# VETORES, MATRIZES, E DETERMINANTES

*MAXIMILIAN EMIL HEHL*

INFORMAÇÕES IEA N.º 7
Abril — 1967

**INSTITUTO DE ENERGIA ATÔMICA**
Caixa Postal 11049 (Pinheiros)
CIDADE UNIVERSITÁRIA "ARMANDO DE SALLES OLIVEIRA"
SÃO PAULO — BRASIL

# VETORES, MATRIZES, E DETERMINANTES

Maximilian Emil Hehl

SERVIÇO DE CÁLCULO ANALÓGICO E DIGITAL
Instituto de Energia Atômica
São Paulo - Brasil

Informações nº 7
Abril - 1967

Comissão Nacional de Energia Nuclear

Presidente: Prof. Uriel da Costa Ribeiro

Universidade de São Paulo

Reitor: Prof.Dr. Luiz Antonio da Gama e Silva

Instituto de Energia Atômica

Diretor: Prof. Rômulo Ribeiro Pieroni

Conselho Técnico-Científico do IEA

| | | |
|---|---|---|
| Prof.Dr. | José Moura Gonçalves | pela USP |
| Prof.Dr. | José Augusto Martins | |
| Prof.Dr. | Rui Ribeiro Franco | pela CNEN |
| Prof.Dr. | Theodoreto H.I. de Arruda Souto | |

Divisões Didático-Científicas

Divisão de Física Nuclear -
Chefe: Prof.Dr. Marcello D.S. Santos

Divisão de Radioquímica -
Chefe: Prof.Dr. Fausto Walter de Lima

Divisão de Radiobiologia -
Chefe: Prof.Dr. Rômulo Ribeiro Pieroni

Divisão de Metalurgia Nuclear -
Chefe: Prof.Dr. Tharcísio D.S. Santos

Divisão de Engenharia Química -
Chefe: Lic. Alcídio Abrão

Divisão de Engenharia Nuclear -
Chefe: Engº Pedro Bento de Camargo

Divisão de Operação e Manutenção de Reatores -
Chefe: Engº Azor Camargo Penteado Filho

Divisão de Física de Reatores -
Chefe: Prof.Dr. Paulo Saraiva de Toledo

Divisão de Ensino e Formação -

# ÍNDICE TEÓRICO

Página



************

## ÍNDICE DE PROGRAMAS



*****************

## 1 - INTRODUÇÃO

Equações lineares aparecem em muitos problemas de engenharia, física, matemática aplicada, e outros campos de grande interêsse. Por exemplo, resolvendo-se uma equação a derivadas parciais do tipo elítico, tal como a equação de Laplace, nós, frequentemente, cobrimos a região a ser estudada com uma malha retangular e procuramos determinar os valores da solução nos nós desta malha. Se substituirmos a equação diferencial por uma equação de diferença aproximada daquela, somos conduzidos a um sistema de equações lineares simultâneas com um número de incógnitas bastante elevado. Nos problemas dos vários campos, incluindo a análise estrutural, as complicadas interações entre as várias quantidades em estudo podem ser representadas por sistemas de equações lineares.

Tendo em vista fornecer a estrutura para êste interessante estudo sôbre as equações lineares, é nosso objetivo, neste trabalho, expôr os conceitos clássicos sôbre matrizes e determinantes, iniciando por fundamentos de vetores, fornecendo assim os instrumentos para uma computação proveitosa e preparando uma base para novos estudos. Cada tópico apresentado, e onde fôr conveniente, será ilustrado por programas escritos em linguagem FORTRAN II, e testados no computador digital IBM 1620, Mod. II do Instituto de Energia Atômica.

Êste trabalho é apresentado de modo a tratar os assuntos considerados em uma ordem didática visando facilitar a exposição do texto. Assim é que o roteiro por nós seguido, compreende:o conceito fundamental de vetores e definições relativas, juntamente com os métodos numéricos e programas para suas operações básicas; matrizes: definições dos principais tipos de matrizes; matrizes: operações básicas com matrizes incluindo programações digitais; determinantes: definição de determinante de uma matriz e seus elementos, propriedades fundamentais e métodos para cálculo de determinantes; propriedades de algumas matrizes especiais; matrizes transposta, inversa e adjunta; e determinação da matriz inversa por vários métodos numéricos.

A bibliografia apresentada no final, lista muitos dos textos gerais existentes sôbre análise numérica, juntamente com uma seleção de textos colaterais constituida de revistas e certas fontes de relevantes tabelas matemáticas e fórmulas.

## 2 - VETORES

O leitor deve estar familiarizado com o conceito de um vetor no espaço bi-dimensional e no espaço tri-dimensional. Tais vetores têm duas e três componentes, respectivamente. Êste conceito pode ser generalizado ao espaço n-dimensional, se definirmos um vetor como sendo um conjunto de n números reais que podem ser escritos na forma

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (2.1)$$

Na verdade, os $x_i$ podem também ser números complexos. Lembremos aqui que um número real é um caso particular de um número complexo onde a parte imaginária é zero. O vetor na igualdade (2.1) é chamado vetor coluna. Se os n números forem dispostos em um arranjo horizontal,

$$x = \left[ x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \right] \qquad (2.2)$$

o vetor x é chamado vetor linha. As quantidades $x_i$ são chamadas as componentes de x, e n é chamado dimensão do vetor x. Vetores de uma única dimensão, isto é, de uma única componente, são chamados escalares.

Recordemos que no espaço bi- e tri-dimensional dois vetores são iguais se e sòmente se suas componentes forem iguais na mesma ordem, e que a operação de adição de dois vetores é realizada somando-se as componentes que se correspondem. A multiplicação de um vetor por um escalar significa que cada componente do vetor é multiplicada pelo mesmo número real.

Se êstes conceitos são generalizados ao espaço n-dimensional, somos conduzidos às seguintes definições formais. Dois vetores x e y são iguais se e sòmente se suas componentes são iguais, isto é, $x_i = y_i$ para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. A adição e subtração de dois vetores x e y dados por $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ e ... $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$ é indicada por $x \pm y$ e é definida por

$$(x \pm y) = \begin{bmatrix} x_1 \pm y_1 \\ x_2 \pm y_2 \\ x_3 \pm y_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \pm y_n \end{bmatrix} \qquad (2.3)$$

ou

$$(x \pm y) = \left[ x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \ldots, x_n \pm y_n \right]$$

PROGRAMA 1:

Êstes programa, em forma de Função Subprograma, permite efetuar a adição ou subtração de dois vetores x e y com até 20 componentes em cada um.

```
      SUBROUTINE GRACO3(N,V4,V5,AS,INDAOS)
      DIMENSION V4(20),V5(20),AS(20)
      IF(INDAOS)10,50,30
   10 DO 20 I=1,N
   20 AS(I)=V4(I)-V5(I)
      GO TO 50
   30 DO 40 I=1,N
   40 AS(I)=V4(I)+V5(I)
   50 RETURN
      END

 00866 CORES USED
 39999 NEXT COMMON
 END OF COMPILATION
```

onde, V4 = x

V5 = y

AS = adição e subtração de dois vetores

INDAOS = indicador para adição ou subtração

adição é comutativa e associativa, isto é, $x + y = y + x$ e $x + (y + z) = (x + y) + z$.

A multiplicação de um vetor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ por um escalar $c$ é definida pela relação

$$cx = xc = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ cx_n \end{bmatrix} \qquad (2.4)$$

ou

$$cx = xc = \left[cx_1,\ cx_2,\ \ldots,\ cx_n\right]$$

<u>PROGRAMA 2</u>:

Êste programa, em forma de Função Subprograma, permite efetuar a multiplicação de um vetor x por um escalar c, onde

$$x = \left[x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n\right]$$

c = escalar

```
      SUBROUTINE GRACO4(N,C,V6,EV)
      DIMENSION V6(20),EV(20)
      DO 10 K=1,N
   10 EV(K)=C*V6(K)
      RETURN
      END

00432 CORES USED
39999 NEXT COMMON
END OF COMPILATION
```

onde, C = escalar

V6 = vetor

EV = produto de escalar por vetor

No espaço real bi- e tri-dimensional, o módulo de um vetor x tem um óbvio significado geométrico, e êste módulo, indicado por $|x|$, pode ser computado como a raiz quadrada da soma dos quadrados dos componentes de x. Em adição, o produto escalar de dois vetores x e y é definido por: $|x|\ |y|\ \cos\theta$, onde $0 < \theta < \pi$ é o ângulo formado pelos dois vetores. No espaço bi- e tri-dimensional, pode-se demonstrar que êste produto escalar é igual a $x_1 y_1 + x_2 y_2$ e $x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$, respectivamente.

Estas notações podem ser generalizadas para o espaço n-dimensional. O produto interno ou o produto escalar de dois vetores $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ é indicado por $(x, y)$ e é definido por

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i \tag{2.5}$$

que é uma função escalar de x e y.

PROGRAMA 3:

Êste programa, em forma de Função Subprograma, permite determinar o produto escalar de dois vetores dados por

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

utilizando a fórmula (2.5).

```
      SUBROUTINE GRACO1(N,V1,V2,PE)
      DIMENSION V1(20),V2(20)
      PE=0.
      DO 10 I=1,N
      P=V1(I)*V2(I)
   10 PE=PE+P
      RETURN
      END

00512 CORES USED
39999 NEXT COMMON
END OF COMPILATION
```

onde, V1 = x

V2 = y

PE = produto escalar de x por y

Chamamos de módulo de um vetor x, a relação

$$\sqrt{(x,\ x)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad ^{1/2}$$

É evidente que o módulo de um vetor é zero, se e sòmente se tôdas as suas componentes $x_i$ são nulas. O vetor cujas componentes são tôdas nulas é chamado vetor zero e é indicado por 0. Então $|0| = 0$ e $|x| > 0$ se $x \neq 0$.

No espaço bi- e tri-dimensional, dois vetores são chamados vetores ortogonais, se o ângulo formado por êles é 90°, isto é, se seu produto escalar é zero. Então, no espaço n-dimensional, dois vetores são ortogonais se e sòmente se $(x,\ y) = 0$.

Até o momento, temos considerado sòmente vetores com componentes reais. Para generalizar a definição (2.5) para vetores com componentes complexas, temos sòmente que substituir $y_i$ por $\overline{y_i}$, o conjugado complexo de $y_i$.

Se $c_1$, $c_2$, ..., $c_m$ são escalares, então o vetor

$$y = c_1\, x^1 + c_2\, x^2 + \ldots + c_m\, x^m$$

é uma combinação linear dos vetores $x^1$, $x^2$, ..., $x^m$. Note que temos usado índices superiores para distinguir diferentes vetores ; e esta notação não deve ser confundida com a notação usada para potências ou expoentes.

Os vetores $x^1$, $x^2$, ..., $x^m$ são chamados linearmente dependentes quando existirem constantes escalares $c_1$, $c_2$, ..., $c_m$ , não tôdas nulas, tal que satisfaçam a equação

$$c_1\, x^1 + c_2\, x^2 + \ldots + c_m\, x^m = 0$$

Em caso contrário, os vetores $x^1, x^2, \ldots, x^m$ são linearmente independentes, isto é, a equação

$$c_1 x^1 + c_2 x^2 + \ldots + c_m x^m = 0$$

implica que $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$.

Se os vetores $x^1, x^2, \ldots, x^m$ são linearmente dependentes, pelo menos um dêles será uma combinação linear dos outros para no mínimo uma das constantes, digamos $c_k$, e então

$$x^k = -\frac{c_1}{c_k} x^1 - \ldots - \frac{c_{k-1}}{c_k} x^{k-1} - \frac{c_{k+1}}{c_k} x^{k+1} - \ldots - \frac{c_m}{c_k} x^m .$$

Dadas estas noções básicas, vamos agora introduzir o conceito de matrizes.

## 3 - MATRIZES

Um arranjo retangular de números reais (ou complexos) com m linhas e n colunas é chamado uma matriz de m por n, e é indicada, geralmente, por uma letra maiúscula, na forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (3.1)$$

Como exemplo, podemos citar o arranjo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

que é uma matriz de 2 por 3.

As quantidades $a_{ij}$ são chamados os elementos da matriz A. Nós nos referiremos à $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ como a i-ésima linha de A, e à $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$ como a j-ésima coluna de A. Se m=n, a matriz é chamada matriz quadrada. Neste caso, n ou m é chamado ordem da matriz. Os elementos $a_{ii}$ constituem a diagonal principal de uma matriz quadrada. A maior diagonal que cruza em ângulo reto com a diagonal principal é chamada diagonal secundária.

Uma matriz quadrada com todos os elementos nulos abaixo de sua diagonal principal é chamada matriz triangular superior, e é geralmente indicada por U; de modo análogo, uma matriz quadrada com todos os elementos nulos acima de sua diagonal principal é chamada matriz triangular inferior, e é geralmente indicada por L. Então,

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad L = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Uma matriz quadrada é chamada matriz diagonal, se todos os seus elementos são nulos, exceto àqueles da diagonal principal, isto é, se $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$, e será indicada por D. Se na matriz diagonal todos os elementos da diagonal principal são 1, a matriz é chamada matriz unitária ou matriz identidade e é indicada por I. Então,

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Uma matriz de qualquer dimensão ou forma onde todos os seus elementos são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ para qualquer i e j, é chamada matriz zero ou matriz nula, e será indicada por 0. Então,

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Uma matriz quadrada com 1 na diagonal imediatamente acima da diagonal principal e zero nas demais posições é chamada matriz diagonal superior unitária; anàlogamente, uma matriz quadrada com 1 na diagonal imediatamente abaixo da diagonal principal e zero nas demais posições é chamada matriz diagonal inferior unitária. Indicando-as, respectivamente por S e S*, temos

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por analogia com o vetor linha e o vetor coluna, definimos matriz linha (matriz 1 por n) e matriz coluna (matriz m por 1). Como casos particulares dêstes dois tipos de matrizes, definimos a matriz coluna unitária, e indicamos por 1, a matriz em que todos os seus elementos são 1 independente de sua ordem. Anàlogamente, uma matriz linha com todos os seus elementos iguais a 1 será chamada matriz linha unitária, e será indicada por 1*. Então , temos

$$1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad 1^* = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1, & \dots, & 1 \end{bmatrix}$$

Uma matriz quadrada onde todos os seus elementos são nulos, exceto àqueles da diagonal secundária que são 1, é chamada matriz diagonal inversa unitária, isto é:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mais adiante daremos outros tipos de matrizes que, para serem definidas, necessitam de novos conceitos que são dados a seguir.

## 4 - OPERAÇÕES COM MATRIZES

Vamos considerar agora as operações em e com matrizes, isto é, construir uma álgebra de matrizes. Das operações elementares, a mais importante é a multiplicação, e por esta razão começaremos por ela, fazendo, a seguir, algumas referências à adição. Contudo, antes queremos introduzir o conceito de igualdade entre duas matrizes, isto é, duas matrizes A e B são iguais se e sòmente se cada $a_{ij}$ de A fôr igual ao correspondente $b_{ij}$ de B, e indica-se A = B.

### 4.1 - Multiplicação de Matrizes

Para introduzir o conceito de multiplicação de matrizes, começamos por considerar uma transformação linear de um vetor x em um vetor y. Tal transformação linear pode ser escrita na forma

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (4.1.1)$$

onde os coeficientes $a_{ij}$ são quantidades reais (ou complexas). Se escrevemos a relação entre x e y dada por (4.1.1) na forma

$$y = A\,x \qquad (4.1.2)$$

então, (4.1.1) e (4.1.2) definem a multiplicação de um vetor x por uma matriz quadrada A. Em outras palavras, o vetor produto A x é o vetor y cujas componentes são dadas por (4.1.1). Por exemplo, a transformação linear dada por

$$y_1 = 4\,x_1 + 2\,x_2$$
$$y_2 = 3\,x_1 + 5\,x_2$$

pode ser escrita na forma

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

PROGRAMA 4:

Êste programa, em Forma de Função Subprograma, permite determinar o produto de uma matriz quadrada A por um vetor x, dados por

$$A = (a_{ij}) \;, \quad i,j = 1, 2, 3, \ldots, n$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

A multiplicação de uma matriz A por um vetor x é dada por (4.1.1)

```
      SUBROUTINE GRACO2(N,A,V3,PMV)
      DIMENSION A(20,20),V3(20),PMV(20)
      DO 20 I=1,N
      SOMA=0.
      DO 10 J=1,N
      P=A(I,J)*V3(J)
   10 SOMA=SOMA+P
   20 PMV(I)=SOMA
      RETURN
      END
```

```
00666 CORES USED
39999 NEXT COMMON
END OF COMPILATION
```

onde, A = matriz

V3 = vetor

PMV = produto da matriz pelo vetor

A seguir vamos definir a multiplicação de uma matriz por outra matriz. Para tanto, consideramos uma segunda transformação linear

$$x = B\,z \qquad (4.1.3)$$

a qual converte as componentes de z nas componentes de x. Desejamos expressar as componentes de y em têrmos das componentes de z como acima fizemos, y = Ax. Podemos escrever (4.1.3) na forma

$$x_j = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}\, z_k\,, \quad j = 1, 2, \ldots, n \qquad (4.1.4)$$

Substituindo (4.1.4) em (4.1.1), temos

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left( \sum_{k=1}^{n} b_{jk}\, z_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk} \right) z_k \qquad (4.1.5)$$

Se introduzirmos uma nova matriz $C = c_{ij}$ definida por

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}\,, \quad i,k = 1, 2, \ldots, n \qquad (4.1.6)$$

podemos escrever

$$y = C\,z.$$

Desde que, formalmente

$$y = A\,x = A\,(Bz) = (AB)\,z$$

Somos conduzidos a definir a multiplicação de B por A, como sendo

$$C = AB \tag{4.1.7}$$

onde C é determinado por (4.1.6). Note, cuidadosamente, a ordem com que o produto de matrizes é escrito. O produto AB é referido ou como B pré-multiplicado por A ou como A post-multiplicado por B. Post-multiplicação de uma matriz A por uma matriz B significa que A é para ser multiplicado à direita por B. Pré-multiplicação, usado no mesmo sentido, significa que A é para ser multiplicado à esquerda por B. Sòmente se A e B são comutáveis, isto é, AB=BA , podemos ignorar a ordem da multiplicação.

Para ilustrar como a multiplicação de matrizes, definida por (4.1.7), é formada, consideremos as transformações

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Podemos expressar $y_1$ e $y_2$ em têrmos de $z_1$ e $z_2$ do seguinte modo

$$\begin{aligned} y_1 = 3\,x_1 + 2\,x_2 &= 3(z_1 - 2\,z_2) + 2(2\,z_1 + z_2) = \\ &= \left[3(1) + 2(2)\right] z_1 + \left[3(-2) + 2(1)\right] z_2 = \\ &= 7\,z_1 - 4\,z_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 = 2\,x_1 - 4\,x_2 &= 2(z_1 - 2\,z_2) - 4(2\,z_1 + z_2) = \\ &= \left[2(1) - 4(2)\right] z_1 + \left[2(-2) - 4(1)\right] z_2 = \\ &= -6\,z_1 - 8\,z_2 \end{aligned}$$

Em notação matricial isto pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -6 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Note que o elemento na primeira linha e primeira coluna da matriz produto é a soma dos produtos dos elementos correspondentes da primeira linha da matriz da esquerda e a primeira coluna da matriz da direita. Os outros elementos da matriz produto são determinados de modo análogo.

Um ponto muito importante a considerar é que a multiplicação de matrizes não é comutativa. Em outras palavras, em geral

$$AB \neq BA$$

Com um simples exemplo podemos mostrar êste comportamente. Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

temos

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -9 \end{bmatrix} \quad e \quad BA = \begin{bmatrix} -4 & -11 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$$

A primeira coisa a se notar em multiplicação de matrizes é que se sòmente as duas matrizes são "compatíveis" - se o número de colunas da primeira é igual ao número de linhas da segunda - o produto existe.

Produtos de três ou mais matrizes podem existir, desde que elas sejam, em sequência, compatíveis. Neste caso, é fácil mos trar, pela definição, que a propriedade associativa é válida. Em outras palavras, para as matrizes A, B, e C, temos

$$(AB)\,C = A\,(BC)$$

Nesta discussão sôbre multiplicação de matrizes nós nos restringimos a matrizes quadradas. Porém, a regra para formar os elementos da matriz produto, a qual é dada por (4.1.6), é também aplicável a matrizes retangulares, desde que o número de colunas da matriz A seja igual ao número de linhas da matriz B. Então, se A é uma matriz m por n e B é uma matriz n por p, a matriz produto, C, será uma matriz m por p, e em (4.1.6) o índice i variará de 1 a m, enquanto que k variará de 1 a p.

Nós, normalmente, não usamos o conceito de divisão em álgebra de matrizes.

PROGRAMA 5:

Êste programa, em forma de Função Subprograma, permite efetuar a multiplicação de duas matrizes quadradas, de ordem menor ou igual a 10.

```
      SUBROUTINE SQMUMA(N,A,B,C)
      DIMENSION A(10,10),B(10,10),C(10,10),D(10,10)
      DO 10 I=1,N
      DO 10 J=1,N
      D(I,J)=0.
      DO 10 K=1,N
   10 D(I,J)=D(I,J)+A(I,K)*B(K,J)
      DO 20 I=1,N
      DO 20 J=1,N
   20 C(I,J)=D(I,J)
      RETURN
      END

 02046 CORES USED
 39999 NEXT COMMON
 END OF COMPILATION
```

onde, N - grau (dimensão) de A e B
A - matriz multiplicando
B - matriz multiplicador
C - matriz produto

PROGRAMA(*) 6:

Êste programa, em forma de Função Subprograma, permite efetuar a multiplicação de duas matrizes quaisquer de ordem menor ou igual a 30.

```
      SUBROUTINE MMAT(I,J,K,A,B,R)
      DIMENSION A(30,30),B(30,30),R(30,30)
      DO 10N=1,K
      DO 30L=1,I
      SOMA=0.
      DO 40M=1,J
      PROD=A(L,M)*B(M,N)
   40 SOMA=SOMA+PROD
   30 R(L,N)=SOMA
   10 CONTINUE
      RETURN
      END


00714 CORES USED
39999 NEXT COMMON
END OF COMPILATION
```

onde, A - matriz multiplicando
B - matriz multiplicador
R - matriz produto
I - número de linhas de A
J - número de colunas de A
K - número de colunas de B

(*) Colaboração do Sr. Antonio Pedro Coco, bolsista do Instituto de Energia Atômica.

Da regra para multiplicação de matrizes, um sistema, digamos, de três equações simultâneas

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 &= c_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 &= c_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 &= c_3 \end{aligned}$$

pode ser escrito na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

ou simplesmente como

$$AX = C$$

A matriz A (geralmente quadrada) é chamada matriz do sistema ou matriz dos coeficientes; as colunas X e C são chamadas matrizes colunas das incógnitas e das constantes, respectivamente. E a matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \end{bmatrix}$$

é chamada matriz aumentada do sistema, e é formada juntando-se a matriz das constantes à matriz dos coeficientes.

O procedimento mais importante em qualquer método de solução de equações simultâneas por eliminação, consiste em reduzir o sistema à forma de matriz triangular superior

$$\begin{bmatrix} 1 & t_{12} & t_{13} \\ 0 & 1 & t_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

ou

$$TX = K$$

e o sistema

$$\begin{aligned} x_1 + t_{12}\, x_2 + t_{13}\, x_3 &= k_1 \\ x_2 + t_{23}\, x_3 &= k_2 \\ x_3 &= k_3 \end{aligned}$$

pode, imediatamente, ser resolvido por substituição inversa.

4.2 - Fatorização de Matrizes

O conceito de fatorização, em muitos casos, é de grande valor prático. Por exemplo, a operação

$$C - AB = B$$

pode ser escrita, fatorada, na forma

$$C = B + AB = (I + A)\, B \qquad (4.2.1)$$

onde I é a matriz unitária.

4.3 - Adição de Matrizes

Necessitamos fazer umas poucas observações sôbre a adição (e subtração de matrizes). Para a adição ser útil e possível , precisamos ver qual o significado da igualdade

$$A\, x + B\, x = (A + B)\, x \qquad (4.3.1)$$

Para que (4.3.1) tenha significado, é necessário que tanto A quanto B tenham o mesmo número de colunas quantos forem os elementos de x; e desde que A x e B x tenha cada uma, respectivamente, tantos elementos quantos forem as linhas de A e B, as matrizes A e B devem ter o mesmo número de linhas. Então, para a adição ser possível, A e B devem ser de mesma dimensão, e na matriz soma os elementos são as somas dos correspondentes elementos de A e B. Então, se

$$C = A + B$$

tem-se

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad (4.3.2)$$

A subtração de matrizes é tratada como uma adição negativa.

### 4.4 - Multiplicação de Matrizes por Escalar

Para se efetuar a multiplicação de uma matriz A por uma quantidade escalar k, multiplica-se todos os elementos da matriz pelo escalar, isto é,

$$k\,A = k\,a_{ij} \qquad (4.4.1)$$

## 5 - DETERMINANTES

O determinante dos elementos de uma matriz quadrada A é chamado determinante de A e é muitas vêzes indicado por $|A|$, e escreve-se

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (5.1)$$

Êste determinante é uma quantidade escalar função dos elementos $a_{ij}$ da matriz A. Pode ser definido formando-se todos os produtos possíveis consistindo de um elemento de cada linha e cada coluna, fixando-se um sinal apropriado, e somando-os. A ordem de um determinante é o número de linhas e colunas da matriz quadrada que lhe dá origem.

Para escrever o procedimento clássico para calcular um determinante, começaremos por um determinante de ordem 2. A definição, neste caso, é

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

O valor de um determinante de ordem 3 pode ser escrito em têrmos de determinantes de ordem 2 expandindo-se o determinante em função dos elementos de qualquer coluna (ou de qualquer linha). Por exemplo, temos:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12}\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13}\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

onde a expansão é em têrmos da primeira linha.

Em geral, a expressão de um determinante de ordem n em têrmos de seus elementos de qualquer coluna (ou de qualquer linha), envolverá determinantes de ordem n-1, e dêste modo, determinantes de qualquer ordem podem ser calculados indutivamente.

## 5.1 - Menor Complementar

Chama-se menor complementar, ou simplesmente, menor de um elemento $a_{ij}$ na matriz dos coeficientes, à matriz quadrada obti da suprimindo-se da matriz dos coeficientes a i-ésima linha e a j-ésima coluna.

Em (5.2) temos três menores de 2a. ordem de uma matriz de 3a. ordem.

## 5.2 - Complemento Algébrico

O complemento algébrico, também chamado cofator, de um elemento $a_{ij}$ é o produto de seu menor complementar por $(-1)^{i+j}$, e é aqui indicado por $A_{ij}$.

## 5.3 - Cofator Reduzido

Chama-se cofator reduzido de um elemento matricial, o quociente do cofator pelo determinante da matriz, e indica-se por $\tilde{A}_{ij}$. Então:

$$\tilde{A}_{ij} = \frac{A_{ij}}{|A|} \tag{5.3}$$

## 5.4 - Leis de Laplace

Lembrando (5.2) e com o conceito de cofator de um elemento $a_{ij}$, podemos dar as duas leis de Laplace:

a) "A soma dos produtos dos elementos de uma linha (ou coluna) pelos respectivos cofatores é igual ao determinante da matriz".

b) "A soma dos produtos dos elementos de uma linha (ou coluna) pelos cofatores dos elementos correspondentes de uma outra linha (ou coluna), é nula".

Então, a regra para calcular o determinante $|A|$ em têrmos dos elementos da i-ésima linha pode ser escrita

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \tag{5.4}$$

## 5.5 - Propriedades Elementares de Determinantes

Para referência, estabelecemos algumas das propriedades elementares de determinantes:

a) Se duas colunas (ou duas linhas) de um determinante são intercambiáveis, o valor do determinante muda de sinal.

b) Se duas colunas (ou duas linhas) de um determinante são idênticas, o valor do determinante é zero.

c) Se todos os elementos de uma coluna (ou uma linha) são multiplicados por um mesmo número, o determinante fica multiplicado por êste número.

d) Se linhas e colunas de um determinante são intercambiáveis sem mudar a ordem na qual elas ocorrem, o valor do determinante é inalterável.

e) Se aos elementos de qualquer coluna (ou linha) são somados os correspondentes elementos de qualquer outra coluna (ou linha) multiplicado pelo mesmo número arbitrário, o valor do determinante fica inalterável, isto é, o determinante não se altera se qualquer linha (ou coluna) é combinação linear de outra linha (ou coluna).

f) A soma dos produtos de cada elemento de uma linha (ou coluna) pelo cofator do elemento correspondente de outra linha (ou coluna), é zero. Então temos:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \; A_{jk} = 0 \quad \text{para} \quad i \neq j$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} \; A_{kj} = 0 \quad \text{para} \quad i \neq j$$

Combinando êstes resultados com (5.4) e o correspondente resultado para colunas, podemos escrever as seguintes relações

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = |A| \delta_{ij}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = |A| \delta_{ij} \qquad (5.5)$$

onde $\delta_{ij}$ é o delta de Kronecker que assume o valor 1 quando $i=j$, e o valor 0 quando $i \neq j$.

## 5.6 - Cálculo de Determinante por Condensação

Tendo dado as propriedades elementares de determinantes, vamos aproveitar para dar um dos métodos mais eficientes para cálculo de um determinante de ordem n, método da condensação (inicialmente desenvolvido por Chio em 1835), e que se baseia nas propriedades c e e do item anterior.

Seja o determinante,

$$|A_n| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (5.6)$$

Aplicando as duas propriedades acima mencionadas, o que equivale dizer, usando o método da condensação, o valor do determinante... (5.6) pode ser expresso pela seguinte expressão, aplicada n-1 vêzes:

$$|A_{n-1}| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22}-a_{21}\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & a_{23}-a_{21}\dfrac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & a_{2n}-a_{21}\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ a_{32}-a_{31}\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & a_{33}-a_{31}\dfrac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & a_{3n}-a_{31}\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2}-a_{n1}\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & a_{n3}-a_{n1}\dfrac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & a_{nn}-a_{n1}\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \end{vmatrix} \quad (5.7)$$

PROGRAMA 7:

Êste programa, em forma de Função Subprograma, permite calcular um determinante (DETERM) de uma matriz quadrada de ordem menor ou igual a 20, pelo método da condensação. O algorítmo básico usado no programa é baseado na relação (5.7):

$$a_{ij} \rightarrow a_{ij} - a_{im}\frac{a_{mj}}{a_{mm}} = a_{ij} - a_{mj}\frac{a_{im}}{a_{mm}}$$

Como a razão $\dfrac{a_{im}}{a_{mm}}$ é independente do índice j, ela é computada uma vez para cada valor de i:

QUOCIE = A(I,M)/A(M,M)

e então usada para cada valor de j:

A(I,J) = A(I,J) - A(M,J) * QUOCIE

A ≡ matriz

N ≡ dimensão de A

DETERM ≡ valor numérico do determinante

```
      SUBROUTINE DMC(A,N,DETERM)
      DIMENSION A(20,20)
      K=2
      M=1
   10 DO 20 I=K,N
      QUOCIE=A(I,M)/A(M,M)
      DO 20 J=K,N
   20 A(I,J)=A(I,J)-A(M,J)*QUOCIE
      IF(K-N)30,40,40
   30 M=K
      K=K+1
      GO TO 10
   40 DETERM=1.
      DO 50 M=1,N
   50 DETERM=DETERM*A(M,M)
      RETURN
      END


01084 CORES USED
39999 NEXT COMMON
END OF COMPILATION
```

5.7 - Cálculo de Determinante pelo Método de Gauss

O método de Gauss de eliminação sistemática para solução de equações lineares simultâneas, é um dos melhores métodos numéricos para cálculo de determinante de uma matriz.

Deixamos de dar o texto teórico do procedimento numérico, pois o mesmo não se enquadra no objetivo dêste trabalho, para ilustrar a programação digital para êste cálculo. Por outro lado, o desenvolvimento do método de Gauss pode ser encontrado na maioria dos livros de Análise e Cálculo Numérico.

PROGRAMA 8:

Êste programa, em forma de Função Subprograma, permite calcular o valor numérico do determinante de uma matriz A (de ordem menor ou igual a 10), utilizando o método de Gauss de eliminação sistemática.

```
      SUBROUTINE DTM(A,N,DET)
      DIMENSIONA(10,10),XMAX(10)
      DO 30I=1,N
      XMAX(I)=ABSF(A(I,I))
      L=I
      KK=I+1
      DO 40K=KK,N
      IF(XMAX(I)-ABSF(A(K,I)))50,40,40
   50 XMAX(I)=ABSF(A(K,I))
      L=K
   40 CONTINUE
      DO 90J=I,N
      B=A(I,J)
      A(I,J)=A(L,J)
      A(L,J)=B
   90 CONTINUE
      M=N
  120 A(I,M)=A(I,M)/A(I,I)
      IF(M-I)100,100,110
  110 M=M-1
      GO TO120
  100 IF(I-1)125,125,115
  115 NN=1
      GO TO150
  125 NN=I
  130 NN=NN+1
      IF(NN-I)135,130,135
  135 IF(NN-N)150,150,30
  150 M=N
  170 A(NN,M)=A(NN,M)-A(NN,I)*A(I,M)
      IF(M-I)130,130,180
  180 M=M-1
      GO TO170
   30 CONTINUE
      DET=1.
      DO 190I=1,N
  190 DET=DET*XMAX(I)
      RETURN
      END
```

```
02610 CORES USED
39999 NEXT COMMON
END OF COMPILATION
```

onde, A = matriz dos coeficientes

N = ordem de A

XMAX = maior coeficiente de uma coluna

DET = valor numérico do determinante

## 5.8 - Cálculo de Determinante pelo Método de Crout

Analogamente ao método de Gauss, o método de redução de Crout para solução de sistemas de equações lineares, também é muito eficiente para calcular o valor numérico do determinante de uma matriz.

O desenvolvimento dêste método é largamente discutido nos livros de Cálculo Numérico, razão pela qual deixamos de transcrevê-lo aqui, para darmos a programação digital.

PROGRAMA(*) 9:

Êste programa, em forma de Função Subprograma, permite calcular o valor numérico do determinante de uma matriz A (de ordem menor ou igual a 10), utilizando o método de redução de Crout.

```
      SUBROUTINE DTC(A,N,DET)
      DIMENSION A(10,10)
      DO 10I=1,N
   10 A(I,1)=A(I,1)
      DET=A(1,1)
      DO 20J=2,N
   20 A(1,J)=A(1,J)/A(1,1)
```

(*) Colaboração do Sr. Antonio Pedro Coco, bolsista do Instituto de Energia Atômica.

```
      DO 30I=2,N
      II=I-1
      S=0.
      DO 35K=1,II
      P=A(I,K)*A(K,I)
   35 S=S+P
      A(I,I)=A(I,I)-S
      DET=DET*A(I,I)
      IF(I-N)31,60,31
   31 IF(DET)36,60,36
   36 IS=I+1
      DO 40J=IS,N
      S=0.
      DO 45K=1,II
      P=A(J,K)*A(K,I)
   45 S=S+P
   40 A(J,I)=A(J,I)-S
      DO 50J=IS,N
      S=0.
      DO 55K=1,II
      P=A(I,K)*A(K,J)
   55 S=S+P
   50 A(I,J)=(A(I,J)-S)/A(I,I)
   30 CONTINUE
   60 RETURN
      END


02462 CORES USED
39999 NEXT COMMON
END OF COMPILATION
```

onde, A = matriz dos coeficientes

N = ordem de A

DET = valor numérico do determinante de A.

## 6 - PROPRIEDADES DE ALGUMAS MATRIZES ESPECIAIS

Para desenvolver qualquer tipo de Álgebra, necessitamos conhecer além das operações fundamentais e os conceitos de "unidade" e "zero", as propriedades fundamentais de certas matrizes que muito podem auxiliar métodos numéricos que utilizem a Álgebra de

Matrizes.

MATRIZES UNITÁRIAS

É fàcilmente verificado que

$$AI = A, \quad e \quad IA = A \tag{6.1}$$

Em (6.1), se A não é quadrada, as duas matrizes unitárias serão de ordens diferentes, uma delas compatível para post-multiplicação, e a outra compatível para pré-multiplicação.

A multiplicação de I por ela mesma (aqui os I's devem ser de mesma ordem) é uma outra matriz unitária. Então,

$$I \cdot I = I^2 = I \tag{6.2}$$

Consequentemente, para qualquer n inteiro e positivo

$$I^n = I \tag{6.3}$$

MATRIZES NULAS

A diferença entre duas matrizes iguais é uma matriz nula, e uma vez que uma matriz nula de qualquer ordem é única, duas matrizes quaisquer que deferirem por uma matriz nula, são iguais. Esta propriedade da matriz nula é análoga a aquela do zero no sistema numérico. Também é verdade que

$$A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0 \tag{6.4}$$

Porém, se A . B = 0, isto não significa que A ou B deve ser uma matriz nula. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.5}$$

MATRIZES DIAGONAIS

Duas das propriedades mais interessantes das matrizes diagonais, são que:

$$\begin{bmatrix} u & o & o \\ o & v & o \\ o & o & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ua & ub & uc \\ vd & ve & vf \\ wg & wh & wk \end{bmatrix} \qquad (6.6)$$

e

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & o & o \\ o & v & o \\ o & o & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} au & bv & cw \\ du & ev & fw \\ gu & hv & kw \end{bmatrix} \qquad (6.7)$$

Então, vemos que matrizes diagonais em pré-multiplicação, multiplicam linhas pelos elementos correspondentes da diagonal, e em post-multiplicação, multiplicam colunas pelos elementos correspondentes da diagonal.

Em consequência disto, se desejarmos multiplicar todos os elementos de uma matriz por algum número ou quatidade, podemos fazê-lo pré- (post-) multiplicando por uma matriz diagonal cujos todos os elementos da diagonal é o número ou quantidade em questão.

MATRIZES DIAGONAIS SUPERIOR E INFERIOR UNITÁRIAS

Tais matrizes têm propriedades úteis, tais como:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (6.8)$$

Isto é, se qualquer matriz é pré-multiplicada por uma matriz diagonal superior unitária (compatível com aquela), a matriz produto tem a última linha nula, as outras linhas são elevadas para as linhas de cima, e perde-se a primeira linha original da matriz multiplicador. Analogamente, S* como um pré-multiplicador, as linhas são abaixadas, e perde-se a última linha. Post-multiplicando por S ou S* tem-se um efeito correspondente sôbre as colunas.

Êstes resultados são casos especiais de um princípio geral. Se desejamos realizar qualquer operação matricial sôbre as linhas de uma matriz, podemos fazê-la realizando a mesma operação sôbre a matriz unitária, e usando a matriz assim obtida como um pré-multiplicador. Analogamente, para operar sôbre colunas usaremos a matriz resultante como um post-multiplicador.

Por razões que podem ser de interêsse, vamos considerar produtos e potências das matrizes diagonais superior e inferior unitárias. Do exposto, vemos imediatamente que S . S (ou $S^2$) é uma matriz com unidades sòmente na 2a. diagonal superior. Pelas mesmas razões, $S^3$ tem unidades sòmente na 3a. diagonal superior, e assim sucessivamente. Finalmente, por êste processo, pesquizamos uma matriz nula. Se S é de ordem n, $S^m = 0$ se $m \geqslant n$. Resultados similares existem para S*.

## MATRIZES COLUNA E LINHA UNITÁRIAS

O resultado de post-multiplicação por uma matriz coluna unitária é uma matriz coluna cujos seus elementos é a soma das linhas; e uma pré-multiplicação por uma matriz linha unitária é uma matriz linha de somas de colunas. Tais matrizes, somas de linhas ou soma de colunas, são de considerável ajuda em cálculo de matrizes como verificação de precisão. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

onde 6 e 9 são as somas das linhas, e

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

onde 3, 5 e 7 são as somas das colunas

MATRIZES DIAGONAL INVERSA UNITÀRIA

Pré-multiplicação por J inverte a ordem dos elementos em cada coluna, e post-multiplicação inverte a ordem dos elementos em cada linha. As linhas e colunas são invertidas formando-se o produto JAJ, onde os dois J's são de ordens diferentes se A é retangular. Outras propriedades interessantes são:

$$J^2 = I \tag{6.9}$$

e

$$J = J^T \tag{6.10}$$

onde I é a matriz unitária, e $J^T$ é a matriz transposta de J.

## 7 - MATRIZES TRANSPOSTA, INVERSA, E ADJUNTA

Se trocarmos linhas por colunas, na mesma ordem, de uma matriz A, obtemos a matriz transposta que indicamos por $A^T$. A notação A' também é usada por muitos autores. Dêste modo, se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

temos

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (7.1)$$

PROGRAMA 10:

Êste programa, em Forma de Função Subprograma, permite efetuar a multiplicação da transposta de uma matriz por um vetor, dados por

$A = (a_{ij})$ , $i,j = 1, 2, 3, \ldots, n$ - matriz dada

$A^T = (a_{ji})$ , $i,j = 1, 2, 3, \ldots, n$ - transposta de A

$x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ - vetor

A multiplicação da transposta de A por um vetor x é dada por

$$A^T x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji} \ x_j$$

```
      SUBROUTINE GRACO5(N,A,V7,PTV)
      DIMENSION A(20,20),V7(20),PTV(20)
      DO 20 I=1,N
      SOMA=0.
      DO 10 J=1,N
      P=A(J,I)*V7(J)
   10 SOMA=SOMA+P
   20 PTV(I)=SOMA
      RETURN
      END
```

```
Ō0666 CORES USED
3̄9999 NEXT COMMON
END OF COMPILATION
```

onde, A(J,I) = transposta de A

V7 = vetor

PTV = produto da transposta por vetor

É de interêsse a seguinte regra para a transposta de um produto:

$$(AB)^T = B^T A^T \qquad (7.2)$$

Para se provar (7.2), notamos que o elemento na i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz $(AB)^T$ é igual ao elemento na j-ésima linha e i-ésima coluna da matriz AB, por definição de matriz transposta. Por (4.1.6) êste elemento é

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} \; b_{ki}$$

Desde que se possa reescrevê-lo na forma

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ki} \; a_{jk},$$

e que $b_{ki}$ são os elementos do i-ésima linha de $B^T$, e $a_{jk}$ são os elementos da j-ésima coluna de $A^T$, segue que esta expressão é o elemento na i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz $B^T A^T$.

Uma matriz A é chamada matriz simétrica se e sòmente se

$$A = A^T \qquad (7.3)$$

isto é:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Em caso contrário, a matriz será não-simétrica.

Uma matriz quadrada A é dita ser não-singular se seu determinante é diferente de zero. Em caso contrário, a matriz é singular.

Vamos introduzir agora o conceito de matriz inversa. A matriz inversa de uma matriz A é indicada por $A^{-1}$ e é definida pela relação

$$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I \qquad (7.4)$$

É evidente, então, que se $A^{-1}$ existe, A deve ser não-singular, pois se A fôsse singular, $|A| = 0$, e isto é impossível porque de (7.4) segue que

$$|A| \,.\, |A^{-1}| = |A^{-1}| \,.\, |A| = 1.$$

Dêste modo, consideramos A não-singular e vamos mostar como construir a matriz inversa. Inicialmente, definimos a matriz adjunta de A como sendo a transposta da matriz dos cofatores de A que será indicada por adj A. Então,

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \qquad (7.5)$$

Dividindo-se todos elementos da matriz adjunta pelo determinante de A, obtem-se a matriz inversa; ou o que é o mesmo e de modo mais simplificado, a matriz inversa é a transposta da matriz dos cofatores reduzidos (cofator dividido por $|A|$). Isto é,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} & \cdots & \tilde{A}_{n1} \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{22} & \cdots & \tilde{A}_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tilde{A}_{1n} & \tilde{A}_{2n} & \cdots & \tilde{A}_{nn} \end{bmatrix} \qquad (7.6)$$

Exemplificando: Determinar a adjunta e a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Primeiro calculamos os cofatores de A. Por exemplo:

$$A_{12} = - \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = 16$$

Em segundo lugar, transpomos a matriz dos cofatores e encontramos:

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -6 & 14 & -28 \\ 16 & -19 & -17 \\ -14 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

A seguir, calculamos o determinante de A, e podemos escrever que

$$A^{-1} = -\frac{1}{110} \text{ adj } A = \begin{bmatrix} \frac{8}{55} & -\frac{7}{55} & \frac{14}{15} \\ \frac{8}{55} & \frac{19}{110} & \frac{17}{110} \\ \frac{7}{55} & \frac{2}{55} & -\frac{4}{55} \end{bmatrix}$$

Para provar que a inversa é a transposta da matriz dos cofatores reduzidos, começamos por provar que se C = adj A, devemos ter

$$A\,C = |A| \,.\, I \qquad (7.7)$$

De fato, o elemento na i-ésima linha e j-ésima coluna de A C, é por (4.1.6), dado por

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\; A_{jk} = a_{i1}\; A_{j1} + a_{i2}\; A_{j2} + \dots + a_{in}\; A_{jn}$$

Mas pelas equações (5.5) a relação acima é igual a $|A|$ se i=j , e é igual a zero se $i \neq j$. Portanto, isto prova (7.7). Do mesmo modo podemos também provar que

$$C\,A = |A|\, I \qquad (7.8)$$

Então, se supormos que a inversa $A^{-1}$ é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, C = \frac{1}{|A|}\, \text{adj } A \qquad (7.9)$$

e pré-multiplicarmos por A, temos:

$$A\,A^{-1} = A\,\frac{1}{|A|}\, C = \frac{1}{|A|}\, A\,C$$

Por (7.7) encontramos que

$$A\,A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, |A|\; I = I \qquad (7.10)$$

Analogamente, usando-se (7.8) encontramos

$$A^{-1}\, A = I \qquad (7.11)$$

Reunindo (7.10) e (7.11) provamos que $A^{-1}$ é definida por (7.9) , pois satisfaz a definição (7.4).

Agora aproveitamos os conceitos dados para definir três tipos de matrizes e a noção de "rank" de matriz, que muito podem auxiliar os métodos de solução de equações lineares.

Se uma matriz A satisfaz a condição que sua inversa $A^{-1}$ é igual a sua transposta $A^T$, a matriz é chamada matriz ortogonal. Dêste modo, para uma matriz ortogonal, temos

$$A\,A^T = I \tag{7.12}$$

onde I é a matriz unitária. Um exemplo de uma matriz ortogonal é dado por uma matriz cujas linhas são os cosenos diretores de três eixos mutualmente perpendiculares referidos à três eixos fixos mutualmente perpendiculares. Um exemplo de tal matriz é

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} .$$

Uma matriz é chamada positiva-definida, se

$(x, A\,x) \geqslant 0$ , para qualquer vetor x diferente de zero.

Uma matriz é chamada não-negativa, se

$(x, A\,x) > 0$ , para qualquer que seja o vetor x.

A noção de rank de uma matriz é muito importante tanto na solução de sistemas de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é retangular, como na solução de equações homogêneas lineares.

Define-se rank de uma matriz A como a ordem da maior sub-matriz quadrada suprimindo-se de A certas linhas e/ou colunas, e comprimindo-se os elementos restantes em uma matriz compacta, cujo determinante seja diferente de zero. Por exemplo, a matriz 2 por 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

é de rank 1, pois seus menores de 2a. ordem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

são iguais a zero; porém nem todos os seus elementos (menores de 1a. ordem) são nulos.

## 8 - DETERMINAÇÃO DA MATRIZ INVERSA

Consideramos, inicialmente, um sistema de n equações relativo a n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, na forma

$$\begin{array}{l} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = c_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + a_{nn}\,x_n = c_n \end{array} \qquad (8.1)$$

Lembrando da definição de cofator reduzido podemos transformar o sistema (8.1) na seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tilde{A}_{11}\, c_1 + \tilde{A}_{21}\, c_2 + \ldots + \tilde{A}_{n1}\, c_n \\ x_2 &= \tilde{A}_{12}\, c_1 + \tilde{A}_{22}\, c_2 + \ldots + \tilde{A}_{n2}\, c_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \tilde{A}_{1n}\, c_1 + \tilde{A}_{2n}\, c_2 + \ldots + \tilde{A}_{nn}\, c_n \end{aligned} \qquad (8.2)$$

De (8.2) e (7.6), segue que a k-ésima coluna da matriz inversa dos coeficientes de (8.1) é a solução correspondente fazendo-se $c_k=1$ e todos os outros c's iguais a zero. Dêste modo , se em vez de substituir por uma simples coluna inserimos uma matriz unitária

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

de n colunas, e tratarmos cada coluna desta matriz como uma única coluna c, obteremos, finalmente a matriz (7.6) em lugar de uma única coluna x. Isto é, a matriz resultante será a inversa da matriz dos coeficientes de um sistema de equações.

PROGRAMA(*) 11:

Êste programa, em forma de Função Subprograma, permite inverter uma matriz quadrada de ordem $\leq$ 30.

```
      SUBROUTINE INVMAT(C,N)
      DIMENSION C(30,30)
      DO 10I=1,N
      CINT=C(I,I)
```

(*) Colaboração do Sr. Antonio Pedro Coco, bolsista do Instituto de Energia Atômica.

```
      C(I,I)=1.
      DO 15J=1,N
   15 C(I,J)=C(I,J)/CINT
      DO 10K=1,N
      IF(I-K)20,10,20
   20 CINT=C(K,I)
      C(K,I)=0.
      DO 10M=1,N
      C(K,M)=C(K,M)-CINT*C(I,M)
   10 CONTINUE
      RETURN
      END

01228 CORES USED
39999 NEXT COMMON
END OF COMPILATION
```

onde, $A \equiv$ matriz

$N \equiv$ dimensão de A

## 8.1 - Inversão de Matrizes pelo Método da Eliminação de Gauss

O método da eliminação de Gauss permite, além de calcular a solução de um sistema de equações lineares, e o determinante do sistema, determinar a inversa da matriz dos coeficientes.

Para determinar a inversa da matriz dos coeficientes , escrevemos a matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{8.1.1}$$

associada com as equações dadas pelo sistema

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (8.1.2)$$

As primeiras n colunas desta matriz representam, respectivamente, os coeficientes de $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$; as últimas n colunas representam os coeficientes de $b_1$, $b_2$, ..., $b_n$, respectivamente. Então, cada linha da matriz representa uma das equações (8.1.2).

Se a primeira linha da matriz é dividida por $a_{11}$ e o resultado é multiplicado por $a_{21}$, $a_{31}$, ..., $a_{n1}$, e subtraido, respectivamente, da segunda, terceira, ..., n-ésima linhas, o resultado é uma matriz auxiliar tendo zeros nos lugares dos elementos $a_{21}$, $a_{31}$, ..., $a_{n1}$. Seguindo os passos do método de Gauss, obtemos um conjunto de equações representado pela matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & \ldots & a'_{1n} & c'_{11} & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & a'_{23} & \ldots & a'_{2n} & c'_{21} & c'_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & a'_{3n} & c'_{31} & c'_{32} & c'_{33} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & c'_{n1} & c'_{n2} & c'_{n3} & \ldots & c'_{nn} \end{bmatrix} \qquad (8.1.3)$$

Multiplicando a última linha da matriz acima por ... $a'_{1n}$, $a'_{2n}$, ..., $a'_{n-1,n}$ e subtraindo-a da primeira, segunda, ... , (n-1)-ésima linhas, respectivamente, obteremos zeros para todos os elementos da n-ésima coluna exceto para o último elemento. Considerando, agora, a (n-1)-ésima coluna e procedendo com processo similar, obtemos zeros em tôdas as posições daquela coluna exceto para o elemento unitário restante na (n-1)-ésima linha. Continuando o processo para cada uma das outras colunas até a segunda, obtemos a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \tag{8.1.4}$$

cujas equações correspondentes são

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} b_k , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

e por esta razão a matriz formada sòmente pelos c's é a inversa de A.

## 8.2 - Inversão de Matrizes pelo Método de Crout

Como o método de Crout é, essencialmente, um método de eliminação, o procedimento para determinação da matriz inversa é, bàsicamentem aquêle descrito no item anterior, onde partimos da matriz aumentada dada (8.1.1) para a matriz (8.1.3) e finalmente para (8.1.4). Os cálculos, entretanto, são mais adaptados para computadores digitais onde a somatória dos produtos com ou sem divisão final podem ser calculadas como uma simples operação contínua de máquina. As regras do método de Crout para modificar uma matriz dada podem ser aplicadas diretamente para obter a matriz auxiliar.

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1n} & c'_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} & c'_{21} & c'_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & \dots & a'_{3n} & c'_{31} & c'_{32} & c'_{33} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{n1} & a'_{n2} & a'_{n3} & \dots & a'_{nn} & c'_{n1} & c'_{n2} & c'_{n3} & \dots & c'_{nn} \end{bmatrix} \tag{8.2.1}$$

Como no item 8.1, os únicos elementos significativos desta matriz estão à direita dos elementos diagonais $a'_{11}$, $a'_{22}$, ..., $a'_{nn}$, e êstes são idênticos àqueles da matriz (8.1.3).

A matriz final é a matriz quadrada que inclue as últimas n colunas de (8.1.4) e é, dêste modo, a matriz inversa de A. O método para determinar os elementos $c_{ij}$ desta matriz inversa, a partir da matriz auxiliar (8.2.1), é indicado pelas equações seguintes

$$\begin{aligned}
c_{nj} &= c'_{nj} \\
c_{n-1,j} &= c'_{n-1,j} - a'_{n-1,n}\, c_{nj} \\
c_{n-2,j} &= c'_{n-2,j} - a'_{n-2,n}\, c_{nj} - a'_{n-2,n-1}\, c_{n-1,j} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
c_{ij} &= c'_{ij} - \sum_{k=i+1}^{n} a'_{ik}\, c_{kj} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
c_{1j} &= c'_{1j} - \sum_{k=2}^{n} a'_{1k}\, c_{kj}
\end{aligned} \qquad (8.2.2)$$

## 9 - DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES

Iniciamos com uma definição: duas matrizes A e B são similares se existir uma matriz não-singular C tal que

$$B = C^{-1} A C \qquad (9.1)$$

Neste caso, a matriz B é obtida da matriz A por uma transformação de similaridade.

Como matrizes diagonais são particularmente convenientes para cálculos, é de interêsse perguntar se qualquer matriz pode ser diagonalizada através de uma transformação de similaridade. Nós estabelecemos, sem provar, alguns resultados úteis a êste res peito. Maiores detalhes podem ser encontrados em Frazer, Duncan , e Collar [17], e Faddeeva [22].

Inicialmente, suponhamos que todos os auto-valores $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_n$ de uma matriz A sejam distintos. Então, A terá n distintos auto-vetores linearmente independentes. Além do mais, se W é uma matriz cujas colunas são os auto-vetores, então

$$W^{-1} A W = D \qquad (9.2)$$

onde, D é a matriz diagonal

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Dêste modo, A pode ser diagonalizada por uma transformação de similaridade.

Se qualquer dos auto-valores de uma matriz são de multiplicidade maior que 1, porém a cada auto-valor corresponder tantos auto-vetores linearmente independentes quantos forem sua multiplicidade, a matriz pode ser reduzida à forma diagonal, e a equação (9.2) é novamente válida. Êste é, em particular, o caso para matrizes reais simétricas. Os auto-vetores associados com distintos auto-valores de uma matriz real simétrica são ortogonais. Então, os auto-vetores linearmente independentes associados com um simples auto-valor de multiplicidade maior que 1 podem ser escolhidos para serem ortogonais. Consequentemente, para uma matriz real simétrica de n por n elementos, é possível determinar n auto-vetores ortogonais.

Para o caso geral de auto-valores múltiplos, a transfor mação à forma diagonal não é sempre possível por uma transformação de similaridade. Para descrever a forma canônica de Jordan onde qualquer matriz pode ser transformada por uma transformação de similaridade, introduzimos a definição de uma matriz canônica , que é uma matriz da seguinte forma

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

onde todos os elementos sôbre a diagonal principal são $\lambda_i$; todos os elementos na primeira sub-diagonal (isto é, os elementos diretamente abaixo da diagonal principal) são unidades; e todos os outros elementos são nulos.

Uma matriz canônica não pode ser simplificada usando-se uma transformação de similaridade. Seu polinômio característico é $(\lambda-\lambda_i)^{m_i}$ onde $m_i$ é a ordem da matriz. Dêste modo, a matriz canônica tem o único auto-valor múltiplo $\lambda_i$. Ela tem sòmente um auto-vetor linearmente independente.

A forma canônica de Jordan é uma matriz quase-diagonal, composta por matrizes canônicas

$$\begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & T_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & T_j \end{bmatrix}$$

onde cada $T_k$ é uma matriz canônica e cada 0 representa uma matriz zero. Esta notação mostra a matriz em questão, seccionada em sub-

-matrizes, das quais aquelas sôbre a diagonal principal são $T_k$ e tôdas as outras sub-matrizes são matrizes nulas. Por exemplo, se

$$T_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} ; \quad T_2 = \begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix} ; \quad T_3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

a forma canônica de Jordan será

$$\begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Os $\lambda_i$ aparecendo nas várias matrizes são auto-valores da matriz original, e também da matriz canônica. É possível que o mesmo número $\lambda_i$ apareça em diversas matrizes canônicas. A multiplicidade de um auto-valor é igual a soma das ordens das matrizes que aparecem como elementos diagonais. O número de auto-vetores linearmente independentes associados com elas é igual ao número de matrizes nas quais êles aparecem. No último exemplo, os auto-valores 2, -3, 4, são de ordem 3, 1, e 2, respectivamente. Associado a cada auto-valor está um auto-vetor linearmente independente.

Notamos que uma matriz diagonal é um caso especial da forma canônica de Jordan onde tôdas as matrizes canônicas são de primeira ordem.

Como já foi mencionado, tôda matriz pode ser transformada na forma canônica de Jordan por uma transformação de similaridade. Nós omitimos qualquer discussão de como esta forma canônica pode ser determinada para uma dada matriz. Nossa apresentação tem o propósito sòmente de mostrar as situações que podem ocorrer com relação a auto-valores e auto-vetores de uma matriz.

## AGRADECIMENTOS

O autor deseja expressar seus agradecimentos ao Senhor Antonio Pedro Coco, bolsista do Instituto de Energia Atômica, que contribuiu com vários programas em FORTRAN constantes dêste trabalho.

## BIBLIOGRAFIA

[1] - Kunz, K., Numerical Analysis, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1957.

[2] - Hamming, R.W., Numerical Methods for Scientists and Engineers, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1962.

[3] - Hildebrand, F.B., Introduction to Numerical Analysis, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1956.

[4] - Salvadori, M.G., and Baron, M.L., Numerical Methods in Engineering, Prentice-Hall, Inc., 1962.

[5] - Bellman, R., Introduction to Matrix Analysis, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1960.

[6] - Herriot, J.G., Methods of Mathematical Analysis and Computations, John Wiley & Sons, Inc., 1963.

[7] - Hartree, D.R., Numerical Analysis, Oxford University Press, 1952.

[8] - Householder, A.S., Principles of Numerical Analysis, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953.

[9] - Bickley, W.G., and Thompson, R.S.H.G., Matrices, their Meaning and Manipulation, The English Universities Press Ltd., 1964.

[10] - Heilmann, H.P., Apontamentos de aulas de Cálculo Numérico ministradas na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da U.S.P., 1963.

[11] - Varga, R.S., Matrix Iterative Analysis, Prentice-Hall, Inc., 1962.

[12] - Householder, A.S., The Theory of Matrices in Numerical Analysis, Blaisdell Publishing Company, 1964.

[13] - Kopal, Z., Numerical Analysis, John Wiley & Sons, Inc., 1961.

[14] - Aitken, A.C., Determinants and Matrices, Oliver and Boyd, London, 1939.

[15] - Hehl, M.E., Estudos Nº 1 e 7, desenvolvidos no Laboratório Nacional de Argonne (U.S.A.), 1964-1965.

[16] - Ralston, A. and Wilf, H.S., editors, Mathematical Methods for Digital Computers, John Wiley & Sons, Inc., 1960.

[17] - Frazer, R.A., Duncan, W.J., and Collar, A.R., Elementary Matrices and Some Applications to Dynamics and Differential Equations, Cambridge University Press, 1952.

[18] - Crout, P.D., A Short Method for Evaluating Determinants and Solving Systems of Linear Equations with Real or Complex Coefficients, Trans. AIEE, 60:1235-1240 (1941).

[19] - Coburn, N., Vector and Tensor Analysis, The Macmillan Company, 1955.

[20] - McCormick, J.M., and Salvadori, M.G., Numerical Methods in Fortran, Prentice-Hall, Inc., 1964.

[21] - McCracken, D.D., and Dorn, W.S., Numerical Methods and Fortran Programming, John Wiley & Sons, Inc., 1964.

[22] - Faddeeva, V.N., Computational Methods of Linear Algebra. Translated from the Russian by C.D. Benster, Dover Publications, 1959.

[23] - Givens, W., Numerical Computation of the Characteristics Values of a Real Symmetric Matrix, Oak Ridge National Laboratory, Report ORNL 1574, February 1954.

[24] - Givens, W., Computation of Plane Unitary Rotations Transforming a General Matrix to Triangular Form, J.Soc. Indust. Appl. Math., vol. 6 (1958).

********************