutura periódica. Para se determinar o número de onda k_0 , deve-se utilizar a Eq. (3.19) que será aqui rescrita

$$\sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega^e} (\vec{\nabla} \times \vec{W}^e) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}^e) d^3\vec{r} = k_0^2 \sum_{e=1}^{N_e} \epsilon_r \int_{\Omega^e} \vec{W}^e \cdot \vec{E}^e d^3\vec{r}. \quad (4.28)$$

Para que esta equação descreva uma onda progressiva é necessário admitir a seguinte dependência funcional dos campos:

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}_p(x, y)e^{-j\beta z}. \quad (4.29)$$

Observe que existe uma diferença fundamental entre a equação acima e a Eq. (4.1), pois toda a dependência com a variável z , está na parcela referente a propagação. Em outras palavras a guia é uniforme e não há descontinuidades ao longo da direção de propagação. Sob a hipótese da Eq. (4.29) se transforma em:

$$\sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega^e} (\vec{\nabla} \times \vec{W}^e) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}^e) d^3\vec{r} + \beta^2 \int_{\Omega^e} \vec{W}^e \cdot \vec{E}^e d^3\vec{r} = k_0^2 \sum_{e=1}^{N_e} \epsilon_r \int_{\Omega^e} \vec{W}^e \cdot \vec{E}^e d^3\vec{r}, \quad (4.30)$$

quando a Eq. (3.20) é substituída nesta equação junto com as funções de base apresentadas no apêndice D, resulta na seguinte matriz rigidez para o elemento:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} [WW]_A^e & [WN]_A^e & [WK]_A^e \\ [NW]_A^e & [NN]_A^e & [NK]_A^e \\ [KW]_A^e & [KN]_A^e & [KK]_A^e \end{bmatrix} + \beta^2 \begin{bmatrix} [WW]_B^e & [WN]_B^e & [WK]_B^e \\ [NW]_B^e & [NN]_B^e & [NK]_B^e \\ [KW]_B^e & [KN]_B^e & [KK]_B^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{E\}_A^e \\ \{E\}_B^e \\ \{E\}_K^e \end{Bmatrix} = \\
 & = k_0^2 \epsilon_r \begin{bmatrix} [WW]_g^e & [WN]_g^e & [WK]_g^e \\ [NW]_g^e & [NN]_g^e & [NK]_g^e \\ [KW]_g^e & [KN]_g^e & [KK]_g^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{E\}_W^e \\ \{E\}_N^e \\ \{E\}_K^e \end{Bmatrix}. \tag{4.31}
 \end{aligned}$$

O processo de montagem da matriz global é similar ao utilizado no capítulo 3, resultando na seguinte matriz rigidez global:

$$\left[[A] + \beta^2 [B] \right] \{E\} = k_0^2 \epsilon_r [B] \{E\}. \tag{4.32}$$

Neste momento as condições de contorno devem ser incorporadas a matriz global. Deve ser observado, tendo em vista de conduzir-se o problema via análise em onda completa, que a solução por ser a mais geral possível incluir os modos TE e TM simultaneamente na solução.

Aplicando-se o teorema de Floquet para $p = \lambda_g$ obtém-se que

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} [A_{11}]_g - [A_{33}]_g & [A_{12}]_g + [A_{32}]_g \cos \beta \lambda_g + j[A_{32}]_g \sin \beta \lambda_g \\ [A_{21}]_g + [A_{23}]_g \cos \beta \lambda_g - j[A_{23}]_g \sin \beta \lambda_g & [A_{22}]_g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{E\}' \\ \{E\}'' \end{Bmatrix} \\
 & = k_0^2 \begin{bmatrix} [B_{11}] + [B_{33}] & [B_{12}] + [B_{32}] \cos \beta \lambda_g + j[B_{32}] \sin \beta \lambda_g \\ [B_{21}] + [B_{23}] \cos \beta \lambda_g - j[B_{23}] \sin \beta \lambda_g & [B_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{E\}' \\ \{E\}'' \end{Bmatrix}. \tag{4.33}
 \end{aligned}$$

onde, neste caso $[A_{ij}]_g = [A_{ij}] + \beta^2 [B_{ij}]$, como no caso da guia corrugada, os índices ij denotam as parcelas da matriz global que descrevem as regiões dos contornos de Floquet. Incidentalmente, na presente análise $\beta \lambda_g = 2\pi$ e portanto as componentes complexas se anulam e a matriz global volta a ser real novamente, resultando em

$$\begin{bmatrix} [A_{11}]_g + [A_{33}]_g & [A_{12}]_g + [A_{32}]_g \\ [A_{21}]_g + [A_{23}]_g & [A_{22}]_g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{E\}' \\ \{E\}'' \end{Bmatrix} = k_0^2 \begin{bmatrix} [B_{11}] + [B_{33}] & [B_{12}] + [B_{32}] \\ [B_{21}] + [B_{23}] & [B_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{E\}' \\ \{E\}'' \end{Bmatrix}. \tag{4.34}$$

A) Análise dos resultados

Como comparação, sabe-se que a relação de dispersão para o problema do guia circular homogêneo de raio $a = 1$, é dada segundo [17],

$$(k_c \tau)^2 = (p_{nm} a)^2 + (\beta_{nm} \tau)^2, \tag{4.35}$$

onde os números de onda de corte são dados na Tab. 4.1.

Tabela 4.1 - Zeros das funções de Bessel – modos TM

n	p_{n1}	p_{n2}	p_{n3}
0	2,405	5,520	8,865
1	3,832	7,016	10,174
2	5,135	8,417	11,620

Na Fig. 19 ilustra-se a curva de dispersão para vários modos de propagação.

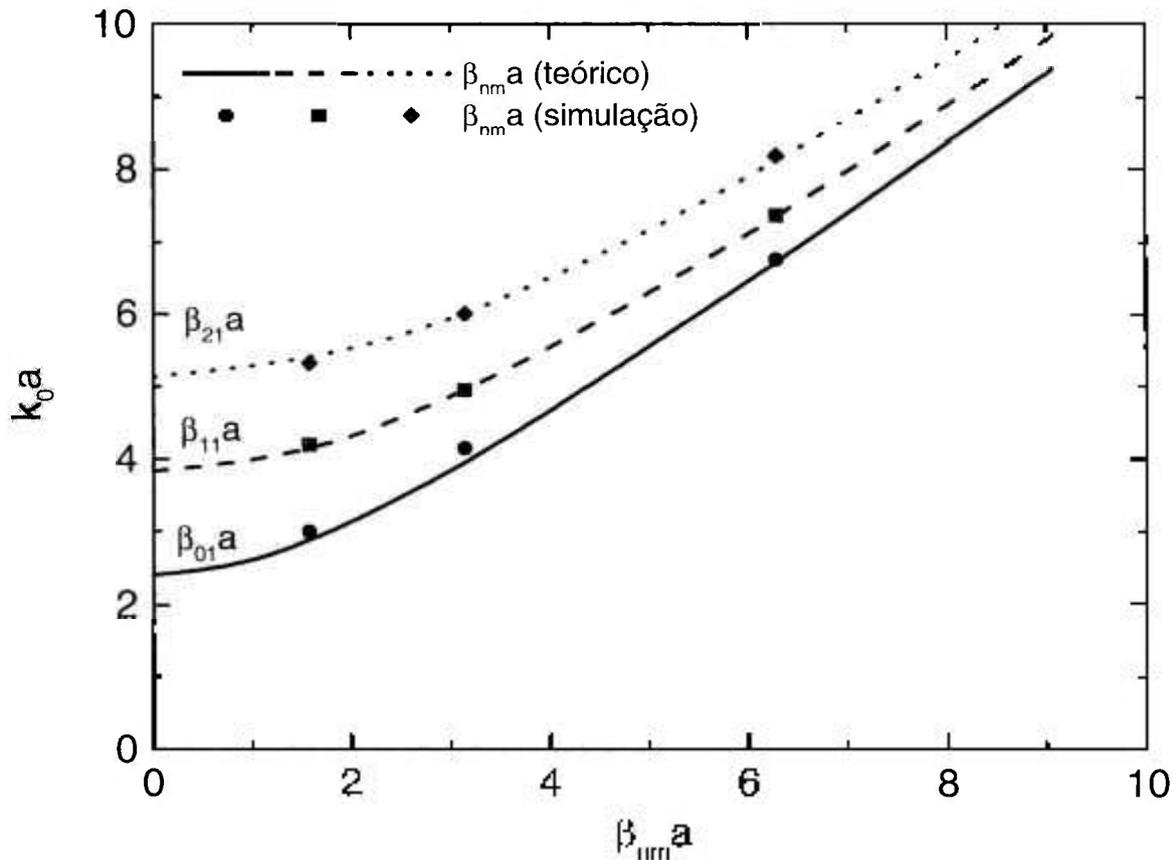


Figura 19 - Relação de dispersão teórica para o guia de ondas circular de raio a .

4.4. Conclusão do capítulo

Neste capítulo incorporou-se ao código desenvolvido e validado no capítulo 2, a condição de contorno de Floquet. Isto permitiu analisar estruturas de guiagem de ondas eletromagnéticas. Verificou-se a validade do código em duas estruturas de guiagem periódicas: o guia corrugado bidimensional utilizando-se análise nodal e a guia circular utilizando-se análise 3-D e elementos de arestas vetoriais. Em ambos os casos a concordância dos valores obtidos pela análise computacional com os resultados teóricos foi muito boa.

CAPÍTULO 5: PROBLEMAS DE PROPAGAÇÃO EM ESTRUTURAS PERIÓDICAS EM 3D

5.1. Introdução

Neste capítulo o código computacional é mais uma vez modificado de maneira que agora passe a descrever as discontinuidades decorrentes do carregamento da estrutura helicoidal no interior da guia de ondas circular. Desta forma construiu-se, finalmente, a estrutura de ondas lentas e procede-se sua análise, objetivo deste trabalho.

A formulação vetorial é estendida de maneira a descrever as discontinuidades no interior da guia de ondas circular decorrentes do carregamento da guia pela hélice. Este desenvolvimento constitui a contribuição original do trabalho. A validade da implementação é verificada por meio dos seguintes casos:

- modelo da falsa hélice de Pierce. Neste caso os resultados obtidos são comparados com aqueles obtidos e apresentados no capítulo 2. Porém não é possível uma análise quantitativa completa, pois não é fácil, senão impossível, a implementação computacional utilizando o método dos elementos finitos para o problema da falsa hélice.
- modelo da hélice de fita. Neste caso a comparação entre os resultados obtidos é mais realista. Porém a comparação se esbarra no requisito de quantidade de memória computacional disponível para descrever um período completo da hélice de fita. Optou-se então pela análise da estrutura de ondas lentas proposta por Birdsall e Everhart. Esta estrutura é na realidade a implantação prática do sistema de hélices duplas proposta com Chodorow e Chu para evitar o problema de excitação de modos superiores quando as estruturas periódicas são utilizadas em regime de alta potência de microondas. Este modelo é, portanto, de considerável importância prática.

Neste capítulo também foi incluído o modelamento dos suportes dielétricos utilizados para apoiar e centrar a hélice. Devido ao aumento do número de elementos de arestas utilizados para obter resultados com boa exatidão, o algoritmo utilizado para a solução do problema do autovalor generalizado foi modificado de maneira a incluir o algoritmo de Lanczos, vide apêndice E. Outra modificação foi a implementação, na etapa do pós-processamento, de uma rotina para a verificação da conservação de potência e o cálculo da impedância de interação.

Este capítulo está organizado na seguinte forma. Na seção 5.2 apresenta-se o desenvolvimento da formulação fraca para a descrição da descontinuidade introduzida pela estrutura de ondas lentas na guia de ondas circular e os elementos da matriz rigidez decorrentes deste fato. A seção 5.3 apresenta a implementação da condição de contorno periódica. Na seção 5.4 tem-se o desenvolvimento da expressão para o cálculo da potência eletromagnética propagada pela estrutura e na seção 5.5 o desenvolvimento da expressão para o cálculo da impedância de interação. A seção 5.6 finaliza o capítulo com a análise da estrutura de ondas lentas proposta por Birdsall e Everhart e a análise qualitativa dos resultados.

5.2. Formulação fraca para estruturas periódicas 3-D com descontinuidades

A análise de estruturas periódicas fechadas que descrever a propagação de ondas eletromagnéticas requer uma formulação 3D, além de utilizar de elementos de aresta vetorial de maneira a evitar o surgimento de modos espúrios (é uma das causas mas não a única). A utilização de elementos de aresta vetoriais garante a continuidade da componente tangencial, mas permite descontinuidade da componente normal ao elemento. Desta forma este tipo de elemento é adequado para o emprego na solução das equações de Maxwell quando elas são utilizadas para problemas de propagação.

A formulação fraca para o problema da propagação do campo eletromagnético em estruturas que apresentam descontinuidades inicia-se pela equação de onda vetorial, de maneira similar ao desenvolvimento apresentado no capítulo 3, Eq. (3.16):

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} = \vec{0}. \quad (5.1)$$

Não havendo descontinuidades tangenciais, a Eq.(5.1) expressa na formulação fraca se torna

$$\sum_{e=1}^{N_r} \int_{\Omega^e} (\vec{\nabla} \times \vec{W}^e) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}^e) d^3\vec{r} = k_0^2 \sum_{e=1}^{N_r} \epsilon_r \int_{\Omega^e} \vec{W}^e \cdot \vec{E}^e d^3\vec{r}. \quad (5.2)$$

O campo elétrico é então decomposto em termos das funções de base

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{W}_i E_{i,p} + \vec{M}_i E_{i,m} + \vec{K}_i E_{i,K} \quad (5.3)$$

Para que se possa descrever uma propagação em uma dada direção, diga-se na direção z , e ainda descrever as descontinuidades ao longo da mesma direção, deve-se admitir que os campos apresentam a seguinte dependência:

$$\vec{E} = \vec{E}_p(x, y, z)e^{-j\beta z}, \quad (5.4)$$

onde $\beta = \beta(\omega)$ é uma função real da frequência. Substituindo esta hipótese na Eq. (5.2), implicará no seguinte desenvolvimento:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times (\vec{E}_p e^{-j\beta z}) = (\vec{\nabla} e^{-j\beta z}) \times \vec{E}_p + e^{-j\beta z} \vec{\nabla} \times \vec{E}_p = e^{-j\beta z} (\vec{\nabla} \times \vec{E}_p - j\beta \hat{a}_z \times \vec{E}_p).$$

Sem perda de generalidade, pode-se admitir também que a função de ponderação possa ser escrita como [32]

$$\vec{W} = \vec{W}_p(x, y, z)e^{j\beta z}, \quad (5.5)$$

o que resulta em, no desenvolvimento

$$\vec{\nabla} \times \vec{W} = e^{j\beta z} (\vec{\nabla} \times \vec{W}_p + j\beta \hat{a}_z \times \vec{W}_p).$$

Portanto, o produto escalar $(\vec{\nabla} \times \vec{W}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E})$ pode ser escrito como:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{W}_p) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}_p) + j\beta \left[(\hat{a}_z \times \vec{W}_p) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}_p) - (\hat{a}_z \times \vec{E}_p) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{W}_p) \right] + \beta^2 (\hat{a}_z \times \vec{E}_p) \cdot (\hat{a}_z \times \vec{W}_p). \quad (5.6)$$

O último termo da expressão Eq. (5.6) pode ser adicionalmente desenvolvido utilizando as seguintes identidades vetoriais:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}),$$

$$(\hat{a}_z \times \vec{E}_p) \cdot (\hat{a}_z \times \vec{W}_p) - \hat{a}_z \cdot [\vec{W}_p \times (\hat{a}_z \times \vec{E}_p)] = \vec{W}_p \cdot [(\hat{a}_z \times \vec{E}_p) \times \hat{a}_z] = -\vec{W}_p \cdot [\hat{a}_z \times (\hat{a}_z \times \vec{E}_p)].$$

Por outro lado, tendo em vista que $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$, o produto vetorial triplo, passa a ser escrito como:

$$\hat{a}_z \times (\hat{a}_z \times \vec{E}_p) = \hat{a}_z(\hat{a}_z \cdot \vec{E}_p) - \vec{E}_p(\hat{a}_z \cdot \hat{a}_z) = \hat{a}_z E_z - \vec{E}_p$$

e, portanto

$$\vec{W}_p \cdot [\hat{a}_z \times (\hat{a}_z \times \vec{E}_p)] - \vec{W}_p \cdot (\vec{E}_p - \hat{a}_z E_z) = \vec{W}_p \cdot \vec{E}_p,$$

pois \vec{W}_p é perpendicular a direção de propagação. Assim, a Eq. (5.6) pode ser escrita como

$$(\vec{\nabla} \times \vec{W}_p) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}_p) + j\beta \left[(\hat{a}_z \times \vec{W}_p) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}_p) - (\hat{a}_z \times \vec{E}_p) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{W}_p) \right] + \beta^2 \vec{W}_p \cdot \vec{E}_p \quad (5.7)$$

e a forma fraca,

$$\int_{\Omega^c} (\vec{\nabla} \times \vec{W}_p) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}_p) d^3 \vec{r} + j\beta \int_{\Omega^c} \left[(\hat{a}_z \times \vec{W}_p) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}_p) - (\hat{a}_z \times \vec{E}_p) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{W}_p) \right] d^3 \vec{r} + \beta^2 \int_{\Omega^c} \vec{W}_p \cdot \vec{E}_p d^3 \vec{r} = k_0^2 \epsilon_r \int_{\Omega^c} \vec{W}_p \cdot \vec{E}_p d^3 \vec{r}. \quad (5.8)$$

Para a função ponderação \vec{M}_p obtém-se expressão similar,

$$\int_{\Omega^c} (\vec{\nabla} \times \vec{M}_p) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}_p) d^3 \vec{r} + j\beta \int_{\Omega^c} \left[(\hat{a}_z \times \vec{M}_p) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}_p) - (\hat{a}_z \times \vec{E}_p) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}_p) \right] d^3 \vec{r} + \beta^2 \int_{\Omega^c} \vec{M}_p \cdot \vec{E}_p d^3 \vec{r} = k_0^2 \epsilon_r \int_{\Omega^c} \vec{M}_p \cdot \vec{E}_p d^3 \vec{r}. \quad (5.9)$$

Para a função ponderação vetorial \vec{K}_p , a expressão resultante é diferente, pois \vec{K}_p é paralela à direção \hat{a}_z , o que resulta em

$$\int_{\Omega^e} (\vec{\nabla} \times \vec{K}_p) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}_p) d^3\vec{r} + j\beta \int_{\Omega^e} [-(\hat{a}_z \times \vec{E}_p) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{K}_p)] d^3\vec{r} + \beta^2 \int_{\Omega^e} \vec{K}_p \cdot \vec{E}_p d^3\vec{r} = k_0^2 \epsilon_r \int_{\Omega^e} \vec{K}_p \cdot \vec{E}_p d^3\vec{r}. \quad (5.10)$$

Agrupando todas estas expressões, obtém-se um sistema de ordem 9×9 para a matriz rigidez do elemento.

$$\begin{bmatrix} [WW]_A^e & [WM]_A^e & [WK]_A^e \\ [MW]_A^e & [MM]_A^e & [MK]_A^e \\ [KW]_A^e & [KM]_A^e & [KK]_A^e \end{bmatrix} + j\beta \begin{bmatrix} [WW]_C^e & [WM]_C^e & [WK]_C^e \\ [MW]_C^e & [MM]_C^e & [MK]_C^e \\ [KW]_C^e & [KM]_C^e & [KK]_C^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{E\}_W^e \\ \{E\}_M^e \\ \{E\}_K^e \end{bmatrix} + \beta^2 \begin{bmatrix} [WW]_B^e & [WM]_B^e & [WK]_B^e \\ [MW]_B^e & [MM]_B^e & [MK]_B^e \\ [KW]_B^e & [KM]_B^e & [KK]_B^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{E\}_W^e \\ \{E\}_M^e \\ \{E\}_K^e \end{bmatrix} = k_0^2 \epsilon_r \begin{bmatrix} [WW]_B^e & [WM]_B^e & [WK]_B^e \\ [MW]_B^e & [MM]_B^e & [MK]_B^e \\ [KW]_B^e & [KM]_B^e & [KK]_B^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{E\}_W^e \\ \{E\}_M^e \\ \{E\}_K^e \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Os elementos das matrizes particionadas são dadas segundo as expressões abaixo e o resultado para cada uma das integrais é apresentado no apêndice D.

$$\begin{aligned} \text{i) } [WW]_A^e, \quad WW_{ij} &= \int_{\Omega^e} (\vec{\nabla} \times \vec{W}_{ip}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{W}_{jp}) d^3\vec{r}; \\ [WW]_C^e, \quad WW_{ij} &= \int_{\Omega^e} [(\hat{a}_z \times \vec{W}_{ip}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{W}_{jp}) - (\hat{a}_z \times \vec{W}_{jp}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{W}_{ip})] d^3\vec{r} \text{ para } i \neq j; \\ [WW]_B^e, \quad WW_{ij} &= \int_{\Omega^e} \vec{W}_{ip} \cdot \vec{W}_{jp} d^3\vec{r}; \\ \text{ii) } [WM]_A^e, \quad WM_{ij} &= \int_{\Omega^e} (\vec{\nabla} \times \vec{W}_{ip}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}_{jp}) d^3\vec{r} \\ [WM]_C^e, \quad WM_{ij} &= \int_{\Omega^e} [(\hat{a}_z \times \vec{W}_{ip}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}_{jp}) - (\hat{a}_z \times \vec{M}_{jp}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{W}_{ip})] d^3\vec{r}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [WM]_E^c, \quad WM_{ij} &= \int_{\Omega^c} \vec{W}_i \cdot \vec{M}_j d^3 \vec{r}; \\
 \text{iii) } [WK]_A^c, \quad WK_{ij} &= \int_{\Omega^c} (\vec{\nabla} \times \vec{W}_i) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{K}_j) d^3 \vec{r} \\
 [WK]_B^c, \quad WK_{ij} &= \int_{\Omega^c} (\hat{a}_z \times \vec{W}_i) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{K}_j) d^3 \vec{r}; \\
 [WK]_C^c, \quad WK_{ij} &= 0; \\
 \text{iv) } [MW]_A^c, \quad MW_{ij} &= \int_{\Omega^c} (\vec{\nabla} \times \vec{M}_i) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{W}_j) d^3 \vec{r} \\
 [MW]_B^c, \quad MW_{ij} &= \int_{\Omega^c} \left[(\hat{a}_z \times \vec{M}_i) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{W}_j) - (\hat{a}_z \times \vec{W}_j) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}_i) \right] d^3 \vec{r} \\
 [MW]_C^c, \quad MW_{ij} &= \int_{\Omega^c} \vec{M}_i \cdot \vec{W}_j d^3 \vec{r} \\
 \text{v) } [MM]_A^c, \quad MM_{ij} &= \int_{\Omega^c} (\vec{\nabla} \times \vec{M}_i) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}_j) d^3 \vec{r} \\
 [MM]_B^c, \quad MM_{ij} &= \int_{\Omega^c} \left[(\hat{a}_z \times \vec{M}_i) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}_j) - (\hat{a}_z \times \vec{M}_j) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}_i) \right] d^3 \vec{r} \\
 [MM]_C^c, \quad MM_{ij} &= \int_{\Omega^c} \vec{M}_i \cdot \vec{M}_j d^3 \vec{r}; \\
 \text{vi) } [MK]_A^c, \quad MK_{ij} &= \int_{\Omega^c} (\vec{\nabla} \times \vec{M}_i) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{K}_j) d^3 \vec{r} \\
 [MK]_B^c, \quad MK_{ij} &= \int_{\Omega^c} (\hat{a}_z \times \vec{M}_i) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{K}_j) d^3 \vec{r}; \\
 [MK]_C^c, \quad MK_{ij} &= 0 \\
 \text{vii) } [KW]_A^c, \quad KW_{ij} &= \int_{\Omega^c} (\vec{\nabla} \times \vec{K}_i) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{W}_j) d^3 \vec{r} \\
 [KW]_B^c, \quad KW_{ij} &= - \int_{\Omega^c} (\hat{a}_z \times \vec{W}_j) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{K}_i) d^3 \vec{r}; \\
 [KW]_C^c, \quad KW_{ij} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{viii) } [KM]_A^c, \quad KM_{ij} &= \int_{\Omega^c} (\vec{\nabla} \times \vec{K}_i) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}_j) d^3 \vec{r} \\
 [KM]_C^c, \quad KM_{ij} &= - \int_{\Omega^c} (\hat{a}_z \times \vec{M}_j) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{K}_i) d^3 \vec{r}; \\
 [KM]_R^c, \quad KM_{ij} &= 0; \\
 \text{ix) } [KK]_A^c, \quad KK_{ij} &= \int_{\Omega^c} (\vec{\nabla} \times \vec{K}_i) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{K}_j) d^3 \vec{r}; \\
 [KK]_C^c, \quad KK_{ij} &= 0; \\
 [KK]_R^c, \quad KK_{ii} &= \int_{\Omega^c} \vec{K}_i \cdot \vec{K}_j d^3 \vec{r}.
 \end{aligned}$$

Pode-se observar que a matriz rigidez é complexa e portanto pode-se escrever a matriz A^c , em partes real e imaginária, isto é,

$$[A(\beta)]^c = [A(\beta)]_{\text{Re}}^c + j\beta[A]_{\text{Im}}^c \quad (5.12)$$

onde

$$[A(\beta)]_{\text{Im}}^c = \begin{bmatrix} [WW(\beta)]_{\text{Re}}^c & [WM(\beta)]_{\text{Re}}^c & [WK(\beta)]_{\text{Re}}^c \\ [MW(\beta)]_{\text{Re}}^c & [MM(\beta)]_{\text{Re}}^c & [MK(\beta)]_{\text{Re}}^c \\ [KW(\beta)]_{\text{Re}}^c & [KM(\beta)]_{\text{Re}}^c & [KK(\beta)]_{\text{Re}}^c \end{bmatrix}$$

e, agora neste caso, os elementos de matriz são definidos segundo:

$$\begin{aligned}
 [WW(\beta)]_{\text{Re}}^c, \quad WW_{ij}(\beta) &= \int_{\Omega^c} (\vec{\nabla} \times \vec{W}_i) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{W}_j) d^3 \vec{r} + \beta^2 \int_{\Omega^c} \vec{W}_i \cdot \vec{W}_j d^3 \vec{r} \\
 [WM(\beta)]_{\text{Re}}^c, \quad WM_{ij}(\beta) &= \int_{\Omega^c} (\vec{\nabla} \times \vec{W}_i) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}_j) d^3 \vec{r} + \beta^2 \int_{\Omega^c} \vec{W}_i \cdot \vec{M}_j d^3 \vec{r}; \\
 [WK(\beta)]_{\text{Re}}^c, \quad WK_{ij}(\beta) &= \int_{\Omega^c} (\vec{\nabla} \times \vec{W}_i) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{K}_j) d^3 \vec{r}; \\
 [MW(\beta)]_{\text{Re}}^c, \quad MW_{ij}(\beta) &= \int_{\Omega^c} (\vec{\nabla} \times \vec{M}_i) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{W}_j) d^3 \vec{r} + \beta^2 \int_{\Omega^c} \vec{M}_i \cdot \vec{W}_j d^3 \vec{r}; \\
 [MM(\beta)]_{\text{Re}}^c, \quad MM_{ij}(\beta) &= \int_{\Omega^c} (\vec{\nabla} \times \vec{M}_i) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}_j) d^3 \vec{r} + \beta^2 \int_{\Omega^c} \vec{M}_i \cdot \vec{M}_j d^3 \vec{r};
 \end{aligned}$$

$$[MK(\beta)]_{\text{Re}}^c, \quad MK_{ij}(\beta) = \int_{\Omega^c} (\vec{\nabla} \times \vec{M}_i) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{K}_j) d^3 \vec{r};$$

$$[KW(\beta)]_{\text{Re}}^c, \quad KW_{ij}(\beta) = \int_{\Omega^c} (\vec{\nabla} \times \vec{K}_i) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{W}_j) d^3 \vec{r};$$

$$[KM(\beta)]_{\text{Re}}^c, \quad KM_{ij}(\beta) = \int_{\Omega^c} (\vec{\nabla} \times \vec{K}_i) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}_j) d^3 \vec{r};$$

$$[KK(\beta)]_{\text{Re}}^c, \quad KK_{ij}(\beta) = \int_{\Omega^c} (\vec{\nabla} \times \vec{K}_i) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{K}_j) d^3 \vec{r}.$$

e a matriz $[A]_{\text{Im}}^c$

$$[A]_{\text{Im}}^c = \begin{bmatrix} [WW]_{\text{Im}}^c & [WN]_{\text{Im}}^c & [WK]_{\text{Im}}^c \\ [NW]_{\text{Im}}^c & [NN]_{\text{Im}}^c & [NK]_{\text{Im}}^c \\ [KW]_{\text{Im}}^c & [KN]_{\text{Im}}^c & [KK]_{\text{Im}}^c \end{bmatrix}.$$

onde, os elementos da matriz $[A]_{\text{Im}}^c$ são também matrizes definidas segundo:

$$[WW]_{\text{Im}}^c, \quad WW_{ij} = \int_{\Omega^c} [(\hat{a}_z \times \vec{W}_{ip}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{W}_{jp}) - (\hat{a}_z \times \vec{W}_{jp}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{W}_{ip})] d^3 \vec{r};$$

$$[WM]_{\text{Im}}^c, \quad WM_{ij} = \int_{\Omega^c} [(\hat{a}_z \times \vec{W}_{ip}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}_{jp}) - (\hat{a}_z \times \vec{M}_{jp}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{W}_{ip})] d^3 \vec{r};$$

$$[WK]_{\text{Im}}^c, \quad WK_{ij} = \int_{\Omega^c} (\hat{a}_z \times \vec{W}_{ip}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{K}_{jp}) d^3 \vec{r};$$

$$[MW]_{\text{Im}}^c, \quad MW_{ij} = \int_{\Omega^c} [(\hat{a}_z \times \vec{M}_i) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{W}_j) - (\hat{a}_z \times \vec{W}_j) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}_i)] d^3 \vec{r};$$

$$[MM]_{\text{Im}}^c, \quad MM_{ij} = \int_{\Omega^c} [(\hat{a}_z \times \vec{M}_i) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}_j) - (\hat{a}_z \times \vec{M}_j) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}_i)] d^3 \vec{r};$$

$$[MK]_{\text{Im}}^c, \quad MK_{ij} = \int_{\Omega^c} (\hat{a}_z \times \vec{M}_i) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{K}_j) d^3 \vec{r};$$

$$[KW]_{\text{Im}}^c, \quad KW_{ij} = - \int_{\Omega^c} (\hat{a}_z \times \vec{W}_j) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{K}_i) d^3 \vec{r};$$

$$\begin{aligned}
 [KM]_{im}^r: \quad KM_{ij} &= - \int_{\mathcal{V}^*} (\hat{a}_z \times \vec{M}_j) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{K}_i) d^3\vec{r}; \\
 [KK]_{im}^r: \quad KK_{ij} &= 0.
 \end{aligned}$$

5.3. Aplicação da condição de contorno periódica

Uma vez que a matriz rigidez esteja construída e a matriz A separada nas partes real e imaginária, procede-se a montagem da matriz global do sistema. A forma geral do sistema pode ser expressa segundo:

$$[A(\beta)]_{Re} + j\beta[A]_{Im} \{E\} = k_0^2 \epsilon_r [B] \{E\}. \quad (5.13)$$

A próxima etapa é a inclusão da condição de contorno de Dirichlet para as superfícies condutoras perfeitas. A estrutura da hélice é construída nesta etapa. A ordem da matriz global será reduzida conforme o número de arestas cujo valor no campo elétrico é nulo e isto é implementado por meio de uma reordenação da matriz global.

Para a implementação da condição de contorno periódica, procede-se de maneira similar ao desenvolvimento realizado no capítulo 4. A matriz rigidez global A pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} ([A_{11}]_{Re} + [A_{33}]_{Re}) & ([A_{12}]_{Re} + [A_{32}]_{Re} \cos \beta p + [A_{32}]_{Im} \sin \beta p) \\ ([A_{21}]_{Re} + [A_{23}]_{Re} \cos \beta p - [A_{23}]_{Im} \sin \beta p) & [A_{22}]_{Re} \end{bmatrix} \\
 & + j \begin{bmatrix} ([A_{11}]_{Im} + [A_{33}]_{Im}) & ([A_{12}]_{Im} + [A_{32}]_{Im} \cos \beta p - [A_{32}]_{Re} \sin \beta p) \\ ([A_{21}]_{Im} + [A_{23}]_{Re} \sin \beta p + [A_{23}]_{Im} \cos \beta p) & [A_{22}]_{Im} \end{bmatrix}, \quad (5.14)
 \end{aligned}$$

e, de maneira similar para a matriz B tem-se

$$[B(\beta)] = [B(\beta)]_{Re} + j[B(\beta)]_{Im}. \quad (5.15)$$

onde

$$[B(\beta)]_{Re} = \begin{bmatrix} ([B_{11}] + [B_{33}]) & ([B_{12}] + [B_{32}] \cos \beta p) \\ ([B_{21}] + [B_{23}] \cos \beta p) & [B_{22}] \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

$$[B(\beta)]_{lm} = \begin{bmatrix} 0 & [B_{32}] \text{sen } \beta p \\ -[B_{23}] \text{sen } \beta p & 0 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Os índices ij representam, de maneira similar ao definido no capítulo 4, as regiões que definem o contorno periódico.

5.4. Desenvolvimento da expressão para o cálculo da potência

Uma vez que o autovetor para um dado autovalor tenha sido determinado e normalizado, o método dos elementos finitos possibilita o cálculo de várias grandezas de interesse. Entre elas, para estruturas de guiagem de ondas, é a potência eletromagnética propagada pela estrutura. Desta forma, apresentar-se-á o desenvolvimento de uma expressão para o cálculo da potência. Segundo o teorema de Poynting complexo a densidade de fluxo de potência é expressa por:

$$\vec{S}(x, y, z) = \frac{1}{2} \text{Re } \vec{E}(x, y, z) \times \vec{H}^*(x, y, z), \quad (5.18)$$

onde o campo elétrico é expresso segundo

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^3 E_{iW} \vec{W}_i + E_{iM} \vec{M}_i + E_{iK} \vec{K}_i \quad (5.19)$$

e os coeficientes E_{iW} , E_{iM} e E_{iK} correspondem as componentes do autovetor. Desenvolvendo a Eq. (5.18) em termos das componentes cartesianas, obtém-se

$$\vec{S} = (E_y H_z^* - E_z H_y^*) \hat{a}_x + (E_z H_x^* - E_x H_z^*) \hat{a}_y + (E_x H_y^* - E_y H_x^*) \hat{a}_z. \quad (5.20)$$

Portanto o fluxo de potência ao longo da direção de propagação é expresso por

$$\vec{S} \cdot \hat{n} = E_x H_y^* - E_y H_x^*. \quad (5.21)$$

Por outro lado, como os autovetores do problema são complexos, pode-se escrevê-los em termos de suas componentes real e imaginária:

$$E_x = E_x^r + jE_x^i, \quad H_x^* = H_x^r - jH_x^i,$$

$$E_y = E_y^r + jE_y^i, \quad H_y^* = H_y^r - jH_y^i,$$

resultando em:

$$E_x H_y^* - E_y H_x^* = (E_x^r H_y^r + E_x^i H_y^i) - (E_y^r H_x^r + E_y^i H_x^i) + j[(E_x^i H_y^r - E_x^r H_y^i) - (E_y^i H_x^r - E_y^r H_x^i)]. \quad (5.22)$$

Tendo em vista que no presente desenvolvimento foi resolvida a equação vetorial de onda para o campo elétrico ao invés do campo magnético, as componentes do campo magnético podem ser obtidas utilizando a lei de Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{H}$$

e portanto

$$\vec{H} = \frac{j}{\omega\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{E}$$

onde as componentes de interesse H_x e H_y são obtidas segundo:

$$H_x = \frac{j}{\omega\mu_0} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right), \quad H_y = \frac{j}{\omega\mu_0} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \quad (5.23)$$

Sob a hipótese $\vec{E} = \vec{E}_p(x, y, z)e^{-j\beta z}$, que descreve a propagação e a descontinuidade ao longo da direção z , as Eqs. (5.23) se transformam

$$H_x = \frac{j}{\omega\mu_0} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + j\beta E_y \right) \quad (5.24)$$

$$H_z = \frac{j}{\omega\mu_0} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - j\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \quad (5.25)$$

Escrevendo em termos das partes real e imaginária $E_z = E_z^r + jE_z^i$,

$$H_y^* = \frac{1}{\omega\mu_0} \left(-\beta E_y^r - \frac{\partial E_y^i}{\partial z} - \frac{\partial E_z^i}{\partial y} \right) - \frac{j}{\omega\mu_0} \left(-\beta E_y^i + \frac{\partial E_z^r}{\partial y} - \frac{\partial E_y^r}{\partial z} \right) \quad (5.26)$$

$$H_x^* = \frac{1}{\omega\mu_0} \left(\beta E_x^r + \frac{\partial E_z^i}{\partial x} - \frac{\partial E_x^i}{\partial z} \right) - \frac{j}{\omega\mu_0} \left(\beta E_x^i + \frac{\partial E_z^r}{\partial x} - \frac{\partial E_x^r}{\partial z} \right) \quad (5.27)$$

Substituindo as expressões para H_x^* e H_y^* na Eq. (5.22) e agrupando os termos segundo as partes real e imaginária, obtém-se:

$$\begin{aligned} E_x H_y^* - E_y H_x^* = & \frac{1}{\omega\mu_0} \left[\beta(E_x^r E_x^r + E_x^i E_x^i) + E_x^r \frac{\partial E_z^i}{\partial x} - E_x^r \frac{\partial E_x^i}{\partial z} + E_x^i \frac{\partial E_x^r}{\partial z} - E_x^i \frac{\partial E_z^r}{\partial x} \right. \\ & \left. + \beta(E_y^r E_y^r + E_y^i E_y^i) - E_y^r \frac{\partial E_y^i}{\partial z} + E_y^r \frac{\partial E_z^i}{\partial y} - E_y^i \frac{\partial E_z^r}{\partial y} + E_y^i \frac{\partial E_y^r}{\partial z} \right] \\ & + j \frac{1}{\omega\mu_0} \left[E_x^i \frac{\partial E_z^i}{\partial x} - E_x^r \frac{\partial E_x^r}{\partial z} + E_x^r \frac{\partial E_z^r}{\partial x} - E_x^i \frac{\partial E_x^i}{\partial z} + E_y^i \frac{\partial E_y^i}{\partial z} - E_y^i \frac{\partial E_z^i}{\partial y} + E_y^r \frac{\partial E_y^r}{\partial z} - E_y^r \frac{\partial E_z^r}{\partial y} \right] \quad (5.28) \end{aligned}$$

Portanto a parte real da Eq. (5.28) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega\mu_0} \left[\beta(E_x^r E_x^r + E_x^i E_x^i) + E_x^r \frac{\partial E_z^i}{\partial x} - E_x^r \frac{\partial E_x^i}{\partial z} + E_x^i \frac{\partial E_x^r}{\partial z} - E_x^i \frac{\partial E_z^r}{\partial x} \right. \\ \left. + \beta(E_y^r E_y^r + E_y^i E_y^i) - E_y^r \frac{\partial E_y^i}{\partial z} + E_y^r \frac{\partial E_z^i}{\partial y} - E_y^i \frac{\partial E_z^r}{\partial y} + E_y^i \frac{\partial E_y^r}{\partial z} \right] \end{aligned}$$

A potência é calculada segundo a expressão acima

$$P = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \frac{1}{\omega \mu_0} \left[\beta (E_x^r E_x^r + E_x^i E_x^i) + \beta (E_y^r E_y^r + E_y^i E_y^i) + E_x^r \frac{\partial E_z^i}{\partial x} - E_x^i \frac{\partial E_z^r}{\partial x} + E_x^r \frac{\partial E_z^r}{\partial z} - E_x^i \frac{\partial E_z^i}{\partial z} - E_y^r \frac{\partial E_z^i}{\partial y} + E_y^i \frac{\partial E_z^r}{\partial y} - E_y^r \frac{\partial E_z^r}{\partial y} + E_y^i \frac{\partial E_z^i}{\partial y} \right] dx dy. \quad (5.29)$$

Para realizar a integração acima é necessário utilizar as expressões desenvolvidas e apresentadas no apêndice D, calculadas para $z = 0$;

$$E_x = (h^e + z_1^e) [(m_{11}^e + m_{12}^e y) E_{1W}^e + (m_{21}^e + m_{22}^e y) E_{2W}^e + (m_{31}^e + m_{32}^e y) E_{3W}^e]$$

$$E_y = (h^e + z_1^e) [(m_{13}^e + m_{14}^e x) E_{1W}^e + (m_{23}^e + m_{24}^e x) E_{2W}^e + (m_{33}^e + m_{34}^e x) E_{3W}^e]$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -[(m_{11}^e + m_{12}^e y) E_{1W}^e + (m_{21}^e + m_{22}^e y) E_{2W}^e + (m_{31}^e + m_{32}^e y) E_{3W}^e]$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = -[(m_{13}^e + m_{14}^e x) E_{1W}^e + (m_{23}^e + m_{24}^e x) E_{2W}^e + (m_{33}^e + m_{34}^e x) E_{3W}^e]$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{b_1}{2\Delta^e} E_{1K}^e + \frac{b_2}{2\Delta^e} E_{2K}^e + \frac{b_3}{2\Delta^e} E_{3K}^e,$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{c_1}{2\Delta^e} E_{1K}^e + \frac{c_2}{2\Delta^e} E_{2K}^e + \frac{c_3}{2\Delta^e} E_{3K}^e.$$

A Eq. (5.29) é então escrita em termos das suas 12 contribuições, isto é:

$$P = \sum_{i=1}^{12} P_i. \quad (5.30)$$

onde as expressões para as potências P_i estão definidas e desenvolvidas a seguir:

$$i) P_1 = \frac{1}{2} \frac{\beta}{\omega \mu_0} \int_{\Omega^e} E_x^r E_x^r dx dy = \frac{1}{2} \frac{\beta}{\omega \mu_0} \int_{\Omega^e} (A_1 + B_1 y + C_1 y^2) dx dy,$$

onde

$$A_1 = (h^e + z_1^e)^2 \left[m_{11}^e E_{1W}^{er} (m_{11}^e E_{1W}^{er} + 2m_{12}^e E_{2W}^{er}) + m_{21}^e E_{2W}^{er} (m_{21}^e E_{2W}^{er} + 2m_{31}^e E_{3W}^{er}) + m_{31}^e E_{3W}^{er} (m_{31}^e E_{3W}^{er} + 2m_{11}^e E_{1W}^{er}) \right],$$

$$B_1 = (h^e + z_1^e)^2 \left[2K_{1W}^{er} [m_{11}^e m_{12}^e E_{1W}^{er} + (m_{12}^e m_{21}^e + m_{11}^e m_{22}^e) E_{2W}^{er}] + 2E_{2W}^{er} [m_{21}^e m_{22}^e E_{2W}^{er} + (m_{22}^e m_{31}^e + m_{21}^e m_{32}^e) E_{3W}^{er}] + 2E_{3W}^{er} [m_{31}^e m_{32}^e E_{3W}^{er} + (m_{12}^e m_{31}^e + m_{11}^e m_{32}^e) E_{1W}^{er}] \right],$$

$$C_1 = (h^e + z_1^e)^2 \left[m_{12}^e E_{1W}^{er} (m_{12}^e E_{1W}^{er} + 2m_{22}^e E_{2W}^{er}) + m_{22}^e E_{2W}^{er} (m_{22}^e E_{2W}^{er} + 2m_{32}^e E_{3W}^{er}) + m_{32}^e E_{3W}^{er} (m_{32}^e E_{3W}^{er} + 2m_{12}^e E_{1W}^{er}) \right],$$

$$\text{ii) } P_2 = \frac{1}{2} \frac{\beta}{\omega \mu_0} \int_{\Omega^e} E_x^i E_x^i dx dy = \frac{1}{2} \frac{\beta}{\omega \mu_0} \int_{\Omega^e} (A_2 + B_2 y + C_2 y^2) dx dy,$$

onde

$$A_2 = (h^e + z_1^e)^2 \left[m_{11}^e E_{1W}^{ei} (m_{11}^e E_{1W}^{ei} + 2m_{12}^e E_{2W}^{ei}) + m_{21}^e E_{2W}^{ei} (m_{21}^e E_{2W}^{ei} + 2m_{31}^e E_{3W}^{ei}) + m_{31}^e E_{3W}^{ei} (m_{31}^e E_{3W}^{ei} + 2m_{11}^e E_{1W}^{ei}) \right],$$

$$B_2 = (h^e + z_1^e)^2 \left[2E_{1W}^{ei} [m_{11}^e m_{12}^e E_{1W}^{ei} + (m_{12}^e m_{21}^e + m_{11}^e m_{22}^e) E_{2W}^{ei}] + 2E_{2W}^{ei} [m_{21}^e m_{22}^e E_{2W}^{ei} + (m_{22}^e m_{31}^e + m_{21}^e m_{32}^e) E_{3W}^{ei}] + 2E_{3W}^{ei} [m_{31}^e m_{32}^e E_{3W}^{ei} + (m_{12}^e m_{31}^e + m_{11}^e m_{32}^e) E_{1W}^{ei}] \right],$$

$$C_2 = (h^e + z_1^e)^2 \left[m_{12}^e E_{1W}^{ei} (m_{12}^e E_{1W}^{ei} + 2m_{22}^e E_{2W}^{ei}) + m_{22}^e E_{2W}^{ei} (m_{22}^e E_{2W}^{ei} + 2m_{32}^e E_{3W}^{ei}) + m_{32}^e E_{3W}^{ei} (m_{32}^e E_{3W}^{ei} + 2m_{12}^e E_{1W}^{ei}) \right],$$

$$\text{iii) } P_3 = \frac{1}{2} \frac{\beta}{\omega \mu_0} \int_{\Omega^e} E_y^r E_y^r dx dy = \frac{1}{2} \frac{\beta}{\omega \mu_0} \int_{\Omega^e} (A_3 + B_3 x + C_3 x^2) dx dy,$$

Análise via simulação computacional de uma estrutura de ondas lentas

onde

$$A_1 = (h^e + z_1^e)^2 \left[m_{13}^e E_{1W}^{er} \left(m_{13}^e E_{1W}^{er} + 2m_{14}^e E_{2W}^{er} \right) + m_{23}^e E_{2W}^{er} \left(m_{23}^e E_{2W}^{er} - 2m_{33}^e E_{3W}^{er} \right) + m_{33}^e E_{3W}^{er} \left(m_{33}^e E_{3W}^{er} + 2m_{13}^e E_{1W}^{er} \right) \right],$$

$$B_3 = (h^e + z_1^e)^2 \left[2E_{1W}^{er} \left[m_{13}^e m_{14}^e E_{1W}^{er} + \left(m_{14}^e m_{23}^e + m_{13}^e m_{24}^e \right) E_{2W}^{er} \right] + 2E_{2W}^{er} \left[m_{23}^e m_{24}^e E_{2W}^{er} + \left(m_{24}^e m_{33}^e + m_{23}^e m_{34}^e \right) E_{3W}^{er} \right] + 2E_{3W}^{er} \left[m_{33}^e m_{34}^e E_{3W}^{er} + \left(m_{14}^e m_{33}^e + m_{13}^e m_{34}^e \right) E_{1W}^{er} \right] \right],$$

$$C_3 = (h^e + z_1^e)^2 \left[m_{14}^e E_{1W}^{er} \left(m_{14}^e E_{1W}^{er} + 2m_{24}^e E_{2W}^{er} \right) + m_{24}^e E_{2W}^{er} \left(m_{24}^e E_{2W}^{er} + 2m_{34}^e E_{3W}^{er} \right) + m_{34}^e E_{3W}^{er} \left(m_{34}^e E_{3W}^{er} + 2m_{14}^e E_{1W}^{er} \right) \right],$$

$$\text{iv) } P_4 = \frac{1}{2} \frac{\beta}{\omega \mu_0} \int_{\Omega^e} E_y^i E_y^i dx dy = \frac{1}{2} \frac{\beta}{\omega \mu_0} \int_{\Omega^e} (A_4 + B_4 x + C_4 x^2) dx dy,$$

onde

$$A_4 = (h^e + z_1^e)^2 \left[m_{13}^e E_{1W}^{ei} \left(m_{13}^e E_{1W}^{ei} + 2m_{14}^e E_{2W}^{ei} \right) + m_{23}^e E_{2W}^{ei} \left(m_{23}^e E_{2W}^{ei} + 2m_{33}^e E_{3W}^{ei} \right) + m_{33}^e E_{3W}^{ei} \left(m_{33}^e E_{3W}^{ei} + 2m_{13}^e E_{1W}^{ei} \right) \right],$$

$$B_4 = (h^e + z_1^e)^2 \left[2E_{1W}^{ei} \left[m_{13}^e m_{14}^e E_{1W}^{ei} + \left(m_{14}^e m_{23}^e + m_{13}^e m_{24}^e \right) E_{2W}^{ei} \right] + 2E_{2W}^{ei} \left[m_{23}^e m_{24}^e E_{2W}^{ei} + \left(m_{24}^e m_{33}^e + m_{23}^e m_{34}^e \right) E_{3W}^{ei} \right] + 2E_{3W}^{ei} \left[m_{33}^e m_{34}^e E_{3W}^{ei} + \left(m_{14}^e m_{33}^e + m_{13}^e m_{34}^e \right) E_{1W}^{ei} \right] \right],$$

$$C_4 = (h^e + z_1^e)^2 \left[m_{14}^e E_{1W}^{ei} \left(m_{14}^e E_{1W}^{ei} + 2m_{24}^e E_{2W}^{ei} \right) + m_{24}^e E_{2W}^{ei} \left(m_{24}^e E_{2W}^{ei} + 2m_{34}^e E_{3W}^{ei} \right) + m_{34}^e E_{3W}^{ei} \left(m_{34}^e E_{3W}^{ei} + 2m_{14}^e E_{1W}^{ei} \right) \right],$$

$$v) P_5 = \frac{1}{2} \frac{1}{\omega \mu_0} \int_{\Omega^e} \mathbf{E}_x^e \frac{\partial E_z^e}{\partial x} dx dy = \frac{1}{2} \frac{\beta}{\omega \mu_0} \int_{\Omega^e} (A_5 + B_5 y) dx dy.$$

onde

$$A_5 = \left(\frac{h^e + z_1^e}{2\Delta^e} \right) \left(b_1^e E_{1K}^{er} + b_2^e E_{2K}^{er} + b_3^e E_{3K}^{er} \right) \left(m_{11}^e E_{1W}^{ei} + m_{21}^e E_{2W}^{ei} + m_{31}^e E_{3W}^{ei} \right),$$

$$B_5 = \left(\frac{h^e + z_1^e}{2\Delta^e} \right) \left(b_1^e E_{1K}^{er} + b_2^e E_{2K}^{er} + b_3^e E_{3K}^{er} \right) \left(m_{12}^e E_{1W}^{ei} + m_{22}^e E_{2W}^{ei} + m_{32}^e E_{3W}^{ei} \right);$$

$$vi) P_6 = \frac{1}{2} \frac{1}{\omega \mu_0} \int_{\Omega^e} \mathbf{E}_x^e \frac{\partial E_z^e}{\partial z} dx dy = \frac{1}{2} \frac{\beta}{\omega \mu_0} \int_{\Omega^e} (A_6 + B_6 y + C_6 y^2) dx dy,$$

onde

$$A_6 = (h^e + z_1^e) \left[m_{11}^e \left(m_{11}^e E_{1W}^{er} E_{1W}^{ei} + m_{21}^e E_{1W}^{er} E_{2W}^{ei} + m_{31}^e E_{2W}^{er} E_{1W}^{ei} \right) + \right. \\ \left. + m_{21}^e \left(m_{21}^e E_{2W}^{er} E_{2W}^{ei} + m_{31}^e E_{2W}^{er} E_{3W}^{ei} + m_{31}^e E_{3W}^{er} E_{2W}^{ei} \right) + m_{31}^e \left(m_{31}^e E_{3W}^{er} E_{3W}^{ei} + m_{11}^e E_{1W}^{er} E_{3W}^{ei} + m_{11}^e E_{3W}^{er} E_{1W}^{ei} \right) \right],$$

$$B_6 = (h^e + z_1^e) \left[2m_{11}^e m_{12}^e E_{1W}^{er} E_{1W}^{ei} - 2m_{12}^e m_{22}^e E_{2W}^{er} E_{2W}^{ei} + 2m_{31}^e m_{12}^e E_{3W}^{er} E_{3W}^{ei} + \right.$$

$$\left. + \left(m_{12}^e m_{21}^e + m_{11}^e m_{22}^e \right) \left(E_{1W}^{er} E_{2W}^{ei} + E_{1W}^{ei} E_{2W}^{er} \right) + \left(m_{12}^e m_{31}^e + m_{11}^e m_{32}^e \right) \left(E_{1W}^{er} E_{3W}^{ei} + E_{1W}^{ei} E_{3W}^{er} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(m_{22}^e m_{12}^e - m_{12}^e m_{32}^e \right) \left(E_{2W}^{er} E_{3W}^{ei} + E_{2W}^{ei} E_{3W}^{er} \right) \right],$$

$$C_6 = (h^e + z_1^e) \left[m_{12}^e \left(m_{12}^e E_{1W}^{er} E_{1W}^{ei} + m_{22}^e \left(E_{1W}^{er} E_{2W}^{ei} + E_{1W}^{ei} E_{2W}^{er} \right) \right) + \right.$$

$$\left. m_{22}^e \left(m_{22}^e E_{2W}^{er} E_{2W}^{ei} + m_{32}^e \left(E_{2W}^{er} E_{3W}^{ei} + E_{2W}^{ei} E_{3W}^{er} \right) \right) + m_{32}^e \left(m_{32}^e E_{3W}^{er} E_{3W}^{ei} + m_{12}^e \left(E_{1W}^{er} E_{3W}^{ei} + E_{1W}^{ei} E_{3W}^{er} \right) \right) \right];$$

$$viii) P_7 = \frac{1}{2} \frac{1}{\omega \mu_0} \int_{\Omega^e} \mathbf{E}_x^e \frac{\partial E_x^e}{\partial z} dx dy = \frac{1}{2} \frac{\beta}{\omega \mu_0} \int_{\Omega^e} (A_7 + B_7 y + C_7 y^2) dx dy,$$

onde

Análise via simulação computacional de uma estrutura de ondas lentas

$$\begin{aligned}
 A_7 &= (h^e + z_1^e) \left[m_{11}^e \left(m_{11}^e E_{1W}^{er} E_{1W}^{ei} + m_{21}^e E_{1W}^{er} E_{2W}^{ei} + m_{31}^e E_{1W}^{er} E_{3W}^{ei} \right) + \right. \\
 &+ m_{21}^e \left(m_{21}^e E_{2W}^{er} E_{2W}^{ei} + m_{31}^e E_{2W}^{er} E_{3W}^{ei} + m_{31}^e E_{3W}^{er} E_{2W}^{ei} \right) + m_{31}^e \left(m_{31}^e E_{3W}^{er} E_{3W}^{ei} + m_{11}^e E_{1W}^{er} E_{3W}^{ei} + m_{11}^e E_{3W}^{er} E_{1W}^{ei} \right) \Big] + \\
 B_7 &= (h^e + z_1^e) \left[2m_{11}^e m_{12}^e E_{1W}^{er} E_{1W}^{ei} + 2m_{21}^e m_{22}^e E_{2W}^{er} E_{2W}^{ei} + 2m_{31}^e m_{32}^e E_{3W}^{er} E_{3W}^{ei} + \right. \\
 &+ \left(m_{11}^e m_{21}^e + m_{11}^e m_{22}^e \right) \left(E_{1W}^{er} E_{2W}^{ei} + E_{1W}^{ei} E_{2W}^{er} \right) + \left(m_{12}^e m_{31}^e + m_{11}^e m_{32}^e \right) \left(E_{1W}^{er} E_{3W}^{ei} + E_{1W}^{ei} E_{3W}^{er} \right) + \\
 &+ \left. \left(m_{22}^e m_{31}^e + m_{21}^e m_{32}^e \right) \left(E_{2W}^{er} E_{3W}^{ei} + E_{2W}^{ei} E_{3W}^{er} \right) \right], \\
 C_7 &= (h^e + z_1^e) \left\{ m_{12}^e \left[m_{12}^e E_{1W}^{er} E_{1W}^{ei} + m_{22}^e \left(E_{1W}^{er} E_{2W}^{ei} + E_{1W}^{ei} E_{2W}^{er} \right) \right] + \right. \\
 &+ m_{22}^e \left[m_{22}^e E_{2W}^{er} E_{2W}^{ei} + m_{32}^e \left(E_{2W}^{er} E_{3W}^{ei} + E_{2W}^{ei} E_{3W}^{er} \right) \right] + m_{32}^e \left[m_{32}^e E_{3W}^{er} E_{3W}^{ei} + m_{12}^e \left(E_{1W}^{er} E_{3W}^{ei} + E_{1W}^{ei} E_{3W}^{er} \right) \right] \Big\}.
 \end{aligned}$$

$$\text{viii) } P_8 = \frac{1}{2} \frac{1}{\omega \mu_0} \int_{\Omega^r} \mathbf{E}_x^i \frac{\partial E_z^r}{\partial x} dx dy = \frac{1}{2} \frac{\beta}{\omega \mu_0} \int_{\Omega^r} (A_8 + B_8 y) dx dy.$$

onde

$$A_8 = \left(\frac{h^e + z_1^e}{2\Delta^e} \right) \left(b_1^e E_{1K}^{er} + b_2^e E_{2K}^{er} + b_3^e E_{3K}^{er} \right) \left(m_{11}^e E_{1W}^{ei} + m_{21}^e E_{2W}^{ei} + m_{31}^e E_{3W}^{ei} \right),$$

$$B_8 = \left(\frac{h^e + z_1^e}{2\Delta^e} \right) \left(b_1^e E_{1K}^{er} + b_2^e E_{2K}^{er} + b_3^e E_{3K}^{er} \right) \left(m_{12}^e E_{1W}^{ei} + m_{22}^e E_{2W}^{ei} + m_{32}^e E_{3W}^{ei} \right);$$

$$\text{ix) } P_9 = \frac{1}{2} \frac{1}{\omega \mu_0} \int_{\Omega^r} \mathbf{E}_y^r \frac{\partial E_z^i}{\partial z} dx dy = \frac{1}{2} \frac{\beta}{\omega \mu_0} \int_{\Omega^r} (A_9 + B_9 x + C_9 x^2) dx dy.$$

onde

$$A_9 = (h^e + z_1^e) \left[m_{13}^e \left(m_{13}^e E_{1W}^{er} E_{1W}^{ei} + m_{23}^e E_{1W}^{er} E_{2W}^{ei} + m_{23}^e E_{2W}^{er} E_{1W}^{ei} \right) + \right.$$

$$+ m_{23}^e \left(m_{23}^e E_{2W}^{er} E_{2W}^{ei} + m_{33}^e E_{2W}^{er} E_{3W}^{ei} + m_{33}^e E_{3W}^{er} E_{2W}^{ei} \right) + m_{33}^e \left(m_{33}^e E_{3W}^{er} E_{3W}^{ei} + m_{13}^e E_{1W}^{er} E_{3W}^{ei} + m_{13}^e E_{3W}^{er} E_{1W}^{ei} \right).$$

$$B_9 = (h^e + z_1^e) \left[2m_{13}^e m_{14}^e E_{1W}^{er} E_{1W}^{ei} + 2m_{23}^e m_{24}^e E_{2W}^{er} E_{2W}^{ei} + 2m_{33}^e m_{34}^e E_{3W}^{er} E_{3W}^{ei} + \right. \\ \left. + (m_{14}^e m_{24}^e - m_{13}^e m_{23}^e) (E_{1W}^{er} E_{2W}^{ei} + E_{1W}^{ei} E_{2W}^{er}) + (m_{14}^e m_{34}^e + m_{13}^e m_{24}^e) (E_{1W}^{er} E_{3W}^{ei} + E_{1W}^{ei} E_{3W}^{er}) + \right. \\ \left. + (m_{24}^e m_{33}^e + m_{23}^e m_{34}^e) (E_{2W}^{er} E_{3W}^{ei} + E_{2W}^{ei} E_{3W}^{er}) \right].$$

$$C_9 = (h^e + z_1^e) \left[m_{14}^e \left[m_{14}^e E_{1W}^{er} E_{1W}^{ei} + m_{24}^e (E_{1W}^{er} E_{2W}^{ei} + E_{1W}^{ei} E_{2W}^{er}) \right] + \right. \\ \left. m_{24}^e \left[m_{24}^e E_{2W}^{er} E_{2W}^{ei} + m_{34}^e (E_{2W}^{er} E_{3W}^{ei} + E_{2W}^{ei} E_{3W}^{er}) \right] + m_{34}^e \left[m_{34}^e E_{3W}^{er} E_{3W}^{ei} + m_{14}^e (E_{1W}^{er} E_{3W}^{ei} + E_{1W}^{ei} E_{3W}^{er}) \right] \right].$$

$$x) P_{10} = \frac{1}{2} \frac{1}{\omega \mu_0} \int_{\Omega^e} E_y^e \frac{\partial E_z^e}{\partial y} dx dy = \frac{1}{2} \frac{\beta}{\omega \mu_0} \int_{\Omega^e} (A_{10} + B_{10} x) dx dy,$$

onde

$$A_{10} = \left(\frac{h^e + z_1^e}{2\Delta^e} \right) \left(c_1^e E_{1K}^{ei} + c_2^e E_{2K}^{ei} + c_3^e E_{3K}^{ei} \right) \left(m_{13}^e E_{1W}^{er} + m_{23}^e E_{2W}^{er} + m_{33}^e E_{3W}^{er} \right).$$

$$B_{10} = \left(\frac{h^e + z_1^e}{2\Delta^e} \right) \left(c_1^e E_{1K}^{ei} + c_2^e E_{2K}^{ei} + c_3^e E_{3K}^{ei} \right) \left(m_{14}^e E_{1W}^{er} + m_{24}^e E_{2W}^{er} + m_{34}^e E_{3W}^{er} \right);$$

$$xi) P_{11} = \frac{1}{2} \frac{1}{\omega \mu_0} \int_{\Omega^e} E_z^e \frac{\partial E_x^e}{\partial y} dx dy = \frac{1}{2} \frac{\beta}{\omega \mu_0} \int_{\Omega^e} (A_{11} + B_{11} x) dx dy$$

onde

$$A_{11} = \left(\frac{h^e + z_1^e}{2\Delta^e} \right) \left(c_1^e E_{1K}^{er} + c_2^e E_{2K}^{er} + c_3^e E_{3K}^{er} \right) \left(m_{13}^e E_{1W}^{ei} + m_{23}^e E_{2W}^{ei} + m_{33}^e E_{3W}^{ei} \right),$$

$$B_{11} = \left(\frac{h^e + z_1^e}{2\Delta^e} \right) \left(c_1^e E_{1K}^{er} + c_2^e E_{2K}^{er} + c_3^e E_{3K}^{er} \right) \left(m_{14}^e E_{1W}^{ei} + m_{24}^e E_{2W}^{ei} + m_{34}^e E_{3W}^{ei} \right);$$

Análise via simulação computacional de uma estrutura de ondas lentas

$$\text{xii) } P_{12} = \frac{1}{2} \frac{1}{\omega \mu_0} \int_{\Omega^e} E_y^i \frac{\partial E_y^r}{\partial z} dx dy = \frac{1}{2} \frac{\beta}{\omega \mu_0} \int_{\Omega^e} (A_{12} + B_{12}x + C_{12}x^2) dx dy$$

onde

$$\begin{aligned} A_{12} = & (h^e + z_1^e) \left\{ m_{13}^e \left[m_{13}^e E_{1W}^{er} E_{1W}^{ei} + m_{13}^e E_{1W}^{er} E_{2W}^{ei} + m_{13}^e E_{2W}^{er} E_{1W}^{ei} \right] + \right. \\ & + m_{23}^e \left(m_{23}^e E_{2W}^{er} E_{2W}^{ei} + m_{23}^e E_{2W}^{er} E_{3W}^{ei} + m_{23}^e E_{3W}^{er} E_{2W}^{ei} \right) + m_{33}^e \left(m_{33}^e E_{3W}^{er} E_{3W}^{ei} + m_{13}^e E_{1W}^{er} E_{3W}^{ei} + m_{13}^e E_{3W}^{er} E_{1W}^{ei} \right) \left. \right\}, \\ B_{12} = & (h^e + z_1^e) \left[2m_{13}^e m_{14}^e E_{1W}^{er} E_{1W}^{ei} + 2m_{23}^e m_{24}^e E_{2W}^{er} E_{2W}^{ei} + 2m_{33}^e m_{34}^e E_{3W}^{er} E_{3W}^{ei} + \right. \\ & + \left(m_{14}^e m_{23}^e + m_{13}^e m_{24}^e \right) \left(E_{1W}^{er} E_{2W}^{ei} + E_{1W}^{ei} E_{2W}^{er} \right) + \left(m_{14}^e m_{33}^e + m_{13}^e m_{34}^e \right) \left(E_{1W}^{er} E_{3W}^{ei} + E_{1W}^{ei} E_{3W}^{er} \right) + \\ & + \left. \left(m_{24}^e m_{33}^e + m_{23}^e m_{34}^e \right) \left(E_{2W}^{er} E_{3W}^{ei} + E_{2W}^{ei} E_{3W}^{er} \right) \right], \\ C_{12} = & (h^e + z_1^e) \left\{ m_{14}^e \left[m_{14}^e E_{1W}^{er} E_{1W}^{ei} + m_{24}^e \left(E_{1W}^{er} E_{2W}^{ei} + E_{1W}^{ei} E_{2W}^{er} \right) \right] + \right. \\ & \left. m_{24}^e \left[m_{24}^e E_{2W}^{er} E_{2W}^{ei} + m_{34}^e \left(E_{2W}^{er} E_{3W}^{ei} + E_{2W}^{ei} E_{3W}^{er} \right) \right] + m_{34}^e \left[m_{34}^e E_{3W}^{er} E_{3W}^{ei} + m_{14}^e \left(E_{1W}^{er} E_{3W}^{ei} + E_{1W}^{ei} E_{3W}^{er} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

5.5. Desenvolvimento da expressão para o cálculo da impedância de interação

Conforme discutiu-se no capítulo 2, a impedância de interação é um parâmetro de considerável importância prática, pois permite calcular o nível de casamento de impedância entre a estrutura de onda lentas e os sistemas de acoplamento de entrada e saída de microondas. A impedância de interação pode ser escrita como

$$K = \frac{|E_z(r=0)|^2}{2\beta^2 P} \tag{5.31}$$

onde a potência P é obtida segundo a Eq. (5.30) e $|E_z(r=0)|$ é amplitude do campo elétrico normalizado para $r = 0$.

5.6. Análise da estrutura de ondas lentas proposta por Birdsall e Everhart

Na Fig. 20 ilustra-se a estrutura de ondas lentas proposta por Birdsall e Everhart. A análise foi conduzida de maneira a se investigar os seguintes efeitos: relação de dispersão em função de:

- razão entre diâmetro da guia pelo diâmetro da hélice (b/a);
- razão entre largura da fita d_1 e o comprimento periódico p ;
- permissividade elétrica dos suportes dielétricos ϵ_r ; e
- espessura da fita.

Também foram investigados os efeitos da variação destes parâmetros na potência transmitida pela estrutura e na impedância de interação.

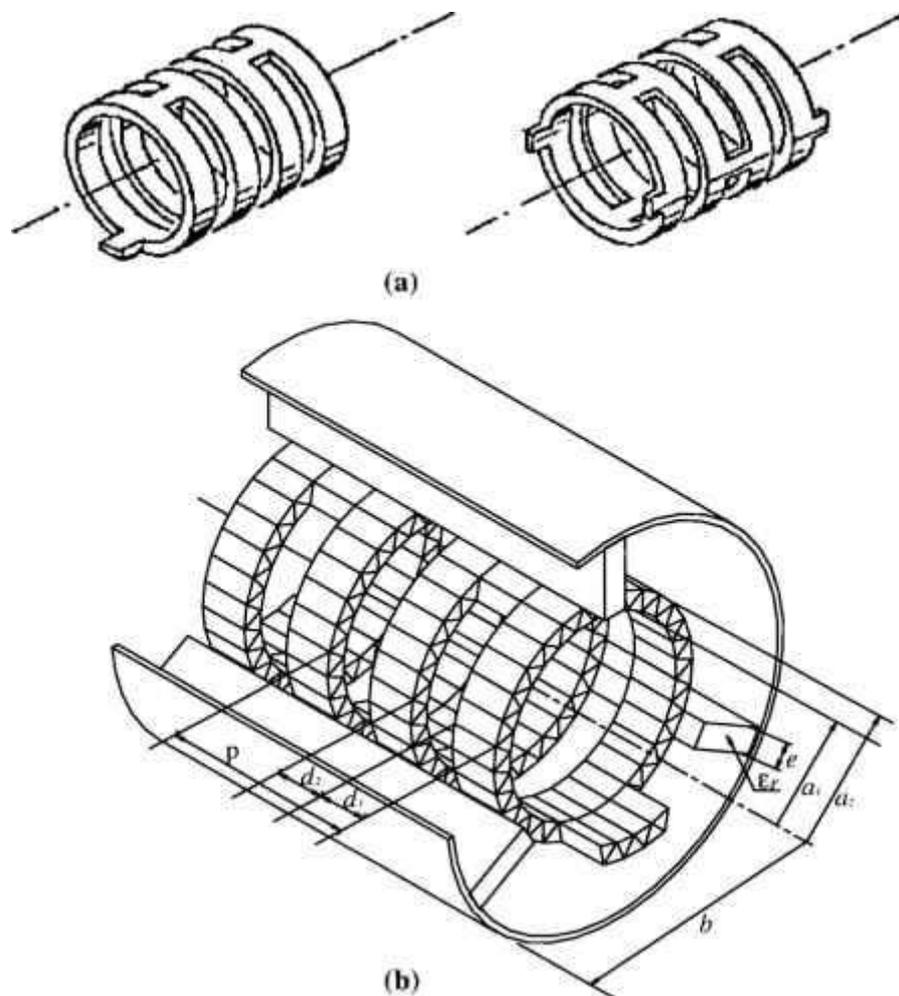


Figura 20 – a) Hélices propostas por Birdsall e Everhart; e b) Guia circular carregada com uma das hélices e os suportes dielétricos: discretização com elementos tipo prisma reto de base triangular.

Nas Figs. 21, 22, 23 e 24 mostra-se a conservação da potência e as relações de dispersão obtidas através de simulações para a estrutura da Fig. 20.

A Fig. 21 mostra um gráfico que ilustra a conservação do fluxo de potência ao longo da direção de propagação da estrutura periódica. A curva foi construída utilizando-se a Eq. (5.30) para 6 posições axiais ($z = 0,0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8$ e $1,0$). Os valores obtidos foram então normalizados em relação a potência P_e , obtida para $z = 0,0$. Pode-se observar que, dentro da precisão finita dos cálculos, a potência foi conservada pelo menos para um intervalo de 98%. Este resultado é um indicador da validade do código desenvolvido.

Na Fig. 22 mostra-se a relação de dispersão para o modelo da Birdsall e Everhart e o resultado obtido é comparado com a relação de dispersão do modelo de Sensiper. Como parâmetro de comparação utiliza-se a relação

$$\frac{d_1}{a_1} = \frac{d_1}{p} \frac{2\pi}{\cot \Psi},$$

onde d_1 , a_1 e p estão definidos na Fig. 20 e Ψ é o passo da hélice de fita de Sensiper. Pode-se observar que os resultados da simulação indicam que tal estrutura é uma estrutura de ondas lentas. Esta estrutura apresenta um comportamento geral semelhante ao modelo de Sensiper.

Pode-se também inferir, segundo os resultados ilustrados pela Fig. 23, que apesar do comportamento similar segundo a dependência funcional, isto é, para ambos os modelos a velocidade de fase é função decrescente com o aumento da frequência, o modelo de Birdsall e Everhart é mais dispersivo e portanto menos banda larga.

De acordo com a Fig. 24 pode-se observar que a impedância de interação do modelo de Birdsall e Everhart apresenta uma dependência funcional similar ao modelo da falsa hélice de Pierce. Por outro lado, apresentou uma impedância de interação menor para os pontos calculados.

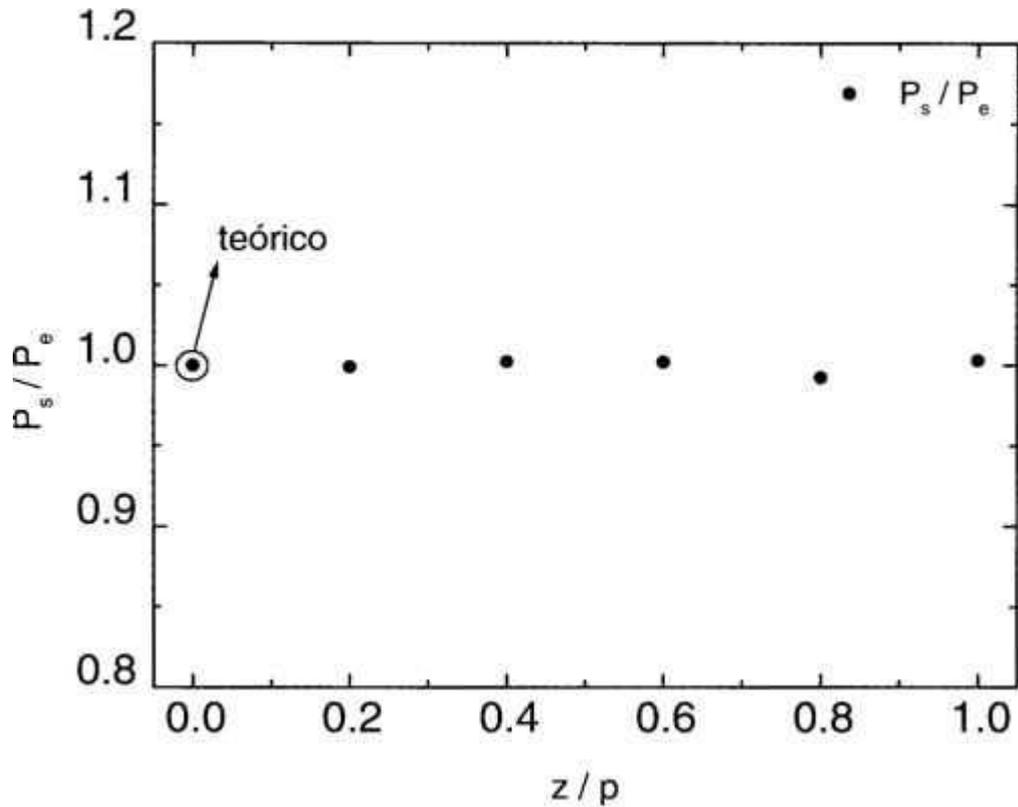


Figura 21 - Conservação da potência: potência de saída normalizada pela potência de entrada versus distância axial normalizada pelo comprimento periódico p .

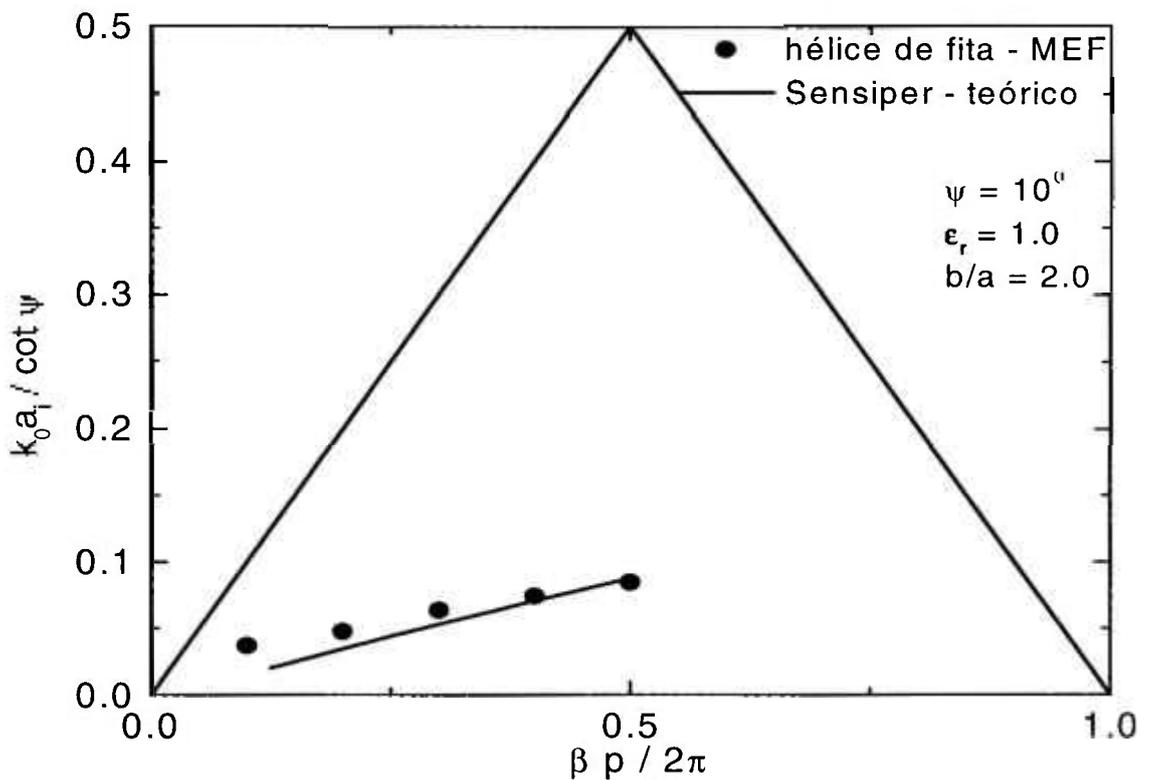


Figura 22 - Relação de dispersão: razão entre diâmetro da guia pelo diâmetro da hélice ($b/a = 2$).

Análise via simulação computacional de uma estrutura de ondas lentas

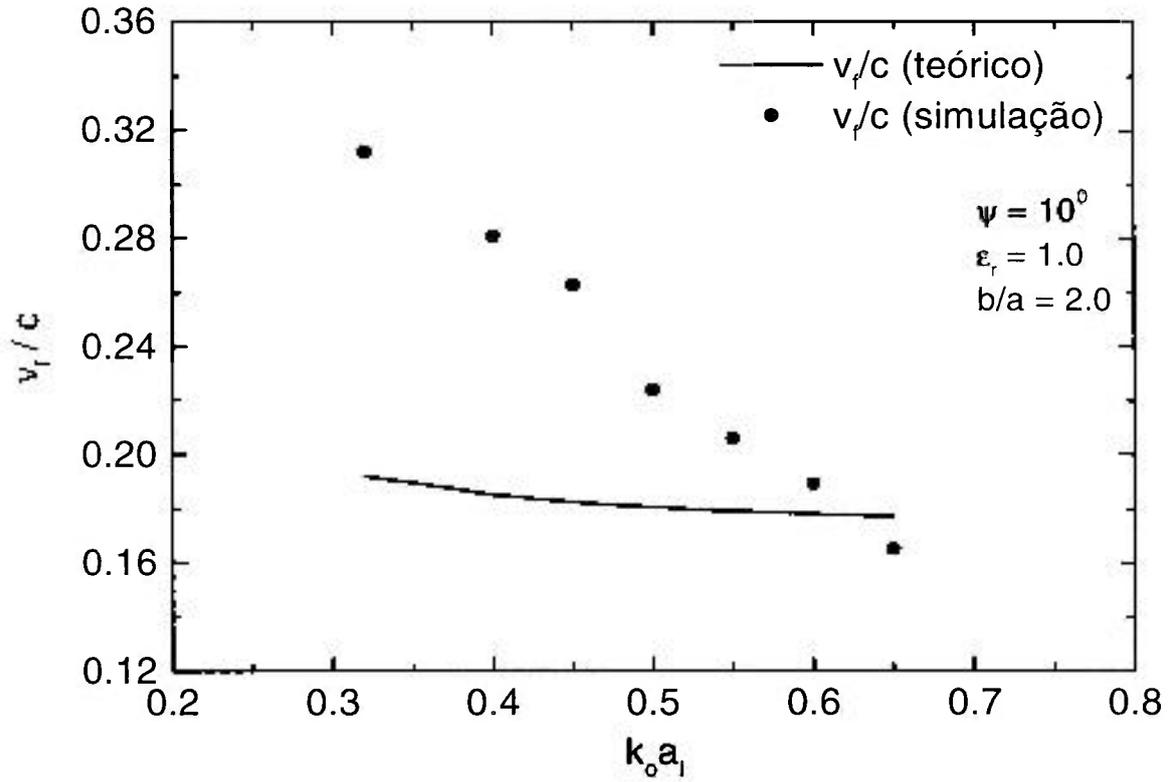


Figura 23 - Relação de dispersão: velocidade de fase versus frequência ($k_0 a_1$).

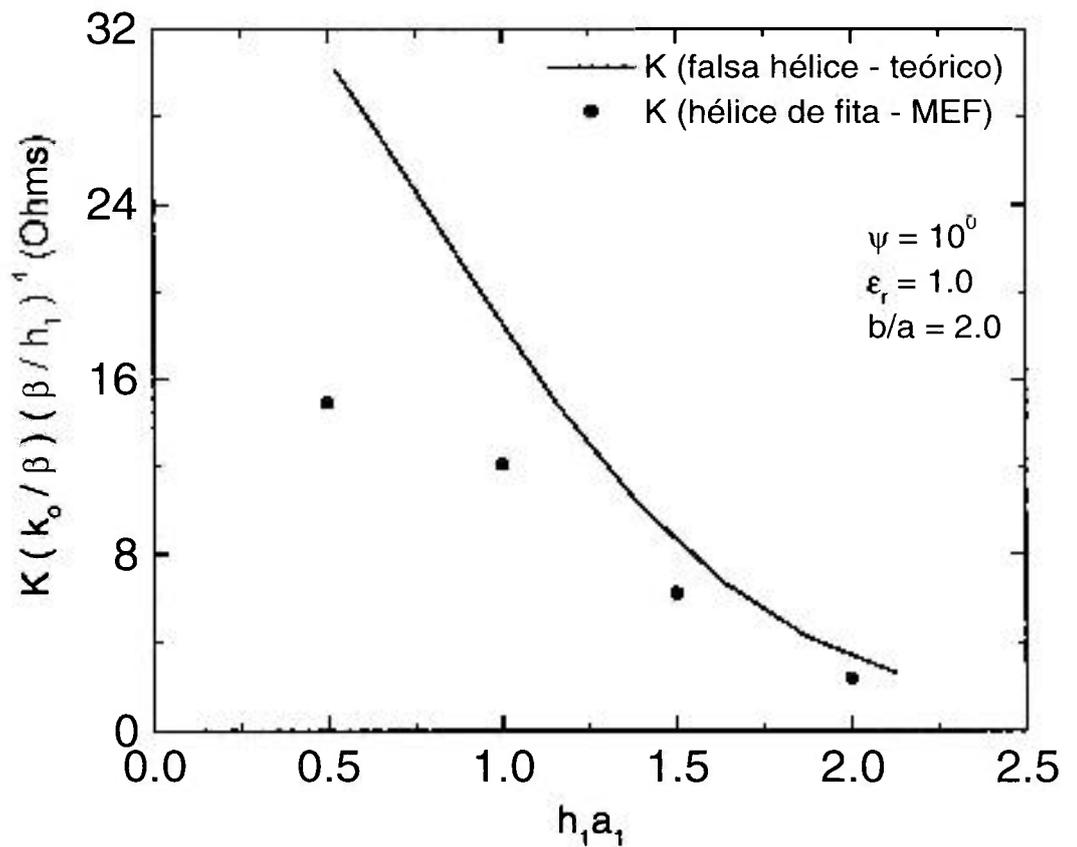


Figura 24 - Impedância de Interação para a estrutura ($b/a = 2$).

Análise via simulação computacional de uma estrutura de ondas lentas

5.7. Conclusão do capítulo

Neste capítulo estendeu-se o código computacional em desenvolvimento de maneira que este possa descrever o carregamento da guia de ondas circular devido a estrutura periódica helicoidal. O código teve sua validação verificada por meio da comparação entre os resultados das simulações com os resultados experimentais disponíveis na literatura. Para a solução do problema de autovalor generalizado para matrizes esparsas e de ordem elevada foi necessário implementar-se mais um código, baseado no algoritmo de Lanczos, de maneira tal que o problema pudesse ser computacionalmente resolvido, em função da capacidade de memória computacional disponível. Também se implementou, na etapa do pós-processamento, uma rotina para verificação do teorema da conservação da potência.

Uma análise qualitativa dos resultados mostrou que a impedância de interação simulada difere de um fator 2 do resultado analítico calculado para o modelo da falsa hélice (Pierce), como foi apresentado no capítulo 2, e portanto:

- a estrutura de Birdsall e Everhart é mais dispersiva; e
- os comportamentos gerais são similares.

CAPÍTULO 6: CONCLUSÃO DO TRABALHO

Neste trabalho desenvolveu-se uma plataforma computacional com o objetivo de analisar o comportamento de estruturas helicoidais de ondas lentas. A construção da plataforma foi baseada no método dos elementos finitos utilizando elementos de aresta vetoriais tridimensionais, isto é, uma análise em onda completa, de maneira que as três componentes do campo elétrico são obtidas diretamente. Os resultados obtidos foram validados por meio da comparação com vários casos teóricos e experimentais. Investigou-se as seguintes estruturas eletromagnéticas para utilização em microondas:

- ressonadores eletromagnéticos com geometrias retangular e circular;
- guias de onda corrugadas bidimensionais;
- guia de onda circular; e
- guia de onda circular carregada com variantes da estrutura helicoidal de ondas lentas.

A análise foi conduzida de maneira a obterem-se as curvas de dispersão das estruturas e as alterações nestas curvas de dispersão decorrentes da utilização de suportes dielétricos. Além disso, implementou-se na etapa de pós-processamento uma rotina para a verificação da conservação da potência pela estrutura. Como consequência, pode-se calcular também a impedância de interação da estrutura helicoidal. Como comportamento geral das estruturas observou que a velocidade de fase é função decrescente com o número de onda do espaço livre. O decréscimo é mais acentuado para números de onda pequenos e menor para números de onda moderados. Um comportamento similar se verifica para a impedância de interação. Outras estruturas eletromagnéticas periódicas poderão ser analisadas pela plataforma como, por exemplo, a estrutura de cavidades utilizadas em aceleradores.

Perspectivas futuras

Como sugestões para trabalhos futuros pode-se citar:

- Utilização de polinômios interpoladores de ordem superior. Esta modificação no código deverá melhorar a exatidão dos resultados para um mesmo número de elementos. Por outro lado, como o número de arestas é no mínimo o dobro do número de nós, tal implementação se dará somente com uma alocação de memória computacional adicional. A ordem da matriz rigidez global não será alterada por esta modificação;
- Aumentar a capacidade de memória instalada de maneira a ser possível resolver uma estrutura de comprimento finito;
- Uma vez implementada a sugestão anterior, será possível descrever o acoplamento da estrutura com as guias de onda retangular de entrada e saída; e, finalmente,
- Implementar uma rotina para a determinação dos elementos da matriz de espalhamento da estrutura. Esta elaboração no modelo permitirá a comparação com resultados experimentais obtidos no laboratório.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Pierce J. R. Field L. M. Traveling-wave tubes. *Proc. I.R.E.*, p. 108-111, Feb. 1947;
- [2] Pierce, J. R. *Traveling-wave tube*, New York, N.Y.: Van Nostrand, 1950;
- [3] Kory, C. L. The inhomogeneous dielectric loading effects of practical helix supports on the interaction impedance of the slow-wave structure of a TWT. *IEEE Transactions on Electron Devices*, vol. 39, p 727-733, Mar. 1992;
- [4] Kory, C. L. Novel high-gain, improved bandwidth, finned-ladder V-band traveling-wave tube slow-wave circuit design. *IEEE Transactions on Electron Devices*, vol. 42, No. 9, p 1686-1692, Sep. 1995;
- [5] Kory, C. L. Three-dimensional simulation of helix traveling-wave tube cold test characteristics using MAFIA. *IEEE Transactions on Electron Devices*, vol. 43, No. 8, p 1317-1319, Aug. 1996;
- [6] Kory, C. L. *Three-dimensional simulations of PPM focused helical traveling-wave tubes*. 2000. Tese (Doutorado) - Cleveland State University, Cleveland;
- [7] Freund, H. P; Kodis, M. A; Vanderplaats, N. R. Self-consistent field theory of a helix traveling wave tube amplifier. *IEEE Transactions on Plasma Science*, vol. 20, No. 5, p. 543-553, Oct., 1992;
- [8] Freund, H. P. A re-examination of the traveling wave interaction. *IEEE Transactions on Plasma Science*, vol. 22, No. 5, p. 511-517, Oct., 1994;
- [9] Freund, H. P. A re-examination of the traveling wave interaction. *IEEE Transactions on Plasma Science*, vol. 22, No. 5, p. 499-503, Oct., 1994;
- [10] Birdsall, C. K.; Langdom, A. B. *Plasma physics via computer simulation*, New York, N.Y.: Adam Hilger, 1991;
- [11] Weiland, T. On the unique numerical solution of Maxwellian eigenvalue problems in the three dimensions, *Particles Accelerators*, vol. 17, p 227-244, 1984;
- [12] Motta, C. C. Construção do conjunto catodo-grade da TWT VX-1086, *Relatório Técnico Nº ZZ020001EN02-01-00*, Centro Tecnológico da Marinha em São Paulo (CTMSP), 1998;
- [13] Courant, R. L. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration, *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 5, p 1-23, 1943;
- [14] Sabonnadière, J. C.; Coulomb, J. L. *Finite element methods in CAD: electrical and magnetic fields*, New York, N.Y.: Springer-Verlag, 1987;

- [15] Ida, Nathan; Bastos, João P. A. *Electromagnetics and calculation of fields*, 2.ed. New York, N.Y.: Springer-Verlag, 1997;
- [16] Silvester, P. P.; Ferrari, R. L. *Finite elements for electrical engineers*, Cambridge: Cambridge University. 3.ed., 1996 (1. ed., 1983);
- [17] Volakis, John L. Chatterjee, Arindam; Kempel, Leo C. *Finite element method for electromagnetics: antennas, microwave circuits, and scattering applications*, New York, N.Y.: IEEE, 1998;
- [18] Kikushi, N. *Finite element methods in mechanics*, Cambridge: Cambridge University, 1986;
- [19] Press, William H.; Vetterling, William T.; Teukolsky, Saul A.; Flannery Brian P. *Numerical recipes in C - the art of scientific computing*, 2. ed., New York, N.Y.: Cambridge University, rev. e imp. em 1999;
- [20] Wilkinson, J. H. *The algebraic eigenvalue problem*, New York, N.Y.: Oxford University Press, 1965;
- [21] Parlett, Beresford N. *The symmetric eigenvalue problem*, New Jersey, N. J.: Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1980;
- [22] netlib. Disponível em: <<http://www.netlib.org>. Acesso em: março 2004;
- [23] Sensiper, S. Electromagnetic wave propagation on helical structures (a review and survey recent progress),” *Proc. I.R.E.*, vol. 43, p 149 -161; Dec., 1955;
- [24] Bevensee, R. M. *Electromagnetic slow-wave systems*, New York, N.Y.: J. Wiley & Sons, 1964;
- [25] Collin, R. E. *Field theory of guided waves*, 2.ed., New York, N.Y.: McGraw-Hill, 1991;
- [26] Collin, R. E. *Foundations of microwaves engineering*, 2.ed., New York, N.Y.: McGraw-Hill, 1995;
- [27] Basu, B. N. *Electromagnetic theory and applications in beam-wave*, Singapore, SG: World Scientific, 1995;
- [28] Chodorow, M.; Chu, E. L. Cross-wound twin helices for traveling-wave tubes, *J. Applied Physics*, vol. 26, p 33-43; Jan. 1955;
- [29] Birdsall, C. K.; Everhart, T. E. Modified contra-wound helix circuits for high-power traveling-wave tubes, *IRE Transactions Electron Devices.*, vol. ED-3, Oct. 1956, No. 4, p 190-204;

- [30] Uhm, Hans S.; Choe, Joon Y. Electromagnetic-wave propagation in a conducting waveguide loaded with a tape helix, *IEEE on Microwave and Techniques*, vol. MTT-31, No. 9, p 704-709, Sep. 1983;
- [31] Gilmour, A. S., Jr., M. R. Gillette, Chen, J-T. Theoretical and Experimental TWT helix loss determination, *IEEE Transactions on Electron Devices*, vol. ED-26, No. 10, p. 1581-1588, Oct. 1979;
- [32] Bryant, J. H.; White, E. J. Attenuation and power-handling capability of helical radio-frequency lines, *Electrical Communications*, Dec. 1954, p. 278-282;
- [33] Bryant, J. H. Some wave properties of helical conductors, *Electrical Communications*, Mar. 1954, p 50-56.
- [34] Watkins, D. A., *Topics in Electromagnetic Theory*, New York, N.Y.: John Wiley, 1958;
- [35] Chernin, D.; Jr., T. M. Antonsen; Levush, B. Exact treatment of the dispersion and beam interaction impedance of a thin tape helix surrounded by a radially stratified dielectric, *IEEE Transactions on Electron Devices*, vol. 46, No. 7, p 1472-1483, Jul 1999.
- [36] Freund, H. P. Three-dimensional nonlinear theory of helix traveling-wave tubes, *IEEE Trans. Plasma Science*, vol. 28, No. 3, p 748-759, Jun 2000.
- [37] BARCELONA (SPAIN). International Center For Numerical Methods In Engineering (CIMNE). Disponível em: <<http://gid.cimne.upc.es>>. Acesso em: outubro 2003;
- [38] Silvester, P. P. A general high-order finite element waveguide analysis program. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-27, p 204-210, Apr. 1969;
- [39] Cendes, Zoltan J.; Silvester, P. Numerical solution of dielectric loaded waveguides: I-Finite-element analysis. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-18, No. 12, p 1124-1131, Dec. 1970;
- [40] Harrington, R. F. *Time harmonic electromagnetic fields*, New York, N.Y.: McGraw-Hill, 1961;
- [41] Marcuvitz, N. *Waveguide handbook*, New York, N.Y.: McGraw-Hill, 1951;
- [42] Hano, M. Finite-element of dielectric-loaded waveguides, *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-32, no. 10, p 1275-1279, October 1984;
- [43] Silvester, P. P. Finite-element solution of homogeneous waveguide problems, *Alta Frequenza*, vol. 38, p 313-317, 1969;
- [44] Silvester, P. P. High-order polynomial triangular finite elements for potential problems, *International Journal for Engineering Science*, vol. 7, p 849-861, 1969;

- [45] Motta, C. C.; Tenório, E.; Pascholati, P. R. Pierce model for TWT gain analysis and experimental measurements, publicado nos anais do *IX SBMO*, 2000;
- [46] Tenório E.; Pascholati, P. R.; Motta, C. C. A phase shifter analysis by the finite element method, publicado nos anais do *X SBMO*, 2002;
- [47] Tenório E.; Pascholati, P. R.; Motta, C. C. A solution of rectangular ridged waveguide using the finite element method, publicado nos proceedings do *ITS'02*, 2002;

APÊNDICE A – Desenvolvimento dos elementos de matriz para o problema das cavidades retangular e cilíndrica

Conforme discute-se no capítulo 3, as funções de base escalares para a solução da equação de Helmholtz escalar para e_z^e e h_z^e , utilizando prisma reto de base triangular podem ser escritas como:

$$L_1^e(x, y, z) = N_1^e(x, y) \left[1 - \frac{z - z_1^e}{h^e} \right], \tag{A-1}$$

$$L_2^e(x, y, z) = N_2^e(x, y) \left[1 - \frac{z - z_1^e}{h^e} \right], \tag{A-2}$$

$$L_3^e(x, y, z) = N_3^e(x, y) \left[1 - \frac{z - z_1^e}{h^e} \right], \tag{A-3}$$

$$L_4^e(x, y, z) = N_1^e(x, y) \left[\frac{z - z_1^e}{h^e} \right], \tag{A-4}$$

$$L_5^e(x, y, z) = N_2^e(x, y) \left[\frac{z - z_1^e}{h^e} \right], \tag{A-5}$$

$$L_6^e(x, y, z) = N_3^e(x, y) \left[\frac{z - z_1^e}{h^e} \right], \tag{A-6}$$

onde L_i^e são as funções de base escalares de primeira ordem para o prisma conforme Fig. A.I.

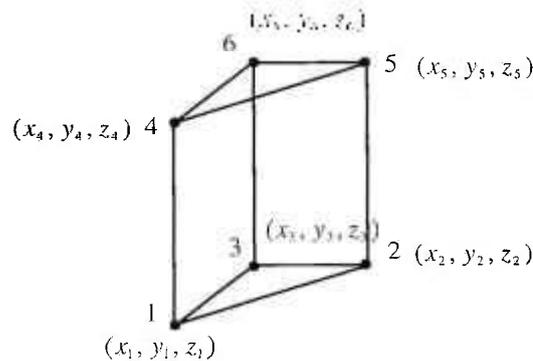


Figura A-I - Prisma reto de base triangular.

Análise via simulação computacional de uma estrutura de ondas lentas

No caso do prisma sob consideração:

$$x_1 = x_4,$$

$$x_2 = x_5,$$

$$x_3 = x_6,$$

$$z_1 = z_2 = z_3 \text{ e } z_4 = z_5 = z_6.$$

A altura do prisma é $h = z_4 - z_1$, onde $z_4 > z_1$, e $N_i^e(x, y)$ é definido segundo

$$N_i^e(x, y) = \frac{1}{2\Delta^e} [a_i^e + b_i^e x + c_i^e y].$$

A.1. Construção da matriz rigidez para a integral

$$\int_V \vec{\nabla} L_i^e \cdot \vec{\nabla} L_j^e d^3r. \quad (\text{A-7})$$

Substituindo (A-1) a (A-6) no integrando de (A-7) pode-se escrever os elementos da matriz $\vec{\nabla} L_i^e \cdot \vec{\nabla} L_j^e$:

$$d_{11} = \frac{(b_1 b_1 + c_1 c_1)}{(2\Delta^e)^2} \left(1 - \frac{z - z_1}{h}\right)^2 + \left(\frac{N_1 N_1}{h^2}\right),$$

$$d_{12} = \frac{(b_1 b_2 + c_1 c_2)}{(2\Delta^e)^2} \left(1 - \frac{z - z_1}{h}\right)^2 + \left(\frac{N_1 N_2}{h^2}\right),$$

$$d_{13} = \frac{(b_1 b_3 + c_1 c_3)}{(2\Delta^e)^2} \left(1 - \frac{z - z_1}{h}\right)^2 + \left(\frac{N_1 N_3}{h^2}\right),$$

$$d_{21} = \frac{(b_2 b_1 + c_2 c_1)}{(2\Delta^e)^2} \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right)^2 + \left(\frac{N_2 N_1}{h^2} \right),$$

$$d_{22} = \frac{(b_2 b_2 + c_2 c_2)}{(2\Delta^e)^2} \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right)^2 + \left(\frac{N_2 N_2}{h^2} \right),$$

$$d_{23} = \frac{(b_2 b_3 + c_2 c_3)}{(2\Delta^e)^2} \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right)^2 + \left(\frac{N_2 N_3}{h^2} \right),$$

$$d_{14} = \frac{(b_1 b_1 + c_1 c_1)}{(2\Delta^e)^2} \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right) \left(\frac{z - z_1}{h} \right) + \left(\frac{N_1 N_1}{h^2} \right),$$

$$d_{15} = \frac{(b_1 b_2 + c_1 c_2)}{(2\Delta^e)^2} \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right) \left(\frac{z - z_1}{h} \right) + \left(\frac{N_1 N_2}{h^2} \right),$$

$$d_{16} = \frac{(b_1 b_3 + c_1 c_3)}{(2\Delta^e)^2} \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right) \left(\frac{z - z_1}{h} \right) + \left(\frac{N_1 N_3}{h^2} \right),$$

$$d_{24} = \frac{(b_2 b_1 + c_2 c_1)}{(2\Delta^e)^2} \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right) \left(\frac{z - z_1}{h} \right) + \left(\frac{N_2 N_1}{h^2} \right),$$

$$d_{25} = \frac{(b_2 b_2 + c_2 c_2)}{(2\Delta^e)^2} \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right) \left(\frac{z - z_1}{h} \right) + \left(\frac{N_2 N_2}{h^2} \right),$$

$$d_{26} = \frac{(b_2 b_3 + c_2 c_3)}{(2\Delta^e)^2} \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right) \left(\frac{z - z_1}{h} \right) + \left(\frac{N_2 N_3}{h^2} \right),$$

$$d_{31} = \frac{(b_3 b_1 + c_3 c_1)}{(2\Delta^e)^2} \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right)^2 + \left(\frac{N_3 N_1}{h^2} \right),$$

$$d_{32} = \frac{(b_3 b_2 + c_3 c_2)}{(2\Delta^e)^2} \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right)^2 + \left(\frac{N_3 N_2}{h^2} \right),$$

$$d_{33} = \frac{(b_3 b_3 + c_3 c_3)}{(2\Delta^e)^2} \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right)^2 + \left(\frac{N_3 N_3}{h^2} \right),$$

$$d_{34} = \frac{(b_3 b_1 + c_3 c_1)}{(2\Delta^e)^2} \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right) \left(\frac{z - z_1}{h} \right) - \left(\frac{N_3 N_1}{h^2} \right),$$

$$d_{35} = \frac{(b_3 b_2 + c_3 c_2)}{(2\Delta^e)^2} \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right) \left(\frac{z - z_1}{h} \right) - \left(\frac{N_3 N_2}{h^2} \right),$$

$$d_{36} = \frac{(b_3 b_3 + c_3 c_3)}{(2\Delta^e)^2} \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right) \left(\frac{z - z_1}{h} \right) - \left(\frac{N_3 N_3}{h^2} \right),$$

$$d_{41} = \frac{(b_1 b_1 + c_1 c_1)}{(2\Delta^e)^2} \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right) \left(\frac{z - z_1}{h} \right) - \left(\frac{N_1 N_1}{h^2} \right),$$

$$d_{42} = \frac{(b_1 b_2 + c_1 c_2)}{(2\Delta^e)^2} \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right) \left(\frac{z - z_1}{h} \right) - \left(\frac{N_1 N_2}{h^2} \right),$$

$$d_{43} = \frac{(b_1 b_3 + c_1 c_3)}{(2\Delta^e)^2} \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right) \left(\frac{z - z_1}{h} \right) - \left(\frac{N_1 N_3}{h^2} \right),$$

$$d_{44} = \frac{(b_1 b_1 + c_1 c_1)}{(2\Delta^e)^2} \left(\frac{z - z_1}{h} \right)^2 + \left(\frac{N_1 N_1}{h^2} \right),$$

$$d_{45} = \frac{(b_1 b_2 + c_1 c_2)}{(2\Delta^e)^2} \left(\frac{z - z_1}{h} \right)^2 + \left(\frac{N_1 N_2}{h^2} \right),$$

$$d_{46} = \frac{(b_1 b_3 + c_1 c_3)}{(2\Delta^e)^2} \left(\frac{z - z_1}{h} \right)^2 + \left(\frac{N_1 N_3}{h^2} \right),$$

$$d_{51} = \frac{(b_2 b_1 + c_2 c_1)}{(2\Delta^e)^2} \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right) \left(\frac{z - z_1}{h} \right) - \left(\frac{N_2 N_1}{h^2} \right),$$

$$d_{52} = \frac{(b_2 b_2 + c_2 c_2)}{(2\Delta^e)^2} \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right) \left(\frac{z - z_1}{h} \right) - \left(\frac{N_2 N_2}{h^2} \right),$$

$$d_{53} = \frac{(b_2 b_3 + c_2 c_3)}{(2\Delta^e)^2} \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right) \left(\frac{z - z_1}{h} \right) \left(\frac{N_2 N_3}{h^2} \right)$$

$$d_{54} = \frac{(b_2 b_1 + c_2 c_1)}{(2\Delta^e)^2} \left(\frac{z - z_1}{h} \right)^2 + \left(\frac{N_2 N_1}{h^2} \right)$$

$$d_{55} = \frac{(b_2 b_2 + c_2 c_2)}{(2\Delta^e)^2} \left(\frac{z - z_1}{h} \right)^2 + \left(\frac{N_2 N_2}{h^2} \right)$$

$$d_{56} = \frac{(b_2 b_3 + c_2 c_3)}{(2\Delta^e)^2} \left(\frac{z - z_1}{h} \right)^3 + \left(\frac{N_2 N_3}{h^2} \right)$$

$$d_{63} = \frac{(b_3 b_1 + c_3 c_1)}{(2\Delta^e)^2} \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right) \left(\frac{z - z_1}{h} \right) \left(\frac{N_3 N_1}{h^2} \right)$$

$$d_{62} = \frac{(b_3 b_2 + c_3 c_2)}{(2\Delta^e)^2} \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right) \left(\frac{z - z_1}{h} \right) - \left(\frac{N_3 N_2}{h^2} \right)$$

$$d_{63} = \frac{(b_3 b_3 + c_3 c_3)}{(2\Delta^e)^2} \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right) \left(\frac{z - z_1}{h} \right) - \left(\frac{N_3 N_3}{h^2} \right)$$

$$d_{64} = \frac{(b_3 b_1 + c_3 c_1)}{(2\Delta^e)^2} \left(\frac{z - z_1}{h} \right)^2 - \left(\frac{N_3 N_1}{h^2} \right)$$

$$d_{65} = \frac{(b_3 b_2 + c_3 c_2)}{(2\Delta^e)^2} \left(\frac{z - z_1}{h} \right)^2 + \left(\frac{N_3 N_2}{h^2} \right)$$

$$d_{66} = \frac{(b_3 b_3 + c_3 c_3)}{(2\Delta^e)^2} \left(\frac{z - z_1}{h} \right)^2 + \left(\frac{N_3 N_3}{h^2} \right)$$

$$a_{11} = \frac{b_1 b_1 + c_1 c_1}{4 \Delta^e} \frac{h}{3} + \frac{1}{h} \frac{2 \Delta^e}{12}$$

$$a_{12} = \frac{b_1 b_2 + c_1 c_2}{4 \Delta^e} \frac{h}{3} + \frac{1}{h} \frac{\Delta^e}{12}$$

$$a_{13} = \frac{b_1 b_3 + c_1 c_3}{4 \Delta^e} \frac{h}{3} + \frac{1}{h} \frac{\Delta^e}{12}$$

$$a_{21} = \frac{b_2 b_1 + c_2 c_1}{4 \Delta^e} \frac{h}{3} + \frac{1}{h} \frac{\Delta^e}{12}$$

$$a_{22} = \frac{b_2 b_2 + c_2 c_2}{4 \Delta^e} \frac{h}{3} + \frac{1}{h} \frac{2 \Delta^e}{12}$$

$$a_{23} = \frac{b_2 b_3 + c_2 c_3}{4 \Delta^e} \frac{h}{3} + \frac{1}{h} \frac{\Delta^e}{12}$$

$$a_{31} = \frac{b_3 b_1 + c_3 c_1}{4 \Delta^e} \frac{h}{3} + \frac{1}{h} \frac{\Delta^e}{12}$$

$$a_{32} = \frac{b_3 b_2 + c_3 c_2}{4 \Delta^e} \frac{h}{3} + \frac{1}{h} \frac{\Delta^e}{12}$$

$$a_{33} = \frac{b_3 b_3 + c_3 c_3}{4 \Delta^e} \frac{h}{3} + \frac{1}{h} \frac{2 \Delta^e}{12}$$

Para a integração dos elementos d_{ij} , isto é,

$$a_{ij} = \int_V d_{ij} d^3 r = \int_V d_{ij} d_x d_y d_z \quad (\text{A-7})$$

onde V é o domínio definido pelo prisma da Fig. A-1 tem-se que:

$$a_{14} = \frac{b_1 b_1 + c_1 c_1}{4 \Delta^e} \frac{h}{6} + \frac{1}{h} \frac{2 \Delta^e}{12}$$

$$a_{51} = \frac{b_2 b_1 + c_2 c_1}{4 \Delta^e} \frac{h}{6} - \frac{1}{h} \frac{\Delta^e}{12}$$

$$a_{52} = \frac{b_2 b_2 + c_2 c_2}{4 \Delta^e} \frac{h}{6} - \frac{1}{h} \frac{2 \Delta^e}{12}$$

$$a_{53} = \frac{b_2 b_3 + c_2 c_3}{4 \Delta^e} \frac{h}{6} - \frac{1}{h} \frac{\Delta^e}{12}$$

$$a_{61} = \frac{b_3 b_1 + c_3 c_1}{4 \Delta^e} \frac{h}{6} - \frac{1}{h} \frac{\Delta^e}{12}$$

$$a_{62} = \frac{b_3 b_2 + c_3 c_2}{4 \Delta^e} \frac{h}{6} - \frac{1}{h} \frac{\Delta^e}{12}$$

$$a_{63} = \frac{b_3 b_3 + c_3 c_3}{4 \Delta^e} \frac{h}{6} - \frac{1}{h} \frac{2 \Delta^e}{12}$$

$$a_{44} = \frac{b_1 b_1 + c_1 c_1}{4 \Delta^e} \frac{h}{3} + \frac{1}{h} \frac{2 \Delta^e}{12}$$

$$a_{45} = \frac{b_1 b_2 + c_1 c_2}{4 \Delta^e} \frac{h}{3} + \frac{1}{h} \frac{\Delta^e}{12}$$

$$a_{46} = \frac{b_1 b_3 + c_1 c_3}{4 \Delta^e} \frac{h}{3} + \frac{1}{h} \frac{\Delta^e}{12}$$

$$a_{54} = \frac{b_2 b_1 + c_2 c_1}{4 \Delta^e} \frac{h}{3} + \frac{1}{h} \frac{\Delta^e}{12}$$

$$a_{55} = \frac{b_2 b_2 + c_2 c_2}{4 \Delta^e} \frac{h}{3} + \frac{1}{h} \frac{2 \Delta^e}{12}$$

$$a_{56} = \frac{b_2 b_3 + c_2 c_3}{4 \Delta^e} \frac{h}{3} + \frac{1}{h} \frac{\Delta^e}{12}$$

$$a_{64} = \frac{b_3 b_1 + c_3 c_1}{4 \Delta^e} \frac{h}{3} + \frac{1}{h} \frac{\Delta^e}{12},$$

$$a_{65} = \frac{b_3 b_2 + c_3 c_2}{4 \Delta^e} \frac{h}{3} + \frac{1}{h} \frac{\Delta^e}{12},$$

$$a_{66} = \frac{b_3 b_3 + c_3 c_3}{4 \Delta^e} \frac{h}{3} + \frac{1}{h} \frac{2 \Delta^e}{12}.$$

A.2. Construção da matriz rigidez para a integral

$$\int_V L_i^e \cdot L_j^e \, d^3 \vec{r}.$$

Substituindo (A-1) a (A-6) no integrando da equação anterior pode-se escrever:

$$L_1 L_1 = N_1^2 \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right)^2,$$

$$L_1 L_2 = N_1 N_2 \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right),$$

$$L_1 L_3 = N_1 N_3 \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right),$$

$$L_2 L_1 = N_2 N_1 \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right),$$

$$L_2 L_2 = N_2^2 \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right)^2,$$

$$L_2 L_3 = N_2 N_3 \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right),$$

$$L_1 L_4 = N_1 N_1 \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right) \left(\frac{z - z_1}{h} \right),$$

$$L_1 L_5 = N_1 N_2 \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right) \left(\frac{z - z_1}{h} \right),$$

$$L_1 L_6 = N_1 N_3 \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right) \left(\frac{z - z_1}{h} \right),$$

$$L_2 L_4 = N_2 N_1 \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right) \left(\frac{z - z_1}{h} \right),$$

$$L_2 L_5 = N_2 N_2 \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right) \left(\frac{z - z_1}{h} \right),$$

$$L_2 L_6 = N_2 N_3 \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right) \left(\frac{z - z_1}{h} \right),$$

$$L_3 L_4 = N_3 N_1 \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right) \left(\frac{z - z_1}{h} \right),$$

$$L_3 L_5 = N_3 N_2 \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right) \left(\frac{z - z_1}{h} \right),$$

$$L_3 L_6 = N_3 N_3 \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right) \left(\frac{z - z_1}{h} \right),$$

$$L_4 L_1 = N_1 N_1 \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right) \left(\frac{z - z_1}{h} \right),$$

$$L_4 L_2 = N_1 N_2 \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right) \left(\frac{z - z_1}{h} \right),$$

$$L_4 L_3 = N_1 N_3 \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right) \left(\frac{z - z_1}{h} \right),$$

$$L_5 L_1 = N_2 N_1 \left(\frac{z - z_1}{h} \right) \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right),$$

$$L_5 L_2 = N_2 N_2 \left(\frac{z - z_1}{h} \right) \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right),$$

$$L_5 L_3 = N_2 N_3 \left(\frac{z - z_1}{h} \right) \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right),$$

$$L_6 L_1 = N_3 N_1 \left(\frac{z - z_1}{h} \right) \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right),$$

$$L_6 L_2 = N_3 N_2 \left(\frac{z - z_1}{h} \right) \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right),$$

$$L_6 L_3 = N_3 N_3 \left(\frac{z - z_1}{h} \right) \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right),$$

$$L_4 L_4 = N_1 N_1 \left(\frac{z - z_1}{h} \right)^2,$$

$$L_4 L_5 = N_1 N_2 \left(\frac{z - z_1}{h} \right)^2,$$

$$L_4 L_6 = N_1 N_3 \left(\frac{z - z_1}{h} \right)^2,$$

$$L_5 L_4 = N_2 N_1 \left(\frac{z - z_1}{h} \right)^2,$$

$$L_5 L_5 = N_2 N_2 \left(\frac{z - z_1}{h} \right)^2,$$

$$L_5 L_6 = N_2 N_3 \left(\frac{z - z_1}{h} \right)^2,$$

$$L_6 L_4 = N_3 N_1 \left(\frac{z - z_1}{h} \right)^2,$$

$$L_6 L_5 = N_3 N_2 \left(\frac{z - z_1}{h} \right)^2,$$

$$L_6 L_6 = N_3 N_3 \left(\frac{z - z_1}{h} \right)^2,$$

A.2. Integrais de relevância:

$$\int_{z_1}^{z_2} \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right)^2 dz = \frac{h}{3},$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{z - z_1}{h} \right)^2 dz = \frac{h}{3},$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \left(1 - \frac{z - z_1}{h} \right) \left(\frac{z - z_1}{h} \right) dz = \frac{h}{6},$$

onde $h = z_2 - z_1$.

Realizando a integração de cada termo $L_i L_j$ pode-se escrever os resultados a seguir:

$$\begin{aligned}
 b_{11} &= \frac{h}{3} \frac{2\Delta^e}{12}, & b_{12} &= \frac{h}{3} \frac{\Delta^e}{12}, & b_{13} &= \frac{h}{3} \frac{\Delta^e}{12}, \\
 b_{21} &= \frac{h}{3} \frac{\Delta^e}{12}, & b_{22} &= \frac{h}{3} \frac{2\Delta^e}{12}, & b_{23} &= \frac{h}{3} \frac{\Delta^e}{12}, \\
 b_{31} &= \frac{h}{3} \frac{\Delta^e}{12}, & b_{32} &= \frac{h}{3} \frac{\Delta^e}{12}, & b_{33} &= \frac{h}{3} \frac{2\Delta^e}{12}, \\
 b_{14} &= \frac{h}{6} \frac{2\Delta^e}{12}, & b_{15} &= \frac{h}{6} \frac{\Delta^e}{12}, & b_{16} &= \frac{h}{6} \frac{\Delta^e}{12}, \\
 b_{24} &= \frac{h}{6} \frac{\Delta^e}{12}, & b_{25} &= \frac{h}{6} \frac{2\Delta^e}{12}, & b_{26} &= \frac{h}{6} \frac{\Delta^e}{12}, \\
 b_{34} &= \frac{h}{6} \frac{\Delta^e}{12}, & b_{35} &= \frac{h}{6} \frac{\Delta^e}{12}, & b_{36} &= \frac{h}{6} \frac{2\Delta^e}{12}, \\
 b_{44} &= \frac{h}{6} \frac{\Delta^e}{12}, & b_{45} &= \frac{h}{6} \frac{\Delta^e}{12}, & b_{46} &= \frac{h}{6} \frac{2\Delta^e}{12},
 \end{aligned}$$

que em uma forma matricial pode ser escrito como

$$\mathbf{B}_r^e = \frac{h\Delta^e}{3 \times 12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

APÊNDICE B - Relações relevantes para elementos triangulares de primeira ordem

Neste apêndice apresentam-se as relações relevantes dos elementos triangulares de primeira ordem e resultados das integrais para a construção da matriz rigidez do elemento. Optou-se por desenvolver os resultados das integrais segundo expressões analíticas já que em termos numéricos utilizando-se elementos triangulares de primeira ordem, estes resultados são mais adequados do que utilizar integração numérica.

B.1 Transformações entre os sistemas global e local.

Considere as equações de retas que unem os vértices do triângulo (x_1, y_1) , com (x_2, y_2) e (x_1, y_1) com (x_3, y_3) , conforme Fig. B-I.

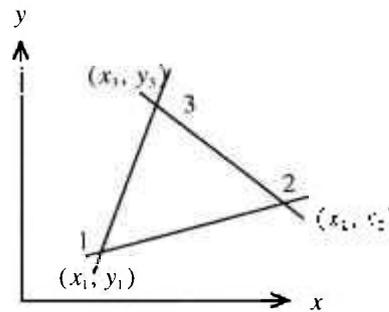


Figura B-I - Elemento Finito Triangular de primeira ordem.

A reta que une os vértices 1 e 2, apresenta a seguinte equação

$$y(x) = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} x - \frac{(x_1 y_2 - x_2 y_1)}{(x_2 - x_1)} \tag{B-1}$$

e a reta que une os vértices 1 e 3,

$$y(x) = \frac{(y_3 - y_1)}{(x_3 - x_1)} x - \frac{(x_1 y_3 - x_3 y_1)}{(x_3 - x_1)} \tag{B-2}$$

As Eqs. (B-1) e (B-2) podem ser escritas de maneira mais condensada utilizando-se as expressões $a_i^e = (x_j y_k - x_k y_j)$, $b_i^e = (y_j - y_k)$, e $c_i^e = (x_k - x_j)$ que resultam

$$y(x) = -\frac{1}{c_3}(b_3x + a_3) \quad (\text{B-3})$$

para a reta $\overline{12}$ e

$$y(x) = -\frac{1}{c_2}(b_2x + a_2) \quad (\text{B-4})$$

para a reta $\overline{13}$.

As Eqs. (B-3) e (B-4) podem ser rescritas de maneira a representar um conjunto de funções de transformação:

$$f_1(x, y) = c_3y + b_3x + a_3$$

"

$$f_2(x, y) = c_2y + b_2x + a_2.$$

Dividindo as funções acima por duas vezes a área do triângulo ($2\Delta^e$), pode-se definir as funções de transformação:

$$v(x, y) = \frac{1}{2\Delta^e} [c_3y + b_3x + a_3] \quad (\text{B-5})$$

"

$$u(x, y) = \frac{1}{2\Delta^e} [c_2y + b_2x + a_2], \quad (\text{B-6})$$

onde Δ^e corresponde a área do elemento triangular calculada segundo

$$\Delta^e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(x_2^e - x_1^e)(y_3^e - y_1^e) - (x_3^e - x_1^e)(y_2^e - y_1^e)].$$

$$y(x) = -\frac{1}{c_3}(b_3x + a_3) \quad (\text{B-3})$$

para a reta $\bar{12}$ e

$$y(x) = -\frac{1}{c_2}(b_2x + a_2) \quad (\text{B-4})$$

para a reta $\bar{13}$.

As Eqs. (B-3) e (B-4) podem ser rescritas de maneira a representar um conjunto de funções de transformação:

$$f_1(x, y) = c_3y + b_3x + a_3$$

$$f_2(x, y) = c_2y + b_2x + a_2.$$

Dividindo as funções acima por duas vezes a área do triângulo ($2\Delta^e$), pode-se definir as funções de transformação:

$$v(x, y) = \frac{1}{2\Delta^e} [c_3y + b_3x + a_3] \quad (\text{B-5})$$

$$u(x, y) = \frac{1}{2\Delta^e} [c_2y + b_2x + a_2], \quad (\text{B-6})$$

onde Δ^e corresponde a área do elemento triangular calculada segundo

$$\Delta^e = \frac{i}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e \end{vmatrix} = \frac{i}{2} [(x_2^e - x_1^e)(y_3^e - y_1^e) - (x_3^e - x_1^e)(y_2^e - y_1^e)].$$

Pode-se verificar que (B-5) e (B-6) mapeiam os pontos dos vértices (x_i, y_i) , $(i = 1, 2, 3)$ no plano (x, y) para o plano (u, v) , nos pontos $(0; 0)$, $(1; 0)$ e $(0; 1)$, respectivamente, conforme a Fig. B-II.

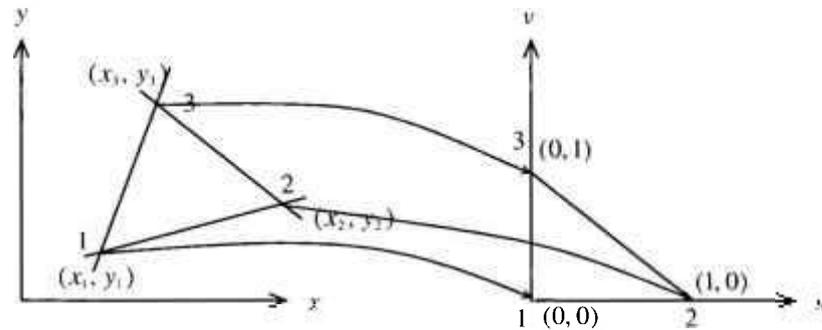


Figura B-II - Mapeamento do triângulo 123 no plano (x, y) para o triângulo 123 no plano (u, v) .

Na Tab. B-I mostra-se os valores dos pontos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) e os correspondentes pontos mapeados no plano uv .

Tabela B-I - Mapeamento dos vértices do triângulo 123 no plano xy para o plano uv .

x	y	$u(x, y)$	$v(x, y)$
x_1	y_1	0	0
x_2	y_2	1	0
x_3	y_3	0	1

O sistema de equações formado por (B-5) e (B-6) pode ser invertido para se obter a transformação inversa que pode ser escrita como

$$y(u, v) = y_1 + b_2v - b_3u \tag{B-7}$$

$$x(u, v) = x_1 - c_2v + c_3u . \tag{B-8}$$

As Eqs. (B-7) e (B-8) são de grande importância no método dos elementos finitos. Pois além de permitir o cálculo de inúmeras integrais necessárias para a montagem das matrizes locais, permitem também que uma vez que as funções incógnitas $f_i^e(x_i, y_i)$ sejam determinadas, a obtenção do valor da função em um ponto arbitrário (u, v) poderá ser facilmente determinada para todos os elementos no plano (x, y) utilizando-se um único comando "For". Por exemplo;

Particularizando o integrando $f(u, v)$ para $f(u, v) = 1$, obtém-se

$$\iint_D dx dy = \Delta^e. \quad (\text{B-12})$$

Para $f(x, y) = x$, deve-se utilizar (B-8), o que resulta em

$$\iint_D x dx dy = 2\Delta^e \int_0^1 \int_0^{1-u} (x_1 - c_2v + c_3u) du dv = \Delta^e \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}. \quad (\text{B-13})$$

De maneira similar para $f(x, y) = y$, utilizando-se (B-7), pode-se mostrar que

$$\iint_D y dx dy = 2\Delta^e \int_0^1 \int_0^{1-u} (y_1 + b_2v - b_3u) du dv = \Delta^e \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}. \quad (\text{B-14})$$

Para $f(x, y) = xy$, agora neste caso utiliza-se tanto (B-7) e (B-8):

$$\begin{aligned} \iint_D xy dx dy &= 2\Delta^e \int_0^1 \int_0^{1-u} (x_1 - c_2v + c_3u)(y_1 + b_2v - b_3u) du dv \\ &= \frac{\Delta^e}{12} [x_1(2y_1 + y_2 + y_3) + x_2(y_1 + 2y_2 + y_3) + x_3(y_1 + y_2 + 2y_3)]. \end{aligned} \quad (\text{B-15})$$

Para $f(x, y) = x^2$, tem-se que, com a ajuda de (B-8):

$$\iint_D x^2 dx dy = 2\Delta^e \int_0^1 \int_0^{1-u} (x_1 - c_2v + c_3u)^2 du dv = \frac{\Delta^e}{6} [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1(x_2 + x_3) + x_2x_3], \quad (\text{B-16})$$

e finalmente para $f(x, y) = y^2$, tem-se que, com a ajuda de (B-7):

$$\iint_D y^2 dx dy = 2\Delta^e \int_0^1 \int_0^{1-u} (y_1 + b_2v - b_3u)^2 du dv = \frac{\Delta^e}{6} [y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_1(y_2 + y_3) + y_2y_3]. \quad (\text{B-17})$$

Conclusão do Apêndice B:

Neste apêndice apresenta-se as relações direta e inversa entre os planos (x, y) e (u, v) . Além disto, estas relações possibilitam desenvolver as integrais que surgem durante a montagem das matrizes rigidez local do elemento para elementos triangulares de primeira ordem.

Conclusão do Apêndice B:

Neste apêndice apresenta-se as relações direta e inversa entre os planos (x, y) e (u, v) . Além disto, estas relações possibilitam desenvolver as integrais que surgem durante a montagem das matrizes rigidez local do elemento para elementos triangulares de primeira ordem.

APÊNDICE C – Desenvolvimento dos elementos de aresta vetoriais tridimensionais

Neste apêndice apresenta-se o desenvolvimento de um elemento de aresta vetorial tridimensional para ser usado como função de base vetorial. Em virtude da própria geometria do problema a ser investigado neste trabalho, o elemento escolhido consiste em um prisma reto de seção triangular. O apêndice inicia-se com uma apresentação da transformação bilinear entre os sistemas local e global, seguido pela construção das funções de base vetoriais utilizando elementos de arestas e finalmente o desenvolvimento das integrais a serem utilizadas para a construção da matriz rigidez do elemento.

As expressões mostradas neste apêndice ainda não foram encontradas em nenhuma literatura que se tenha conhecimento até o momento.

C.1 Transformação bilinear

Considere o prisma reto de base triangular conforme mostrado na Fig. C-I.a, que representa a localização do elemento no sistema de coordenadas globais (Oxyz) e o mesmo elemento mapeado para o sistema de coordenadas locais (Ouvw), mostrado na Fig. C-I.b.

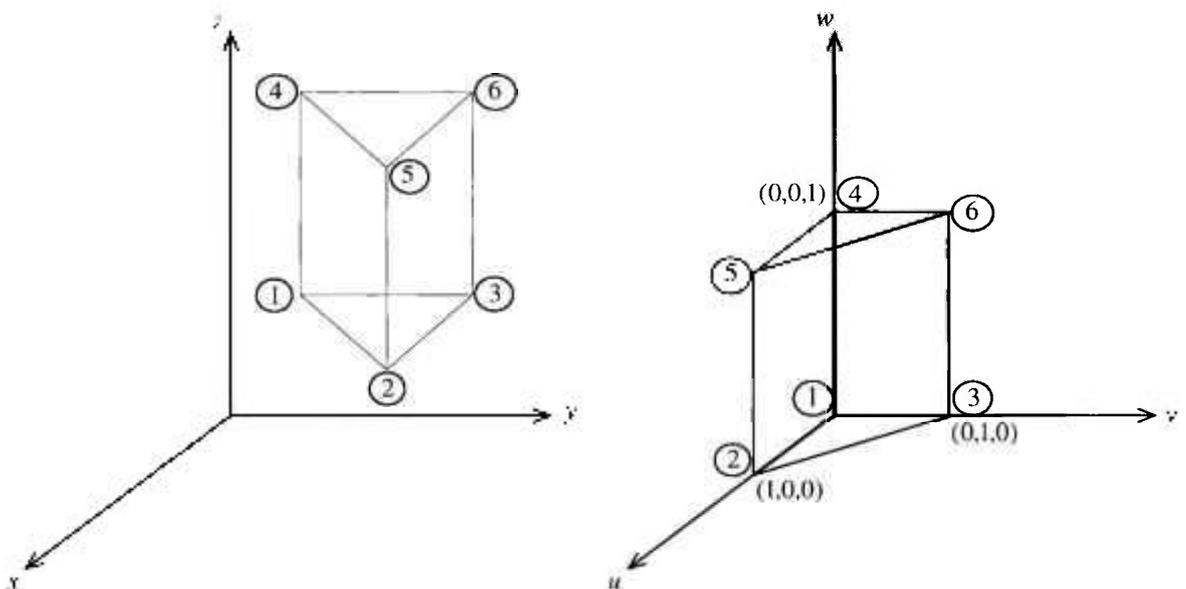


Figura C-I - Elemento finito tridimensional. Prisma reto de seção triangular.

$$V = \frac{1}{2}(z_2 - z_1)[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)] = \frac{1}{2}h2\Delta^c = h\Delta^c. \quad (\text{C-4})$$

Partindo das (C-1)-(C-3) pode-se obter a transformação inversa que, neste caso, é escrita:

$$y(u, v, w) = y_1 + b_2v - b_3u, \quad (\text{C-5})$$

$$x(u, v, w) = x_1 - c_2v + c_3u, \quad (\text{C-6})$$

$$z(u, v, w) = z_1 + hw, \quad (\text{C-7})$$

O determinante Jacobiano da transformação

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}, \quad (\text{C-8})$$

é, para as transformações bilineares (C-5)-(C-7), dado por

$$|J| = \begin{vmatrix} c_3 & -b_3 & 0 \\ -c_2 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{vmatrix} = h(c_3b_2 - c_2b_3) = 2V. \quad (\text{C-9})$$

Com a transformação (C-5)-(C-7) pode-se facilmente, por exemplo, calcular a integral tripla

$$\iiint_D dx dy dz = \int_0^{1-u} \int_0^1 \int_0^1 |J| du dv dw = \text{volumedo prisma}.$$

C.2 Construção das funções de forma vetoriais tridimensionais

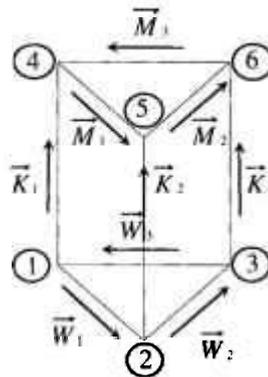


Figura C-II - Representação do elemento de aresta vetorial.

Considerando a Fig. C-II, onde se mostra a convenção dos vetores a serem utilizados na construção da função de forma vetorial, pode-se escrever a seguinte expressão para a função incógnita:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^3 E_{iW} \vec{W}_i + E_{iM} \vec{M}_i + E_{iK} \vec{K}_i,$$

onde E_{iW} , E_{iM} e E_{iK} são os coeficientes da expansão e correspondente às amplitudes médias da componente tangencial do campo ao longo das arestas do prisma.

Os vetores de base (forma de Nedelev) são definidos segundo:

$$\vec{W}_1^e(\vec{r}) = \frac{l_{12}^e}{h^e} \left(N_1^e \vec{\nabla}_\perp N_2^e - N_2^e \vec{\nabla}_\perp N_1^e \right) [h^e - (z - z_1^e)], \quad (\text{C-10})$$

$$\vec{W}_2^e(\vec{r}) = \frac{l_{23}^e}{h^e} \left(N_2^e \vec{\nabla}_\perp N_3^e - N_3^e \vec{\nabla}_\perp N_2^e \right) [h^e - (z - z_1^e)], \quad (\text{C-11})$$

$$\vec{W}_3^e(\vec{r}) = \frac{l_{31}^e}{h^e} \left(N_3^e \vec{\nabla}_\perp N_1^e - N_1^e \vec{\nabla}_\perp N_3^e \right) [h^e - (z - z_1^e)], \quad (\text{C-12})$$

$$\vec{M}_1^e(\vec{r}) = \frac{l_{12}^e}{h^e} \left(N_1^e \vec{\nabla}_\perp N_2^e - N_2^e \vec{\nabla}_\perp N_1^e \right) (z^e - z_1^e), \quad (\text{C-13})$$

C.2 Construção das funções de forma vetoriais tridimensionais

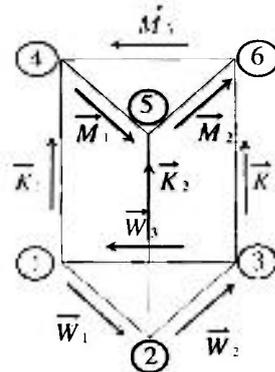


Figura C-II - Representação do elemento de aresta vetorial.

Considerando a Fig. C-II, onde se mostra a convenção dos vetores a serem utilizados na construção da função de forma vetorial, pode-se escrever a seguinte expressão para a função incógnita:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^3 E_{iW} \vec{W}_i + E_{iM} \vec{M}_i + E_{iK} \vec{K}_i,$$

onde E_{iW} , E_{iM} e E_{iK} são os coeficientes da expansão é correspondente às amplitudes médias da componente tangencial do campo ao longo das arestas do prisma.

Os vetores de base (forma de Nedeelev) são definidos segundo:

$$\vec{W}_1(\vec{r}) = \frac{l_{12}^e}{h^e} \left(N_1^e \vec{\nabla}_\perp N_2^e - N_2^e \vec{\nabla}_\perp N_1^e \right) \left[h^e - (z - z_1^e) \right], \tag{C-10}$$

$$\vec{W}_2(\vec{r}) = \frac{l_{23}^e}{h^e} \left(N_2^e \vec{\nabla}_\perp N_3^e - N_3^e \vec{\nabla}_\perp N_2^e \right) \left[h^e - (z - z_1^e) \right], \tag{C-11}$$

$$\vec{W}_3(\vec{r}) = \frac{l_{31}^e}{h^e} \left(N_3^e \vec{\nabla}_\perp N_1^e - N_1^e \vec{\nabla}_\perp N_3^e \right) \left[h^e - (z - z_1^e) \right], \tag{C-12}$$

$$\vec{M}_1(\vec{r}) = \frac{l_{12}^e}{h^e} \left(N_1^e \vec{\nabla}_\perp N_5^e - N_5^e \vec{\nabla}_\perp N_1^e \right) \left[z^e - z_1^e \right], \tag{C-13}$$

$$\vec{M}_2(\vec{r}) = \frac{l_{23}^e}{h^e} \left(N_2^e \vec{\nabla}_\perp N_3^e - N_3^e \vec{\nabla}_\perp N_2^e \right) (z^e - z_1^e), \quad (\text{C-14})$$

$$\vec{M}_3(\vec{r}) = \frac{l_{31}^e}{h^e} \left(N_3^e \vec{\nabla}_\perp N_1^e - N_1^e \vec{\nabla}_\perp N_3^e \right) (z^e - z_1^e), \quad (\text{C-15})$$

$$\vec{K}_1(\vec{r}) = \hat{a}_z N_1^e, \quad (\text{C-16})$$

$$\vec{K}_2(\vec{r}) = \hat{a}_z N_2^e, \quad (\text{C-17})$$

$$\vec{K}_3(\vec{r}) = \hat{a}_z N_3^e, \quad (\text{C-18})$$

onde $h^e = z_2^e - z_1^e$ corresponde à altura do prisma reto definido segundo (C-10) - (C-18) e l_{ij}^e ($i, j = 1, 2, 3$) o comprimento da aresta ij definido segundo (E-1) como:

$$l_{ij}^e = \left[(x_j^e - x_i^e)^2 + (y_j^e - y_i^e)^2 \right]^{1/2}.$$

Pode-se observar que as funções de base vetoriais satisfazem a propriedade:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{W}_i = 0,$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{M}_i = 0,$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{K}_i = 0.$$

o que garante o caráter solenoidal de \vec{E} , $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$.

C.3 Desenvolvimento das relações relevantes

Considerar-se-á, a seguir, o desenvolvimento das seguintes expressões: $\vec{\nabla} \times \vec{W}_i$, $\vec{\nabla} \times \vec{M}_i$ e $\vec{\nabla} \times \vec{K}_i$.

$$\vec{\nabla} \times \vec{K}_i = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\Delta^e} (a_i^e + b_i^e x + c_i^e y) \end{vmatrix} = \frac{1}{2\Delta^e} [c_i^e \hat{a}_y - b_i^e \hat{a}_x]. \quad (C-19)$$

Para o desenvolvimento de $\vec{\nabla} \times \vec{W}_i$, segundo

$$\vec{W}_i = \frac{l_{ij}^e}{(2\Delta^e)^2} \left\{ \left[(a_i^e b_j^e - a_j^e b_i^e) + (c_i^e b_j^e - c_j^e b_i^e) y \right] \hat{a}_x + \left[(a_i^e c_j^e - a_j^e c_i^e) + (b_i^e c_j^e - b_j^e c_i^e) x \right] \hat{a}_y \right\}.$$

pode-se escrever

$$\vec{W}_i = \left[(m_{i1}^e + m_{i2}^e y) \hat{a}_x + (m_{i3}^e + m_{i4}^e x) \hat{a}_y \right] [h^e - (z - z_i^e)]$$

onde

$$m_{i1}^e = \frac{l_{ij}^e}{h^e (2\Delta^e)^2} (a_i^e b_j^e - a_j^e b_i^e); \quad m_{i2}^e = \frac{l_{ij}^e}{h^e (2\Delta^e)^2} (c_i^e b_j^e - c_j^e b_i^e);$$

$$m_{i3}^e = \frac{l_{ij}^e}{h^e (2\Delta^e)^2} (a_i^e c_j^e - a_j^e c_i^e) \quad \text{e} \quad m_{i4}^e = \frac{l_{ij}^e}{h^e (2\Delta^e)^2} (b_i^e c_j^e - b_j^e c_i^e) = -m_{i2}^e.$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{W}_i = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (m_{i1}^e + m_{i2}^e y)[h^e - (z - z_1^e)] & (m_{i3}^e + m_{i4}^e x)[h^e - (z - z_1^e)] & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (m_{i3}^e + m_{i4}^e x)\hat{a}_x - (m_{i1}^e + m_{i2}^e y)\hat{a}_y + (m_{i4}^e - m_{i2}^e)[h^e - (z - z_1^e)]\hat{a}_z. \quad (C-20)$$

Uma propriedade interessante é: $\vec{\nabla} \times \vec{W}_i = 2l_{ij}^e f \vec{\nabla} N_i^e \times \vec{\nabla} N_j^e + \vec{\nabla} f \times \vec{W}_i$,

onde $f = f(z) = h - (z - z_1^e)$.

O desenvolvimento de $\vec{\nabla} \times \vec{M}_i$ é similar e pode ser conduzido segundo

$$\vec{M}_i = \begin{bmatrix} (m_{i1}^e + m_{i2}^e y)\hat{a}_x + (m_{i3}^e + m_{i4}^e x)\hat{a}_y \\ (z - z_1^e)\hat{a}_z \end{bmatrix}$$

e portanto $\vec{\nabla} \times \vec{M}_i$ pode ser escrito como

$$\vec{\nabla} \times \vec{M}_i = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (m_{i1}^e + m_{i2}^e y)(z - z_1^e) & (m_{i3}^e + m_{i4}^e x)(z - z_1^e) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(m_{i3}^e + m_{i4}^e x)\hat{a}_x + (m_{i1}^e + m_{i2}^e y)\hat{a}_y + (m_{i4}^e - m_{i2}^e)(z - z_1^e)\hat{a}_z \quad (C-21)$$

Desenvolvimento das seguintes expressões:

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{W}_i \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{W}_p \right) = (m_{i3}^e + m_{i4}^e x)(m_{p3}^e + m_{p4}^e x) + (m_{i1}^e + m_{i2}^e y)(m_{p1}^e + m_{p2}^e y)$$

$$+ (m_{i4}^e - m_{i2}^e)(m_{p4}^e - m_{p2}^e)[h^e - (z - z_1^e)]. \quad (C-22)$$

$$\left(\hat{a}_z \times \vec{W}_i^e \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{K}_j^e \right) = - \left[\frac{h^e - (z - z_i^e)}{2 \Delta^e} \right] \left[\left(m_{i1}^e c_i^e + m_{i1}^e b_i^e \right) + m_{i4}^e c_i^e x + m_{i2}^e b_i^e y \right], \quad (C-30)$$

$$\begin{aligned} & \left(\hat{a}_z \times \vec{M}_i^e \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{W}_j^e \right) - \left(\hat{a}_z \times \vec{W}_j^e \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{M}_i^e \right) = \\ & h^e \left[\left(m_{i1}^e m_{j1}^e + m_{i2}^e m_{j2}^e \right) + \left(m_{i3}^e m_{j3}^e - m_{i4}^e m_{j4}^e \right) x + m_{i4}^e m_{j4}^e x^2 + \left(m_{i1}^e m_{j2}^e + m_{i2}^e m_{j1}^e \right) y + m_{i2}^e m_{j2}^e y^2 \right], \quad (C-31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\hat{a}_z \times \vec{M}_i^e \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{M}_j^e \right) - \left(\hat{a}_z \times \vec{M}_j^e \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{M}_i^e \right) = (z - z_i^e) \left[\left(m_{i2}^e m_{j2}^e - m_{i3}^e m_{j3}^e \right) + \left(m_{i4}^e m_{j4}^e - m_{i1}^e m_{j1}^e \right) x + \right. \\ & \left. \left(m_{i3}^e m_{j3}^e - m_{i2}^e m_{j2}^e \right) + \left(m_{i1}^e m_{j1}^e - m_{i4}^e m_{j4}^e \right) \right] x + \left[m_{i2}^e m_{j2}^e - m_{i3}^e m_{j3}^e \right] y + \left[m_{i2}^e m_{j2}^e - m_{i3}^e m_{j3}^e \right] y^2 \Big] = 0, \quad (C-32) \end{aligned}$$

$$\left(\hat{a}_z \times \vec{M}_i^e \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{K}_j^e \right) = - \left[\frac{(z - z_i^e)}{2 \Delta^e} \right] \left[\left(m_{i1}^e c_j^e + m_{i1}^e b_j^e \right) + m_{i4}^e c_j^e x + m_{i2}^e b_j^e y \right], \quad (C-33)$$

$$\left(\hat{a}_z \times \vec{W}_j^e \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{K}_i^e \right) = - \left[\frac{h^e - (z - z_i^e)}{2 \Delta^e} \right] \left[\left(m_{j3}^e c_i^e + m_{j1}^e b_i^e \right) + m_{j4}^e c_i^e x + m_{j2}^e b_i^e y \right], \quad (C-34)$$

$$\left(\hat{a}_z \times \vec{M}_j^e \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{K}_i^e \right) = - \left[\frac{(z - z_i^e)}{2 \Delta^e} \right] \left[\left(m_{j3}^e c_i^e + m_{j1}^e b_i^e \right) + m_{j4}^e c_i^e x + m_{j2}^e b_i^e y \right], \quad (C-35)$$

Desenvolvimento dos produtos escalares:

$$\vec{W}_x^e \cdot \vec{W}_y^e = \left[\frac{h^e - (z - z_i^e)}{2 \Delta^e} \right] \left[\left(m_{i1}^e + m_{i2}^e y \right) \left(m_{j1}^e + m_{j2}^e y \right) + \left(m_{i3}^e + m_{i4}^e x \right) \left(m_{j3}^e + m_{j4}^e x \right) \right], \quad (C-36)$$

$$\vec{W}_i^e \cdot \vec{M}_p^e = (z - z_i^e) \left[h^e - (z - z_i^e) \right] \left[(m_{i1}^e + m_{i2}^e x) (m_{p1}^e + m_{p2}^e y) + (m_{i3}^e + m_{i4}^e x) (m_{p3}^e + m_{p4}^e x) \right], \quad (\text{C-37})$$

$$\vec{W}_i^e \cdot \vec{K}_p^e = 0, \quad (\text{C-38})$$

$$\vec{M}_i^e \cdot \vec{M}_p^e = (z - z_i^e)^2 \left[(m_{i1}^e + m_{i2}^e y) (m_{p1}^e + m_{p2}^e y) - (m_{i3}^e + m_{i4}^e x) (m_{p3}^e + m_{p4}^e x) \right], \quad (\text{C-39})$$

$$\vec{M}_i^e \cdot \vec{K}_p^e = 0, \quad (\text{C-40})$$

$$\vec{K}_i^e \cdot \vec{K}_p^e = \frac{1}{(2\mathcal{N})^2} (a_i^e + b_i^e x + c_i^e y) (a_p^e + b_p^e x + c_p^e y). \quad (\text{C-41})$$

C.4 Desenvolvimento das integrais para as relações relevantes

Seja a integral:

$$\int_D (\vec{\nabla} \times \vec{W}_i^e) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{W}_p^e) d^3 r. \quad (\text{C-42})$$

Substituindo-se a expressão (C-22) na integral (C-42) pode-se escrever

$$\int_D \left[(m_{i1}^e - m_{i2}^e x) (m_{p3}^e + m_{p4}^e x) + (m_{i1}^e + m_{i2}^e y) (m_{p1}^e + m_{p2}^e y) \right. \\ \left. + (m_{i4}^e - m_{i2}^e) (m_{p4}^e - m_{p2}^e) \right] \left[h^e - (z - z_i^e) \right]^2 dx dy dz.$$

Desenvolvendo-se o integrando tem-se que

$$\int \left[m_{i3}^e m_{p3}^e + m_{i1}^e m_{p1}^e + (m_{i4}^e - m_{i2}^e) (m_{p4}^e - m_{p2}^e) \right] (h^e - z_i^e)^2$$

$$\vec{W}_i \cdot \vec{M}_p = (z - z_i^e) \left[h^e - (z - z_i^e) \right] \left[\left(m_{i1}^e + m_{i2}^e y \right) \left(m_{p3}^e - m_{p2}^e y \right) + \left(b_{i3} + m_{i4}^e z \right) \left(m_{p3}^e + m_{p4}^e x \right) \right], \quad (C-37)$$

$$\vec{W}_i^e \cdot \vec{K}_p^e = 0, \quad (C-38)$$

$$\vec{M}_i^e \cdot \vec{M}_p^e = (z - z_i^e)^2 \left[\left(m_{i1}^e + m_{i2}^e y \right) \left(m_{p1}^e + m_{p2}^e y \right) + \left(m_{i3}^e + m_{i4}^e x \right) \left(m_{p3}^e + m_{p4}^e x \right) \right], \quad (C-39)$$

$$\vec{M}_i^e \cdot \vec{K}_p^e = 0, \quad (C-40)$$

$$\vec{K}_i^e \cdot \vec{K}_p^e = \frac{1}{(2\Delta^e)^2} \left(a_i^e + b_i^e x + c_i^e y \right) \left(a_p^e + b_p^e x + c_p^e y \right). \quad (C-41)$$

C.4 Desenvolvimento das integrais para as relações relevantes

Seja a integral:

$$\int_D \left(\vec{\nabla} \times \vec{W}_i^e \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{W}_p^e \right) d^3 r. \quad (C-42)$$

Substituindo-se a expressão (C-22) na integral (C-42) pode-se escrever

$$\int_D \left[\left(m_{i3}^e + m_{i4}^e x \right) \left(m_{p3}^e + m_{p4}^e x \right) + \left(m_{i1}^e + m_{i2}^e y \right) \left(m_{p1}^e + m_{p2}^e y \right) + \left(m_{i1}^e - m_{i2}^e y \right) \left(m_{p3}^e - m_{p2}^e y \right) \left[h^e - (z - z_i^e) \right]^2 \right] dx dy dz.$$

Desenvolvendo-se o integrando tem-se que

$$\int_D \left[m_{i3}^e m_{p3}^e + m_{i1}^e m_{p1}^e + \left(m_{i4}^e - m_{i2}^e \right) \left(m_{p4}^e - m_{p2}^e \right) h^e + z_i^e \gamma^2 \right]$$

Análise via simulação computacional de uma estrutura de ondas lentas

$$\begin{aligned}
 & + \left(m_{i_3}^e m_{p_4}^e + m_{i_4}^e m_{p_3}^e \right) x + \left(m_{i_1}^e m_{p_2}^e + m_{i_2}^e m_{p_1}^e \right) y - 2 \left(m_{i_2}^e - m_{i_1}^e \right) \left(m_{p_4}^e - m_{p_2}^e \right) (h^e + z_i^e) z \\
 & + \left. \left. \left. m_{i_3}^e m_{p_4}^e x^2 + m_{i_2}^e m_{p_2}^e y^2 + \left(m_{i_4}^e - m_{i_2}^e \right) \left(m_{p_4}^e - m_{p_2}^e \right) z^2 \right) \right] dx dy dz
 \end{aligned}$$

ou

$$\int_{\Omega^e} \left[I_{1ip} + I_{2ip} x + I_{3ip} y + I_{4ip} z + I_{5ip} x^2 + I_{6ip} y^2 + I_{7ip} z^2 \right] dx dy dz,$$

onde

$$I_{1ip} = m_{i_2}^e m_{i_3}^e + m_{i_1}^e m_{i_4}^e - \left(m_{i_4}^e - m_{i_2}^e \right) \left(m_{p_4}^e - m_{p_2}^e \right) (h^e + z_i^e)^2,$$

$$I_{2ip} = m_{i_3}^e m_{p_4}^e + m_{i_4}^e m_{p_3}^e,$$

$$I_{3ip} = m_{i_2}^e m_{i_1}^e - m_{i_3}^e m_{i_4}^e,$$

$$I_{4ip} = -2 \left(m_{i_4}^e - m_{i_2}^e \right) \left(m_{i_2}^e - m_{i_1}^e \right) (h^e + z_i^e),$$

$$I_{5ip} = m_{i_4}^e m_{p_4}^e,$$

$$I_{6ip} = m_{i_2}^e m_{p_2}^e,$$

$$I_{7ip} = \left(m_{i_4}^e - m_{i_2}^e \right) \left(m_{p_4}^e - m_{p_2}^e \right).$$

As sete integrais podem ser obtidas utilizando as transformações bilineares dada pela expressão (C-5)-(C-7) além do Jacobiano da transformação (C-9)

$$I_{1ip} \int_{\Omega^e} dx dy dz = I_{1ip} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |J| dudvdw = I_{1ip} V,$$

Análise via simulação computacional de uma estrutura de ondas lentas

Apêndice C - Desenvolvimento dos elementos de aresta vetoriais tridimensionais

$$I_{z_0} \int_V x \, dx \, dy \, dz = I_{z_0} \int_0^1 \int_0^{1-u} \int_0^{1-u-v} (x_1 - c_1 v + c_2 u) |J| \, dudvdw,$$

$$= I_{z_0} V \frac{(x_1 + x_2 + x_3)}{3}.$$

$$I_{y_0} \int_V y \, dx \, dy \, dz = I_{y_0} \int_0^1 \int_0^{1-u} \int_0^{1-u-v} (y_1 + b_2 v - b_3 u) |J| \, dudvdw,$$

$$= I_{y_0} V \frac{(y_1 + y_2 + y_3)}{3}.$$

$$I_{z_0} \int_V z \, dx \, dy \, dz = I_{z_0} \int_0^1 \int_0^{1-u} \int_0^{1-u-v} (z_1 + h w) |J| \, dudvdw,$$

$$= I_{z_0} (z_1 V + h \frac{V}{2}) = I_{z_0} (h + 2z_1) \frac{V}{2}.$$

$$I_{x_0} \int_V x^2 \, dx \, dy \, dz = I_{x_0} \int_0^1 \int_0^{1-u} \int_0^{1-u-v} (x_1 - c_2 v + c_3 u)^2 |J| \, dudvdw,$$

$$= I_{x_0} V \frac{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1(x_2 + x_3) + x_2 x_3)}{6}.$$

$$I_{y_0} \int_V y^2 \, dx \, dy \, dz = I_{y_0} \int_0^1 \int_0^{1-u} \int_0^{1-u-v} (y_1 + b_2 v - b_3 u)^2 |J| \, dudvdw,$$

$$= I_{y_0} V \frac{(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_1(y_2 + y_3) + y_2 y_3)}{6}.$$

$$I_{z_0} \int_V z^2 \, dx \, dy \, dz = I_{z_0} \int_0^1 \int_0^{1-u} \int_0^{1-u-v} (z_1 + h w)^2 |J| \, dudvdw,$$

$$= j_{12} \frac{1}{3} V \left[h + 3 z_1 \left(\frac{z_1}{h} - \frac{z_1}{h} \right) \right]$$

Integral

$$\int_D \left(\nabla \times \vec{W}_i^e \right) \cdot \left(\nabla \times \vec{M}_p^e \right) d\Omega^e \quad (C-43)$$

Substituindo a expressão (C-23) com os termos agrupados pelo grau dos polinômios:

$$\int_D \left[J_{1ip} + J_{2ip} x + J_{3ip} y + J_{4ip} z + J_{5ip} x^2 + J_{6ip} y^2 + J_{7ip} z^2 \right] dx dy dz,$$

onde

$$J_{1ip} = -m_{i3}^e m_{p3}^e - m_{i1}^e m_{p1}^e - \left(m_{i4}^e - m_{i2}^e \right) \left(m_{p4}^e - m_{p2}^e \right) \left(h^e + z_1^e \right) z_1,$$

$$J_{2ip} = -m_{i3}^e m_{p4}^e - m_{i4}^e m_{p3}^e,$$

$$J_{3ip} = -m_{i1}^e m_{p2}^e - m_{i2}^e m_{p1}^e,$$

$$J_{4ip} = \left(m_{i4}^e - m_{i2}^e \right) \left(m_{p4}^e - m_{p2}^e \right) \left(2 z_1^e + h^e \right),$$

$$J_{5ip} = -m_{i4}^e m_{p4}^e,$$

$$J_{6ip} = m_{i3}^e m_{p3}^e,$$

$$J_{7ip} = \left(m_{i2}^e - m_{i4}^e \right) \left(m_{p4}^e - m_{p2}^e \right).$$

Os resultados das integrais são os mesmos já resolvidos.

Integral

$$\int_D \left(\vec{\nabla} \times \vec{W}_i^e \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{K}_p^e \right) d^3 \vec{r} \quad (\text{C-44})$$

Utilizando a expressão (C-24)

$$= \frac{1}{2\Delta^e} \int_V \left[\left(c_p^e m_{i3}^e + b_p^e m_{i1}^e \right) + c_p^e m_{i4}^e x + b_p^e m_{i2}^e y \right] dx dy dz ,$$

$$= \int_V \left[K_{1ip} + K_{2ip} x + K_{3ip} y \right] dx dy dz ,$$

onde

$$K_{1ip} = \frac{1}{2\Delta^e} \left(c_p^e m_{i3}^e + b_p^e m_{i1}^e \right) ,$$

$$K_{2ip} = \frac{1}{2\Delta^e} c_p^e m_{i4}^e ,$$

$$K_{3ip} = \frac{1}{2\Delta^e} b_p^e m_{i2}^e .$$

O resultado das três integrais é o mesmo das integrais já desenvolvida.

Integral

$$\int_D \left(\vec{\nabla} \times \vec{M}_i^e \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{M}_p^e \right) d^3 \vec{r} \quad (\text{C-45})$$

O desenvolvimento do integrando, segundo a expressão (C-25), resulta

$$\int_V \left[L_{1ip} + L_{2ip} x + L_{3ip} y + L_{4ip} z + L_{5ip} x^2 + L_{6ip} y^2 + L_{7ip} z^2 \right] dx dy dz ,$$

onde

$$L_{1ip} = m_{i3}^e m_{p3}^e + m_{i1}^e m_{p1}^e + \left(m_{i4}^e - m_{i2}^e \right) \left(m_{p4}^e - m_{p2}^e \right) z_i^e z_p^e ,$$

$$L_{2p} = m_{i3}^e m_{p4}^e + m_{i4}^e m_{p3}^e,$$

$$L_{3p} = m_{i1}^e m_{p2}^e + m_{i2}^e m_{p1}^e,$$

$$L_{4p} = -2 \left(m_{i4}^e - m_{i2}^e \right) \left(m_{p4}^e - m_{p2}^e \right) z^e,$$

$$L_{5p} = m_{i4}^e m_{p4}^e,$$

$$L_{6p} = m_{i2}^e m_{p2}^e,$$

$$L_{7p} = \left(m_{i4}^e - m_{i2}^e \right) \left(m_{p4}^e - m_{p2}^e \right).$$

E os resultados das 7 integrais já foram desenvolvidos.

$$\int_{\Omega} \left(\vec{\nabla} \times \vec{M}_i^e \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{K}_p^e \right) d^3 r = - \int_D \left(\vec{\nabla} \times \vec{W}_i^e \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{K}_p^e \right) d^3 r, \quad (C-46)$$

conforme se pode constatar segundo as expressões (C-26) e (C-24).

Integral

$$\int_D \left(\vec{\nabla} \times \vec{K}_i^e \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{K}_p^e \right) d^3 r = \frac{V}{(2\Delta^e)^2} \left(k_x^e c_p^e + k_y^e b_p^e \right). \quad (C-47)$$

Integral

$$\int_D \vec{W}_i^e \cdot \vec{W}_p^e d^3 r \quad (C-48)$$

pode ser escrita

$$\int_{\Omega} \left[h^e - (z - z_i^e) \right] \left[\left(m_{i1}^e m_{p1}^e + m_{i3}^e m_{p3}^e \right) + \left(m_{i1}^e m_{p2}^e + m_{i2}^e m_{p1}^e \right) y + m_{i2}^e m_{p2}^e y^2 \right]$$

$$P_{1,1} = \partial u_2^+ \partial v_1^+ - \partial v_2^+ \partial u_1^+,$$

$$P_{5ij} = m_i^+ m_j^+,$$

$$P_{1,1}^+ \int_0^1 \int_0^1 1 \, du \, dv = P_{1,1}^+ \left(\frac{1}{2} \right),$$

$$P_{2,1}^+ \int_0^1 \int_0^1 x(u, v) \, du \, dv = P_{2,1}^+ \left(\frac{x_1 - x_3 + x_2}{6} \right),$$

$$P_{3,1}^+ \int_0^1 \int_0^1 x^2(u, v) \, du \, dv = P_{3,1}^+ \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1(x_2 + x_3) + x_2 x_3}{12} \right),$$

$$P_{4,1}^+ \int_0^1 \int_0^1 y(u, v) \, du \, dv = P_{4,1}^+ \left(\frac{y_1 + y_2 + y_3}{6} \right),$$

$$P_{5,1}^+ \int_0^1 \int_0^1 y^2(u, v) \, du \, dv = P_{5,1}^+ \left(\frac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_1(y_2 + y_3) + y_2 y_3}{12} \right),$$

ou

$$= h^e \cdot V \left[P_{1ij} + P_{2ij} \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} + P_{3ij} \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1(x_2 + x_3) + x_2 x_3}{6} \right]$$

$$- P_{4ij} \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} + P_{5ij} \frac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_1(y_2 + y_3) + y_2 y_3}{6}]$$

A integral

$$\int_{\Omega^e} (\hat{a}_z \times \vec{W}_i) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{K}_j) dx dy dz \quad (C-50)$$

pode ser escrita como

$$= -\frac{1}{2 \Delta^e} \int_{\Omega^e} [h^e - (z - z^e)] \left[(m_{i3}^e c_j^e + m_{i1}^e b_j^e) + m_{i4}^e c_j^e x + m_{i2}^e b_j^e y \right] dx dy dz$$

ou

$$= -\frac{1}{2 \Delta^e} \int_{\Omega^e} [h^e - (z - z^e)] dz \int_{\Omega^e} [Q_{1y} + Q_{2x} + Q_{3y}] dy dx,$$

onde

$$Q_{1y} = m_{i3}^e c_j^e + m_{i1}^e b_j^e,$$

$$Q_{2x} = m_{i4}^e c_j^e,$$

$$Q_{3y} = m_{i2}^e b_j^e,$$

$$= -\frac{h^e V}{4 \Delta^e} \left[Q_{1y} + Q_{2x} \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} + Q_{3y} \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right].$$

A integral

$$\int_{\Omega^e} (\hat{a}_z \times \vec{M}_i) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{W}_j) - (\hat{a}_z \times \vec{W}_j) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}_i) d^3 r \quad (C-51)$$

pode ser escrita como

$$= -h^e \int_{\Omega^e} \left[(m_{i1}^e m_{j1}^e + m_{i3}^e m_{j3}^e) + (m_{i3}^e m_{j4}^e + m_{i4}^e m_{j3}^e) x + m_{i4}^e m_{j4}^e x^2 + (m_{i1}^e m_{j2}^e + m_{i2}^e m_{j1}^e) y + m_{i2}^e m_{j2}^e y^2 \right] dx dy dz$$

e que essencialmente é o mesmo resultado da integral (C-49):

$$\int_{\Omega^e} (\hat{a}_z \times \vec{W}_i) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{K}_j) dx dy dz \tag{C-50}$$

pode ser escrita como

$$= \frac{1}{2 \Delta^e} \int_{\Omega^e} \left[h^e - (z - z_i^e) \left[(m_{i3}^e c_j^e + m_{i1}^e b_j^e) + m_{i4}^e c_j^e x + m_{i2}^e b_j^e y \right] \right] dx dy dz$$

ou

$$\frac{1}{2 \Delta^e} \int_{\Omega^e} \left[h^e - (z - z_i^e) dz \right] \int_{\Omega^e} \left[Q_{i3} + Q_{i2} x + Q_{i1} y \right] dy dx,$$

onde

$$Q_{i3} = m_{i3}^e c_j^e + m_{i1}^e b_j^e,$$

$$Q_{i2} = m_{i4}^e c_j^e,$$

$$Q_{i1} = m_{i2}^e b_j^e.$$

$$= -\frac{h^e V}{4 \Delta^e} \left[Q_{i3} + Q_{i2} \frac{x_1 + x_2 - x_3}{3} + Q_{i1} \frac{y_1 + y_2 - y_3}{3} \right].$$

A integral

$$\int_{\Omega^e} \left[(\hat{a}_z \times \vec{M}_i) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{W}_j) - (\hat{a}_z \times \vec{W}_j) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}_i) \right] d^3 \vec{r} \tag{C-51}$$

pode ser escrita como

$$= h^e \int_{\Omega^e} \left[(m_{i3}^e m_{j4}^e + m_{i1}^e m_{j2}^e) - (m_{i3}^e m_{j4}^e + m_{i4}^e m_{j3}^e) x + m_{i4}^e m_{j4}^e x^2 + (m_{i1}^e m_{j2}^e + m_{i2}^e m_{j1}^e) y + m_{i2}^e m_{j2}^e y^2 \right] dx dy dz$$

e que essencialmente é o mesmo resultado da integral (C-49):

$$= -h^e \cdot V \left[P_{1x} + P_{1y} \frac{x_1 - x_2}{3} + P_{1z} \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1(x_2 + x_3)}{6} + x_2 x_3 \right. \\ \left. + P_{2y} \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} + P_{2z} \frac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_1(y_2 + y_3)}{6} + y_2 y_3 \right]$$

A integral

$$\int_{\Omega} (\hat{a}_z \times \vec{M}_i^e) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{K}_j^e) d^3 r \tag{C-52}$$

pode ser escrita como

$$\frac{1}{2 \Delta^e} \int_{\Omega} (z - z_i^e) dz \left[(m_{13}^e c_j^e + m_{11}^e b_j^e) + m_{14}^e c_j^e x + m_{12}^e b_j^e y \right] dx dy \\ = \frac{1}{2 \Delta^e} \int_{\Omega} (z - z_i^e) dz \left[Q_{1ij} + Q_{2ij} x + Q_{3ij} y \right] dx dy \\ = -\frac{h^e}{2 \Delta^e} |J| \int_0^1 w dw \int_0^1 \int_0^1 [Q_{1ij} + Q_{2ij} x(u, v) + Q_{3ij} y(u, v)] du dv \\ = -\frac{h^e}{4 \Delta^e} V \left[Q_{1ij} + Q_{2ij} \frac{x_1 + x_2 - x_3}{3} + Q_{3ij} \frac{y_1 + y_2 - y_3}{3} \right]$$

Das integrais (C-50) e (C-52) tem-se que

$$\int_{\Omega} (\hat{a}_z \times \vec{W}_j^e) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{K}_i^e) d^3 r = \int_{\Omega^e} (\hat{a}_z \times \vec{W}_i^e) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{K}_j^e) d^3 r \tag{C-53}$$

$$\int_{\Omega} (\hat{a}_z \times \vec{M}_j^e) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{K}_i^e) d^3 r = \int_{\Omega^e} (\hat{a}_z \times \vec{M}_i^e) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{K}_j^e) d^3 r \tag{C-54}$$

Integral

$$\int_{\Omega} \vec{W}_i \cdot \vec{M}_{ij} d^3x \tag{C-55}$$

pode ser escrita como

$$\int_{\Omega} \left\{ h^c - (z - z_i^c) \left[\alpha_{i1}^c \alpha_{i2}^c - \alpha_{i2}^c \alpha_{i1}^c \right] + \left(m_{i1}^c m_{i2}^c + m_{i2}^c m_{i1}^c \right) y + m_{i2}^c m_{i2}^c y^2 + \left(m_{i3}^c m_{i4}^c + m_{i4}^c m_{i3}^c \right) x + m_{i4}^c m_{i4}^c x^2 \right\} |J| du dv dw .$$

ou

$$h^c \int_{\Omega} (1 - w) w dw \int_{\Omega} \left[M_{1ip} + M_{2ip} y + M_{3ip} y^2 + M_{4ip} x + M_{5ip} x^2 \right] |J| du dv .$$

onde

$$M_{1ip} = \alpha_{i1}^c \alpha_{i1}^c + \alpha_{i2}^c \alpha_{i2}^c ,$$

$$M_{2ip} = m_{i1}^c m_{i2}^c + m_{i2}^c m_{i1}^c ,$$

$$M_{3ip} = m_{i2}^c m_{i2}^c ,$$

$$M_{4ip} = \left(m_{i3}^c m_{i4}^c + m_{i4}^c m_{i3}^c \right) ,$$

$$M_{5ip} = m_{i4}^c m_{i4}^c ,$$

$$\frac{h^*}{6} |J| \left[M_{11} \int_0^1 \int_0^{1-u} du dv + M_{21} \int_0^1 \int_0^{1-u} y du dv + M_{31} \int_0^1 \int_0^{1-u} y^2 du dv + M_{41} \int_0^1 \int_0^{1-u} x du dv + M_{51} \int_0^1 \int_0^{1-u} x^2 du dv \right]$$

Os resultados das integrais já foram desenvolvidos.

Pode-se observar que

$$\int_D \vec{W}_i \cdot \vec{W}_p d^3 r = 2 \int_D \vec{W}_i \cdot \vec{M}_p d^3 r, \tag{C-56}$$

Desenvolvimento da integral

$$\int_D \vec{M}_i \cdot \vec{M}_p d^3 r. \tag{C-57}$$

Substituindo (C-31) obtém-se

$$h^* \int_0^1 w^2 dw \int_0^{1-w} \int_0^{1-w} \left[M_{1ip} + M_{2ip} y + M_{3ip} y^2 + M_{4ip} x + M_{5ip} x^2 \right] |J| du dv,$$

cujo resultado é igual

$$\int_D \vec{M}_i \cdot \vec{M}_p d^3 r = \int_D \vec{W}_i \cdot \vec{W}_p d^3 r.$$

Desenvolvimento da integral

$$\int_D \vec{K}_i \cdot \vec{K}_p d^3 r. \tag{C-58}$$

Substituindo (C-41) obtém-se

$$= \frac{1}{(2\Delta')^2} \int_D \left[a_i^e a_p^e + (a_i^e b_p^e + a_p^e b_i^e) x + (a_i^e c_p^e + a_p^e c_i^e) y + (b_i^e c_p^e + b_p^e c_i^e) xy + b_i^e b_p^e x^2 + c_i^e c_p^e y^2 \right] dx dy dz$$

$$\frac{|J|}{(2\Delta^e)^2} \int_0^1 \int_0^{1-u} \left[N_{1ip} + N_{2ip} x(u,v) + N_{3ip} y(u,v) + N_{4ip} x^2(u,v) + N_{5ip} y^2(u,v) + N_{6ip} x(u,v) y(u,v) \right] du dv,$$

onde

$$N_{1ip} = a_i^e a_p^e,$$

$$N_{2ip} = \left(a_i^e b_p^e + a_p^e b_i^e \right),$$

$$N_{3ip} = \left(a_i^e c_p^e + a_p^e c_i^e \right),$$

$$N_{4ip} = b_i^e b_p^e,$$

$$N_{5ip} = c_i^e c_p^e,$$

$$N_{6ip} = \left(b_i^e c_p^e + b_p^e c_i^e \right).$$

$$= \frac{V}{(2\Delta^e)^2} \left[N_{1ip} \int_0^1 \int_0^{1-u} du dv + N_{2ip} \int_0^1 \int_0^{1-u} x(u,v) du dv + N_{3ip} \int_0^1 \int_0^{1-u} y(u,v) du dv \right.$$

$$\left. + N_{4ip} \int_0^1 \int_0^{1-u} x^2(u,v) du dv + N_{5ip} \int_0^1 \int_0^{1-u} y^2(u,v) du dv + N_{6ip} \int_0^1 \int_0^{1-u} x(u,v) y(u,v) du dv \right].$$

onde todas as integrais já foram calculadas.

Exemplo:

Considerando o prisma reto conforme Fig. C-III e os pontos de 1 a 6, pode-se obter as matrizes particionadas que compõem a matriz rigidez para o elemento, possuindo as coordenadas (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_1) , (x_3, y_3, z_1) , (x_4, y_4, z_2) , (x_5, y_5, z_2) e (x_6, y_6, z_2) iguais a $(0; 0; 0)$, $(1; 0; 0)$ e $(0; 1; 0)$, $(0; 0; 1)$, $(1; 0; 1)$ e $(0; 1; 1)$, respectivamente.

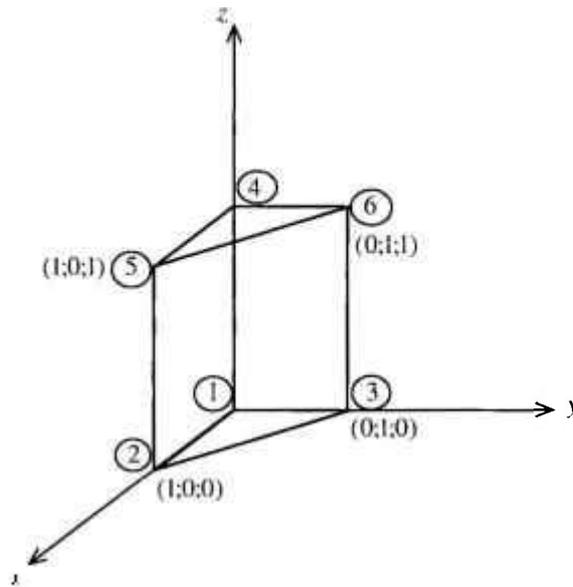


Figura C-III - Geometria e coordenadas cartesianas de um elemento triangular tridimensional para cálculo das matrizes rigidez.

Aplicando-se as integrais desenvolvidas e utilizando os valores das coordenadas, as contribuições para a matriz rigidez do prisma podem ser escritas como:

$$\int_D (\vec{\nabla} \times \vec{W}_i^e) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{W}_j^e) d^3 r = \begin{bmatrix} 1,000 & 0,943 & 0,500 \\ 0,943 & 1,667 & 0,943 \\ 0,500 & 0,943 & 1,000 \end{bmatrix}$$

$$\int_D (\vec{\nabla} \times \vec{W}_i^e) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}_p^e) d^3 r = \begin{bmatrix} 0,000 & 0,471 & 0,500 \\ 0,471 & 0,333 & 0,471 \\ 0,500 & 0,471 & 0,000 \end{bmatrix}$$

$$\int_D (\vec{\nabla} \times \vec{W}_i^e) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{K}_p^e) d^3 r = \begin{bmatrix} -0,500 & 0,333 & 0,167 \\ 0,000 & -0,236 & 0,236 \\ 0,500 & -0,167 & -0,333 \end{bmatrix}$$

$$\int_D (\vec{\nabla} \times \vec{M}_i^e) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}_p^e) d^3 r = \begin{bmatrix} 1,000 & 0,943 & 0,500 \\ 0,943 & 1,667 & 0,943 \\ 0,500 & 0,943 & 1,000 \end{bmatrix}$$

$$\int_D \left(\vec{\nabla} \times \vec{M}_i \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{K}_n \right) d^3r = - \int_D \left(\vec{\nabla} \times \vec{W}_i \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{K}_n \right) d^3r = \begin{bmatrix} 0,500 & -0,333 & -0,167 \\ 0,000 & 0,236 & -0,236 \\ -0,500 & 0,167 & 0,333 \end{bmatrix}$$

$$\int_D \left(\vec{\nabla} \times \vec{K}_i \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{K}_n \right) d^3r = \begin{bmatrix} 1,000 & -0,500 & -0,500 \\ -0,500 & 0,500 & 0,000 \\ -0,500 & 0,000 & 0,500 \end{bmatrix}$$

$$\int_{\Omega^e} \left(\hat{a}_z \times \vec{W}_i \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{W}_j \right) - \left(\hat{a}_z \times \vec{W}_j \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{W}_i \right) d^3r = 0,$$

$$\int_{\Omega^e} \left(\hat{a}_z \times \vec{W}_i \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{M}_j \right) - \left(\hat{a}_z \times \vec{M}_j \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{W}_i \right) d^3r = \begin{bmatrix} 0,333 & 0,000 & -0,167 \\ 0,000 & 0,333 & 0,000 \\ -0,167 & 0,000 & 0,333 \end{bmatrix}$$

$$\int_{\Omega^e} \left(\hat{a}_z \times \vec{W}_i \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{K}_j \right) d^3r = \begin{bmatrix} 0,250 & -0,167 & -0,083 \\ 0,000 & 0,118 & -0,118 \\ -0,250 & 0,083 & 0,167 \end{bmatrix}$$

$$\int_{\Omega^e} \left[\left(\hat{a}_z \times \vec{M}_i \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{W}_j \right) - \left(\hat{a}_z \times \vec{W}_j \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{M}_i \right) \right] d^3r = \begin{bmatrix} -0,333 & 0,000 & 0,167 \\ 0,000 & -0,333 & 0,000 \\ 0,167 & 0,000 & -0,333 \end{bmatrix}$$

$$\int_{\Omega^e} \left(\hat{a}_z \times \vec{M}_i \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{M}_j \right) - \left(\hat{a}_z \times \vec{M}_j \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{M}_i \right) d^3r = 0,$$

$$\int_{\Omega^e} \left(\hat{a}_z \times \vec{M}_i \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{K}_j \right) d^3r = \begin{bmatrix} 0,250 & -0,167 & -0,083 \\ 0,000 & 0,118 & -0,118 \\ -0,250 & 0,083 & 0,167 \end{bmatrix}$$

$$\int_D \left(\hat{a}_z \times \vec{W}_j \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{K}_i \right) d^3r = \int_D \left[\left(\hat{a}_z \times \vec{W}_i \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{K}_j \right) \right] d^3r = \begin{bmatrix} 0,250 & 0,000 & -0,250 \\ -0,167 & 0,118 & 0,083 \\ -0,083 & -0,118 & 0,167 \end{bmatrix}$$

$$\int_{\Omega^e} \left(\hat{\mathbf{a}}_i \times \vec{\mathbf{M}}_i \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{K}}_i \right) d^3 \mathbf{r} - \int_{\Omega^e} \left[\left(\hat{\mathbf{a}}_i \times \vec{\mathbf{M}}_i \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{K}}_j \right) \right] d^3 \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0,250 & 0,000 & -0,250 \\ -0,167 & 0,118 & 0,083 \\ -0,083 & -0,118 & 0,167 \end{bmatrix}$$

$$\int_{\Omega^e} \vec{\mathbf{W}}_i \cdot \vec{\mathbf{W}}_p d^3 \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0,111 & 0,000 & -0,056 \\ 0,000 & 0,111 & 0,000 \\ -0,056 & 0,000 & 0,111 \end{bmatrix}$$

$$\int_{\Omega^e} \vec{\mathbf{W}}_i \cdot \vec{\mathbf{M}}_p d^3 \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0,056 & 0,000 & -0,028 \\ 0,000 & 0,056 & 0,000 \\ -0,028 & 0,000 & 0,056 \end{bmatrix}$$

$$\int_{\Omega^e} \vec{\mathbf{M}}_i \cdot \vec{\mathbf{M}}_p d^3 \mathbf{r} = 2 \int_{\Omega^e} \vec{\mathbf{W}}_i \cdot \vec{\mathbf{M}}_p d^3 \mathbf{r} = \int_{\Omega^e} \vec{\mathbf{W}}_i \cdot \vec{\mathbf{W}}_p d^3 \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0,111 & 0,000 & -0,056 \\ 0,000 & 0,111 & 0,000 \\ -0,056 & 0,000 & 0,111 \end{bmatrix}$$

$$\int_{\Omega^e} \vec{\mathbf{K}}_i \cdot \vec{\mathbf{K}}_p d^3 \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0,083 & 0,042 & 0,042 \\ 0,042 & 0,083 & 0,042 \\ 0,042 & 0,042 & 0,083 \end{bmatrix}$$

$$\int_{\Omega^e} \vec{\mathbf{M}}_i \cdot \vec{\mathbf{K}}_p d^3 \mathbf{r} = \int_{\Omega^e} \vec{\mathbf{W}}_i \cdot \vec{\mathbf{K}}_p d^3 \mathbf{r} = 0.$$

APÊNDICE D – Desenvolvimento dos elementos da matriz rigidez utilizando-se elementos de aresta

Neste apêndice apresenta-se o desenvolvimento dos elementos da matriz rigidez para um elemento triangular de primeira ordem utilizando os elementos vetoriais de arestas, também conhecidos como elementos de Whitney. A utilização de elementos vetoriais de arestas é adequada no caso de regiões onde existam descontinuidades, tais como guias de onda não-homogêneos, onde é necessário garantir a continuidade das componentes tangenciais dos campos elétrico e magnético, \vec{E}_\perp e \vec{H}_\perp , respectivamente. Recentemente reportou-se na literatura que a utilização dos elementos vetoriais de arestas produzem melhores resultados e conseguem superar as dificuldades na análise utilizando elementos nodais.

Os elementos vetoriais (TVFE “tangencial vector finite elements”) baseiam-se na expansão das quantidades incógnitas em termos de seus valores médios ao longo das arestas do elemento. Tendo em vista que as correspondentes funções de base são funções de base vetoriais, elas impõem a continuidade da componente tangencial dos campos ao longo dos contornos dos elementos mas permitem a descontinuidade da componente normal. Para uma descrição do elemento de Whitney considere a Fig. D-I que corresponde a um triângulo cujo os vértices são dados segundo (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) .

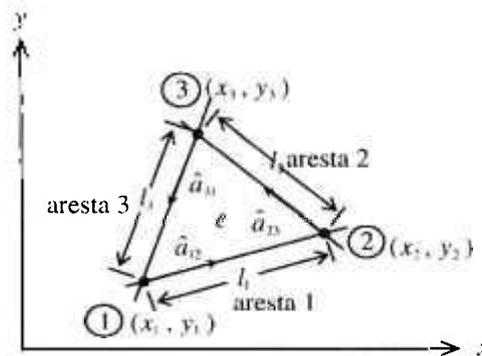


Figura D-I - Elemento triangular de primeira ordem utilizado para a construção dos elementos vetoriais de aresta.

Seja l_i^e ($i = 1, 2, 3$) o comprimento da aresta i , definido segundo

$$l_i^e = \left[(x_j^e - x_i^e)^2 + (y_j^e - y_i^e)^2 \right]^{1/2}, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (D-1)$$

O vetor unitário paralelo à direção de cada aresta é representado por \hat{a}_{ij}^e , onde

$$\hat{a}_{ij}^e = \frac{(x_i^e - x_j^e)\hat{a}_x + (y_i^e - y_j^e)\hat{a}_y}{\sqrt{(x_i^e - x_j^e)^2 + (y_i^e - y_j^e)^2}} \quad (D-2)$$

Define-se as funções de base vetoriais para elementos finitos triangulares de primeira ordem, segundo Whitney, por

$$\vec{W}_1(x, y) = l_1^e \left(N_1^e \vec{\nabla}_\perp N_2^e - N_2^e \vec{\nabla}_\perp N_1^e \right), \quad (D-3)$$

$$\vec{W}_2(x, y) = l_2^e \left(N_2^e \vec{\nabla}_\perp N_3^e - N_3^e \vec{\nabla}_\perp N_2^e \right), \quad (D-4)$$

$$\vec{W}_3(x, y) = l_3^e \left(N_3^e \vec{\nabla}_\perp N_1^e - N_1^e \vec{\nabla}_\perp N_3^e \right), \quad (D-5)$$

onde N_i^e ($i = 1, 2, 3$) é definido segundo

$$N_i^e(x, y) = \frac{1}{2\Delta^e} [a_i^e + b_i^e x + c_i^e y], \quad i = 1, 2, 3$$

Uma propriedade das funções vetoriais de base (D-3)-(D-5): que elas garantem a continuidade da componente tangencial dos campos na interface dos elementos, tendo em vista que

$$\vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{W}_i^e = \vec{\nabla}_\perp \cdot \left[l_i^e \left(N_i^e \vec{\nabla}_\perp N_j^e - N_j^e \vec{\nabla}_\perp N_i^e \right) \right]$$

e utilizando a definição de N_i^e , segue que

$$\vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{W}_i^e = l_i^e \left[(b_i^e \hat{a}_x + c_i^e \hat{a}_y) (b_j^e \hat{a}_x + c_j^e \hat{a}_y) - (b_j^e \hat{a}_x + c_j^e \hat{a}_y) (b_i^e \hat{a}_x + c_i^e \hat{a}_y) \right] = 0.$$

A propriedade $\vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{W}_i^e = 0$ garante a continuidade da componente tangencial dos campos entre elementos adjacentes mas permite a descontinuidade da componente normal, conforme ocorre no caso da interface entre materiais com características dielétricas distintas.

O campo $\vec{F}^e(x, y)$, que representa tanto o campo elétrico como magnético para o e -ésimo elemento é expandido segundo:

$$\vec{F}^e(x, y) = \vec{W}_1^e(x, y) F_1^e + \vec{W}_2^e(x, y) F_2^e + \vec{W}_3^e(x, y) F_3^e = \sum_{i=1}^3 \vec{W}_i^e(x, y) \cdot F_i^e, \quad (D-6)$$

ou na forma matricial

$$\vec{F}^e(x, y) = \begin{bmatrix} \vec{W}_1^e & \vec{W}_2^e & \vec{W}_3^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ F_3^e \end{bmatrix}$$

D.1 Construção dos elementos da matriz rigidez

De maneira similar ao que ocorre com os elementos nodais, para a construção dos elementos da matriz rigidez dos elementos serão necessários o desenvolvimento de algumas integrais. Sejam as integrais

$$\iint_{\Omega^e} \left(\vec{\nabla}_\perp \times \vec{W}_i^e \right) \cdot \left(\vec{\nabla}_\perp \times \vec{W}_j^e \right) dx dy \quad (D-7)$$

$$\iint_{\Omega^e} \vec{W}_i^e \cdot \vec{W}_j^e dx dy. \quad (D-8)$$

O desenvolvimento inicia-se a partir da expansão de $\vec{W}_i^e(x, y)$ em termos dos a_i^e , b_i^e e c_i^e , $i=1, 2, 3$:

$$\vec{W}_1^e(x, y) = l_1^e \left(N_1^e \vec{\nabla}_\perp N_2^e - N_2^e \vec{\nabla}_\perp N_1^e \right),$$

$$\vec{W}_2^e(x, y) = l_2^e \left(N_2^e \vec{\nabla}_\perp N_3^e - N_3^e \vec{\nabla}_\perp N_2^e \right),$$

$$\vec{W}_3^e(x, y) = l_3^e \left(N_3^e \vec{\nabla}_\perp N_1^e - N_1^e \vec{\nabla}_\perp N_3^e \right),$$

onde

$$N_1^e(x, y) = \frac{1}{2\Delta^e} [a_1^e + b_1^e x + c_1^e y], \quad \vec{\nabla}_\perp N_1^e(x, y) = \frac{1}{2\Delta^e} [b_1^e \hat{a}_x + c_1^e \hat{a}_y],$$

$$N_2^e(x, y) = \frac{1}{2\Delta^e} [a_2^e + b_2^e x + c_2^e y], \quad \vec{\nabla}_\perp N_2^e(x, y) = \frac{1}{2\Delta^e} [b_2^e \hat{a}_x + c_2^e \hat{a}_y],$$

$$N_3^e(x, y) = \frac{1}{2\Delta^e} [a_3^e + b_3^e x + c_3^e y], \quad \vec{\nabla}_\perp N_3^e(x, y) = \frac{1}{2\Delta^e} [b_3^e \hat{a}_x + c_3^e \hat{a}_y].$$

Substituindo em (D-3)-(D-5), pode-se escrever

$$\begin{aligned} \vec{W}_1^e &= \frac{l_1^e}{(2\Delta^e)^2} \left[\left(a_1^e + b_1^e x + c_1^e y \right) \left(b_2^e \hat{a}_x + c_2^e \hat{a}_y \right) - \left(a_2^e + b_2^e x + c_2^e y \right) \left(b_1^e \hat{a}_x + c_1^e \hat{a}_y \right) \right] \\ &= \frac{l_1^e}{(2\Delta^e)^2} \left[\left(a_1^e b_2^e - a_2^e b_1^e \right) + \left(c_1^e b_2^e - c_2^e b_1^e \right) y \right] \hat{a}_x + \left[\left(a_1^e c_2^e - a_2^e c_1^e \right) + \left(b_1^e c_2^e - b_2^e c_1^e \right) x \right] \hat{a}_y, \\ \vec{W}_2^e &= \frac{l_2^e}{(2\Delta^e)^2} \left[\left(a_2^e b_3^e - a_3^e b_2^e \right) + \left(c_2^e b_3^e - c_3^e b_2^e \right) y \right] \hat{a}_x + \left[\left(a_2^e c_3^e - a_3^e c_2^e \right) + \left(b_2^e c_3^e - b_3^e c_2^e \right) x \right] \hat{a}_y, \\ \vec{W}_3^e &= \frac{l_3^e}{(2\Delta^e)^2} \left[\left(a_3^e b_1^e - a_1^e b_3^e \right) + \left(c_3^e b_1^e - c_1^e b_3^e \right) y \right] \hat{a}_x + \left[\left(a_3^e c_1^e - a_1^e c_3^e \right) + \left(b_3^e c_1^e - b_1^e c_3^e \right) x \right] \hat{a}_y, \end{aligned}$$

ou, em termos gerais,

$$\vec{W}_i = \frac{t_i^e}{(2\Delta^e)^2} \left\{ \begin{matrix} (a_i^e b_j^e - a_j^e b_i^e) + (c_i^e b_j^e - c_j^e b_i^e) y \\ (a_i^e c_j^e - a_j^e c_i^e) + (b_i^e c_j^e - b_j^e c_i^e) x \end{matrix} \right\} \hat{a}_i^e \quad (D-9)$$

Tendo-se obtido uma expressão para os $\vec{W}_i(x, y)$ ($i = 1, 2, 3$) em termos dos a_i^e , b_i^e e c_i^e pode-se então desenvolver as expressões para $\vec{\nabla}_\perp \times \vec{W}_i(x, y)$ e $\vec{W}_i \cdot \vec{W}_j$.

Seja o desenvolvimento de $\vec{\nabla}_\perp \times \vec{W}_i(x, y)$ e $\vec{W}_i \cdot \vec{W}_j$: substituindo a expressão (D-9) para o cálculo do rotacional de \vec{W}_i , pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_\perp \times \vec{W}_i(x, y) &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{a}_y \right] \times \frac{t_i^e}{(2\Delta^e)^2} \left\{ \begin{matrix} (a_i^e b_j^e - a_j^e b_i^e) + (c_i^e b_j^e - c_j^e b_i^e) y \\ (a_i^e c_j^e - a_j^e c_i^e) + (b_i^e c_j^e - b_j^e c_i^e) x \end{matrix} \right\} \hat{a}_i^e \\ &= \frac{t_i^e}{(2\Delta^e)^2} \left\{ \begin{matrix} -(c_i^e b_j^e - c_j^e b_i^e) \hat{a}_z \\ (b_i^e c_j^e - b_j^e c_i^e) \hat{a}_z \end{matrix} \right\} \\ \vec{\nabla}_\perp \times \vec{W}_i(x, y) &= \frac{t_i^e}{(2\Delta^e)^2} 2 \begin{pmatrix} b_i^e c_j^e - b_j^e c_i^e \end{pmatrix} \hat{a}_z, \\ \vec{\nabla}_\perp \times \vec{W}_i(x, y) &= \frac{t_i^e}{2(\Delta^e)^2} \begin{pmatrix} b_i^e c_j^e - b_j^e c_i^e \end{pmatrix} \hat{\rho}. \end{aligned} \quad (D-10)$$

Outro resultado de relevância é o produto escalar de $\left(\vec{\nabla}_\perp \times \vec{W}_i \right) \cdot \left(\vec{\nabla}_\perp \times \vec{W}_j \right)$.

$$\left(\vec{\nabla}_\perp \times \vec{W}_i(x, y) \right) \cdot \left(\vec{\nabla}_\perp \times \vec{W}_j(x, y) \right) = \frac{t_i^e t_j^e}{4(\Delta^e)^2} \begin{pmatrix} b_i^e c_j^e - b_j^e c_i^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_j^e c_i^e - b_i^e c_j^e \end{pmatrix} \quad (D-11)$$

onde $i=1, 2, 3$ e $p=1, 2, 3$. Pode-se observar que todos os termos são constantes, isto é, não dependem de x ou y .

Portanto, o (i, p) da matriz rigidez é dado por

$$\iint_{\Delta^e} (\vec{\nabla}_{\perp} \times \vec{W}_i^e) \cdot (\vec{\nabla}_{\perp} \times \vec{W}_p^e) dx dy = \frac{l_i^e l_p^e}{4(\Delta^e)^2} \left(b_i^e c_j^e - b_j^e c_i^e \right) \left(b_p^e c_q^e - b_q^e c_p^e \right) \quad (D-12)$$

onde utilizou-se o resultado na integral (B-12). A matriz rigidez completa tem a seguinte forma:

$$\frac{1}{4(\Delta^e)^2} \begin{bmatrix} l_1^e l_1^e \left(b_1^e c_2^e - b_2^e c_1^e \right) & l_1^e l_2^e \left(b_1^e c_2^e - b_2^e c_1^e \right) \left(b_2^e c_3^e - b_3^e c_2^e \right) & l_1^e l_3^e \left(b_1^e c_2^e - b_2^e c_1^e \right) \left(b_3^e c_1^e - b_1^e c_3^e \right) \\ l_2^e l_1^e \left(b_2^e c_3^e - b_3^e c_2^e \right) \left(b_1^e c_2^e - b_2^e c_1^e \right) & l_2^e l_2^e \left(b_2^e c_3^e - b_3^e c_2^e \right)^2 & l_2^e l_3^e \left(b_2^e c_3^e - b_3^e c_2^e \right) \left(b_3^e c_1^e - b_1^e c_3^e \right) \\ l_3^e l_1^e \left(b_3^e c_1^e - b_1^e c_3^e \right) \left(b_1^e c_2^e - b_2^e c_1^e \right) & l_3^e l_2^e \left(b_3^e c_1^e - b_1^e c_3^e \right) \left(b_2^e c_3^e - b_3^e c_2^e \right) & l_3^e l_3^e \left(b_3^e c_1^e - b_1^e c_3^e \right)^2 \end{bmatrix} \quad (D-13)$$

Desenvolvimento do produto escalar $\vec{W}_i^e \cdot \vec{W}_j^e$:

Utilizando (D-9), rescrita novamente a seguir, pode-se escrever:

$$\vec{W}_i^e = \frac{l_i^e}{(2\Delta^e)^2} \left\{ \left[\left(a_i^e b_j^e - a_j^e b_i^e \right) + \left(c_i^e b_j^e - c_j^e b_i^e \right) y \right] \hat{a}_x + \left[\left(a_i^e c_j^e - a_j^e c_i^e \right) + \left(b_i^e c_j^e - b_j^e c_i^e \right) x \right] \hat{a}_y \right\}$$

e

$$\vec{W}_p^e = \frac{l_p^e}{(2\Delta^e)^2} \left\{ \left[\left(a_p^e b_q^e - a_q^e b_p^e \right) + \left(c_p^e b_q^e - c_q^e b_p^e \right) y \right] \hat{a}_x + \left[\left(a_p^e c_q^e - a_q^e c_p^e \right) + \left(b_p^e c_q^e - b_q^e c_p^e \right) x \right] \hat{a}_y \right\}$$

Portanto $\vec{W}_i^e \cdot \vec{W}_p^e$ será dado por

$$f_{xy} = \left[\left(c_i^e b_i^e - c_j^e b_j^e \right) \left(c_p^e b_q^e - c_q^e b_p^e \right) \right],$$

e as integrais são dadas segundo (B-12), (B-13), (B-14), (B-16) e (B-17), indicadas a seguir:

$$\iint_{\Delta^e} dx dy = \Delta^e, \tag{B-12}$$

$$\iint_{\Delta^e} x dx dy = \Delta^e \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \tag{B-13}$$

$$\iint_{\Delta^e} y dx dy = \Delta^e \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \tag{B-14}$$

$$\iint_{\Delta^e} x^2 dx dy = \frac{\Delta^e}{6} \left[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1(x_2 + x_3) + x_2x_3 \right], \tag{B-16}$$

$$\iint_{\Delta^e} y^2 dx dy = \frac{\Delta^e}{6} \left[y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_1(y_2 + y_3) + y_2y_3 \right]. \tag{B-17}$$

Para exemplificar numericamente encontram-se, a seguir, alguns exemplos numéricos.

Exemplo 1:

Seja o triângulo representado na Fig. D-II um triângulo retângulo possuindo as coordenadas (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) iguais a $(0; 0)$, $(0,5; 0)$ e $(0,5; 0,5)$, respectivamente.

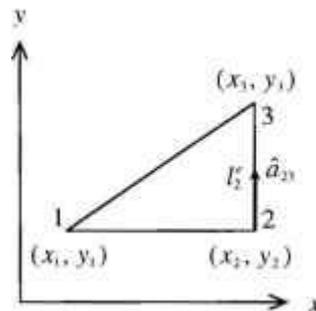


Figura D-II - Geometria e coordenadas cartesianas de um elemento triangular do tipo triângulo retângulo para cálculo das integrais (D-13) e (D-15).

Neste caso, aplicando-se (D-13) e utilizando os valores das coordenadas, a contribuição para a matriz rigidez do elemento pode ser escrita como:

$$\iint_{\Omega^e} \begin{pmatrix} \vec{\nabla}_{\perp} \times \vec{W}_i \\ \vec{\nabla}_{\perp} \times \vec{W}_p \end{pmatrix} dxdy = \begin{bmatrix} 2,000 & 2,000 & 2,828 \\ 2,000 & 2,000 & 2,828 \\ 2,828 & 2,828 & 4,000 \end{bmatrix}$$

$$\iint_{\Omega^e} \vec{W}_i \cdot \vec{W}_p dxdy = \begin{bmatrix} 0,083 & -0,042 & 0,000 \\ -0,042 & 0,083 & 0,000 \\ 0,038 & 0,000 & 0,083 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2:

Seja o triângulo de vértices 123, representado na Fig. D-III, e de coordenadas iguais a (0,177; 0,177), (0,325; 0,188) e (0,188; 0,325).

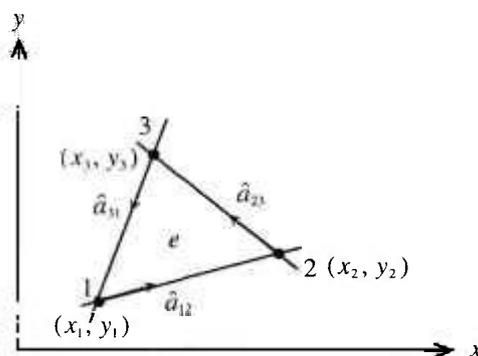


Figura D-III - a) Elemento triangular e respectivas coordenadas.

Neste caso as contribuições de cada aresta para a matriz rigidez correspondem a:

$$\iint_{\Omega^e} \begin{pmatrix} \vec{\nabla}_{\perp} \times \vec{W}_i^e \\ \vec{\nabla}_{\perp} \times \vec{W}_p^e \end{pmatrix} dxdy = \begin{bmatrix} 2,022 & 2,640 & 2,022 \\ 2,640 & 3,447 & 2,640 \\ 2,022 & 2,640 & 2,022 \end{bmatrix}$$

$$\iint_{\Omega^e} \vec{W}_i \cdot \vec{W}_p dxdy = \begin{bmatrix} 0,040 & 0,025 & 0,017 \\ -0,001 & 0,007 & -0,001 \\ 0,031 & 0,025 & 0,027 \end{bmatrix}$$

Neste caso, aplicando-se (D-13) e utilizando os valores das coordenadas, a contribuição para a matriz rigidez do elemento pode ser escrita como:

$$\iint_{\Omega^e} \left(\vec{\nabla}_{\perp} \times \vec{W}_i^e \right) \left(\vec{\nabla}_{\perp} \times \vec{W}_p^e \right) dx dy = \begin{bmatrix} 2,000 & 2,000 & 2,828 \\ 2,000 & 2,000 & 2,828 \\ 2,828 & 2,828 & 4,000 \end{bmatrix}$$

$$\iint_{\Omega^e} \vec{W}_i^e \cdot \vec{W}_p^e dx dy = \begin{bmatrix} 0,083 & -0,042 & 0,000 \\ -0,042 & 0,083 & 0,000 \\ 0,038 & 0,000 & 0,083 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2:

Seja o triângulo de vértices 123, representado na Fig. D-III, e de coordenadas iguais a (0,177; 0,177), (0,325; 0,188) e (0,188; 0,325).

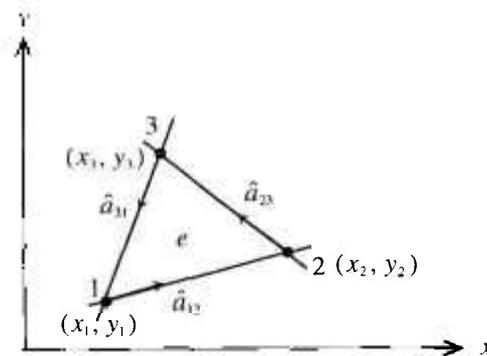


Figura D-III - a) Elemento triangular e respectivas coordenadas.

Neste caso as contribuições de cada aresta para a matriz rigidez correspondem a:

$$\iint_{\Omega^e} \left(\vec{\nabla}_{\perp} \times \vec{W}_i^e \right) \left(\vec{\nabla}_{\perp} \times \vec{W}_p^e \right) dx dy = \begin{bmatrix} 2,022 & 2,640 & 2,022 \\ 2,640 & 3,447 & 2,640 \\ 2,022 & 2,640 & 2,022 \end{bmatrix}$$

$$\iint_{\Omega^e} \vec{W}_i^e \cdot \vec{W}_p^e dx dy = \begin{bmatrix} 0,040 & 0,025 & 0,017 \\ -0,001 & 0,007 & -0,001 \\ 0,031 & 0,025 & 0,027 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3:

Sejam dois triângulos $e = 1$ e $e = 2$ de vértices 123, representados na Fig. D-IV, fazendo fronteira entre si pela aresta l_2 e possuindo o triângulo 1 coordenadas iguais a $(0,177; 0,177)$, $(0,325; 0,188)$ e $(0,188; 0,325)$ e o triângulo 2 $(0,354; 0,354)$, $(0,188; 0,325)$ e $(0,325; 0,188)$, respectivamente. Deve-se considerar ainda que estes triângulos possuem as mesmas características elétricas na região de fronteira e que suas respectivas áreas sejam diferentes uma da outra.

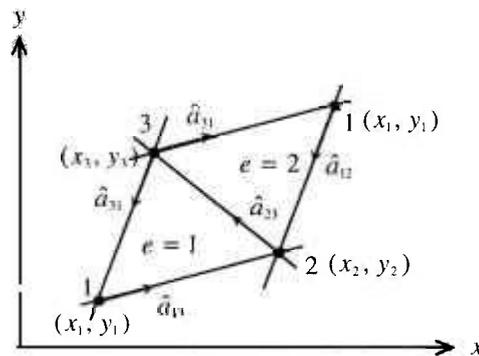


Figura D-IV - Elementos triangulares ($e = 1$ e $e = 2$) com uma aresta de interface entre si.

Neste caso as contribuições para a matriz rigidez do elemento 1 e para a matriz rigidez do elemento 2 podem ser escritas, respectivamente, como:

$$\iint_{\Omega^e} (\vec{\nabla}_{\perp} \times \vec{W}_i^e) \cdot (\vec{\nabla}_{\perp} \times \vec{W}_p^e) dx dy = \begin{bmatrix} 2,022 & 2,640 & 2,022 \\ 2,640 & 3,447 & 2,640 \\ 2,022 & 2,640 & 2,022 \end{bmatrix}$$

$$\iint_{\Omega^e} (\vec{\nabla}_{\perp} \times \vec{W}_i^e) \cdot (\vec{\nabla}_{\perp} \times \vec{W}_p^e) dx dy = \begin{bmatrix} 2,126 & 2,444 & 2,126 \\ 2,444 & 2,810 & 2,444 \\ 2,126 & 2,444 & 2,126 \end{bmatrix}$$

$$\iint_{\Omega^e} \vec{W}_i^e \cdot \vec{W}_p^e dx dy = \begin{bmatrix} 0,040 & 0,025 & 0,017 \\ -0,001 & 0,007 & -0,001 \\ 0,031 & 0,025 & 0,027 \end{bmatrix}$$

$$\iint_{\Omega^e} \vec{W}_i^e \cdot \vec{W}_p^e dx dy = \begin{bmatrix} 0,030 & 0,053 & 0,039 \\ -0,002 & 0,005 & -0,003 \\ 0,020 & 0,053 & 0,049 \end{bmatrix}$$

APÊNDICE E – Algoritmos de Lanczos para o problema do autovalor generalizado

E.1. Introdução

Neste apêndice discute-se os procedimentos de Lanczos que foram utilizados para a construção do código para a determinação dos autovalores do problema generalizado. Conforme mencionou-se na Introdução deste trabalho, a escolha dos algoritmos de Lanczos deveu-se aos seguintes fatores:

- as matrizes A e B apresentam elevado grau de esparsidade;
- somente alguns poucos autovalores são necessários;
- as matrizes A e B são de ordem elevada ($N > 104$); e
- limitação na capacidade de memória computacional disponível, e desta forma, tendo em vista o elevado grau de esparsidade do problema, foi possível trabalhar com as matrizes em sua forma compactada. Os algoritmos de Lanczos são extremamente convenientes para este tipo de problema.

O apêndice está organizado da seguinte forma: Inicialmente apresenta-se algumas definições básicas da álgebra matricial, seguido dos procedimentos de Lanczos. Finalmente faz-se uma breve apresentação da técnica da iteração inversa para a obtenção do autovetor associado ao autovalor obtido por meio do procedimento de Lanczos.

E.2. Algoritmos de Lanczos

Nesta seção discute-se dois dos algoritmos de Lanczos para a construção da matriz tridiagonal T. Inicialmente aborda-se o problema do autovalor ordinário e seguir problema do autovalor generalizado.

Seja o problema do autovalor ordinário

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}, \quad (\text{E.1})$$

onde A é uma matriz simétrica de ordem N. Define-se uma matriz tridiagonal T como aquela onde seus elementos satisfazem a seguinte relação.

$$t_{ij} = 0 \quad \text{para } |i - j| > 1. \quad (\text{E.2})$$

elementos α_i e β_i . Os vetores de Ritz no subespaço K_m são os vetores de $\bar{x}^{(m)}$, onde $\bar{x}^{(m)}$ são os autovetores de T_m .

Para a construção da matriz T de Lanczos, seja Q uma matriz ortogonal, isto é, a inversa de Q , Q^{-1} é igual a sua transposta Q' , $Q^{-1} = Q'$, construída de tal maneira que $T = Q' A Q$, e que $Q \equiv (\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_N) = (\bar{q}_1, A\bar{q}_1, A^2\bar{q}_1, \dots, A^{m-1}\bar{q}_1) = K_m$, onde os vetores \bar{q}_i satisfazem a seguinte relação de ortogonalidade $\bar{q}_i \cdot \bar{q}_j = \delta_{ij}$. O conjunto de vetores ortogonais $\{\bar{q}_i\}$ e a matriz tridiagonal T pode ser construída se for observado que

$$QT = AQ \quad (\text{E.7})$$

e igualando a j -ésima coluna da cada lado da Eq.(E.7), e usando o fato de que a j -ésima coluna de T apresenta somente três elementos não nulos, obtém-se a seguinte relação de recorrência

$$\bar{q}_{j+1}\beta_j = A\bar{q}_j - \bar{q}_j\alpha_j - \bar{q}_{j-1}\beta_{j-1} \equiv \bar{r}_j. \quad (\text{E.8})$$

Utilizando a relação de ortogonalidade dos vetores $\bar{q}_i \cdot \bar{q}_j = \delta_{ij}$, e a Eq. (E.8) pode-se escrever, o seguinte algoritmo:

1. $\bar{u}_j \leftarrow A\bar{q}_j$
2. $\bar{r}_j \leftarrow \bar{u}_j - \bar{q}_{j-1}\beta_{j-1}$, $\beta_0 = 0$, por definição.
3. $\alpha_j \leftarrow \bar{q}_j^T \cdot \bar{r}_j$
4. $\bar{r}_j \leftarrow \bar{r}_j - \alpha_j \bar{q}_j$
5. $\beta_j = \|\bar{q}_{j+1}\beta_j\| = \|\bar{r}_j\|$
6. $\bar{q}_{j+1} = \frac{\bar{r}_j}{\beta_j}$, desde que $\beta_j > 0$, por hipótese.

7. Verifica a convergência. Se convergiu interrompe o processo. Caso contrário retorna para 1 para mais uma iteração.

Deste modo, fazendo $\beta_0 = 0$, e se \bar{q}_1 for especificado, então, $\alpha_1, \bar{r}_1, \beta_1$ e \bar{q}_2 são determinados, e por indução finita todos os elementos da matriz tridiagonal T são construídos. Em geral, \bar{q}_1 é um vetor construídos a partir de números aleatórios.

Considere o problema do autovalor generalizado expresso segundo

Análise via simulação computacional de uma estrutura de ondas lentas

$$A\bar{x} = \lambda B\bar{x}, \quad (\text{E.9})$$

onde A e B são matrizes simétricas de ordem N e B é uma matriz definida positiva, isto é, para qualquer vetor não nulo \bar{x} , tem-se a seguinte relação: $\bar{x}' B \bar{x} > 0$ e a matriz B possui decomposição de Choleski, $B = LL^T$. De maneira análoga ao procedimento apresentado para o problema do autovalor ordinário, pode-se escrever

$$(A - \lambda^{(m)} B)\bar{x}^{(m)} \perp \bar{q}_j \text{ para } j = 1, 2, \dots, m. \quad (\text{E.10})$$

Multiplicando a equação acima por Q_m pela direita e por Q_m^T

$$(Q_m^T A Q_m - \lambda^{(m)} Q_m^T B Q_m) Q_m^T \bar{x}^{(m)} = \bar{0} \quad (\text{E.11})$$

$$(T_m - \lambda^{(m)} I) \bar{y}^{(m)} = \bar{0} \quad (\text{E.12})$$

onde $\bar{y}^{(m)} = Q_m^T \bar{x}^{(m)}$. Neste caso os vetores de Krylov são construídos segundo, $\bar{q}_1, (B^{-1}A)\bar{q}_1, (B^{-1}A)^2\bar{q}_1, \dots, (B^{-1}A)^{m-1}\bar{q}_1$, e varrem o subespaço de Krylov, onde a matriz T_m será construída. A matriz T_m pode ser construída por indução a partir da relação de recorrência Eq. (E.8), escrita para a matriz $C = L^{-1}AL^{-T}$, com o índice dos β acrescido de uma unidade,

$$\bar{q}_{j+1}\beta_{j+1} = C\bar{q}_j - \bar{q}_j\alpha_j - \bar{q}_{j-1}\beta_j \equiv \bar{r}_j \quad (\text{E.13})$$

ou

$$\bar{q}_{j+1}\beta_{j+1} = L^{-1}AL^{-T}\bar{q}_j - \bar{q}_j\alpha_j - \bar{q}_{j-1}\beta_j \equiv \bar{r}_j.$$

Tendo em vista que $1 = LL^{-1} = L^{-1}L = (LL^{-1})^T = L^{-T}L^T = L^T L^{-T}$, pode-se escrever a relação acima como

$$L^T (L^{-T} \bar{q}_{j-1}) \beta_{j+1} = L^{-1}AL^{-T}\bar{q}_j - L^T (L^{-T} \bar{q}_j) \alpha_j - L^T (L^{-T} \bar{q}_{j-1}) \beta_j \equiv \bar{r}_j,$$

definido o vetor $\bar{w}_j \equiv L^{-T} \bar{q}_{j+1}$

$$L^T \bar{w}_{j+1} \beta_{j+1} = L^{-1} A \bar{w}_j - L^T \bar{w}_j \alpha_j - L^T \bar{w}_{j-1} \beta_j \equiv \bar{r}_j$$

Multiplicando ambos os lados por L pela esquerda e observando que $B = LL^T$

$$\beta_{j+1} B \bar{w}_{j+1} = A \bar{w}_j - \alpha_j B \bar{w}_j - \beta_j B \bar{w}_{j-1} \equiv L \bar{r}_j \quad (\text{E.14})$$

A relação de ortogonalidade neste caso é construída segundo

$$\delta_{ij} = \bar{q}_i^T \cdot \bar{q}_j = (\bar{w}_i^T L) \cdot (L^T \bar{w}_j) = \bar{w}_i^T \cdot LL^T \bar{w}_j = \bar{w}_i^T \cdot B \bar{w}_j \quad (\text{E.15})$$

Com ajuda da relação de ortogonalidade os elementos da matriz tridiagonal T_m

$$1. \bar{q}_j \leftarrow \frac{\bar{u}_j}{\beta_j}$$

$$2. \bar{q}_j \leftarrow A \bar{q}_j$$

$$3. \bar{u}_j \leftarrow A \bar{q}_j - \bar{p}_j \beta_j, \quad \beta_0 = 0, \text{ por definição.}$$

$$4. \alpha_j \leftarrow \bar{q}_j^T \cdot \bar{u}_j$$

$$5. \bar{p}_j \leftarrow \frac{\bar{r}_j}{\beta_j}$$

$$6. \bar{r}_j \leftarrow \bar{u}_j - \bar{p}_j \alpha_j$$

$$7. \bar{u}_j \leftarrow B^{-1} \bar{r}_j$$

$$8. \beta_{j+1} \leftarrow \sqrt{\bar{u}_j^T \cdot \bar{r}_j} \text{ desde que } \beta_j > 0, \text{ por hipótese.}$$

9. Verifique a convergência. Se convergiu interrompa o processo. Caso contrário retorne para 1 para mais uma iteração.

Pode-se observar que para a construção da matriz tridiagonal, a operação da multiplicação de matriz pelo vetor, $A \bar{w}_j$ e $B \bar{w}_j$ é realizada inúmeras vezes. Em termos computacionais, esta operação é realizada de maneira muito eficiente utilizando técnicas de armazenamento de matrizes esparsas. Na Tab. E.1 apresenta-se um mapa comparativo da quantidade de memória necessária para o armazenamento de dados para uma simulação de uma

estrutura de ondas lentas utilizando-se 4346 arestas incógnitas, utilizando diferentes técnicas de armazenamento.

Tabela E.1 - Comparação entre as técnicas de armazenamento para utilização dos algoritmos de Lanczos

Ordem da matriz	4346	
Número total de elementos	18.887.716	
Número de elementos não nulos da matriz A de Floquet armazenado na forma compactada	Vetor real	159.494
	Vetor inteiro	159.494
Número de elementos não nulos da matriz B de Floquet armazenado na forma compactada	Vetor real	40.250
	Vetor inteiro	40.250
Número de elementos não nulos da matriz $C = L^{-1}AL^T$ de Floquet armazenado na forma compactada	Vetor real	3.087.060
	Vetor inteiro	3.087.060

E.3. Iteração inversa

O processo de iteração inversa baseia-se na seguinte idéia. Escrevendo a Eq. (E.12)

$$(A - \lambda^{(i)} B) \bar{x} = \bar{b}, \tag{E.16}$$

onde $\lambda^{(i)}$ é um autovalor de interesse obtido pelo algoritmo de Lanczos. Então se o vetor b for escolhido a partir de um vetor aleatório a Eq. (E.16) pode ser iterada, $\bar{b} \leftarrow \bar{x}$. A convergência deste método, via de regra é muito eficiente.

Pierce Model for TWT Gain Analysis and Experimental Measurements

Cláudio C. Motta,

Centro Tecnológico da Marinha em São Paulo, CTMSP, Av. Prof. Lineu Prestes 2242. São Paulo - SP - 05508.900

Eik Tenório and Paulo R. Pascholati

Laboratório do Acelerador Linear, LAL, IFUSP, Rua do Matão, Travessa R 187. São Paulo - SP - 05508.900

Abstract— This work reports experimental and theoretical results from research into X-band traveling-wave tube amplifier design. A suitable microwave slow-wave circuit is investigated through the solution of dispersion equation. For this end a numerical solution for dispersion equation, following the Pierce approach, has been carried on and a mean gain of 20 dB has been obtained. The cathode perveance measured is 0.2 μ Perveance and the life time of the cathode is also investigated and reported in this work. The dependence of the traveling-wave tube gain as function of the microwave frequency at X-band is also investigated.

Key words— Traveling wave tube, microwave electron devices, microwave tubes, thermoionic cathode.

I. INTRODUCTION

It is well known that the traveling-wave tube amplifier (TWT) has a property of a relatively constant gain over an octave of frequency or band of operation. The use of TWT is very attractive when compared with the use the other microwave tubes like klystrons and magnetrons. TWT are largely used in telecommunication links, satellites communication and radar systems. The TWT features come from of its particular mechanism of interaction of electron beam with the slow-wave structure. A general suitable slow-wave structure is obtained from a helix tape. As a helix tape is not a tuned circuit, TWT is considered a broad band device. In addition, the slow-wave structure is able to reduce the phase velocity of the electromagnetic making it equal to the velocity of the electron beam. This effect increases the interaction parameter between the electromagnetic field and the electron beam, so these TWT features provide devices with gains of 30 to 50 dB over a broad band in frequency.

In this work we describe the design and performance of a X-band traveling wave tube amplifier that has been developed in our laboratory at Centro Tecnológico da Marinha em São Paulo, (CTMSP). It is investigated a suitable microwave slow-wave circuit through the solution of the dispersion equation. The cathode life time and cathode perveance is also investigated and reported. The dependence of the TWT gain as function of the microwave frequency at X-band was also investigated.

teik@if.usp.br, pascholati@if.usp.br, Tel 55-11-8177142, Fax 55-11-8144695; cemotta@net.ipen.br, Tel. 55-11-8177256, Fax 55-11-8144695.

This work has been supported in part by Fundação Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), proc. number 99/06087-1.

This paper is organized as follows: In Section II, a TWT theory amplification following a linearized model is outlined. In Section III, a solution of dispersion equation TWT helix is presented. In Section IV, the major cathode thermoionic features are discussed. In Section V, the general results of TWT performance are shown. Conclusions are found in Section VI.

II. TWT AMPLIFICATION THEORY

The interaction between the electromagnetic field sustained by TWT helix and the electron beam that moves away from the cathode region toward to the collector can be adequately described by Lorentz force as the resultant force in the motion equation [1]-[3],

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}_i \cdot \nabla) \right] \rho v_i = n_c e [\vec{E} + (\vec{v}_i \times \vec{B})]. \quad (1)$$

where \vec{v}_i is the electron beam velocity, ρ_i is the charge density, n_c is the electron number density, m_e is the electron mass, e is the electron charge. The electric and magnetic fields are denoted by \vec{E} and \vec{B} , respectively. Equation (1) can be linearized by using the perturbation theory, i. e., the time dependent quantities can be considered as a small variation around the dc values. These values are represented by subscript 0. So for this purpose one can write,

$$\vec{v}_i(\vec{r}, t) = \vec{v}_0 + \vec{v}(\vec{r}, t), \quad (2)$$

$$\rho_i(\vec{r}, t) = \rho_0 + \rho(\vec{r}, t), \quad (3)$$

$$\vec{B}_i(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 + \vec{B}(\vec{r}, t), \quad (4)$$

$$\vec{J}_i(\vec{r}, t) = \vec{J}_0 + \vec{J}(\vec{r}, t), \quad (5)$$

where \vec{J}_i is the total beam density current. Under this hypothesis, the first-order linearized motion beam equation (1) becomes

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \right] \vec{v} = -\frac{e}{m_e} [\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B}_0)]. \quad (6)$$

For the cylindric beam under consideration, \vec{B}_0 , the magnetic field produced by the external solenoid, with the purpose of avoiding the radial electron beam dispersion, can be

considered as large enough so the transverse components of $\vec{\nabla}_t$ must vanish, and the term $\vec{\nabla} \times \vec{B}_0$ in the (6) will also vanish. Thus $\vec{\nabla}$ has a component in the z direction only. In addition, under the assumption of a time dependence expressed in terms of $\exp(j\omega t)$ where $\omega = 2\pi f$ is the angular frequency, (6) gives,

$$j\omega v_z + v_0 \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{e}{m_e} E_z. \quad (7)$$

If $\vec{\nabla}$ has only a z component, the current density $\vec{J}_t = \rho_t \vec{v}_t$, with its two parts $\vec{J}_0 = \rho_0 \vec{v}_0$ and $\vec{J} = \rho \vec{v}_0 - \rho_0 \vec{v}$ having only a z component also. Furthermore \vec{J} and ρ are related by the continuity equation that under the time dependence expressed in terms of $\exp(j\omega t)$ becomes

$$\frac{\partial J_z}{\partial z} + j\omega \rho = 0. \quad (8)$$

Using (7) and (8) one can to express J_z as a E_z function. Since we are looking for a wave solution, we may assume that all small quantities have a z dependence in terms of $\exp(-j\beta z)$, so one finds that

$$J_z = -j \frac{\omega_p^2}{\omega (\beta_0 - \beta)} \beta_0 \epsilon_0 E_z, \quad (9)$$

where $\omega_p = (n_e e / m_e \epsilon_0)^{1/2}$ is the plasma frequency, $\beta_0 = \omega / v_0$ is the dc propagation constant for the electron beam and ϵ_0 is the electric permittivity of vacuum.

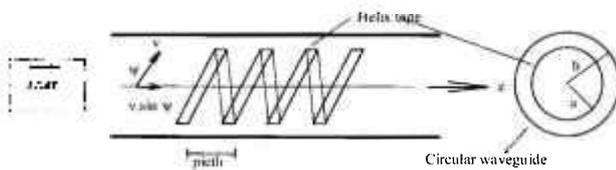


Figure 1 - A tape helix. p is the helix pitch, ψ is the pitch angle, a is the tape helix radius and b is the inner radius of circular waveguide.

The electric and magnetic fields in a slow-wave structure can be suitably described by the the magnetic vector potential \vec{A} . The magnetic vector potential satisfies the non-homogenic vectorial Helmholtz equation,

$$\nabla^2 \vec{A} + k_0^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \quad (10)$$

where $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ and μ_0 is the magnetic permeability of vacuum. The vector potential has only a z component due to the fact that the density beam current has only a z component.

Considering the z dependence expressed in terms of $\exp(-j\beta z)$, (10) becomes

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} A_z + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} A_z + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} A_z + (k_0^2 - \beta^2) A_z = -\mu_0 J_z \quad (11)$$

for the helix inner region, $0 \leq \rho \leq a$, where ρ is the radial coordinate, and a is the radius tape helix. The helix is considered as thickness. b is the inner radius of the circular waveguide. If (9) is used to solve J_z , then (10) can be written as

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} A_z + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} A_z + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} A_z + p^2 A_z = 0 \quad (12)$$

where

$$p^2 = (k_0^2 - \beta^2) \left[1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\beta_0}{\beta_0 - \beta} \right)^2 \right] \quad (13)$$

For the region between the helix outer region and the circular wave guide, $a \leq \rho \leq b$, $J_z = 0$, so that the Helmholtz equation for A_z is written as

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} A_z + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} A_z + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} A_z + (k_0^2 - \beta^2) A_z = 0 \quad (14)$$

The same equation is valid to the inner region of the tape helix without beam.

Equations (11) and (12) have to be solved with suitable boundary conditions. The helix is considered as a sheath helix that is an approximate model of a tape helix. The tape helix, see Fig. 1, consists of a tape wound into a helical structure. The pitch is denoted by p , and the pitch angle by ψ . If the spacing between turns and the tape width are made to approach zero, the resultant structure becomes electrically smooth. At the boundary surface ($\rho = a$) the boundary conditions for the electric field may be considered to be that the conductivity in the direction parallel to the tape is infinite ($\sigma_{||} = \infty$) whereas that in the direction perpendicular to the tape is zero ($\sigma_{\perp} = 0$). The use of these boundary conditions allows us obtain a solution for the electromagnetic field guided by the helix. This anisotropic conducting cylinder model of a tape helix is called the sheath helix. The field solution shows that the sheath helix supports a slow wave with a phase velocity $v_p = c \sin \psi$, where c is the light velocity.

Without electron beam in the inner region of helix, the field solution for the helix consists of both TE and TM modes since these are coupled together by the boundary conditions at $\rho = a$. Along the direction of the tape, the tangential electric field must vanish, since $\sigma_{||} = \infty$; thus

$$E_{z1} \cos \Psi + E_{\phi 1} \sin \Psi = E_{z2} \cos \Psi + E_{\phi 2} \sin \Psi \quad (15)$$

where the subscripts 1 and 2 refer to the field components in the two regions $0 \leq \rho \leq a$ and $a \leq \rho \leq b$. The component of the electric field on the cylindrical surface ($\rho = a$) that is perpendicular to the tape, must be continuous since $\sigma_{\perp} = 0$ in this direction. Hence

$$E_{z1} \cos \Psi - E_{\phi 1} \sin \Psi = E_{z2} \cos \Psi - E_{\phi 2} \sin \Psi \quad (16)$$

The component of \vec{H} tangential to the tape must also be continuous since no current flows perpendicular to the tape, so a third boundary condition is

$$H_{\phi 1} \cos \Psi + H_{z1} \sin \Psi = H_{\phi 2} \cos \Psi + H_{z2} \sin \Psi \quad (17)$$

Suitable expansions for the A_z in the two regions can be written as

$$A_z(\rho, \varphi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-jn\varphi} I_n(h\rho) e^{-\beta z} \quad \text{to } 0 \leq \rho \leq a \quad (18)$$

$$A_z(\rho, \varphi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{-jn\varphi} K_n(h\rho) e^{-\beta z} \quad \text{to } a \leq \rho \leq b \quad (19)$$

where $I_n(h\rho)$ and $K_n(h\rho)$ are the modified Bessel's functions [10]. The electric and magnetic fields components for the TE and TM mode can be obtained from (17) and (18). In the presence of an electron beam that propagates in direction of the helix axis, and for an electron beam with axially confined flow, where only a z component of velocity is permitted, the TE modes, $0 \leq \rho \leq a$ region, are not affected by the electron beam since these have $E_z = 0$, and then they are the same the ones that exist without a beam. For the $a \leq \rho \leq b$, region the TE and TM modes are the same modes in view that in this region there is no beam. On the other hand, the TM mode in $0 \leq \rho \leq a$ will have its eigenvalues given by (13). In view of that fact, we are trying to find a wave solution that corresponds to a growing wave, in which the eigenvalue p^2 will turn out negative and it will be replaced by $-g^2$, so

$$g^2 = (\beta^2 - k_0^2) \left[1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\beta_0}{\beta_0 - \beta} \right)^2 \right] \quad (20)$$

For the sheath-helix model it is possible to find a solution for a field that satisfies the boundary conditions (16) through (18) for each integer n . For the present, we are interested in the solution $n = 0$, which has circular symmetry. The solution

for A_z is proportional to $I_0(h\rho)$ and since E_z is proportional to A_z , we can choose

$$E_z = a_0 I_0(g\rho) e^{-\beta z} \quad (21)$$

where a_0 is an amplitude constant. The field components E_{ρ} and H_{φ} can be found from Maxwell's equation,

$$E_z = \frac{j\beta}{\beta^2 - k_0^2} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \quad \text{and} \quad H_{\varphi} = \frac{k_0}{\beta} Y_0 E_{\rho}$$

Thus the expressions for the fields in the regions $0 \leq \rho \leq a$ and $a \leq \rho \leq b$ for the axially symmetric case are:

For the TM modes

i) $0 \leq \rho \leq a$

$$E_z = a_0 I_0(h\rho) e^{-\beta z} \quad (22)$$

$$E_{\rho} = \frac{j\beta z}{h} a_0 I_1(g\rho) e^{-\beta z} \quad (23)$$

$$H_{\varphi} = \frac{-j\omega\mu_0}{h} a_0 I_1(g\rho) e^{-\beta z} \quad (24)$$

ii) $a \leq \rho \leq b$

$$E_z = b_0 K_0(h\rho) e^{-\beta z} \quad (25)$$

$$E_{\rho} = \frac{j\beta}{h} b_0 K_1(h\rho) e^{-\beta z} \quad (26)$$

$$H_{\varphi} = \frac{j\omega\mu_0}{h} b_0 K_1(h\rho) e^{-\beta z} \quad (27)$$

For TE modes

i) $0 \leq \rho \leq a$

$$H_z = c_0 I_0(h\rho) e^{-\beta z} \quad (28)$$

$$H_{\rho} = \frac{j\beta}{h} c_0 I_1(h\rho) e^{-\beta z} \quad (29)$$

$$E_{\varphi} = \frac{-j\omega\mu_0}{h} c_0 I_1(h\rho) e^{-\beta z} \quad (30)$$

ii) $a \leq \rho \leq b$

$$H_z = d_0 K_0(h\rho) e^{-\beta z} \quad (31)$$

$$H_{\rho} = \frac{j\beta}{h} d_0 K_1(h\rho) e^{-\beta z} \quad (32)$$

$$E_{\varphi} = \frac{-j\omega\mu_0}{h} d_0 K_1(h\rho) e^{-\beta z} \quad (33)$$

where the eigenvalue is $h^2 = \beta^2 - k_0^2$.

The boundary conditions at $\rho = a$ for the sheath helix model are given by (15) through (17). These boundary

conditions when used with (22) through (33) together will result in the following homogeneous equation system

$$\begin{pmatrix} I_0(ga)\cos\psi & 0 & -\frac{j\omega\mu_0}{h} I_1(ga)\cos\psi & 0 \\ 0 & K_0(ha)\sin\psi & 0 & \frac{j\omega\mu_0}{h} K_1(ha)\cos\psi \\ I_0(ga)\cos\psi & -K_0(ha)\cos\psi & -\frac{j\omega\mu_0}{h} I_1(ga)\sin\psi & \frac{j\omega\mu_0}{h} K_1(ha)\sin\psi \\ \frac{j\omega\epsilon_0 g}{h^2} I_1(ga)\cos\psi & \frac{j\omega\epsilon_0 g}{h} K_1(ha)\cos\psi & I_0(ha)\sin\psi & -K_0(ha)\sin\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (34)$$

For a nontrivial solution the determinant (34) must vanish. So, equating the determinant to zero gives the following equation dispersion

$$I_0(ga) \frac{I_1(ga)}{I_0(ga)} = \frac{(ha)^3 \tan^2 \psi}{(k_0 a)^2} \left[\frac{I_0(ha)}{I_1(ha)} + \frac{K_0(ha)}{K_1(ha)} \right] - (ha) \frac{K_1(ha)}{K_0(ha)} \quad (35)$$

where the eigenvalues g and h are related by

$$(ga)^2 = (ha)^2 \left[1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\beta_0}{\beta_0 - \beta} \right)^2 \right] \quad (36)$$

and

$$(ha)^2 = (\beta a)^2 - (k_0 a)^2 \quad (37)$$

III. DISPERSION EQUATION SOLUTION

In this section is presented a solution of the dispersion equation for the helix structure. In order to solve the transcendental dispersion equation (35), the following approach is adopted. Since we are dealing with a slow-wave system, the square of propagation constant β^2 will be large when compared with k_0^2 , so $h^2 \approx \beta^2$. Additionally we assume that $\beta = \beta_0(1 + \delta)$, where δ is a small complex quantity. With this hypothesis, we can obtain a suitable complex propagation constant that corresponds to a growing wave. We choose δ as

$$\delta_1 = \frac{1}{4} \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^{\frac{2}{3}} (1 + j\sqrt{3}), \quad (38)$$

$$\delta_2 = \frac{1}{4} \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^{\frac{2}{3}} (1 - j\sqrt{3}), \quad (39)$$

so that $\delta^2 = \delta_1 \delta_2 = \frac{1}{4} \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^{\frac{4}{3}}$. It can be seen that with this

chosen δ^2 is a small quantity, because $\omega_p \ll \omega$. Therefore (36) can be written as

$$(ga)^2 = (ha)^2 \left[1 - 4 \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^{\frac{4}{3}} \right] \quad (40)$$

so that (35) can now be solved by iterative methods. The solution of (36) is shown in Fig.2.

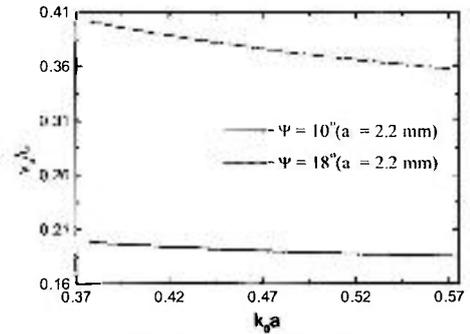


Figure 2. Dispersion equation solution

A third root for δ can be seen to be $\delta_3 = (1/2) \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^{\frac{2}{3}}$, and the correspondent propagation constants are

$$\beta_1 = \beta_0 \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^{\frac{2}{3}} (1 - j\sqrt{3}) \right] \quad (41)$$

$$\beta_2 = \beta_0 \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^{\frac{2}{3}} (1 + j\sqrt{3}) \right] \quad (42)$$

$$\beta_3 = \beta_0 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \quad (43)$$

and the growth constant α_p is, by (37), given by

$$\alpha_p = \beta_0 \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (44)$$

IV. TWT CATHODE

The approach used to design the TWT cathode is based on Pierce [4]. A numerical code based on Poisson equation and integration of electron motion equation was developed to carry on the electron path. In Fig. 3 is shown the perveance cathode curve of the TWT cathode [9].

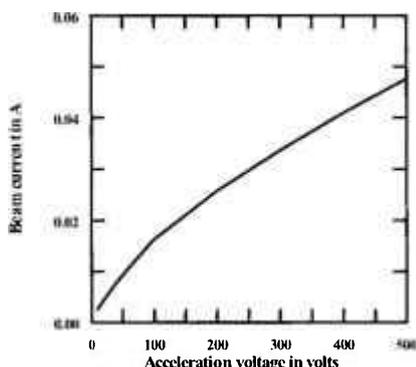


Figure 3 Cathode perveance curve.

Further details for the cathode design, cathode oxide and ultra high vacuum experimental techniques can be found elsewhere [7] [8].

V. RESULTS

Table I shows the main features of the TWT developed in our laboratory. The TWT was operated for hundreds of hours in a Marconi radar mainframe type 910 and during this time all the parameters have been constants [9].

TABLE I
MAIN FEATURES OF TWT

Quantity	Value
Helix length	290 mm
Helix radius	2.2 mm
Helix pitch	5 mm
Pitch angle	18°
Circular waveguide radius	4.8 mm
Mean beam current	120 mA
Typical anode voltage	30 kV
Duty cycle	2%
Mean heater power	50 W
Gain	20 dB
Frequency	x-band
Grid bias	500 V

Figure 4 shows the theoretical gain feature of TWT as a function of frequency, where it is assumed a 0.6 as plasma frequency reduction factor [11].

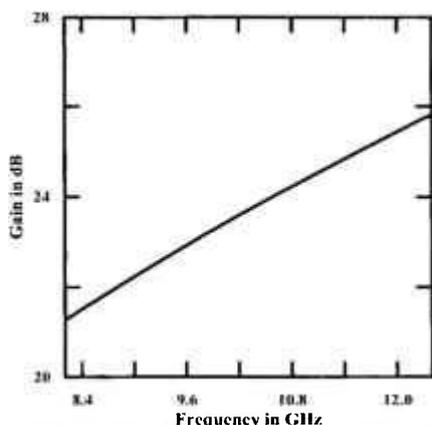


Figure 4. Theoretical gain curve with plasma frequency reduction factor 0.6 [11].

Figure 5 shows the TWT with the cathode disassembled.

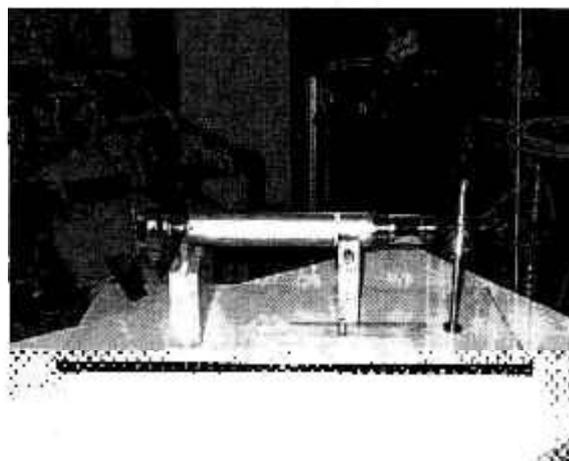


Figure 5 TWT with cathode disassembled.

VI. CONCLUSIONS

This paper presents the experimental and theoretical results from a research on X-band traveling wave tube amplifier designed and operated at CTMSP laboratory. It is investigated a suitable microwave slow-wave circuit through a solution of the dispersion equation. A iterative numerical solution for dispersion equation, following the Pierce approach, has been carried out and a mean gain of 20 dB has been obtained. The cathode perveance measured is 0.2 μ Perveance and until now the life time of the cathode is over 1000 operation hours.

REFERENCES

- [1] J. R. Pierce, "Theory of the beam-type traveling-wave tube", *Proc. IRE*, 35, 111. (1947).
- [2] J. R. Pierce, and L. M. Field, "Traveling-wave tubes", *Proc. IRE* 35, 108. (1947).
- [3] J. R. Pierce, *Traveling-Wave Tubes*. Van Nostrand, New York, 1950.
- [4] J. R. Pierce, *Theory and Design of Electron Beams*. Van Nostrand, New York, 1950.
- [5] R. E. Collin, *Foundations for Microwave Engineering*, 2nd ed., MacGraw-Hill, New York, 1992, chapters 8 and 9.
- [6] R. M. Bevensee, *Electromagnetic Slow Wave Systems*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1966.
- [7] C. C. Motta, R. R. Lima, J. Takahashi, and F. T. Degaspero, "Characterization of an ionic vacuum pump for microwave electron device application", to be published in *Brazilian Journal of Vacuum Applications*. (2000).
- [8] C. C. Motta and J. Takahashi, "Development of an electron gun for microwave devices", to be published in *Brazilian Journal of Vacuum Applications*. (2000).
- [9] C. C. Motta, "A pulsed 8kW X-band traveling-wave tube amplifier", in preparation, unpublished.
- [10] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, Inc. 3rd. ed. 1985, Chapter 11.
- [11] G. M. Branch and T. G. Mihran, "Plasma frequency reduction factors in electron beams", *IRE Trans.* Vol ED-2. pp. 3-11 (1955).

A Phase Shifter Analysis by the Finite Element Method

Eik Tenório[†], Paulo R. Pascholati*, and Cláudio C. Motta[†]

[†]Centro Tecnológico da Marinha em São Paulo, CTMSP, Av. Prof. Lineu Prestes 2468. São Paulo - SP - 05508.900

*Laboratório do Acelerador Linear, LAL, IFUSP, Rua do Matão, Travessa R 187. São Paulo - SP - 05315.970

Abstract — A numerical code based on the Finite Element Method (FEM) was developed to investigate the behavior of a phase shifter device for fundamental mode operation. The FEM was used to solve the two dimensional electromagnetic problem of the rectangular waveguide partially filled with a dielectric lossless slab. As a result of this investigation, it was possible to obtain some plot showing the propagation constant of the electromagnetic wave in function of the slab position and the electric permittivity ϵ_r of the material. The electrical field distribution of the lowest mode sustained by that structure is also presented. The solution was obtained by using the FEM with quadratic triangular shape functions and the Galerkin Weak Formulation. The numerical code was developed using C language.

Key words — Finite element method, microwave phase shifter, second-order triangular element, vector field distribution.

I. INTRODUCTION

A phase shifter is an instrument that produces an adjustable change in the phase angle of the wave transmitted through it. There is a variety of designs for phase shifters not only mechanically but also electronically adjustable type. Between the mechanically adjustable there are two main types. One uses a dielectric vane that rotates inside a circular waveguide and another in which the phase change is brought about by moving a long dielectric slab laterally across the interior of the rectangular waveguide. Many applications of phase shifters such as phased array antennas and microwave interferometers can be found [1]-[4].

In this work we investigated the field problem of the rectangular waveguide loaded with a lossless dielectric slab that partially fills the waveguide cross section. The solution is obtained from homogeneous Helmholtz equation that results in the propagation constant of the electromagnetic wave of guiding structure. When the problem is solved for different slab positions, different propagation constants are obtained so that a phase angle shift occurs. The phase angle shift can also be obtained by changing the dielectric material and hence, the electric permittivity. The field problem is solved in order to obtain the eigenvalue spectrum and the electric field distribution only for the lowest mode, because it is normally the practical situation.

Manuscript received April 11, 2002.

E. Tenório, teik@if.usp.br, C. C. Motta, ccmotta@net.ipen.br, Tel. +55-11-3817-7142, +55-11-3817-7256, Fax +55-11-3814-4695.

This work has been partially supported by Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), proc. number 99/06087-1.

The homogeneous Helmholtz equation was solved by using the FEM with quadratic triangular shape functions. By the FEM application, it was obtained a generalized matrix eigenvalue problem. Then the generalized eigenvalue problem was solved by applying Galerkin weak formulation method [4]-[6] and using the Jacobi transformations method for evaluation of the eigenvalues (cut-off frequency) and eigenvectors (fields) [8]-[11]. For numerical evaluation of eigenvalues (TE and TM modes) we used a numerical code, developed in C language, and the plots of the electric fields (eigenvectors) can be visualized by Scigraphica software, in the Linux environment, or Origin 5.0 for Windows environment.

This paper is organized as follows: in Section II, the electromagnetic field problem is formulated. In Section III, a FEM for the guided wave propagation is outlined. In Section IV, the results are shown and discussed. Conclusions are in Section V.

II. ELECTROMAGNETIC PROBLEM FORMULATION

In order to analyze the propagation characteristics of a electromagnetic wave sustained by a rectangular waveguide partially filled with a dielectric slab, we started from the Maxwell equations, where the electric and magnetic fields are denoted by \vec{E} and \vec{B} , respectively,

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0\vec{H}, \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon_0\epsilon_r\vec{E}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2)$$

where the harmonic variation $\exp(j\omega t)$ is assumed and $\omega = 2\pi f$ is the angular frequency of the electromagnetic wave. The vacuum magnetic permeability, the vacuum electric and the slab relative electric permittivities are denoted by μ_0 , ϵ_0 , and ϵ_r , respectively, being ϵ_r a real number. From (1) and (2), the vector Helmholtz equation can be derived as

$$\nabla \times \nabla \times \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{Bmatrix} = k_0^2 \epsilon_r \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{Bmatrix}, \quad (3)$$

where $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ is the free space wavenumber.

By assuming that the z dependence can be written by $\exp(-j\beta z)$, where β is the propagation constant, the electric field and the ∇ operator can be written as:

$$\vec{E} = \vec{E}_\perp + \hat{a}_z E_z, \quad (4)$$

$$\nabla = \nabla_\perp - j\beta \hat{a}_z, \quad (5)$$

where \vec{E}_\perp and ∇_\perp are defined by

$$\vec{E}_\perp = E_x \hat{a}_x + E_y \hat{a}_y, \text{ and } \nabla_\perp = \frac{\partial}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{a}_y,$$

($\hat{a}_x, \hat{a}_y, \hat{a}_z$) being the unit vectors in the x, y, z directions, respectively. Hence, with this assumption, we can rewrite the vector Helmholtz equation as a pair of differential equations

$$\left\{ \nabla_\perp^2 - k_0^2 \epsilon_r \right\} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ H_z \end{Bmatrix} = \beta^2 \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ H_z \end{Bmatrix}. \quad (6)$$

The behavior of electromagnetic field components at a dielectric interface may be obtained from (1), (2), (4), and (5). Considering that the interface lies parallel of y -axes, see Fig. 1, and applying the boundary conditions, the vector fields components are related by

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{Z_0}{k_0 k_0} \left[j(k_0^2 \epsilon_r - \beta^2) H_y - \beta \frac{\partial H_z}{\partial y} \right] \quad (7)$$

and

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{1}{Z_0 k_0} \left[-j(k_0^2 \epsilon_r - \beta^2) E_y + \beta \frac{\partial E_z}{\partial y} \right] \quad (8)$$

where $Z_0 (377\Omega)$ is the impedance of free-space.

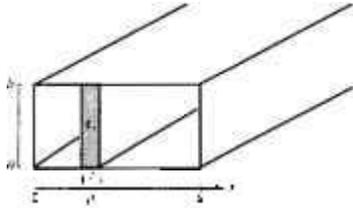


Fig. 1. Cross Section of the Rectangular Waveguide Partially Filled with a Dielectric Slab.

The waveguide cross-section and the geometrical parameters of rectangular waveguide partially filled with a dielectric slab are shown in Fig. 1.

III. FINITE ELEMENT IMPLEMENTATION

In the finite element method used in this work, the rectangular waveguide cross section is subdivided into a set of triangular subregions. Within each triangular subregion there is a point distribution with six points to allow a quadratic approximation of the unknown

variable. The Galerkin weak formulation is used in order to apply the FEM to solve (6), where $W(r)$ is an weight function, resulting

$$\int_{\Omega} W(r) \left\{ \nabla_\perp^2 + k_0^2 \epsilon_r \right\} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ H_z \end{Bmatrix} dxdy = \beta^2 \int_{\Omega} W(r) \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ H_z \end{Bmatrix} dxdy$$

or

$$\int_{\Omega} \nabla_\perp W(r) \cdot \nabla_\perp \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ H_z \end{Bmatrix} dxdy + \oint_C W(r) \frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ H_z \end{Bmatrix} dy - k_0^2 \epsilon_r \int_{\Omega} W(r) \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ H_z \end{Bmatrix} dxdy = \beta^2 \int_{\Omega} W(r) \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ H_z \end{Bmatrix} dxdy, \quad (9)$$

where Ω denotes the computational domain and C is the contour enclosing Ω . The boundary integral, using (7) and (8), can be written as

$$\oint_C W(r) \frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ H_z \end{Bmatrix} dy = j \frac{(k_0^2 \epsilon_r - \beta^2)}{k_0} \oint_C W(r) \begin{Bmatrix} \frac{Z_0}{\epsilon_r} H_y \\ \frac{1}{Z_0} E_x \end{Bmatrix} dy + \frac{\beta}{k_0} \oint_C W(r) \frac{\partial}{\partial y} \begin{Bmatrix} -\frac{Z_0}{\epsilon_r} H_z \\ \frac{1}{Z_0} E_z \end{Bmatrix} dy. \quad (10)$$

Considering the first integral on the right side of (10), one can see that on the external boundaries that are metal, where E_z and E_y vanish, or lines of symmetry, where H_z and H_y vanish, this boundary integral is zero. Furthermore, the functional for the union of many homogeneous regions will be the sum of the contributions from each. It can be seen that all of the internal boundaries are to be travel twice, in opposite directions, and since the values of E_z, H_z, E_y and H_y must be continuous, there can be no net contribution to the functional from this integral. Therefore (9) becomes

$$\int_{\Omega} \nabla_\perp W(r) \cdot \nabla_\perp \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ H_z \end{Bmatrix} dxdy + \frac{\beta}{k_0} \int_{\Omega} W(r) \frac{\partial}{\partial y} \begin{Bmatrix} -\frac{Z_0}{\epsilon_r} H_z \\ \frac{1}{Z_0} E_z \end{Bmatrix} dy - k_0^2 \epsilon_r \int_{\Omega} W(r) \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ H_z \end{Bmatrix} dxdy = \beta^2 \int_{\Omega} W(r) \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ H_z \end{Bmatrix} dxdy. \quad (11)$$

By expanding $W(r)$ and the fields in terms of the shape functions, one can write

$$\begin{aligned}
W(r) &= \sum_{e=1}^{N_c} \sum_{i=1}^6 N_i^e(x, y), \\
E_z(x, y) &= \sum_{e=1}^{N_c} \sum_{i=1}^6 e_{zi}^e N_i^e(x, y), \\
H_z(x, y) &= \sum_{e=1}^{N_c} \sum_{i=1}^6 h_{zi}^e N_i^e(x, y)
\end{aligned} \quad (12)$$

where N_i represents the usual shape functions, e_{zi}^e and h_{zi}^e are the known coefficients of the expansion and represent the fields at the nodes of each triangle. N_c denotes the number of elements used to subdivide the domain. The result of substitution of (12) in (11) is the system of linear equations given by

$$\begin{bmatrix} [U] & [V] \\ [W] & [X] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{e\} \\ \{h\} \end{bmatrix} = \beta^2 \begin{bmatrix} [E] & [F] \\ [G] & [H] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{e\} \\ \{h\} \end{bmatrix} \quad (13)$$

where $[U]$ and $[W]$ are the partitioned matrices given by

$$[U] = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [C] & [D] \end{bmatrix} \text{ and } [V] = \begin{bmatrix} [E] & 0 \\ 0 & [F] \end{bmatrix} \quad (14)$$

$\{V\} = \{\{e_z\} \{h_z\}\}$ being the eigenvector, and $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[D]$, $[E]$, and $[F]$ submatrices defined by

$$A_{ij} = D_{ij} = - \int_{S_c} \nabla_{\perp} N_i \cdot \nabla_{\perp} N_j dx dy + k_0^2 \epsilon_r \int_{S_c} N_i N_j dx dy \quad (15)$$

$$F_{ij} = F_{ji} = \int_{S_c} N_i N_j dx dy; \quad (16)$$

$$B_{ij} = \frac{\beta}{Z_0 k_0^2 \epsilon_r - \beta^2} \int_{S_c} N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} dy, \quad (17)$$

or

$$B_{ij} = \frac{\beta}{Z_0 k_0^2 - \beta^2} \int_{S_c} N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} dy, \quad (18)$$

depending on the dielectric side of interface in consideration. The matrix elements C_{ij} are related with B_{ij} through the expression

$$C_{ij} = \left(\frac{\beta}{k_0} \right)^2 \frac{Z_0^2}{\epsilon_r} B_{ij} \quad (19)$$

Equation (13) is the generalized eigenvalue problem and the matrix $[U]$ is real and non-symmetric. This problem can be reduced to a standard eigenvalue problem [10] and then Jacobi method can be used to find the eigenvalues and eigenvectors [12], [14].

IV. RESULTS

In this section presents the cut-off wavenumbers, obtained by solving the generalized eigenvalue problem for some TE modes. These calculations were initially carried out using a quadratic approximation with 64 triangular elements over the waveguide cross section. We can also remark that the accuracy of the calculated eigenvalues deteriorates for the higher order modes, since the latter require a finer mesh due to their more complex mode structure like observed by Volakis et al [7] and shown in the Table I. The Fig. 2 shows the fields plots (eigenvectors) for the various modes in an homogeneous rectangular waveguide using a regular grid with 64 and 96 elements. For the plots presented here we have used a regular grid with 96 elements (225 nodes) in order to obtain a good visualization of results. The solution for the homogeneous problem is carried on from (13) when the submatrices $[B]$, $[C]$ are made vanish, resulting in the following system

$$\begin{bmatrix} [A] & 0 \\ 0 & [D] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{e\} \\ \{h\} \end{bmatrix} = \beta^2 \begin{bmatrix} [E] & 0 \\ 0 & [F] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{e\} \\ \{h\} \end{bmatrix} \quad (20)$$

One can remark that in this case the electric and magnetic field are not coupled as in the dielectric slab case.

Fig. 3 shows the field distribution of the electric field for the lowest TE mode for the slab dielectric filling the rectangular waveguide problem. We can observe that neither the lowest mode is the TE_{m0} type. This electric field lines distortion effect can be explained by the polarization of dielectric material, in addition to the upper and lower gap between the dielectric slab and the side wall of the waveguide.

TABLE I
CUTOFF WAVENUMBERS FOR A RECTANGULAR WAVEGUIDE:
COMPARISON BETWEEN ANALYTICAL AND FEM CALCULATIONS FOR
TE MODES

Mode	$k_c a (a/b=2)$		
	Analytical[2]	FEM Calculations	
		Triangle Elements - 2 nd order	
TE		64	96
10	3.142	3.146	3.166
12	12.953	12.819	12.845
21	8.886	8.846	8.861
31	11.327	11.260	11.281

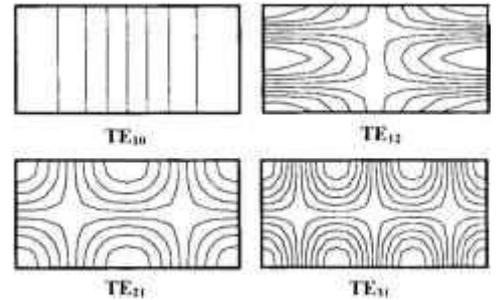


Fig. 2. Calculated Electric Field Modes in a Rectangular Waveguide with Dimensions $a/b = 2$.

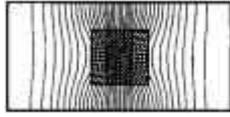


Fig. 3. Calculated the Lowest TE Mode of Displacement of a Dielectric Slab with $\epsilon_r = 10$ and $t = d/7$.

Fig. 4 shows some electric field distribution when the dielectric slab fills completely the side walls of the waveguide. In this case, we can observe the lowest mode is one of TE_{m0} type. The results obtained by the used of the FEM agree very well with the results shown in [11].

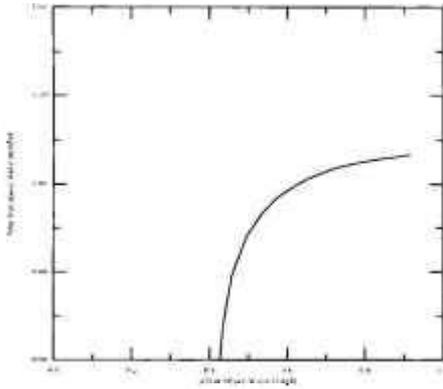


Fig. 4. Propagation Constant for a Rectangular Waveguide Partially Filled with Dielectric [11], $\epsilon = 2.45 \epsilon_0$ ($d = 0.187 a$).

Fig. 5 shows the dispersion equation (ratio) for a rectangular waveguide WR-90 model, with dimensions $a = 22.86$ mm and $b = 10.16$ mm, partially filled with a dielectric slab. The curves show the propagation constant of the lowest mode (TE_{10}) obtained by the used of the FEM for different slab positions using different materials, and it can be observed the cutoff frequency for each one. The straight curve represents the hole guide.

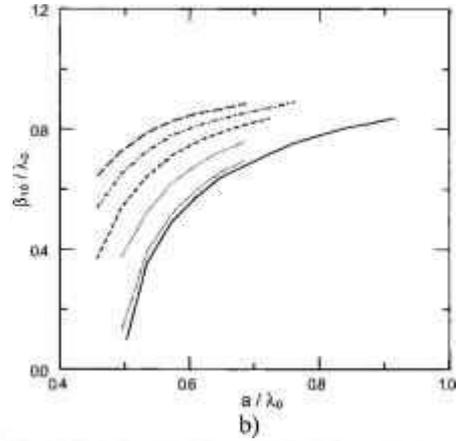
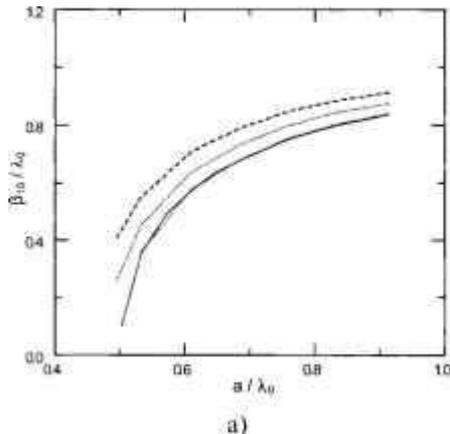


Fig. 5. Dispersion Equation for a Rectangular Waveguide Partially Filled with Dielectric ($d = 0.083 a$): a) $\epsilon = 2.08 \epsilon_0$; and b) $\epsilon = 10 \epsilon_0$.

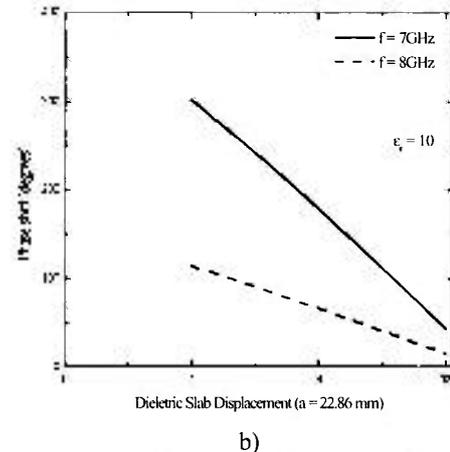
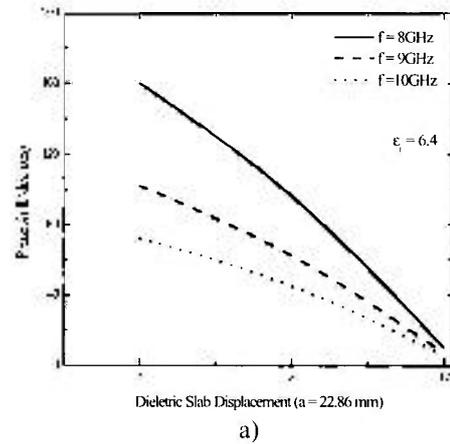


Fig. 6. Phase Shift for a Rectangular Waveguide Partially Filled with Dielectric: a) $\epsilon = 6.4 \epsilon_0$; and b) $\epsilon = 10 \epsilon_0$.

The plots of the Fig. 6 show the phase shift for different frequencies and dielectric slab displacement for a rectangular waveguide (WR-90) partially filled with a dielectric slab. In these cases we can observe the forward or the backward of the phase angle for a phase shifter device using materials with different values of permittivities (ϵ_r).

V. CONCLUSIONS

The finite element method is applied in this work to obtain the solution of the electromagnetic field propagation problem in a rectangular waveguide loaded with a lossless slab dielectric. As a result of this analysis, it was possible to build some plot showing the variation of the propagation constant of the electromagnetic field in function of the slab position inside the waveguide. These results can be useful in the rectangular waveguide phase shifter design.

REFERENCES

- [1] R. E. Collin, *Foundations of Microwaves Engineering*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1995.
- [2] D. M. Pozar, *Microwave Engineering*, Addison-Wesley, New York, 1990.
- [3] A. G. Fox, "An adjustable waveguide phase changer." *Proc. of the IRE*, pp 1489-1498; Dec 1947.
- [4] M. A. Heald and C. B. Wharton, *Plasma Diagnostics with Microwaves*, New York: John Wiley & Sons Inc, 1965.
- [5] E. Tenório, P. R. Pascholati, and C. C. Motta, "A solution of rectangular ridged waveguide using the finite element method," to be published in proceeding of the ITS'02.
- [6] J. L. Volakis, A. Chatterjee, L. C. Kempel, *Finite Element Method for Electromagnetics: Antennas, Microwave Circuits, and Scattering Applications*, IEEE PRESS, New York, 1998.
- [7] N. Ida and J. P. A. Bastos, *Electromagnetics and Calculation of Fields*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1997.
- [8] P. Silvester, "A general high-order finite element waveguide analysis program", *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-27, pp. 204-210, Apr. 1969.
- [9] <http://gid.cimne.upc.es>.
- [10] J. H. Wilkinson, *The Algebraic Eigenvalue Problem*, New York: Oxford University Press, 1965.
- [11] R. F. Harrington, *Time Harmonic Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill, New York, 1961.
- [12] W. H. Press, W. T. Vetterling, S. A. Teukolsky, B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C - The art of Scientific Computing*, second edition, Cambridge University Press, New York, Reissued 1999.
- [13] P. Savi, I-L. Gheorma, and R. D. Graglia, "Full-wave high order FEM model for lossy anisotropic waveguides." *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, vol. 50; n° 2, pp 495-500; Feb 2002.
- [14] P. J. Eberlein, "A jacobi-like method for the automatic computation of eigenvalues and eigenvectors of an arbitrary matrix," *J. S.I.A.M.*, Vol. 10, No. 1, March 1962, pp. 74-88.

A Solution of Rectangular Ridged Waveguide Using the Finite Element Method

Eik Tenório[†], Paulo R. Pascholati*, and Cláudio C. Motta[†]

[†]Centro Tecnológico da Marinha em São Paulo, CTMSP, Av. Prof. Lineu Prestes 2468. São Paulo - SP - 05508.900

*Laboratório do Acelerador Linear, LAL, IFUSP, Rua do Matão, Travessa R 187. São Paulo - SP - 05315.970

Abstract — A numerical code based on the Finite Element Method (FEM) was developed to solve the ridged waveguide eigenvalue problem. In order to apply the FEM, the Galerkin Weak Formulation was used. The solution was obtained by using the Finite Element Method with quadratic triangular shape functions. The eigenvalue spectrum of the single and double rectangular ridged waveguide is shown and it is compared with other numerical approaches. The electrical field distribution of lower modes was also presented. The code was developed using C language.

Key words — Finite Element Method, Rectangular Ridged Waveguide, Second-order Triangular Element, Vector Field Distribution.

I. INTRODUCTION

Ridged waveguides have been useful for several years in microwave systems requiring broadband operation and the ridged waveguide field problem has been investigated by many authors. In 1947 Cohn [1] obtained the ridged waveguide eigenvalues by using the transverse resonance technique. In 1955 Hopfner [2] extended Cohn's work to other aspect ratios by the inclusion of a first-order correction factor. Each of the previous investigations was primarily aimed for solution of the TE_{n0} eigenvalue [3]. In order to perform a complete study of the ridged waveguide, in 1971, Montgomery [4] formulated an integral eigenvalue problem. In 1985 Utsumi [5] presented a variational method to obtain the approximate cutoff frequency and electromagnetic fields. Recently (1999), Wu et al [6], investigated the ridged waveguide problem using a general spectral domain integral equation formulation.

In this work we have investigated the field problem of the single and double rectangular ridged waveguides [7]-[8] with different aspect ratios, obtaining the eigenvalue spectrum and the electric field distribution for arbitrary TE_{mn} and TM_{mn} modes by using the Finite Element Method (FEM) with quadratic triangular shape functions. The homogeneous Helmholtz equation is solved to obtain a generalized matrix eigenvalue problem. Then, the generalized eigenvalue problem

was solved by applying Galerkin weak formulation method [9]-[10] and using the Jacobi transformations method for evaluation of the eigenvalues (cutoff frequency) and eigenvectors (fields) [13]-[16]. For numerical evaluation of eigenvalues (TE and TM modes) we have used a numerical code, developed in C language, and the plots of the electric fields (eigenvectors) can be visualized by Scigraphica software, in the Linux environment, or Origin 5.0 for Windows environment. The result of this investigation was the possibility to have any eigenvalue, at least in principle, with its associated field distribution by FEM use.

This paper is organized as follows: in Section II, the electromagnetic field problem is formulated. In Section III, a FEM for the guided wave propagation is outlined. In Section IV, the results are shown and discussed. Conclusions are in Section V.

II. ELECTROMAGNETIC PROBLEM FORMULATION

In order to analyze the propagation characteristics of a lossless rectangular ridged waveguide we start from the Maxwell equations, where the electric and magnetic fields are denoted by \vec{E} and \vec{H} , respectively:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0\vec{H}, \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon_0\vec{E}, \quad \nabla \cdot \vec{H} = 0, \quad (2)$$

where the harmonic variation $\exp(j\omega t)$ is assumed and $\omega = 2\pi f$ is the angular frequency of the electromagnetic wave. In (1) and (2) μ_0 and ϵ_0 are the magnetic permeability and electric permittivity of vacuum, respectively. From (1) and (2), the vector Helmholtz equation can be derived as

$$\nabla \times \nabla \times \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{Bmatrix} = k_0^2 \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{Bmatrix}, \quad (3)$$

where $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$, is the free space wavenumber. By assuming that the z dependence can be given by $\exp(-j\beta z)$, where β is the propagation constant, the electric field and the ∇ operator can be written as:

Manuscript received March 31, 2002; revised June 30, 2002.
E. Tenório, teik@if.usp.br, C. C. Motta, ccmotta@net.ipen.br,
Tel. +55-11-3817-7142, +55-11-3817-7256, Fax +55-11-3814-4695.

This work has been partially supported in part by Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), proc. number 99/06087-1.

$$\vec{E} = \vec{E}_\perp + \hat{a}_z E_z, \quad (4)$$

$$\nabla = \nabla_\perp - j\beta \hat{a}_z, \quad (5)$$

where \vec{E}_\perp and ∇_\perp are defined by:

$$\vec{E}_\perp = E_x \hat{a}_x + E_y \hat{a}_y, \quad \text{and} \quad \nabla_\perp = \frac{\partial}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{a}_y,$$

($\hat{a}_x, \hat{a}_y, \hat{a}_z$) being the unit vectors in the x, y, z directions, respectively. Hence, with this assumption, we can rewrite the vector Helmholtz equation as a pair of differential equations

$$\left[\nabla_\perp^2 - k_0^2 \epsilon_r \right] \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \end{Bmatrix} = \beta^2 \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \end{Bmatrix} \quad (6)$$

The coupled pair of differential equations (6) can be solved for the square of the propagation constant β^2 of the homogeneous ridged waveguide, under the Dirichlet boundary condition for $e_z = 0$, on perfect electric wall, and Neumann boundary condition for $h_z = 0$, $\hat{n} \cdot \nabla e_z = 0$, on magnetic wall, where \hat{n} denotes the normal vector at each surface of waveguide. The cross-section shape and the geometrical parameters of ridged waveguide are shown in Fig. 1.

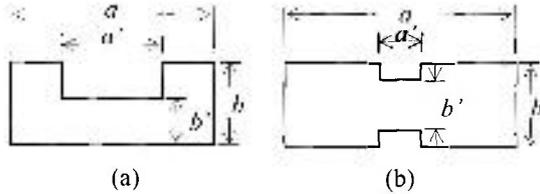


Fig. 1. Geometry of rectangular ridged waveguide: Cross-section and parameters of a single ridged (a) and double ridged (b) waveguide.

III. FINITE ELEMENT IMPLEMENTATION

In the FEM discussed here, the rectangular waveguide cross section is subdivided into a set of triangular subregions and within each triangular subregion there is a point distribution with six points that allow a quadratic approximation. This is, in fact, advantageous because we can use a less number of triangles to describe the boundary shape obtaining a better accuracy to the solution, if compared to the linear approximation.

A. Finite Dimensional Approximation

In the present approach, the problem domain Ω is broken into triangles, as it can be seen in Fig. 2. The waveguide cross section was meshed applying two kinds

of methods: one regular, by generating a regular grid (Fig. 2a), and other the GiD automatic mesh generator (Fig. 2b).

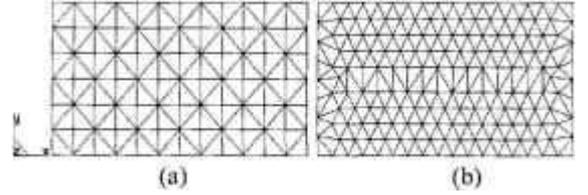


Fig. 2. A finite-dimensional discretization by second-order triangles of a waveguide cross section using a regular grid (a) and by GiD automatic mesh generator (b).

B. Generalized Eigenmatrix Equation

In order to apply the FEM it is necessary to distinguish the exact and approximated solution of eigenvalue problem. Therefore, if U_e is used to denote the exact solution of eigenvalue problem for h_z (or e_z), satisfying the equation

$$\nabla_\perp \cdot [\nabla_\perp U_e(x, y)] + k_c^2 U_e(x, y) = 0, \quad (7)$$

where $k_c^2 = k_0^2 - \beta^2$ is the square of cutoff wavenumber, being eigenvalue of the problem, and U denoting the solution obtained with the FEM, so when U is substituted by (7), it generates a residual R , given by

$$\nabla_\perp \cdot [\nabla_\perp U(x, y)] + k_c^2 U(x, y) = R. \quad (8)$$

In order to establish a numerical procedure, we force the residual R to be zero using the following condition:

$$\int_\Omega W R d\Omega = 0, \quad (9)$$

where W is a weighting function and Ω represents the domain where the condition is enforced. In our case, the expression in (9) can be written as

$$\int_\Omega W \left[\nabla_\perp \cdot (\nabla_\perp U(x, y)) + k_c^2 U(x, y) \right] d\Omega.$$

By using the divergence theorem, this equation can be written as

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{S}(\Omega)} W \nabla_\perp U(x, y) \cdot \hat{n} ds - \int_\Omega \nabla_\perp U(x, y) \cdot \nabla_\perp W d\Omega \\ + \int_\Omega W k_c^2 U(x, y) d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

By expanding W and the fields in terms of the shape functions, one can write

$$\begin{aligned}
W(r) &= \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^6 N_i^e(x, y), \\
E_x(x, y) &= \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^6 e_{zi}^e N_i^e(x, y), \\
H_z(x, y) &= \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^6 h_{zi}^e N_i^e(x, y)
\end{aligned} \quad (11)$$

where N_i represents the usual shape functions, e_{zi}^e and h_{zi}^e are the known coefficients of the expansion and represent the fields at the nodes of each triangle. N_e denotes the number of elements used to subdivide the domain, S being the surface enclosing Ω . The Galerkin weak formulation is used in order to apply the FEM in (10), resulting to the system of linear equations given by

$$[U] \{V\} = \beta^2 [W] \{V\} \quad (12)$$

where $[U]$ and $[W]$ are the partitioned matrices given by

$$[U] = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [C] & [D] \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad [W] = \begin{bmatrix} [E] & 0 \\ 0 & [F] \end{bmatrix} \quad (13)$$

$\{V\} = \{ \{h_z\} \{e_z\} \}$ being the eigenvector, and $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[D]$, $[E]$, and $[F]$ submatrices defined by

$$A_{ij} = D_{ij} = - \int_{\Omega} \nabla_{\perp} N_i \cdot \nabla_{\perp} N_j \, dxdy + k_0^2 \epsilon_r \int_{\Omega} N_i N_j \, dxdy, \quad (14)$$

$$B_{ij} = F_{ij} = \int_{\Omega} N_i N_j \, dxdy, \quad (15)$$

$$C_{ij} = 0 \quad \text{and} \quad E_{ij} = 0. \quad (16)$$

Equation (12) denotes the generalized eigenvalue problem for which $[U]$ and $[W]$ are normally real, symmetric, and positive definite matrices, $[U]$ is the field values for the TE and TM modes, and k_c values are the eigenvalues (cutoff wavenumber), so the k_c can be obtained of a system of equations and the eigenvectors, as the corresponding solutions (i.e. fields).

The generalized eigenvalue problem can be reduced to a standard eigenvalue problem [10]-[11] and for this reason we used the Jacobi method [13]-[16] to find the eigenvalues and eigenvectors.

IV. RESULTS

A. General Results

In this section we present the cutoff wavenumbers, obtained by solving the generalized eigenvalue problem

$$\begin{bmatrix} [A] & 0 \\ 0 & [D] \end{bmatrix} \{V\} = \beta^2 \begin{bmatrix} [E] & 0 \\ 0 & [F] \end{bmatrix} \{V\} \quad (17)$$

Instead of applying the developed method directly in ridge waveguide, it was first applied to a rectangular waveguide in order to verify the accuracy of its results. To this purpose, the rectangular waveguide under consideration has ratio dimension $a/b = 2$. The calculated eigenvalues are given in Table I for several TE and TM modes. These calculations were carried out using a quadratic approximation with 64 triangular elements over the waveguide cross section. Knowing that the analytical [7]-[8] eigenvalues are given by

$$k_c = \frac{\pi}{a} \sqrt{m^2 + (2n)^2} \quad (18)$$

for $TE_{mn}(m \neq 0 \text{ or } n \neq 0)$ and $TM_{mn}(m \neq 0 \text{ and } n \neq 0)$ modes, we can infer that the analytical values are in good agreement with the FEM calculated ones. We can also remark that the accuracy of the calculated eigenvalues deteriorates for the higher order modes, since the latter require a finer mesh due to their more complex mode structure as observed by Volakis et al [9]. Tables II and III show analytical and calculated values with different meshes and elements orders for comparison. The Fig. 3 shows field plots (eigenvectors) for the various modes in a rectangular cross section using a regular grid with 64 elements.

The code allows to evaluate not only the TE and TM modes but also the single ridged and double ridged waveguides. The results of visualization of fields (eigenvectors) for TE and TM modes in ridged waveguides have been presented at first time (at least by the knowledge of the authors) in the literature using second-order triangular elements.

B. Discussion

In the Tables IV-VI we have presented the cutoff wavelength for TE modes, obtained using FEM, for rectangular double ridged waveguide ($a/b = 2$) with different a'/a and b'/b ratios (see geometry in Fig. 1) in comparison with theoretical [20] (numerical solutions) results. Fig. 4 shows the lowest TE modes for rectangular double ridged waveguide ($a/b = 2$) with $a'/a = 0.2$ and $a'/a = 0.5$ for $b'/b = 0.25$. The lowest TM modes for rectangular double ridged and rectangular single ridged waveguide ($a/b = 2$) are shown in Fig. 5.

According to Tables IV-VI, we can observe that our calculated cutoff wavenumbers for rectangular ridged waveguides, using FEM code, are in good agreement with the literature [20]. It was possible to verify that the most accurate values can be calculated using a mesh containing fewer elements, not only for second-order triangular elements but also for first-order elements, and good visualization of TE and TM modes is related to the generation mesh way. The best cutoff values and

visualization for both modes (TE and TM) was obtained by using a regular grid with 64 triangular elements over the waveguide cross section.

Qualitatively, the results of the electric and magnetic field distributions for the rectangular ridged (single and double) waveguide and rectangular waveguide are quite similar. This can be seen comparing the field distribution patterns for TE_{n0} modes in rectangular waveguide, Fig. 3, and in rectangular ridged waveguide, Fig. 4. The occurrence of vorticities can be clearly seen in Fig. 5, which refers to the behavior of the magnetic field, showing the change of the field distribution pattern in the rectangular waveguide, see Fig. 3, that occurs when the aspect ratio of rectangular ridged waveguide is modified.

TABLE I
CUTOFF WAVENUMBERS FOR A RECTANGULAR WAVEGUIDE:
COMPARISON BETWEEN ANALYTICAL AND FEM CALCULATIONS FOR
TE AND TM MODES USING A REGULAR GRID OF SECOND-ORDER FINITE
ELEMENTS

		$k_c a (a/b=2)$		
		Analytical[12]	FEM Calculation - regular grid	
TE	TM		64 triangle elements	
10		3.142	3.146	
20		6.283	6.267	
30		9.425	9.367	
01		6.283	6.267	
11	11	7.025	7.003	6.990
12	12	12.953	12.839	12.467
21	21	8.886	8.847	8.812
31	31	11.327	11.260	11.148

TABLE II
COMPARISON BETWEEN ANALYTICAL AND FEM CALCULATIONS USING
VARIOUS MESHES OF FIRST-ORDER ELEMENTS

		$k_c a (a/b=2)$				
		Anal.[12]	FEM Calculations			
Mode			Triangle Elements - 1 st order			
TE	TM		162	300	402	695
10		3.142	3.234	3.224	3.093	3.122
20		6.283	6.394	5.928	6.249	6.194
01		6.283	6.427	6.440	6.251	6.302
11	11	7.025	7.269	6.913	6.990	7.002
12	12	12.953	13.078	12.892	12.870	13.070
21	21	8.886	9.247	8.971	8.845	8.792

TABLE III
COMPARISON BETWEEN ANALYTICAL AND FEM CALCULATIONS USING
VARIOUS MESHES OF SECOND-ORDER ELEMENTS

		$k_c a (a/b=2)$				
		Anal.[12]	FEM Calculations			
Mode			Triangle Elements - 2 nd order			
TE	TM		64	144	256	300
10		3.142	3.146	3.093	3.140	3.207
20		6.283	6.265	6.249	6.276	5.892
01		6.283	6.268	6.251	6.277	6.394
11	11	7.025	7.004	6.990	7.019	6.845
12	12	12.953	12.819	12.870	12.908	13.065
21	21	8.886	8.846	8.845	8.873	8.839

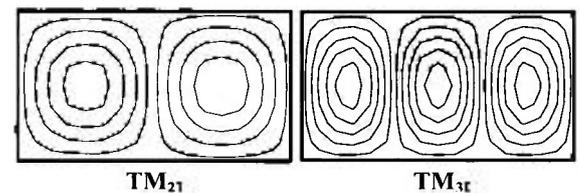
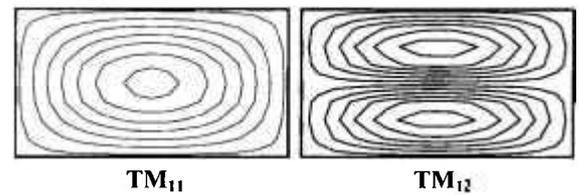
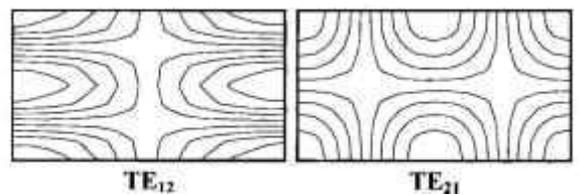
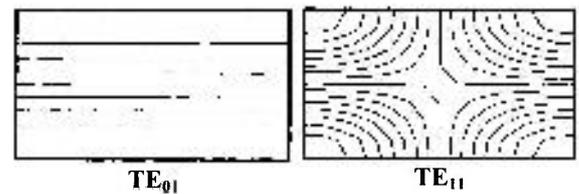
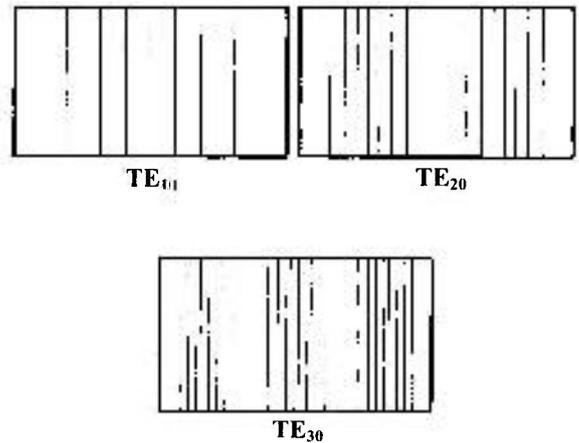


Fig. 3. Calculated electric field modes in a rectangular waveguide with dimensions $a/b = 2$.

TABLE IV
CUTOFF WAVELENGTH OF TE₁₀ MODE

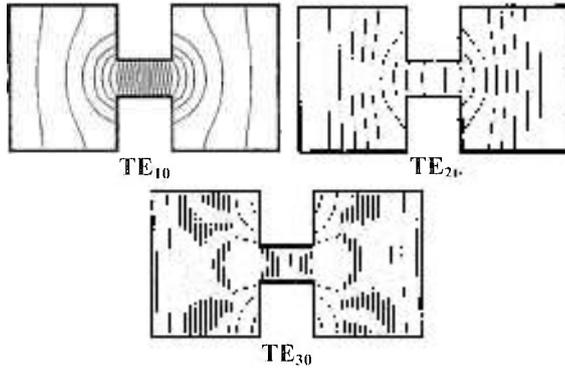
$b'/b = 0.25$			$b'/b=0.5$		
Theor. [20]	MEF		Theor. [20]	MEF	
a'/a	λ_c/a	$\lambda_c/a (2\pi/k_c a)$	a'/a	λ_c/a	$\lambda_c/a (2\pi/k_c a)$
0.20	3.349	3.059	0.25	2.604	2.569
0.50	3.609	3.471	0.50	2.666	2.606

TABLE V
CUTOFF WAVELENGTH OF TE₂₀ MODE

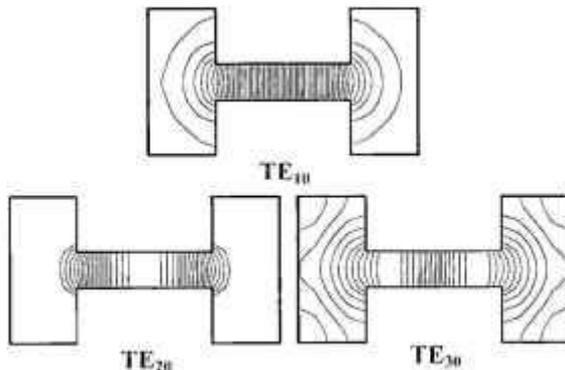
$b'/b = 0.25$			$b'/b=0.5$		
Theor. [20]	MEF		Theor. [20]	MEF	
a'/a	λ_c/a	$\lambda_c/a (2\pi/k_c a)$	a'/a	λ_c/a	$\lambda_c/a (2\pi/k_c a)$
0.20	0.884	0.883	0.25	0.942	0.943
0.50	1.157	1.134	0.50	1.095	1.088

TABLE VI
CUTOFF WAVELENGTH OF TE₃₀ MODE

$b'/b = 0.25$		
Theor. [20]	MEF	
a'/a	λ_c/a	$\lambda_c/a (2\pi/k_c a)$
0.20	0.762	0.764
0.50	0.647	0.649

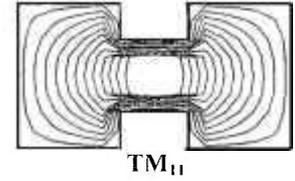


(a)

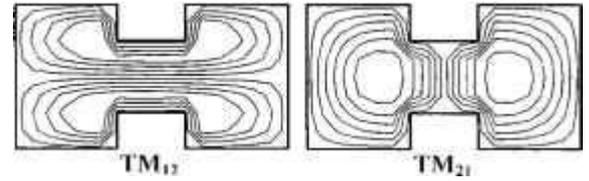


(b)

Fig. 4. Calculated electric field modes in the rectangular double ridged waveguides ($a/b = 2$ and $b'/b = 0.25$): (a) $a'/a = 0.2$; (b) $a'/a = 0.5$.



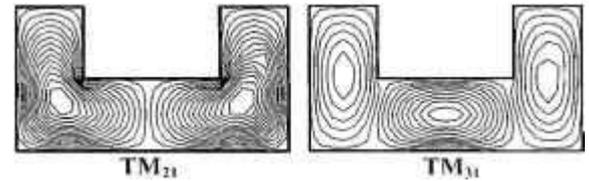
TM₁₁



TM₁₂

TM₂₁

(a)



TM₂₀

TM₃₀

(b)

Fig. 5. Calculated fields for TM modes of the rectangular ($a/b = 2$) double (a) ridged and single (b) ridged waveguides.

Tables IV and V show some remark broadband features of the ridged waveguide. For $b'/b = 0.25$, $a'/a = 0.2$ ratios and the TE₁₀ and TE₂₀ modes, one can observe a bandwidth increasing of 66% when compared with normal rectangular waveguide, e.g., WR-90 ($a = 22.86$ mm and $b = 10.16$ mm).

V. CONCLUSIONS

The finite-element method applied to the solution of the rectangular ridged and rectangular waveguide problems through quadratic triangular shape function appears to produce higher accuracy and reliability in obtaining complete sets of propagating modes than linear triangular shape function but with little additional computational cost. The FEM method for calculating the TE and TM modes in the rectangular ridged waveguides have been tested and presented at first time. This method can be extended in order to solve the inhomogeneously filled waveguides and cavity resonators, as well as to other field problems involving losses or not. Some of these possibilities are now under examination.

REFERENCES

- [1] S. B. Cohn, "Properties of ridge wave guide," Proc. IRE, vol. 35, pp 783-788, August 1947.
- [2] S. Hopfer, "The design of ridged waveguides," IRE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-3, pp 20-29, October 1955.
- [3] J. R. Pyle, "The cutoff wavelength of the TE_{10} mode in ridged rectangular waveguide of any aspect ratio," IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, MTT-14, 175-183, 1966.
- [4] J. P. Montgomery, "On the complete eigenvalue solution of ridged waveguide," IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, MTT-19, 547-555, 1971.
- [5] Y. Utsumi, "Variational analysis of ridged waveguides modes," IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, MTT-33, 111-120, 1985.
- [6] T-L. Wu, W-C. He, and H-W. Chang, "Numerical study of convex and concave rectangular ridged waveguides with large aspect ratios," Proc. Natl. Sci. Coun. ROC(A), vol. 23, No. 6, 799-809, 1999.
- [7] R. E. Collin, *Field theory of guided waves*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1991.
- [8] R. E. Collin, *Foundations of Microwaves Engineering*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1995.
- [9] John L. Volakis, Arindam Chatterjee, Leo C. Kempel, *Finite Element Method for Electromagnetics Antennas, Microwave Circuits, and Scattering Applications*, IEEE PRESS, New York, 1998.
- [10] Nathan Ida, João P. A. Bastos, *Electromagnetics and Calculation of Fields*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1997.
- [11] P. Silvester, "A General High-Order Finite Element Waveguide Analysis Program", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-27, pp. 204-210, Apr. 1969.
- [12] <http://gid.cimne.upc.es>.
- [13] J. H. Wilkinson, *The Algebraic Eigenvalue Problem*, New York: Oxford University Press, 1965.
- [14] William H. Press, William T. Vetterling, Saul A. Teukolsky, Brian P. Flannery, *Numerical Recipes in C - The Art of Scientific Computing*, second edition, Cambridge University Press, New York, Reissued 1999.
- [15] Roger F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, IEEE PRESS, New York, 1993.
- [16] P. J. Eberlein, "A Jacobi-like Method for the Automatic Computation of Eigenvalues and Eigenvectors of an Arbitrary Matrix," Journ. S.I.A.M., Vol. 10, No. 1, March 1962, pp. 74-88.
- [17] J.-F Lee, "Finite Element Analysis for Lossy Dielectric Waveguides", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 42(6): 1025-1031, June 1994.
- [18] J.-F Lee, D. K. Sun, and Z. J. Cendes. "Full-Wave Analysis of Dielectric Waveguides Using Tangential Vector Finite Elements", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 39(8): 1262-1271, June 1991.
- [19] S. Li and B. Wang: "Field Expressions and Patterns in Elliptical Waveguide"; IEEE MTT; vol. 48; pp 864-867;2000.
- [20] N. Marcuvitz, *Waveguide Handbook*, Peter Peregrinus, London, 1986, Originally published by McGraw-Hill Co. 1951.