

INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES
SECRETARIA DA INDÚSTRIA, COMÉRCIO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
AUTARQUIA ASSOCIADA À UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

**A APROXIMAÇÃO F_N PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS
DE TRANSPORTE**

José Eduardo Fernandes

**Dissertação apresentada ao Instituto de
Pesquisas Energéticas e Nucleares como
parte dos requisitos para obtenção do
Grau de "Mestre - Área Reatores
Nucleares de Potência e Tecnologia do
Combustível Nuclear".**

Orientador: Dr. Yuji Ishiguro

**São Paulo
1979**

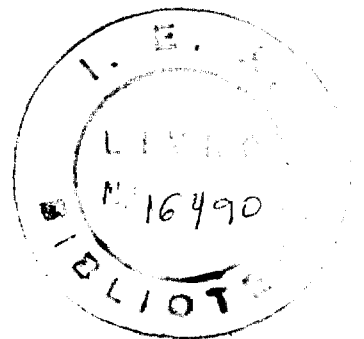
INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES
Secretaria da Indústria, Comércio, Ciência e Tecnologia
Autarquia associada à Universidade de São Paulo

A APROXIMAÇÃO FN PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE TRANSPORTE

JOSÉ EDUARDO FERNANDES

Dissertação apresentada ao Instituto de Pesquisas
Energéticas e Nucleares como parte dos requisitos
para obtenção do grau de "Mestre - Área Reatores
Nucleares de Potência e Tecnologia do
Combustível Nuclear"

Orientador: Dr. YUJI ISHIGURO



São Paulo
1979

INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES
I. P. E. N.

A meus pais e Maria de Lourdes.

A Edna

Expresso meus agradecimentos a todas as pessoas e instituições que de forma direta ou indireta contribuíram para a execução deste trabalho, e em particular :

Professor Dr. Yuji Ishiguro pela segura orientação no desenvolvimento deste trabalho;

Colega, Adimir dos Santos pelo auxílio prestado e sugestões valiosas;

Pessoal do Centro de Processamento de Dados pelo auxílio no trabalho computacional;

Srta. Creusa Moreira Diniz pelo excelente trabalho de datilografia.

Pronuclear - Programa de Formação de Recursos Humanos para o Setor Nuclear pelo auxílio financeiro necessário na execução deste trabalho;

Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares pelas facilidades apresentadas;

Profeseor Dr. José Antonio Diaz Dieguez, gerente do Centro de Engenharia Nuclear.

RESUMO

O método F_N , recentemente introduzido, é um método aproximado para solução de problemas de transporte.

Investigações preliminares através de aplicações a problemas de modelos simples da teoria de transporte revelam que o método F_N possui um grande potencial na solução de alguns problemas, que são difíceis e/ou exigem muito trabalho computacional pelo método exato, devido às suas duas características, ou seja, (1) simplicidade na análise e computação e (2) boa precisão, mesmo para ordens de aproximação relativamente baixas.

Neste trabalho, o método F_N é estudado nas teorias de um e dois grupos com espalhamento isotrópico e geometria plana.

Na teoria de um grupo, o problema de criticalidade para reatores com três regiões é solucionado, salientando-se que a utilização da variável complexa na aplicação do método F_N é uma nova característica.

Os resultados analíticos e numéricos confirmam as conclusões anteriores sobre a facilidade de uso e boa precisão do método para o caso que requer computação no campo complexo.

No modelo de dois grupos a teoria do método F_N é desenvolvida, pela primeira vez, e aplicada à solução de dois tipos de problemas, i.é., o problema clássico de Milne para semi-espaco e o problema de criticalidade para reatores tipo placa refletida.

Algumas dificuldades vêm sendo encontradas na obtenção de resultados numéricos precisos e são necessárias mais investigações para que se estabeleça o método F_N no modelo de dois grupos como um método preciso e simples para a solução de problemas de transporte.

ABSTRACT

The recently introduced F_N method is an approximate method of solution of transport problems.

Initial investigations in its applications to simple model problems of transport theory show that the F_N method has a great potential in the solution of some problems, that are difficult and/or require much computational effort in exact theory, through its two properties, i.e., (1) Simplicity in analysis and computation and (2) good accuracy obtainable in relatively low-order approximations.

In this work the F_N method is studied in one-group and two-group theory with isotropic scattering in plane geometry.

In one-group theory, the critical problem for three-region reactors is solved. The introduction of the complex variable is a new feature in the application of the F_N method.

Analytical and numerical results confirm the earlier conclusions on the ease of use and the good accuracy of the method for the case that requires complex made computations.

In the two-group model the theory of the F_N method is developed, for the first time, and applied to solve two model problems, i.e., the classical Milne problem for a half-space and the critical problem for reflected slab reactors.

Some difficulties have been encountered in obtaining accurate numerical results and further investigations are necessary to establish the two-group F_N method as a simple and accurate method of solution of transport problems.

These difficulties are discussed and directions of further research are suggested.

S U M Á R I O

	Pag.
1. INTRODUÇÃO	1
1.1- Aspectos Gerais	1
1.2- Histórico	8
1.3- Método Aproximado F_N	11
1.4- Objetivos	12
2. FUNDAMENTOS BÁSICOS DA TEORIA DE TRANSPORTE	13
2.1- A Equação de Transporte de Nêutrons	13
2.2- A Equação de Transporte em Geometria Plana no Modelo Multigrupo e Espalhamento Isotrópico	19
2.3- Solução Elementar da Equação de Transporte no Modelo de um Grupo	22
2.4- Solução Elementar da Equação de Transporte no Modelo de Dois Grupos	31
3. FUNDAMENTOS DA TEORIA DO MÉTODO F_N	43
4. DESENVOLVIMENTO DA TEORIA DO MÉTODO F_N PARA O MODE <u>LO</u> LO DE DOIS GRUPOS	56
5. O PROBLEMA DE CRITICALIDADE PARA SISTEMAS COM TRÊS REGIÕES NO MODELO DE UM GRUPO	68
5.1- Sistema Crítico com Refletor Finito	68
5.2- Sistema Crítico com Refletor Infinito	78

6. PROBLEMAS CONSIDERADOS NO MODELO DE DOIS GRUPOS	80
6.1- O Problema de Milne	80
6.2- Problema de Criticalidade	84
6.2.1- Sistema Crítico com Refletor Finito	84
7. RESULTADOS NUMÉRICOS	95
7.1- Modelo de um Grupo	95
7.2- Modelo de Dois Grupos	117
7.2.1- Problema de Milne	118
8. CONCLUSÕES E SUGESTÕES	144
APÊNDICE A - DETALHES DEDUTIVOS DAS FUNÇÕES $A_{-\alpha}(\xi)$ E $B_{-\alpha}(\xi)$ E FORMULÁRIO DAS EXPRESSÕES ANALÍTICAS DE $A_{-1}(\xi)$ E $B_{-1}(\xi)$	145
A-1 - Modelo de um Grupo - Funções $A_{-\alpha}(\xi)$ e $B_{-\alpha}(\xi)$	145
A-2- Modelo de Dois Grupos - Função $A_{-1}(\xi)$ e $B_{-1}(\xi)$	150
APÊNDICE B - PROCEDIMENTOS COMPUTACIONAL - MODELO DE UM GRUPO	153
APÊNDICE C - PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL - MODELO DE DOIS GRUPOS	155
C-1- Problema de Milne	155
C-2- Problema de Criticalidade	156
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	158

LISTA DAS FIGURAS E TABELAS

	Pag.
FIG.5.1.1- Geometria do Problema	70
FIG.6.2.1.1- Geometria do Problema	86
TABELA VII.1.1- Casos Estudados	96
TABELA VII.1.2- Meia Distância Crítica do Cerne	
Multiplicador	97
TABELA VII.1.3- Desvios Percentuais	99
TABELA VII.1.4- Tempo de Computação e Número de	
Iterações para os Casos 3 e 12	100
TABELA VII.1.5- Fluxo Angular para o Caso 3 - <u>inter</u>	
face α_1	103
TABELA VII.1.6- Fluxo Angular para o Caso 3 - <u>Inter</u>	
face β	104
TABELA VII.1.7- Fluxo Angular para o Caso 12 - <u>Inter</u>	
face α_1	105
TABELA VII.1.8- Fluxo Angular para o Caso 12 - <u>Inter</u>	
face β	106
TABELA VII.1.9- Comparação entre os Fluxos Angulares	
(Exato e Aproximados) para o caso 3 -	
Interface α_1	107
TABELA VII.1.10- Cálculo da Meia Distância Crítica	
α_1 - Caso 3	108
TABELA VII.1.11- Cálculo da Meia Distância Crítica	
α_1 - Caso 12	108
TABELA VII.1.12- Fluxos Angulares para o Caso 3	109
FIG. 7.1.1- Fluxo Angular para o Caso 1	110
FIG. 7.1.2- Fluxo Angular para o Caso 3	111

	Pag.
Fig. 7.1.3- Fluxo Angular para o Caso 7	112
Fig. 7.1.4- Fluxo Angular para o Caso 12	113
TABELA VII.1.13- Fluxos Escalares para o Sistema com Refletor Finito e Infinito Caso 3	116
TABELA VII.1.14- Correntes para o Sistema com Re- fletor Finito e Infinito - Caso 3	116
TABELA VII.2.1.1- Seccões de Choque Macroscópicas	119
TABELA VII.2.1.2- Distribuição de Saída do Problema de Milne $I(0, -\mu)$	120
TABELA VII.2.1.3- Fluxos Angulares para o Caso 1	122
TABELA VII.2.1.4- Fluxos Angulares para o Caso 2	124
TABELA VII.2.1.5- Fluxos Angulares para o Caso 1	128
TABELA VII.2.1.6- Fluxos Angulares para o Caso 2	129
TABELA VII.2.1.7- Fluxos Angulares para o Caso 1	130
TABELA VII.2.1.8- Fluxos Angulares para o Caso 2	131
TABELA VII.2.1.9- Fluxos Angulares para o Caso 1	133
TABELA VII.2.1.10- Fluxos Angulares para o Caso 2	134
TABELA VII.2.1.11- Fluxos Angulares para o Caso 1	135
TABELA VII.2.1.12- Fluxos Angulares para o Caso 2	136
TABELA VII.2.2.1- Seccões de Choque Macroscópicas	138
TABELA VII.2.2.2- Autovalores discretos positivos	138
TABELA VII.2.2.3- Meia Espessura Crítica (α_1)	140
TABELA VII.2.2.4- Meia Espessura Crítica (α_1)	141
TABELA VII.2.2.5- Tempo de Computação e Número de Iterações	143

1. INTRODUÇÃO

1.1- Aspectos Gerais

Um dos problemas essenciais em pesquisa de reatores é prever com detalhes e precisão o comportamento da distribuição neutrônica e como está vinculada à operação de tais sistemas.

O comportamento da distribuição angular, espacial e energética de neutrons é descrito matematicamente pela Equação de Boltzmann, derivada considerando-se o princípio de conservação do número de neutrons no interior de um elemento de volume arbitrário. De forma similar são obtidas as equações básicas de outros fenômenos físicos tais como: condução de calor, transferência de massa, energia, etc.

Esta equação constitui a parte central da teoria de transporte, originariamente desenvolvida por Boltzmann em problemas de cinética de gases.

A grandeza fundamental que caracteriza esta equação é a densidade angular de neutrons $N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)$ (*), função de sete variáveis independentes, que são:

- três para a posição (\underline{r})

(*) Neste trabalho, o til colocado abaixo da representação de uma dada grandeza denota que a mesma é um vetor ou matriz. O til colocado acima representa a operação de transposição.

- duas para a direção de movimento de neutrons (Ω)
- energia do neutron (E)
- tempo (t)

A equação de Boltzmann descreve o comportamento médio da população de neutrons num meio material, utilizando-se parâmetros conhecidos como secções de choque, que caracterizam as probabilidades de ocorrência de determinados tipos de interação entre nêutrons e o meio material.

As secções de choque são determinadas por processos experimentais e corrigidas, quando necessário, por modelos teóricos desenvolvidos pela Física Nuclear.

Portanto a equação de Boltzmann estabelece a conexão entre os efeitos no nível microscópico (interação neutron-núcleo caracterizado pelas secções de choque) ao nível macroscópico no meio material (densidade angular de nêutrons).

O objetivo da Teoria de Transporte de nêutrons é pesquisar a solução desta equação num sistema definido por um certo contorno de interesse, utilizando-se as secções de choque que descrevem o comportamento dos nêutrons no meio material. Entretanto, o modelo físico real contém uma imensa quantidade de detalhes, tais como: heterogeneidade geométrica, isótopos com diferentes propriedades físicas, função representativa da secção de choque com a energia do nêutron extremamente complexa, efeito de anisotropia no espalhamento do nêutron, etc.

Portanto, a pesquisa das soluções para a Equação de Transporte somente se torna viável se o sistema for simplificado ou idealizado, de tal modo que se obtenha uma formulação matemática mais concisa.

Assim, pode-se considerar constantes as propriedades do sistema num intervalo de tempo determinado. Tem-se, assim, o sistema operando no estado estacionário.

Em relação à sua variável energética, geralmente adota-se o modelo de multigrupos. Este método consiste em proceder-se a uma partição no intervalo total de interesse da energia, em subintervalos denominados grupos de energia.

Em cada intervalo de energia um grupo de nêutrons é considerado e os parâmetros são ponderados sobre o mesmo de maneira aproximada. Em princípio, haverá uma melhor identidade entre o modelo e a realidade física, quanto maior for o número de grupos considerados. Entretanto, considerando-se o aspecto computacional, é importante que se estabeleça um certo critério de escolha. Outra alternativa é expandir-se a dependência angular em polinômios com intervalo de definição conveniente (zero a infinito), utilizando-se, por exemplo, os polinômios de Chebyshev-Laguerre.

Quanto ao fato do espalhamento exibir anisotropia, o que se faz é expandir-se a função de transferência em polinômios de Legendre, truncando-se a série num certo termo. O modelo de espalhamento isotrópico é obtido reten -

do-se apenas o termo de ordem zero, e para o modelo linearmente anisotrópico retêm-se o termo de ordem um.

Assim, por meio dessas aproximações, a Equação geral de Transporte recai num sistema de equações integro-diferenciais simplificado.

Este trabalho constitui uma parte da pesquisa para o desenvolvimento do novo método F_N . Os modelos de um e dois grupos com espalhamento isotrópico são considerados em geometria plana.

Devido às dificuldades matemáticas encontradas na obtenção de soluções, surgiram duas correntes básicas de pesquisa, onde diversos métodos são empregados, que são:

- 1 - Métodos aproximados para a obtenção de soluções matematicamente aproximadas. Estes métodos são de grande interesse por serem úteis em aplicações práticas, como cálculo de reatores, etc.
- 2 - Métodos exatos - obtenção de "soluções analíticas", cujos resultados podem servir como padrão para os métodos aproximados, além de conduzirem a uma compreensão da estrutura matemática da equação de transporte e de sua solução, abrindo campo para que se investigue a solução de problemas mais complexos. Salienta-se ainda, que, em algumas situações especiais os métodos exatos conseguem representar com boa aproximação a realidade física.

Atualmente, estes métodos se restringem à aplicação de problemas em geometria plana, nos modelos de um e dois grupos de energia, havendo, entretanto, trabalhos em geometria cilíndrica /43/ e esférica /11/.

Em relação aos métodos exatos, o mais utilizado é o de expansão em autofunções singulares, ou método de Case /6/, inspirado inicialmente nos trabalhos de Van Kampen /42/, sobre oscilações do plasma. A utilidade principal deste método é a de fornecer uma boa compreensão da estrutura matemática e do comportamento geral das soluções da equação de transporte. Este método consiste numa separação de variáveis conveniente no fluxo angular, gerando um conjunto completo de autofunções singulares ortogonais. A solução do problema é expressa por uma combinação linear das autofunções com coeficientes arbitrários, sendo estes determinados através do uso das propriedades de ortogonalidade e normalização dessas autofunções, impondo-se condições de contorno.

A mesma teoria matemática /31/ deste método vem sendo aplicada em outros campos, tais como física do plasma, transferência radiativa, etc.

Uma alternativa diferente foi introduzida pelo astrofísico Ambarzumian /1/, conhecida como método da invariância ("invariant imbedding"). Este método consiste na formulação de equações integrais para funções que descrevem a reflexão e transmissão de radiação por meio do princípio da invariância. Este método foi sistematizado por Chandra -

sekar /8/ e em seguida aplicado à teoria de transporte de nêutrons.

Soluções exatas da equação de transporte só podem ser obtidas para problemas idealizados, mesmo limitando-se o número de variáveis. Portanto, no início do desenvolvimento dos reatores nucleares, optou-se pela teoria da difusão /23/, que é uma aproximação da teoria de transporte. Nesta teoria utiliza-se uma equação diferencial (equação de Helmholtz) para o fluxo total de nêutrons e uma direção preferencial na migração de nêutrons é considerada, obedecendo a lei de Fick. Esta teoria é relativamente simples, entretanto, devido às hipóteses simplificadoras assumidas durante a sua derivação, a mesma não descreve bem o comportamento neutrônico nas proximidades de fontes explícitas e fronteiras físicas. Estes fatores são de extrema importância em pequenos sistemas, como por exemplo, os reatores de pesquisa.

Outros métodos foram desenvolvidos em que soluções da teoria de transporte são obtidas com boa precisão, tais como o método de expansão em termos de harmônicos esféricos - (P_N) é o método de ordenadas discretas ou simplesmente método S_N .

No método P_N , devido a Mark /27/, a dependência angular do fluxo de nêutrons é representada por uma expansão, mais comumente em harmônicos esféricos (*), e a dependên-

(*) Em geometria plana ou esférica, o método utiliza a expansão em polinômios de Legendre simplesmente.

cia espacial é considerada em termos dos coeficientes dessa expansão.

No método S_N , devido a Carlson /5/, a dependência angular do fluxo neutrônico é discretizada para um conjunto conveniente de direções. As integrais angulares são então transformadas por somatórias sobre as direções discretas. A dependência espacial também é considerada para pontos discretos do sistema.

Um método aproximado que foi recentemente desenvolvido, o método C_N /19, 3/ fornece resultados com boa precisão e exige tempo de computação pequeno em relação aos métodos aproximados citados anteriormente.

Uma versão mais simples deste último vem sendo desenvolvida atualmente, o método F_N . Suas equações básicas são mais simples e mesmo sua solução numérica é mais eficiente. A obtenção de suas equações analíticas básicas é feita com o emprego do método exato de Case(*), e em seguida o fluxo angular é aproximado por uma expansão em série, truncada num determinado termo. Os fluxos angulares são determinados apenas nas fronteiras dos meios físicos, portanto, a variável espacial não aparece explicitamente. Entretanto, os fluxos no interior dos meios físicos podem ser determinados através dos fluxos nas interfaces.

(*) O método F_N emprega apenas as propriedades de ortogonalidade de intervalo completo, que é simples em relação às propriedades de meio intervalo.

1.2- Histórico

Nesta secção é apresentado de forma resumida, o desenvolvimento histórico da teoria de transporte até o atual estágio, dando-se ênfase ao método exato de expansão em autofunções singulares, uma vez que o método aproximado F_N , considerado neste trabalho é estabelecido a partir do mesmo.

Os primeiros trabalhos relacionados à teoria de transporte surgiram em estudos de transferência radiativa no campo da astrofísica /15,29/, a partir de 1921.

Quanto à aplicação da teoria de transporte no campo nuclear; o seu desenvolvimento teve início através dos métodos aproximados (P_N , S_N e outros) /2,10/ devido às necessidades de caráter essencialmente prático que a construção dos primeiros reatores impunha na época.

Em relação aos métodos exatos, um grande desenvolvimento foi atingido com a introdução da técnica de expansão em autofunções singulares, independentemente proposta por Davison /9/ em 1945 e por Wigner /44/ em 1959 e sua aplicação foi feita por Van Kampen /42/ em 1955 em trabalhos de oscilação do plasma. No entanto somente em 1960 é que Case demonstrou convincentemente a generalidade e o poder deste método. A publicação deste trabalho permitiu a solução de diversos problemas nos modelos de um e dois grupos de energia, em geometria plana. Pode-se citar entre outros, o problema do reator tipo placa, sem refletores, devido a Zelazny /45/ e o

mesmo problema , com a placa constituída por várias camadas de materiais diferentes e com refletores por Kussell/22/ . Nesta mesma época Case e Zweifel /7/ demonstraram os teoremas de existência e unicidade das autofunções.

Os trabalhos citados utilizam as propriedades de ortogonalidade de intervalo completo, isto é, para $\mu \in (-1,1)$ (*) tornando a aplicação bastante dificultosa em problemas de um meio semi-infinito e problemas de dois ou mais meios adjacentes.

Kuscer et al/21/ simplificaram as soluções de tais problemas com a introdução de propriedade de semi-intervalo $(0, 1)$, o que facilitou e estendeu o campo de aplicação do método. Estas propriedades permitiram soluções de problemas de meios finitos /25/, problemas com espalhamento anisotrópico /24, 34/, como também, foram resolvidos problemas em geometria cilíndrica e esférica /43, 41/.

Para o modelo de dois grupos de energia, o método de Case foi aplicado inicialmente por Zelazny e Kuszell /46/ . Posteriormente, Siewert e Shieh /39/ conferiram maior rigor matemático (no mesmo modelo) discutindo o teorema da completude das autofunções para expansões de intervalo completo , bem como propriedades de ortogonalidade e normalização. Estes problemas se restringiram a meios infinitos.

(*) Em geometria plana, $\mu = \cos\theta$, sendo θ o ângulo compreendido entre a coordenada espacial independente e a direção de movimento de nêutrons.

Pahor e Zweifel /32/ , em 1969, empregaram uma nova técnica baseada na combinação do método da invariança com o método de Case, demonstrando sua aplicabilidade em problemas de semi-espacos. Este método determinava a distribuição de nêutrons emergentes da superfície de um meio se mi-infinito, conhecendo-se a incidente. Em 1972, Siewert e Ishiguro /38/ introduziram a matriz H para determinar as propriedades de ortogonalidade de meio intervalo e resolveram problemas de semi-espacos. A existência e unicidade foram demonstradas paralelamente por Siewert et al /41/ e Burminston et al /4/.

As dificuldades destes métodos é a de recair em sistemas de equações singulares para os coeficientes, tornando a solução numérica muito trabalhosa de acordo com o problema considerado, e às vezes são inviáveis como é o caso dos problemas multi-regiões. Entretanto, num trabalho recente /16/, Ishiguro propôs um novo método (método de regularização das equações integrais singulares), válido nos modelos de um e dois grupos de energia, e em princípio pode ser aplicado a qualquer problema de multi-regiões. Diversos problemas foram resolvidos, seguindo esta filosofia, por Ishiguro e Garcia /13, 17/.

Quanto ao método aproximado F_N , o seu desenvolvimento teve início em 1978 nos primeiros trabalhos devido a C. E. Siewert e P. Benoist /37/ e em seguida por P. Grandjean e C.E. Siewert /14/. Este método vem sendo introduzido também na área de transferência radiativa /35, 36/. Todos os pro -

blemas até o momento são considerados em geometria plana.

1.3 - Método Aproximado F_N

Os métodos de "soluções exatas" (método de expansão em autofunções singulares e o método da antitransformada, basicamente), apesar de gerarem resultados numa forma analítica fechada ou pelo menos desenvolverem a maior parte do problema analiticamente, são, em diversas situações de difícil aplicação, como por exemplo: restrição quase exclusiva em geometria plana, a complexidade analítica se eleva muito com o número de diferentes meios homogêneos ou se a configuração da fonte é modificada, dificuldade matemática na descrição dos modelos de multigrupos, etc.

O método aproximado F_N foi, pela primeira vez, introduzido por Siewert e Benoist /37/ em 1978 e vem sendo ainda desenvolvido.

Inicialmente este método foi aplicado com sucesso em problemas padrões para modelos simplificados, tais como: problema de semi-espaco com meio homogêneo na teoria de um grupo e espalhamento isotrópico, problema da placa plana no mesmo modelo.

Os resultados das pesquisas iniciais mostram que o método conduz a equações finais particularmente concisas, que são resolvidas numericamente com facilidade, fornecendo

resultados com boa precisão. Além do que este método é econômico no que se refere às exigências do tempo de computação e promete ser de grande utilidade na aplicação a problemas multiregiões, o que constitui uma das principais dificuldades dos métodos exatos atuais, e ao modelo de multi grupos.

Há possibilidade ainda que a sua aplicação a geometrias esférica e cilíndrica venha a se tornar viável.

1.4 - Objetivos

1 - Confirmar a simplicidade de aplicação e a boa precisão do método numérico F_N , recentemente desenvolvido, no modelo de um grupo de energia, através da aplicação do mesmo a problemas de criticalidade em reatores constituídos de três regiões; cerne multiplicador, "blanket" e refletor. Esta última é considerada para duas situações diferentes, dependendo da espessura ser finita ou infinita (a solução desses problemas por este método é original).

2 - Desenvolver a teoria do método F_N para o modelo de dois grupos. Aplicá-la a alguns problemas simples, obter resultados numéricos, discutí-los e apresentar sugestões para trabalhos posteriores.

2. FUNDAMENTOS BÁSICOS DA TEORIA DE TRANSPORTE

O método aproximado F_N , que é o escopo deste trabalho, é estabelecido a partir de propriedades básicas da solução - exata da equação de transporte, por meio da expansão em auto-funções singulares /7/.

Portanto, neste capítulo, são consideradas os fundamentos teóricos necessários para os modelos de um e dois grupos. Achou-se conveniente incluir preliminarmente o modelo de multigrupos, uma vez que os modelos de um e dois grupos constituem casos particulares do mesmo. Este capítulo é apresentado de forma condensada, uma vez que descrições teóricas mais pormenorizadas podem ser encontradas nas referências básicas /2, 10, 7, 38, 39/.

2.1 - A Equação de Transporte de Nêutrons

Seja um volume arbitrário dv , localizado na posição genérica \underline{r} do espaço.

Define-se no interior deste volume:

$N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)$ = Densidade angular de nêutrons, que representa o número médio de nêutrons na posição \underline{r} , com velocidades na direção $\underline{\Omega}$ e energia E no tempo t , por unidade de volume, ângulo sólido e energia.

Aqui, $\underline{\Omega} = \frac{\underline{v}}{v}$, que é um vetor unitário que representa a direção dos nêutrons, com velocidade vetorial \underline{v} e escalar $|\underline{v}| = v$.

De acordo com a definição de $N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)$, $N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) dv d\Omega dE$ e o número de nêutrons no instante t , num volume dv , possuindo energias entre E e $E + dE$ e direções entre $\underline{\Omega}$ e $\underline{\Omega} + d\Omega$.

Considerando-se a conservação do número de nêutrons $N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) dv d\Omega dE$ no tempo, fica estabelecida a lei fundamental que descreve o comportamento neutrônico neste volume dv , que é uma equação de balanço. A partir desta lei deduz-se a equação geral de transporte de nêutrons:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) + v \underline{\Omega} \nabla N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) + \sigma(\underline{r}, E) v N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) = \\ = \int_E \int_{\Omega'} \sigma(\underline{r}, E') f(\underline{r}, \underline{\Omega}', E' \rightarrow \underline{\Omega}, E) v N(\underline{r}, \underline{\Omega}', E', t) d\Omega' dE' + Q(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) \end{aligned} \quad 2.1.1$$

onde,

$N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)$ = já definido.

$\sigma(\underline{r}, E)$ = Secção de choque macroscópica total - probabilidade de interação, em \underline{r} , entre o nêutron com energia E e o meio, por unidade de comprimento (cm^{-1}).

$f(\underline{r}; \underline{\Omega}' E' \rightarrow \underline{\Omega}, E) d\Omega dE$ = Função transferência - é a probabilidade de que emerjam nêutrons secundários com direções entre $\underline{\Omega}$ e $\underline{\Omega} + d\Omega$ e energias en-

tre E e $E+dE$ de uma interação, em \underline{r} , ocorrida entre um nêutron, com direção $\underline{\Omega}'$ e energia E' , e um núcleo.

$Q(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)$ = Termo fonte - número de nêutrons que são introduzidos na posição \underline{r} por fontes externas, por unidade de volume, de ângulo sólido, de energia e de tempo.

O significado físico de cada termo da equação, após a multiplicação de cada um por $dE d\Omega dv$, é o seguinte:

$\frac{\partial}{\partial t} N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) dE d\Omega dv$ = Taxa de variação da densidade angular de nêutrons, que possuem energias e direções entre E e $E + dE$, e $\underline{\Omega}$ e $\underline{\Omega} + d\underline{\Omega}$, respectivamente, no volume dv situado em \underline{r} .

$v\underline{\Omega} \nabla(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) dE d\Omega dv$ = Taxa líquida de nêutrons que saem através da fronteira do volume dv localizado na posição \underline{r} , com energias e direções entre E e $E + dE$, $\underline{\Omega}$ e $\underline{\Omega} + d\underline{\Omega}$, respectivamente, no instante t .

$v\sigma(\underline{r}, E) N(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) dE d\Omega dv$ = Taxa de nêutrons que sofrem interações, no volume dv localizado na posição \underline{r} , que são absorvidos ou saem do intervalo considerado de energia e direção.

$\int_E \int_{\Omega} \sigma(\underline{r}, E') f(\underline{r}; \underline{\Omega}', E' + \underline{\Omega}, E) v N(\underline{r}; \underline{\Omega}', E', t) dE' d\underline{\Omega}' dE d\Omega dv$ = Taxa de nêutrons transferidos, no volume dv localizado em \underline{r} , de quaisquer energias e direções, para quaisquer energias e/ou direções

entre E e $E + dE$ e, $\underline{\Omega}$ e $\underline{\Omega} + d\Omega$, respectivamente, no volume dv , no instante t .

$Q(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) dv dE d\Omega =$ Taxa de nêutrons produzidos por uma fonte externa, com energias e direções entre E e $E + dE$ e $\underline{\Omega}$ e $\underline{\Omega} + d\Omega$, respectivamente, no volume dv , no instante t .

A equação de transporte também pode ser representada por:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial t}(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) + \underline{\Omega} \nabla \psi(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) + \sigma(\underline{r}, E) \psi(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) =$$

$$= \int_{E'} \int_{\Omega'} \sigma(\underline{r}, E') f(\underline{r}; \underline{\Omega}; E' + \underline{\Omega}, E) \psi(\underline{r}, \underline{\Omega}', E', t) d\Omega' + Q(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t),$$

2.1.2

$$\text{onde: } \psi(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t) = vN(\underline{r}, \underline{\Omega}, E, t)$$

2.1.3

Esta última expressão é o fluxo angular de nêutrons, definido como sendo o número de nêutrons por cm^2 , por segundo e por unidade de ângulo no volume dv , localizado na posição \underline{r} do espaço.

Ao ser derivada a equação de transporte, algumas hipóteses foram consideradas, que a rigor, nem sempre podem ser justificadas na prática. Principalmente, os seguintes efeitos são desprezados:

- Comportamento Ondulatório

O nêutron é considerado uma partícula puntual, sendo assim completamente caracterizado pela sua posição e velocidade. Para nêutrons de energia muito baixa, o comprimento de onda é comparável às distâncias interatômicas. Com isto, as secções de choque sofrem uma dependência da orientação dos nêutrons. No entanto, estes efeitos são desprezíveis em Teoria de Reatores.

- Flutuações Estatísticas

Em estado estacionário, as flutuações não causam desvios apreciáveis na densidade angular de nêutrons preditos pela equação de transporte. Essas flutuações, em regime permanente, são denominadas ruídos do reator de modo geral, e sua descrição pode ser feita através de outras teorias, como a análise de Fourier.

- Correções Relativísticas

Nos casos de interesse para a Engenharia Nuclear não há necessidade de se considerar os nêutrons de energia muito alta, onde as correções relativísticas seriam importantes.

- Interação Nêutron-Nêutron

Mesmo em reatores térmicos operando em um alto fluxo de nêutrons, a densidade dos mesmos é menor que 10^{11} nêutrons por cm^3 , que é pequena quando comparada com densidades nu -

cleares que são da ordem de 10^{22} núcleos por cm^3 nos sólidos. Assim, as interações nêutron-nêutron são bem menos frequentes do que interações nêutron-núcleo. Desprezando-se essas interações a equação de transporte fica linear.

A equação de transporte (Boltzmann) inclui termo não linear para a teoria cinética de gases, onde colisões ocorrendo entre moléculas são relevantes, que não é o caso dos nêutrons.

- Nêutrons Atrasados

Considerados no estudo de cinética de reatores, onde é descrito o comportamento temporal do sistema. Para o estudo em estado estacionário não há necessidade de considerá-los, como é o caso deste trabalho.

- Dependência Angular das Seções de Choque

Ocorre para casos muito raros, como para alguns cristais.

- Desintegração Radioativa do Nêutron

Visto que o tempo de vida dos nêutrons no meio material é insignificante, comparado à sua meia-vida, desintegrações radioativas não são levadas em conta.

- Polarização

Os efeitos de polarização devido a interações do "spin" e momento magnético dos nêutrons, não são relevantes em teo-

ria de reatores.

A equação geral de transporte de nêutrons representa bem a realidade física para os casos de interesse em Engenharia Nuclear, apesar das limitações descritas, serem, impostas no desenvolvimento.

2.2- A Equação de Transporte em Geometria Plana no Modelo Multigrupo e Espalhamento Isotrópico

Considerando-se o caso estacionário, em geometria plana com simetria azimutal (simetria na superfície de qualquer cone gerado em torno do eixo z), a equação de transporte reduz-se a:

$$\mu \frac{\partial}{\partial z} \psi(z, \mu, E) + \sigma(z, E) \psi(z, \mu, E) = \int_E \int_{\Omega'} \sigma(z, E') f(z; \underline{\Omega}' E' + \underline{\Omega}, E) \psi(z, \mu', E') d\Omega' dE' + Q(z, \mu, E)$$

2.2.1

onde $\mu = \underline{k} \cdot \underline{\Omega}$, sendo \underline{k} o versor na direção z .

Considerando-se que as secções de choque não variam com a posição num meio uniforme e que a função transferência depende somente do co-seno do ângulo de espalhamento $\mu_0 = \underline{\Omega} \cdot \underline{\Omega}'$, pode-se expandir o termo de transferência em polinômios de Legendre, assim:

$$\sigma(E') \cdot f(E' \rightarrow E; \mu_0) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{4\pi} \sigma_{\ell}(E' \rightarrow E) P_{\ell}(\mu_0)$$

2.2.2

Retendo-se apenas o termo de ordem $l = 0$ (espalhamento isotrópico), a equação (2.2.1) pode ser escrita como:

$$\mu \frac{\partial}{\partial z} \psi(z, \mu, E) + \sigma(E) \psi(z, \mu, E) = \frac{1}{2} \int_{E'} \int_{\mu'} \sigma_0(E' \rightarrow E) \psi(z, \mu', E') d\mu' dE' + Q(z, \mu, E) \quad 2.2.3$$

O intervalo total de energia é dividido em G grupos . Integrando-se a Equação (2.2.3) para cada sub-intervalo de energia, obtém-se um sistema de equações integro-diferenciais acopladas do tipo:

$$\mu \frac{\partial}{\partial z} \psi_i(z, \mu) + \sigma_i \psi_i(z, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^G \int_{-1}^1 \sigma_{ij} \psi_j(z, \mu') d\mu' + q_i(z, \mu); \quad i = 1, 2, \dots, G, \quad 2.2.4$$

onde, por definição:

$$\psi_i(z, \mu) = \int_1 \psi(z, \mu, E) dE \quad 2.2.5$$

$$\sigma_i = \frac{\int_1 \sigma(E) \psi(z, \mu, E) dE}{\int_1 \psi(z, \mu, E) dE} \quad 2.2.6$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{j+1} = \frac{\int_j \psi(z, \mu, E') \int_1 \sigma_0(E' \rightarrow E) dE dE'}{\int_j \psi(z, \mu, E') dE'} \quad 2.2.7$$

$$q_i(z, \mu) = \int_1 Q(z, \mu, E) dE, \quad 2.2.8$$

para $i = 1, 2, \dots, G$ e $j = 1, 2, \dots, G$.

As secções de choque médias de grupo σ_i e σ_{ij} , seguindo as definições acima, deveriam ser escritas como funções

de z e μ . No entanto, evita-se, sempre que possível, trabalhar com secções de choque dependentes de z e μ , para simplificar o problema. A maneira usual é assumir a separabilidade do fluxo angular em funções de (z, μ) e (E) , o que muitas vezes não é uma boa suposição. Métodos melhores são apresentados na literatura /2/. Neste trabalho considera-se que estes parâmetros sejam calculados, de alguma maneira, como sendo independentes de z e μ no meio homogêneo.

A secção de choque de transferência σ_{ij} é dada por:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{sij} + \chi_i v_{sj} \sigma_{fj} \quad 2.2.9$$

onde σ_{sij} representa a secção de choque macroscópica de transferência do grupo j para o grupo i por espalhamento isotrópico, σ_{fj} é a secção de choque macroscópica de fissão do grupo j , v_{sj} é o número médio de nêutrons emitidos por fissão gerada por nêutrons do grupo j e χ_i é definido como sendo a fração de nêutrons de fissão que aparecem no grupo i .

O sistema de equações do tipo da Eq. (2.2.4) pode ser representado por uma equação na forma matricial:

$$\mu \frac{\partial}{\partial z} \underline{\psi}(z, \mu) + \underline{\Sigma} \underline{\psi}(z, \mu) = \underline{S} \int_{-1}^1 \underline{\psi}(z, \mu') d\mu' + \underline{q}(z, \mu). \quad 2.2.10$$

onde,

$\underline{\psi}(z, \mu)$ - vetor dos fluxos angulares dos G grupos;

$\underline{\Sigma}$ - representa a matriz diagonal $G \times G$ com os elementos σ_i na diagonal principal;

\underline{S} - representa uma matriz quadrada $G \times G$ com elementos $s_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_{ij}$.

Como neste trabalho somente são considerados sistemas sem fontes externas, a equação (2.2.10) pode ser reescrita:

$$\mu \frac{\partial}{\partial z} \underline{\psi}(z, \mu) + \underline{\Sigma} \underline{\psi}(z, \mu) = \underline{S} \int_{-1}^1 \underline{\psi}(z, \mu') d\mu' \quad 2.2.11$$

Hã, assim, necessidade de encontrar-se apenas as soluções homogêneas das equações.

2.3 - Solução Elementar da Equação de Transporte no Modelo de um Grupo

Para este caso particular considera-se o grupo como contendo o intervalo total de energias possíveis dos nêutrons.

Retomando-se a equação matricial (2.2.11) para $G=1$, obtêm-se a equação válida para o grupo.

$$\mu \frac{\partial}{\partial z} \psi(z, \mu) + \sigma \psi(z, \mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sigma_{11} \psi(z, \mu') d\mu' \quad 2.3.1$$

Para esta equação foram utilizados o fluxo e secções de choque do grupo, onde o fluxo de grupo representa a integral do fluxo angular no intervalo total de energia, e as secções de choque do grupo representam as secções de choque dependentes da energia ponderadas pelo fluxo angular no intervalo total de energia, de acordo com as definições (2.2.5) a (2.2.7) (*).

(*) Para um grupo de energia omitiu-se o índice $i=1$ no fluxo e na secção de choque total.

Da definição (2.2.9) , a secção de choque que aparece no integrando da equação (2.3.1), pode ser expressa como sendo:

$$\sigma_{11} = \sigma_s + v_s \sigma_f , \quad 2.3.2$$

onde σ_s representa a secção de choque macroscópica de espalhamento , σ_f é a secção de choque macroscópica de fissão e v_s é o número médio de nêutrons emitidos por fissão.

É conveniente expressar-se distâncias em termos de livre caminho médio de colisão, através da variável ótica, definida como sendo (na sua forma mais geral):

$$x = \int_0^z \sigma(z') dz' . \quad 2.3.3$$

Como neste trabalho somente se consideram meios homogêneos:

$$x = \sigma z \quad 2.3.4$$

Considerando-se esta definição, obtém-se de (2.3.1) :

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, \mu) + \psi(x, \mu) = c/2 \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu' , \quad 2.3.5$$

onde,

$$c = \frac{\sigma_s + v_s \sigma_f}{\sigma} , \quad 2.3.6$$

que representa o número médio de nêutrons secundários que emergem de uma interação entre um nêutron e um núcleo.

A equação (2.3.5) representa a equação básica do modelo de um grupo de energia a ser utilizada neste trabalho.

- Técnica de Expansão em Autofunções Singulares

Nesta secção descreve-se resumidamente o método de expansão em autofunções singulares (método de Case) /7/.

O processo utilizado é o de separação de variáveis, e a solução geral obtida para o fluxo angular de nêutrons é constituída de termos assintóticos e de um termo contínuo.

O método empregado é descrito a seguir:

Considerando-se a equação (2.3.5), propõe-se a solução do tipo:

$$\psi(x, \mu) = \phi(v, \mu) \exp(-x/v), \quad 2.3.7$$

onde $\phi(v, \mu)$ são as autofunções e v os autovalores correspondentes.

A expressão (2.3.7) substituída na equação (2.3.5) e efetuado o cancelamento da variável espacial resulta na seguinte expressão:

$$(v - \mu) \phi(v, \mu) = \frac{c \cdot v}{2} \quad 2.3.8$$

onde se fez uso da normalização à unidade:

$$\int_{-1}^1 \phi(v, \mu') d\mu' = 1 \quad 2.3.9$$

Há dois casos a serem considerados:

CASO 1 $v \notin (-1, 1)$

Neste caso, da expressão (2.3.8) resulta:

$$\phi(v, \mu) = \frac{c}{2} \frac{v}{v - \mu}, \quad 2.3.10$$

que inserida na equação (2.3.9) fornece a condição:

$$1 - \frac{cv}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{v - \mu} = 0 \quad 2.3.11$$

ou,

$$1 - \frac{cv}{2} \ln \left| \frac{v+1}{v-1} \right| = 0, \quad 2.3.12$$

A equação (2.3.12) determina os autovalores v , e para este propósito define-se a função da dispersão:

$$\Lambda(z) = 1 - \frac{cz}{2} \ln \left| \frac{z+1}{z-1} \right|, \quad 2.3.13$$

ou numa outra forma:

$$\Lambda(z) = 1 - cz \tanh^{-1} \left(\frac{1}{z} \right), \quad 2.3.14$$

onde o argumento z representa qualquer número no campo complexo.

A função de dispersão apresenta as seguintes propriedades:

- (1) $\Lambda(z) = \Lambda(-z)$
- (2) $\Lambda(z) = \Lambda^*(z^*)$
- (3) $\Lambda(z)$ é analítica em todo o plano complexo, exceto no eixo real de -1 a 1 .

(4) Pelo teorema do argumento demonstra-se que $\Lambda(z)$ tem somente dois zeros no domínio definido em (3) /7/. Logo, de (3) e (2) segue que as raízes de $\Lambda(z)$ podem estar somente no eixo real (exceto no intervalo de -1 a 1) ou então somente no eixo imaginário. Considerando-se somente o eixo real positivo, verifica-se ainda que:

$$(5) \lim_{z \rightarrow 1^+} \Lambda(z) = -\infty$$

e

$$(6) \lim_{z \rightarrow \infty} \Lambda(z) = 1 - c$$

Se $c < 1$, $\Lambda(z)$ muda de sinal entre $z = 1$ e $z = \infty$, assim deve existir uma raiz v_0 real neste intervalo e outra raiz $-v_0$ real como decorrência da propriedade (1).

Como $\Lambda(z)$ possui raízes reais somente para $c < 1$ segue que para $c > 1$ as raízes são imaginárias puras. Para $c = 1$, $\Lambda(z)$ apresenta raiz dupla no infinito.

Simboliza-se essas raízes por $\pm v_0$, que são autovalores discretos. As autofunções associadas a esses dois autovalores são dadas por:

$$\phi(\pm v_0, \mu) = \frac{c}{2} \frac{v_0}{v_0 \mp \mu}, \quad 2.3.15$$

e as duas soluções para a equação de transporte são:

$$\psi_0 \pm(x, \mu) = \phi(\pm v_0, \mu) \exp(\mp x/v_0) \quad 2.3.16$$

CASO 2 $v \in (-1, 1)$

Neste caso, como a variável μ pertence ao mesmo inter-

valores que o autovalor v , podem coincidir e, a rigor, a equação (2.3.10) não pode ser obtida da expressão (2.3.8), devido às singularidades. Se a autofunção $\phi(v, \mu)$ puder ser uma distribuição [31], ela deverá conter um termo proporcional a $\delta(v - \mu)$. Portanto, da equação (2.3.8) pode-se concluir somente que:

$$\phi(v, \mu) = \frac{c}{2} P_v \frac{v}{v - \mu} + \lambda(v) \delta(\mu, v), \quad 2.3.17$$

onde o símbolo P_v significa que a integral sobre μ ou v deve ser efetuada pelo valor principal de Cauchy [12], δ é o delta de Dirac e $\lambda(v)$ é uma função a ser determinada através da condição de normalização. Logo, inserindo-se a equação (2.3.17) na equação (2.3.9) resulta:

$$1 = \frac{c}{2} v P_v \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{v - \mu} + \lambda(v), \quad 2.3.18$$

encontrando-se, explicitamente:

$$\lambda(v) = 1 - cv \tanh^{-1} v \quad 2.3.19$$

Portanto, existe uma continuidade de soluções, dadas por:

$$\psi_v(x, \mu) = \phi(v, \mu) \exp(-x/v), \quad 2.3.20$$

para todos os autovalores contínuos reais tal que $-1 < v < 1$.

Uma propriedade imediata da autofunção $\phi(\xi, \mu)$ é:

$$\phi(\xi, -\mu) = \phi(-\xi, \mu), \quad \xi = v_0 \text{ ou } v \in (0, 1), \quad 2.3.21$$

como se pode verificar em (2.3.15) e (2.3.17).

Resumindo cada caso descrito:

(1) Para $v \notin (-1, 1)$, existem:

- a) para $c < 1$ \rightarrow 2 raízes reais $\pm v_0$
- b) para $c > 1$ \rightarrow 2 raízes imaginárias para $\pm v_0$
- c) para $c = 1$ \rightarrow $v_0 = \infty$ (raiz dupla).

com as correspondentes autofunções $\phi(\pm v_0, \mu)$, fornecendo duas soluções discretas através da expressão (2.3.16).

(2) Para v real $\in (-1, 1)$ existem:

uma continuidade de autovalores v no intervalo citado, sendo que, a cada autovalor v corresponde uma autofunção $\phi(v, \mu)$, fornecendo uma continuidade de soluções do tipo (2.3.20).

Portanto, a solução geral pode ser representada por uma combinação linear das soluções encontradas:

$$\psi(x, \mu) = A(v_0) \phi(v_0, \mu) \exp(-x/v_0) + A(-v_0) \phi(-v_0, \mu) \exp(x/v_0) + \int_{-1}^1 A(v) \phi(v, \mu) \exp(-x/v) dv \quad 2.3.22$$

onde $A(v_0)$, $A(-v_0)$ e $A(v)$ são os coeficientes da expansão, que podem ser determinados por meio das condições de contorno do problema específico. Entretanto, a determinação destes coeficientes não é necessária na solução através do método aproximado F_N , pois os mesmos aparecem apenas em passagens intermediárias do desenvolvimento de equações.

As condições de contorno podem ser classificadas em dois tipos:

de intervalo completo - que resultam em expansões do tipo:

$$f(\mu) = A(v_0) \phi(v_0, \mu) + A(-v_0) \phi(-v_0, \mu) + \int_{-1}^1 A(v) \phi(v, \mu) d\mu, \quad \mu \in (-1, 1), \quad 2.3.23$$

de meio intervalo - que resultam em expansões do tipo:

$$g(\mu) = A(v_0) \phi(v_0, \mu) + \int_0^1 A(v) \phi(v, \mu) dv, \quad \mu \in (0, 1) \quad 2.3.24$$

onde $f(\mu)$ e $g(\mu)$ são funções contínuas conhecidas.

As expansões (2.3.23) e (2.3.24) são completas /7/ para qualquer função que satisfaça as condições de Holder /12/.

As autofunções, tanto de intervalo completo como de meio intervalo, apresentam propriedades de ortogonalidade e normalização /2,7/ que possibilitam a determinação dos coeficientes de expansão.

Na técnica de soluções exatas, a expansão de intervalo completo é aplicada a uma classe restrita de problemas, sendo possível, entretanto, dividir-se as condições de contorno de intervalo completo em duas de meio intervalo (exceto para problemas de meio infinito) resultando em expansões do tipo de equação (2.3.24), que permitem a utilização das propriedades de ortogonalidade de meio intervalo, que possui maior versatilidade de aplicação em problemas. Há uma vasta lista de referências bibliográficas de problemas resolvidos pela técnica de soluções exatas /16,26,33/.

A solução de problemas através do método aproximado F_N , entretanto, requer apenas as relações de ortogonalidade de intervalo completo, que é de aplicação muito simples em comparação às de meio intervalo.

Ortogonalidade e Normalização das Autofunções de Intervalo Completo :

Para este trabalho são suficientes as seguintes relações de ortogonalidade /2,7/:

$$\int_{-1}^1 \mu \phi(\xi, \mu) \phi(\xi', \mu) d\mu = 0, \quad \xi \neq \xi', \quad 2.3.25$$

onde, $\xi, \xi' = \pm v_0$ ou $v \in (-1, 1)$.

$$\int_{-1}^1 \mu \phi(\pm v_0, \mu) \phi(\pm v_0, \mu) d\mu = N(\pm v_0) \quad 2.3.26$$

e,

$$\int_{-1}^1 \mu \phi(v, \mu) \phi(v', \mu) d\mu = N(v) \delta(v - v'), \quad 2.3.27$$

$$\text{onde, } N(\pm v_0) = \pm \frac{c v_0^3}{2} \left[\frac{c}{v_0^2 - 1} - \frac{1}{v_0^2} \right] \quad 2.3.28$$

$$\text{e, } N(v) = v \left[\lambda^2(v) + \left(\frac{\pi c v}{2} \right)^2 \right], \quad 2.3.29$$

mas, estas funções, $N(\pm v_0)$ e $N(v)$, não são necessárias na solução pelo método aproximado F_N .

2.4 - Solução Elementar da Equação de Transporte no Modelo de Dois Grupos

Para este caso particular, considera-se o intervalo total de energia dividido em dois grupos .

A equação de transporte no modelo de dois grupos na forma matricial pode ser obtida da equação (2.2.11), onde os parâmetros e o fluxo angular são considerados para $G = 2$, obtendo-se um sistema de duas equações integro-diferenciais acopladas.

Nesta equação o fluxo de cada grupo representa a integral do fluxo angular no intervalo de energia de cada grupo , e as secções de choque de cada grupo representam as secções de choque (dependentes da energia) ponderadas pelo fluxo angular no intervalo de energia de cada grupo , de acordo com definições (2.2.5) a (2.2.7).

Escolhendo-se convenientemente os grupos de energia pode-se ter sempre $\sigma_1 > \sigma_2$. Dividindo-se as duas equações por σ_2 , o que é equivalente a se considerar as duas equações escritas em termos da variável adimensional $x = \sigma_2 z$ (medida em livres caminhos médios dos nêutrons do segundo grupo de energia), denominada variável óptica.

As duas equações são:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi_1(x, \mu) + \sigma \psi_1(x, \mu) = \alpha_{11} \int_{-1}^1 \psi_1(x, \mu') d\mu' + \alpha_{12} \int_{-1}^1 \psi_2(x, \mu') d\mu',$$

e,

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi_2(x, \mu) + \psi_2(x, \mu) = q_{21} \int_{-1}^1 \psi_1(x, \mu') d\mu' + q_{22} \int_{-1}^1 \psi_2(x, \mu') d\mu',$$

2.4.2

onde, $\sigma = \sigma_1 / \sigma_2 > 1$,

2.4.3

e, $q_{ij} = \sigma_{ij} / 2\sigma_2$, $i = 1, 2$ e $j = 1, 2$

2.4.4

As duas equações (2.4.1) e (2.4.2) podem ser representadas pela forma matricial:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \underline{I}(x, \mu) + \underline{\Sigma} \underline{I}(x, \mu) = \underline{Q} \int_{-1}^1 \underline{I}(x, \mu') d\mu',$$

2.4.5

onde foram definidas as novas matrizes:

$$\underline{I}(x, \mu) = \begin{bmatrix} \psi_1(x, \mu) \\ \psi_2(x, \mu) \end{bmatrix}$$

2.4.6

$$\underline{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.4.7

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}$$

2.4.8

Supondo-se que a matriz \underline{Q} não seja diagonal ou triangular ($q_{12} \cdot q_{21} \neq 0$), define-se uma matriz:

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} \sqrt{q_{21}/q_{12}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2.4.9$$

Fazendo-se a transformação:

$$\underline{I}(x, \mu) = \underline{P}^{-1} \underline{\psi}(x, \mu) \quad 2.4.10$$

substituindo-a na equação (2.4.5) e a seguir multiplicando-se cada termo pela matriz \underline{P} , pela esquerda, obtêm-se:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \underline{\psi}(x, \mu) + \underline{\Sigma} \underline{\psi}(x, \mu) = \underline{C} \int_{-1}^1 \underline{\psi}(x, \mu') d\mu', \quad 2.4.11$$

onde a matriz simétrica \underline{C} é definida como sendo:

$$\underline{C} = \underline{P} \cdot \underline{Q} \cdot \underline{P}^{-1} \quad 2.4.12$$

O caso em que a matriz \underline{Q} é triangular pode ser resolvido pela teoria de um grupo de energia. O caso particular em que $\det.\underline{Q} = 0$, foi resolvido por Siewert e Zweifel /40/.

- Técnica de Expansão em Autofunções Singulares

Propondo-se para a equação (2.4.11) uma solução do tipo /37/:

$$\underline{\psi}_v(x, \mu) = \underline{F}(v, \mu) \exp(-x/v) \quad 2.4.13$$

onde, analogamente ao efetuado para o modelo de um grupo, v

representa os autovalores e $\underline{F}(v, \mu)$ representa, o vetor de autofunções (ou autovetor).

A expressão (2.4.13) substituída na equação (2.4.11) fornece:

$$[v \underline{\Sigma} - \mu \underline{I}] \underline{F}(v, \mu) = v \underline{C} \underline{M}(v) \quad 2.4.14$$

onde: \underline{I} é a matriz unitária,

$$\underline{M}(v) = \int_{-1}^1 \underline{F}(v, \mu') d\mu' \quad 2.4.15$$

Existem dois casos a se considerar:

Caso 1 - $v \notin (-1, 1)$

Para este caso o autovetor é representado por:

$$\underline{F}(\pm v, \mu) = v \underline{D}(v, \pm \mu) \underline{C} \underline{M}(v), \quad 2.4.16$$

onde definiu-se:

$$\underline{D}(v, \pm \mu) = [v \underline{\Sigma} \mp \mu \underline{I}]^{-1} \quad 2.4.17$$

Substituindo-se a equação (2.4.16) na equação (2.4.15) resulta:

$$[\underline{I} - v \int_{-1}^1 \underline{D}(v, \mu) d\mu \underline{C}] \underline{M}(v) = \underline{0} \quad 2.4.18$$

Considerando-se esta equação como duas equações lineares acopladas para os elementos do vetor $\underline{M}(v)$, o autovalor -

deve satisfazer:

$$\Lambda(v) = \det. \underline{\Lambda}(v) = 0, \quad 2.4.19$$

onde define-se a matriz de dispersão como sendo:

$$\underline{\Lambda}(z) = \underline{I} - z \int_{-1}^1 \underline{D}(z, \mu) d\mu \underline{C}, \quad 2.4.20$$

que pode ser representada também por:

$$\underline{\Lambda}(z) = \underline{I} + z \int_{-1}^1 \underline{\psi}(\mu) \frac{d\mu}{\mu - z} \quad 2.4.21$$

onde,

$$\underline{\psi}(\mu) = \begin{bmatrix} \theta(\mu) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} \theta(\mu)=1, \text{ para } \mu \in (-1/\sigma, 1/\sigma) \\ \theta(\mu)=0, \text{ de outro modo.} \end{array} \quad 2.4.22$$

Nota-se na expressão (2.4.20) que,

$$\underline{\Lambda}(-z) = \underline{\Lambda}(z) \quad 2.4.23$$

deduzindo-se, portanto, que:

$$\underline{M}(-z) = \underline{M}(z) \quad 2.4.24$$

Siewert e Shieh /39/ publicaram o número e os tipos de raízes da função de dispersão; havendo a possibilidade de existir um par de raízes ($\pm v_1$) ou dois pares de raízes ($\pm v_1$ e $\pm v_2$) reais e/ou imaginárias (possibilidade de duas raízes no infinito também). O número e tipo das raízes dependem de σ e dos elementos da matriz \underline{C} .

Essas raízes são denotadas, neste trabalho, por $\pm v_k$, $k = 1, 2, \dots, K$.

Caso 2 - $v \in (-1, 1)$

É conveniente definir-se inicialmente:

Região ① + $v \in (-1/\sigma, 1/\sigma)$

Região ② + $v \in (-1, -1/\sigma) \cup (1/\sigma, 1)$

Foi verificado que os autovetores encontrados para este caso são:

$$\underline{F}_{\alpha}^{(1)}(v, \mu) = [\underline{vK}(v, \mu) + \omega_{\alpha}^{(1)}(v) \underline{\delta}(v, \mu)] \underline{CM}_{\alpha}^{(1)}(v), \alpha = 1, 2; v \in \text{região ①}$$

2.4.25

$$\underline{F}_{\alpha}^{(2)}(v, \mu) = [\underline{vK}(v, \mu) + \omega_{\alpha}^{(2)}(v) \underline{\delta}(v, \mu)] \underline{CM}_{\alpha}^{(2)}(v), v \in \text{região ②}$$

2.4.26

onde,

$$\underline{K}(v, \mu) = \begin{bmatrix} Pv \left(\frac{1}{\sigma v - \mu} \right) & 0 \\ 0 & Pv \left(\frac{1}{v - \mu} \right) \end{bmatrix}$$

2.4.27

e,

$$\underline{\delta}(v, \mu) = \begin{bmatrix} \delta(\sigma v - \mu) & 0 \\ 0 & \delta(v - \mu) \end{bmatrix}, \quad 2.4.28$$

e $\omega(v)$ é um parâmetro determinado pela inserção das equações (2.4.25) e (2.4.26) na equação (2.4.15), isto é, da condição:

$$\det. [\underline{\lambda}(v) - \omega(v) \underline{\psi}(v)] = 0, \quad 2.4.29$$

$$\text{onde,} \quad \underline{\lambda}(v) = \underline{I} + v P v \int_{-1}^1 \underline{\psi}(\mu) \frac{d\mu}{\mu - v} \quad 2.4.30$$

A equação (2.4.29) fornece uma solução $\omega^{(2)}(v)$ para $v \in$ região (2) e duas soluções para $v \in$ região (1). Para a região (1) a equação é quadrática e portanto, as soluções envolvem radicais, sendo funções complicadas.

Foi provado que a solução geral completa da equação de transporte pode ser escrita em termos destes autovetores $\underline{F}(v, \mu)$, mas, pelo fato da forma complicada dos autovetores na região (1), como citado no parágrafo anterior, estes autovetores não são muito convenientes. Siewert e Zweifel/40/ introduziram combinações lineares de $\underline{F}_1^{(1)}$ e $\underline{F}_2^{(1)}$ para a obtenção de novos autovetores mais simples para a região (1), podendo assim, ser estabelecida a seguinte solução geral:

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(x, \mu) = & \sum_{k=1}^K [A(v_k) \underline{\phi}(v_k, \mu) \exp(-x/v_k) + A(-v_k) \underline{\phi}(-v_k, \mu) \exp(x/v_k)] + \\ & + \int_{(1)} [A_1^{(1)}(v) \underline{\phi}_1^{(1)}(v, \mu) + A_2^{(1)}(v) \underline{\phi}_2^{(1)}(v, \mu)] \exp(-x/v) dv + \\ & + \int_{(2)} A^{(2)}(v) \underline{\phi}^{(2)}(v, \mu) \exp(-x/v) dv, \quad 2.4.31 \end{aligned}$$

onde, $A(v_k)$, $A(-v_k)$, $A_1^{(1)}(v)$, $A_2^{(1)}(v)$ e $A^{(2)}(v)$ representam

os coeficientes de expansão em autofunções de Case, podendo ser determinados com a aplicação das condições de contorno específicas para cada problema considerado. Entretanto, estes coeficientes não são necessários na solução de problemas através do método aproximado F_N .

Estes novos autovetores são expressos como sendo:

$$\underline{\phi}_1^{(1)}(v, \mu) = \begin{bmatrix} c_{11} v P v \left(\frac{1}{\sigma v - \mu} \right) + \lambda_{11}(v) \delta(\sigma v - \mu) \\ c_{21} v P v \left(\frac{1}{v - \mu} \right) + \lambda_{21}(v) \delta(v - \mu) \end{bmatrix}, \quad 2.4.32$$

$$\underline{\phi}_2^{(1)}(v, \mu) = \begin{bmatrix} c_{12} v P v \left(\frac{1}{\sigma v - \mu} \right) + \lambda_{12}(v) \delta(\sigma v - \mu) \\ c_{22} v P v \left(\frac{1}{v - \mu} \right) + \lambda_{22}(v) \delta(v - \mu) \end{bmatrix}, \quad 2.4.33$$

$$\underline{\phi}^{(2)}(v, \mu) = \begin{bmatrix} \frac{c_{12} v}{\sigma v - \mu} \\ v f(v) P v \left(\frac{1}{v - \mu} \right) + \lambda(v) \delta(v - \mu) \end{bmatrix}, \quad 2.4.34$$

e,

$$\underline{\phi}(\pm v_k, \mu) = \begin{bmatrix} \frac{c_{12} v_k}{\sigma v_k \mp \mu} \\ \frac{v_k f(v_k)}{v_k \mp \mu} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad 2.4.35$$

onde foram utilizadas as funções,

$$\lambda(\xi) = \det \cdot \underline{\lambda}(\xi) \quad 2.4.36$$

ou,

$$\lambda(\xi) = 1 - 2c_{11}\xi\tau\left(\frac{1}{\sigma\xi}\right) - 2c_{22}\xi\tau(\xi) + 4C\xi^2\tau(\xi)\tau\left(\frac{1}{\sigma\xi}\right), \quad 2.4.37$$

para $\xi = v\epsilon$ região (2)

$$f(\xi) = c_{22} - 2C\xi\tau\left(\frac{1}{\sigma\xi}\right), \text{ para } \xi = \pm v_k \text{ ou } v\epsilon \text{ região (2), } 2.4.38$$

e $\lambda_{ij}(\xi)$, $i, j = 1, 2$ são os elementos de $\underline{\lambda}(\xi)$, utilizados para $\xi = v\epsilon$ região (1).

Nestas expressões as abreviações $C = \det. \underline{C}$ e $\tau(\xi) = \text{arctanh}(\xi)$ foram introduzidas.

Uma propriedade imediata para os autovetores, conforme expressão (2.4.32) a (2.4.35) é:

$$\underline{\phi}(\xi, -\mu) = \underline{\phi}(-\xi, \mu), \quad 2.4.39$$

para qualquer autovalor ξ .

Os autovetores $\underline{\phi}_{\alpha}^{(1)}(v, \mu)$, $\alpha = 1, 2$ são combinações lineares de $\underline{F}_{\alpha}^{(1)}(v, \mu)$, $\alpha = 1, 2$. Os autovetores $\underline{\phi}^{(2)}(v, \mu)$ e $\underline{\phi}(\pm v_k, \mu)$ são os autovetores $\underline{F}^{(2)}(v, \mu)$ e $\underline{F}(\pm v_k, \mu)$, respectivamente, com normalização particular.

A solução geral expressa por (2.4.31) é a que será utilizada neste trabalho.

As condições de contorno dependem do tipo de problema, podendo ser classificadas como sendo de intervalo completo - ou de meio intervalo. Em ambas, foi provado que a solução

(2.4.31) forma um conjunto completo de autofunções /40/.

Similarmente ao modelo de um grupo; a solução de problemas através do método aproximado F_N no modelo de dois grupos, requer apenas as relações de ortogonalidade de intervalo completo.

- Ortogonalidade e Normalização dos Autovetores de Intervalo Completo

Os autovetores $\underline{\phi}_\alpha^{(1)}(v, \mu)$, $\alpha = 1, 2$, embora mais concisos que os autovetores $\underline{F}_\alpha^{(1)}(v, \mu)$, não são ortogonais para $v = v'$. Entretanto, como foi discutido por Siewert e Zweifel/40/, utiliza-se vetores adjuntos convenientes, assim:

$$\int_{-1}^1 \underline{X}(\pm v_k, \mu) \underline{\phi}(\pm v_k, \mu) \mu d\mu = \pm N(v_k), \quad k = 1, 2, \dots, K \quad 2.4.40$$

$$\int_{-1}^1 \underline{X}_\alpha^{(1)}(v', \mu) \underline{\phi}_\beta^{(1)}(v, \mu) \mu d\mu = N^{(1)}(v) \delta(v-v') \delta_{\alpha\beta}; \quad \alpha = 1, 2;$$

$$\beta = 1, 2; \quad v, v' \text{ e região } \textcircled{1}$$

2.4.41

$$\int_{-1}^1 \underline{X}_\alpha^{(2)}(v', \mu) \underline{\phi}_\alpha^{(2)}(v, \mu) \mu d\mu = N^{(2)}(v) \delta(v-v');$$

$$v, v' \text{ e região } \textcircled{2}$$

2.4.42

onde,

$$\underline{X}(\pm v_k, \mu) = \underline{\phi}(\pm v_k, \mu) \quad 2.4.43$$

$$\underline{X}_1^{(1)}(v', \mu) = N_{22}(v') \underline{\phi}_1^{(1)}(v', \mu) - N_{12}(v') \underline{\phi}_2^{(1)}(v', \mu) \quad 2.4.44$$

$$\underline{X}_2^{(1)}(v', \mu) = N_{11}(v') \underline{\phi}_2^{(1)}(v', \mu) - N_{21}(v') \underline{\phi}_1^{(1)}(v', \mu)$$

2.4.45

$$\underline{x}^{(2)}(v, \mu) = \underline{\phi}^{(2)}(v, \mu), \quad 2.4.46$$

também, os fatores de ortogonalidade são os seguintes :

$$N_{11}(v) = 1 - 4c_{11}v\tau(\sigma v) + 4v^2 [c_{11}^2\tau^2(\sigma v) + c_{12}c_{21}\tau^2(v)] + \\ + \pi^2v^2(c_{11}^2 + c_{12}c_{21}), \quad 2.4.47$$

$$N_{ij}(v) = c_{ij} [4c_{11}v^2\tau^2(\sigma v) + 4c_{22}v^2\tau^2(v) - 2v\tau(\sigma v) - \\ - 2v\tau(v) + \pi^2v^2(c_{11} + c_{22})], \quad i \neq j, \quad 2.4.48$$

$$N_{22}(v) = 1 - 4c_{22}v\tau(v) + 4v^2 [c_{22}^2\tau^2(v) + c_{12}c_{21}\tau^2(\sigma v)] + \\ + \pi^2v^2(c_{22}^2 + c_{12}c_{21}), \quad 2.4.49$$

$$N(v_k) = 2v_k^2 \left\{ c_{12}^2 \left[\frac{\sigma v_k}{(\sigma v_k)^2 - 1} - \tau\left(\frac{1}{\sigma v_k}\right) \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[c_{22} - 2c_{12}v_k\tau\left(\frac{1}{\sigma v_k}\right) \right]^2 \left[\frac{v_k}{v_k^2 - 1} - \tau\left(\frac{1}{v_k}\right) \right]^2 \right\} \quad 2.4.50$$

$$N^{(1)}(v) = v\Lambda^+(v)\Lambda^-(v), \quad v \text{ e região } \textcircled{1}, \quad 2.4.51$$

$$N^{(2)}(v) = v\Lambda^+(v)\Lambda^-(v), \quad v \text{ e região } \textcircled{2}, \quad 2.4.52$$

onde, $\Lambda^\pm(v)$ denota os valores dos cortes dos ramos de $\Lambda(z)$ quando este tende pelo semiplano superior (+) ou inferior(-) em relação ao eixo real.

Das expressões (2.4.47) a (2.4.49) verifica-se a seguinte propriedade imediata:

$$N_{ij}(v) = N_{ij}(-v), \quad i = 1,2 \text{ e } j = 1,2, \quad v \in \text{região } \textcircled{1} \quad 2.4.53$$

Das expressões (2.4.50) a (2.4.52) tem-se que:

$$N(-\xi) = -N(\xi), \quad 2.4.54$$

para qualquer autovalor ξ .

3. FUNDAMENTOS DA TEORIA DO MÉTODO F_N

O método F_N , como citado no Capítulo 1, foi recentemente introduzido por Siewert e Benoist /37/ para resolver aproximadamente problemas da teoria de transporte.

Primeiramente, o método foi aplicado aos problemas padrões nos modelos simples tais como, problemas de semi-espaço de meios homogêneos na teoria de um grupo com espalhamento isotrópico, e problemas de placa plana no mesmo modelo.

Mais recentemente, o método foi aplicado a problemas de multi-regiões /35/.

Nestes problemas foram mostrados os seguintes méritos do método F_N :

1. Análise básica e estabelecimento das equações fundamentais, são simples em comparação com a teoria de difusão e o método aproximado P_N , especialmente, para os problemas de multi-regiões /35/.
2. Cálculos necessários para se resolver as equações finais, são muito menores do que se precisa para a solução exata e, são comparáveis aos dos outros métodos aproximados.
3. Pode-se ter boa precisão numérica com relativamente baixa ordem de aproximação, por exemplo: 3 a 4 dígitos com aproximação de ordem 5.

O método F_N está ainda em fase de desenvolvimento e as pesquisas vêm sendo feitas em vários aspectos tais como: aplicação do método a problemas com meio multiplicador, extensão do método para outras geometrias, e desenvolvimento da teoria do F_N no modelo de dois grupos.

Neste trabalho serão abordados dois desses problemas: aplicação do F_N para o problema de criticalidade em geometria plana usando-se modelo de um grupo, e desenvolvimento da teoria do F_N e a sua aplicação a problemas padrões no modelo de dois grupos em geometria plana. O desenvolvimento do método F_N no modelo de dois grupos será considerado no Capítulo 4.

Basicamente, o método F_N consiste das seguintes fases:

1. A solução da equação de transporte é escrita pela expansão em autofunções singulares, isto é, a solução de Case.
2. Um sistema de equações integrais, exatas, acopladas é derivado, usando-se as propriedades das autofunções para os fluxos angulares nas interfaces.
3. Os fluxos angulares nas interfaces são aproximados por expansões polinomiais, com os coeficientes arbitrários.
4. Substituindo-se estas expansões no sistema de equações exatas, citado na fase 2, é deduzido um sistema de equações lineares algébricas para os coeficientes das equações da fase 3.

5. Este sistema de equações é resolvido por um método padrão.

Neste Capítulo, o método básico de aproximação F_N é apresentado considerando-se dois problemas simples, no modelo de um grupo.

O primeiro problema consiste basicamente, em se determinar o fluxo refletido na interface situada em $x = -\alpha_1$ e o fluxo transmitido na saída situada à direita ($x = \alpha_1$), sob as seguintes condições físicas impostas.

- Fluxo incidente em $x = -\alpha_1$, do tipo:

$$\psi(-\alpha_1, \mu) = \mu^\beta, \mu \in (0, 1), \beta = 0, 1, 2, \dots \quad 3.1$$

- Inexistência de fluxo incidente em $x = \alpha_1$.

$$\psi(\alpha_1, -\mu) = 0, \quad \mu \in (0, 1) \quad 3.2$$

A equação de transporte homogênea (2.3.5) juntamente com a respectiva solução geral (2.3.22) são reescritas, a seguir, para a região $-\alpha_1 \leq x \leq \alpha_1$.

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, \mu) + \psi(x, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu', \quad x \in (-\alpha_1, \alpha_1) \quad 3.3$$

$$\begin{aligned} \psi(x, \mu) = & A(v_0) \phi(v_0, \mu) \exp(-x/v_0) + A(-v_0) \phi(-v_0, \mu) \exp(x/v_0) + \\ & + \int_{-1}^1 A(v) \phi(v, \mu) \exp(-x/v) dv, \quad \mu \in (-1, 1), \quad x \in (-\alpha_1, \alpha_1) \end{aligned}$$

3.4

Na expressão (3.4), para $x = \bar{\tau} \alpha_1$, tem-se:

$$\begin{aligned} \psi(\bar{\tau} \alpha_1, \mu) = & A(v_0) \phi(v_0, \mu) \exp(\bar{\tau} \alpha_1 / v_0) + A(-v_0, \mu) \exp(\bar{\tau} \alpha_1 / v_0) + \\ & + \int_{-1}^1 A(v) \phi(v, \mu) \exp(\bar{\tau} \alpha_1 / v) dv, \quad \mu \in (-1, 1) \end{aligned} \quad 3.5$$

Nota-se que estas expressões representam duas expansões típicas de intervalo completo em termos das autofunções de Case. Pode-se aplicar, então, as relações de ortogonalidade de intervalo completo (2.3.25) a (2.3.27), isto é, multiplicando-se a expressão (3.5) por $\mu \phi(-\xi, \mu)$ e $\mu \phi(\xi, \mu)$, $\xi = v_0$ ou $v \in (0, 1)$ e integrando-se sobre $\mu \in (-1, 1)$, obtém-se:

$$\int_{-1}^1 \mu \phi(-\xi, \mu) \psi(\bar{\tau} \alpha_1, \mu) d\mu = A(-\xi) N(-\xi) \exp(\bar{\tau} \alpha_1 / \xi), \quad \xi \in P, \quad 3.6$$

$$\int_{-1}^1 \mu \phi(\xi, \mu) \psi(\bar{\tau} \alpha_1, \mu) d\mu = A(\xi) N(\xi) \exp(\bar{\tau} \alpha_1 / \xi), \quad \xi \in P, \quad 3.7$$

onde P representa o conjunto de autovalores positivos ξ tal que, $\xi = v_0$ ou $v \in (0, 1)$.

Eliminando-se $A(-\xi)N(-\xi)$ das duas equações representadas pela expressão (3.6) e $A(\xi)N(\xi)$ das duas equações representadas por (3.7), obtém-se as seguintes equações:

$$E_1(\xi) \int_{-1}^1 \mu \phi(-\xi, \mu) \psi(\alpha_1, \mu) d\mu - \int_{-1}^1 \mu \phi(-\xi, \mu) \psi(-\alpha_1, \mu) d\mu = 0, \quad 3.8$$

$$E_1(\xi) \int_{-1}^1 \mu \phi(\xi, \mu) \psi(-\alpha_1, \mu) d\mu - \int_{-1}^1 \mu \phi(\xi, \mu) \psi(\alpha_1, \mu) d\mu = 0, \quad 3.9$$

onde, $E_1(\xi) = \exp(-2\alpha_1/\xi)$.

Desdobrando-se cada integral das equações (3.8) e (3.9) em outras duas com limites de definição para a variável μ entre $(-1,0)$ e $(0,1)$, efetuando-se algumas manipulações algébricas nas integrais com limites $(-1,0)$ de modo que estas fiquem definidas entre os limites $(0,1)$, fazendo-se uso da propriedade (2.3.21) e finalmente aplicando-se as condições de fronteira (3.1) e (3.2), obtêm-se as seguintes equações expressas numa forma mais conveniente.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mu \phi(\xi, \mu) \psi(-\alpha_1, -\mu) d\mu + E_1(\xi) \int_0^1 \mu \phi(-\xi, \mu) \psi(\alpha_1, \mu) d\mu &= \\ &= \int_0^1 \mu \phi(-\xi, \mu) \mu^\beta d\mu, \quad \xi \in P, \end{aligned} \quad 3.10$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mu \phi(\xi, \mu) \psi(\alpha_1, \mu) d\mu + E_1(\xi) \int_0^1 \mu \phi(-\xi, \mu) \psi(-\alpha_1, -\mu) d\mu &= \\ &= E_1(\xi) \int_0^1 \mu \phi(\xi, \mu) \mu^\beta d\mu, \quad \xi \in P, \end{aligned} \quad 3.11$$

Nota-se que estas equações representam o sistema de equações integrais acopladas exatas para os fluxos das interfaces.

Na aproximação F_N , propõe-se a substituição dos fluxos angulares nas interfaces pelas expansões em série dos seguintes tipos.

$$\psi(-\alpha_1, -\mu) = \sum_{\alpha=0}^N d_\alpha^1 \mu^\alpha, \quad \mu \in (0,1), \quad 3.12$$

$$\psi(\alpha_1, \mu) = \sum_{\alpha=0}^N d_\alpha^2 \mu^\alpha, \quad \mu \in (0,1), \quad 3.13$$

onde N é a ordem de expansão dos polinômios, ou seja, a série é truncada no termo de ordem $(N+1)$.

Substituindo-se (3.12) e (3.13) nas equações (3.10) e (3.11) e invertendo-se a ordem das somatórias com as integrais, obtêm-se as seguintes equações:

$$\sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha}^1 \int_0^1 \phi(\xi, \mu) \mu^{\alpha+1} d\mu + E_1(\xi) \sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha}^2 \int_0^1 \phi(-\xi, \mu) \mu^{\alpha+1} d\mu = \int_0^1 \phi(-\xi, \mu) \mu^{\beta+1} d\mu, \quad \xi \in P \quad 3.14$$

$$\sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha}^2 \int_0^1 \phi(\xi, \mu) \mu^{\alpha+1} d\mu + E_1(\xi) \sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha}^1 \int_0^1 \phi(-\xi, \mu) \mu^{\alpha+1} d\mu = E_1(\xi) \int_0^1 \phi(\xi, \mu) \mu^{\beta+1} d\mu, \quad \xi \in P \quad 3.15$$

Nas equações (3.14) e (3.15) pode-se introduzir as seguintes definições:

$$A_{\alpha}(\xi) = \frac{2}{c\xi} \int_0^1 \phi(-\xi, \mu) \mu^{\alpha+1} d\mu, \quad 3.16$$

$$B_{\alpha}(\xi) = \frac{2}{c\xi} \int_0^1 \phi(\xi, \mu) \mu^{\alpha+1} d\mu \quad 3.17$$

As funções $A_{\alpha}(\xi)$ e $B_{\alpha}(\xi)$ são dadas por (*):

$$A_{\alpha}(\xi) = \frac{1}{\alpha+1} - \xi A_{\alpha-1}(\xi), \quad 3.18$$

$$B_{\alpha}(\xi) = \frac{1}{\alpha+1} + \xi B_{\alpha-1}(\xi), \quad 3.19$$

Para $\alpha = 0$, as funções $A_0(\xi)$ e $B_0(\xi)$ são obtidas efetuando-se a integração nas definições (3.16) e (3.17), resultando:

(*) Alguns detalhes nas deduções destas funções são apresentados no Apêndice A.

$$A_0(\xi) = 1 - \xi \ln(1 + \xi)/\xi, \quad (3.20)$$

$$B_0(\xi) = \frac{2}{c} - 2 + A_0(\xi) \quad (3.21)$$

Substituindo-se estas funções (3.18) a (3.21), nas equações (3.14) e (3.15), tem-se:

$$\sum_{\alpha=0}^N \left[d_{\alpha}^1 B_{\alpha}(\xi) + E_1(\xi) d_{\alpha}^2 A_{\alpha}(\xi) \right] = A_{\beta}(\xi), \quad \xi \in P, \quad (3.22)$$

$$\sum_{\alpha=0}^N \left[d_{\alpha}^2 E_{\alpha}(\xi) + E_1(\xi) d_{\alpha}^1 A_{\alpha}(\xi) \right] = E_1(\xi) B_{\beta}(\xi), \quad \xi \in P \quad (3.23)$$

Nota-se que os coeficientes d_{α}^1 e d_{α}^2 constituem $2(N+1)$ valores desconhecidos (incógnitas) que devem ser determinadas para os cálculos dos fluxos. Logo, há necessidade em se considerar $2(N+1)$ equações para a solução do sistema linearmente independente, o que pode ser feito selecionando-se $(N+1)$ valores de ξ , ou seja, ξ_j , $j = 0, 1, \dots, N$.

O esquema adotado para a seleção dos autovalores ξ_j - exerce influência na precisão dos resultados, uma vez que o método F_N é um método aproximado.

O esquema de seleção adotado neste trabalho é o mesmo esquema ótimo estabelecido por P. Grandjean e C.E. Sievert /14/, após alguns resultados preliminares, que consiste no seguinte: $\xi_0 = v_0$, $\xi_1 = 0$ e os restantes autovalores - selecionados no intervalo $(0, 1)$, igualmente espaçados entre

si, ou seja:

$$\xi_j = \frac{j-1}{N-1}, \quad j = 2, 3, \dots, N \quad 3.24$$

Dessa forma das equações (3.22) e (3.23), obtém-se o seguinte sistema com $2(N+1)$ equações a $2(N+1)$ incógnitas:

$$\sum_{\alpha=0}^N \left[d_{\alpha}^1 B_{\alpha}(\xi_j) + E_1(\xi_j) d_{\alpha}^2 A_{\alpha}(\xi_j) \right] = A_{\beta}(\xi_j), \quad 3.25$$

$$\sum_{\alpha=0}^N \left[d_{\alpha}^2 B_{\alpha}(\xi_j) + E_1(\xi_j) d_{\alpha}^1 A_{\alpha}(\xi_j) \right] = E_1(\xi_j) B_{\beta}(\xi_j), \quad 3.26$$

onde, $\xi_j \in P$, $j = 0, 1, 2, \dots, N$

Este sistema de equações é resolvido, determinando-se assim os coeficientes d_{α}^1 e d_{α}^2 , que determinam, por sua vez, os polinômios que representam os fluxos $\psi(-\alpha_1, -\mu)$ e $\psi(\alpha_1, \mu)$, respectivamente (os polinômios são apenas funções aproximadas que representam os fluxos exatos, pois a série foi truncada no termo de ordem $N+1$).

Estes fluxos possibilitam a computação do albedo ρ na interface α_1 , definido como sendo a razão entre corrente refletida de nêutrons e corrente de nêutrons que incide na interface, isto é:

$$\frac{\int_0^1 \mu \psi(-\alpha_1, -\mu) d\mu}{\int_0^1 \mu \psi(-\alpha_1, \mu) d\mu} = (\beta+2) \sum_{\alpha=0}^N \frac{d_{\alpha}^1}{\alpha+2} \quad 3.27$$

Podem-se ainda calcular o fator de transmissão T

na interface α_1 , definido como sendo a razão entre a corrente de nêutrons que sai pela corrente de nêutrons que entra, ou seja:

$$\frac{\int_0^1 \mu \psi(\alpha_1, \mu) d\mu}{\int_0^1 \mu \psi(-\alpha_1, \mu) d\mu} = (\beta+2) \frac{N}{\Sigma} \frac{d^2}{\alpha} \frac{1}{\alpha+2} \quad 3.28$$

Como citado anteriormente, a solução do método F_N foi considerada apenas nas interfaces do meio. Entretanto, é possível determinar-se o comportamento da função $\psi(x, \mu)$ para qualquer ponto no interior do meio através do conhecimento do fluxo em uma das interfaces, isto é, $\psi(\alpha_1, \mu)$ ou $\psi(-\alpha_1, \mu)$.

De fato, os coeficientes da expansão podem ser determinados por meio da aplicação das relações de ortogonalidade (2.3.25) a (2.3.27). Como isto já foi efetuado na derivação das expressões (3.6) e (3.7), obtêm-se das mesmas as seguintes expressões:

$$A(-\xi) = N^{-1}(-\xi) \exp\left(\frac{\alpha_1}{\xi}\right) \int_0^1 \mu \phi(-\xi, \mu) \psi(\bar{\tau}\alpha_1, \mu) d\mu, \quad \xi \in P \quad 3.29$$

$$A(\xi) = N^{-1}(+\xi) \exp\left(\frac{\bar{\tau}\alpha_1}{\xi}\right) \int_{-1}^1 \mu \phi(\xi, \mu) \psi(\bar{\tau}\alpha_1, \mu) d\mu, \quad \xi \in P \quad 3.30$$

onde as funções $N(\pm \xi)$ são dadas por (2.3.28) e (2.3.29).

As autofunções são conhecidas, conforme (2.3.15) e (2.3.17). Portanto a solução geral para o interior do meio,

de acordo com (2.3.22), é determinada pela expressão:

$$\psi(x, \mu) = A(v_0) \phi(v_0, \mu) \exp(-x/v_0) + A(-v_0) \phi(-v_0, \mu) \exp(+x/v_0) + \int_0^1 A(v) \phi(v, \mu) \exp(-x/v) dv \quad 3.31$$

Para o segundo problema considera-se um sistema tipo placa constituída de um material homogêneo e multiplicador ($c > 1$). O problema em questão consiste em se determinar o valor de α_1 para que o sistema seja crítico (meia espessura crítica da placa α_{1c}), e os fluxos de nêutrons que saem pelas interfaces.

As novas condições físicas são:

- Inexistência de fluxos incidentes em $x = \pm \alpha_1$

$$\psi(\pm \alpha_1, \mp \mu) = 0, \quad \mu \in (0, 1) \quad 3.32$$

- Simetria em relação ao plano $x = 0$, pois o material da placa é homogêneo.

$$\psi(x, \mu) = \psi(-x, -\mu), \quad \mu \in (-1, 1) \quad 3.33$$

Portanto, da condição (3.33), tem-se que os fluxos nas interfaces α_1 e $-\alpha_1$, dados pelas expressões (3.12) e (3.13) respectivamente, devem ser iguais. Disto resulta:

$$d_\alpha^1 = d_\alpha^2 = d_\alpha, \quad \alpha = 0, 1, \dots, N, \quad 3.34$$

reduzindo assim, o número de coeficientes à metade.

Logo , aplicando-se as duas condições físicas, (3.32) e (3.33), diretamente em uma das equações (3.25) ou (3.26), obtém-se o seguinte sistema homogêneo de equações lineares algébricas:

$$\sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha} \left[B_{\alpha}(\xi_j) + E_1(\xi_j) A_{\alpha}(\xi_j) \right] = 0, \quad \xi_j \in P, j = 0, 1, \dots, N \quad 3.35$$

Este sistema possui (N+1) equações e (N+1) coeficientes d_{α} a serem determinados, além de α_1 , ou seja, o número de incógnitas excede o número de equações de uma unidade. Logo, o sistema é indeterminado.

Entretanto, deseja-se encontrar uma solução não trivial para o fluxo, o que implica que os coeficientes não podem ser todos nulos para um determinado valor de meia espessura crítica $\alpha_1 = \alpha_{1c}$.

Para a solução não trivial, é necessário que o determinante da matriz desses coeficientes seja nulo.

Esta condição possibilita a determinação de α_{1c} . Entretanto, este procedimento não é conveniente na prática, pois os cálculos envolvidos são, de modo geral, muito trabalhosos. Dessa forma, prefere-se empregar outro procedimento, que, é descrito a seguir.

Primeiramente, nota-se que a magnitude da solução (fluxo) para o reator depende da sua potência de operação, o que introduz um grau de liberdade no sistema. Portanto, pode-se normalizar arbitrariamente um dos coeficientes.

$$\sum_{\alpha=1}^N d_{\alpha} [B_{\alpha}(\xi_j) + E_1(\xi_j)A_{\alpha}(\xi_j)] = - [B_0(\xi_j) + E_1(\xi_j)A_0(\xi_j)];$$

$$\xi_j \in P, j = 1, 2, \dots, N$$

3.36

e

$$\sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha} [B_{\alpha}(v_0) + E_1(v_0)A_{\alpha}(v_0)] = 0$$

3.37

Da equação (3.37) explicita-se α_1 , resultando na seguinte expressão:

$$\alpha_1 = -\frac{v_0}{2} \ln \left[\frac{\sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha} B_{\alpha}(v_0)}{\sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha} A_{\alpha}(v_0)} \right],$$

3.38

$$\alpha_1 = -\frac{v_0}{2} \ln \left[\frac{\exp(\pi i) \sum_{\alpha=0}^N B_{\alpha}(v_0)}{\sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha} A_{\alpha}(v_0)} \right]$$

3.39

Como $c > 1$, decorre que o autovalor v_0 é imaginário, portanto,

$$v_0 = i |v_0|,$$

3.40

que introduzido na expressão (3.39) e após algumas passagens algébricas chega-se, finalmente, à seguinte expressão:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} |v_0| - \frac{v_0}{2} \ln \frac{\sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha} B_{\alpha}(v_0)}{\sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha} A_{\alpha}(v_0)} \quad 3.41$$

Um processo iterativo entre o sistema de equações (3.36) e α_1 é efetuado, então, para a determinação da meia espessura crítica α_{1c} .

4. DESENVOLVIMENTO DA TEORIA DO MÉTODO F_N PARA O MODELO DE DOIS GRUPOS

Como citado anteriormente, o método F_N ainda está em fase de desenvolvimento e a teoria deste método para o modelo de dois grupos é um dos campos em aberto para pesquisa.

Neste Capítulo a teoria básica do método F_N no modelo de dois grupos é desenvolvida.

Os conceitos básicos da teoria para o modelo de dois grupos são semelhantes àqueles estabelecidos no modelo de um grupo. Entretanto, no modelo de dois grupos, a complexidade é maior, devido aos seguintes motivos:

1. Os fluxos das interfaces são vetores, logo há um maior número de incógnitas para uma dada ordem de aproximação, o que implica na seleção de maior quantidade de autovalores ξ_j .

2. O critério de seleção dos autovalores ξ_j é mais complicado do que aquele para o modelo de um grupo, devendo-se distinguir dois intervalos $(0, 1/\sigma)$ e $(1/\sigma, 1)$, para a escolha dos autovalores.

3. Como mostrado no Capítulo 3, para o modelo de um grupo, obtém-se um sistema de equações lineares algébricas, cujos coeficientes são funções de ξ_j , nas quais estão contidas as expressões logarítmicas de $A_\alpha(\xi_j)$ e $B_\alpha(\xi_j)$. As fun

ções $A_\alpha(\xi)$ e $B_\alpha(\xi)$ são contínuas em todo o intervalo $\xi \in (0,1)$.

Analogamente, no modelo de dois grupos, chega-se também a equações lineares algébricas, cujos coeficientes são funções de ξ , nas quais estão contidos termos logarítmicos. A partir dessas equações um sistema de equações lineares algébricas é montado, escolhendo-se autovalores no intervalo $(0,1)$ (além dos autovalores discretos). Entretanto, estas funções são expressas por formas analíticas diferentes para os intervalos $(0, 1/\sigma)$ e $(1/\sigma, 1)$, salientando-se que são descontínuas para $\xi = 1/\sigma$. Além disso, algumas das funções referentes ao intervalo $(1/\sigma, 1)$ tornam-se singulares no limite de $\xi \rightarrow 1/\sigma$, pela direita. Logo, neste intervalo, $(1/\sigma, 1)$, o autovalor $\xi = 1/\sigma$ e os que lhe sejam muito próximos devem ser excluídos da seleção.

A seguir um problema simples é considerado, através do qual a teoria do método F_N no modelo de dois grupos de energia é desenvolvida.

Para isto, o sistema dado no segundo problema do Capítulo 3, é considerado novamente neste Capítulo, ou seja, de terminação da meia espessura crítica a_{1c} de uma placa plana infinita constituída de um material homogêneo e multiplicador.

Considera-se que as propriedades físicas desse material sejam dadas e que o mesmo preencha a região $-a_1 \leq x \leq a_1$.

A equação de transporte no modelo de dois grupos (2.4.11) é reescrita como sendo:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \underline{\psi}(x, \mu) + \underline{\Sigma} \underline{\psi}(x, \mu) = \underline{C} \int_{-1}^1 \underline{\psi}(x, \mu') d\mu', \quad 4.1$$

para $-\alpha_1 \leq x \leq \alpha_1$.

As condições físicas que a solução $\underline{I}(x, \mu) = \underline{P}^{-1} \underline{\psi}(x, \mu)$ deve obedecer são:

- Inexistência de fluxo incidente em $x = \pm \alpha_1$.

$$\underline{\psi}(\pm \alpha_1, \mp \mu) = \underline{0}, \quad \mu \in (0, 1) \quad 4.2$$

- Simetria em relação ao plano $x = 0$, pois o material da placa é homogêneo.

$$\underline{\psi}(x, \mu) = \underline{\psi}(-x, -\mu), \quad \mu \in (-1, 1), \quad 4.3$$

$$\text{logo, } \underline{\psi}(0, \mu) = \underline{\psi}(0, -\mu), \quad \mu \in (-1, 1) \quad 4.4$$

Tendo-se em vista a condição de simetria, pode-se considerar apenas o semi-espaco $x \geq 0$ para se encontrar a solução do problema.

A solução geral dada por (2.4.31) é escrita novamente para a placa:

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(x, \mu) = & \sum_{k=1}^K [A(v_k) \underline{\phi}(v_k, \mu) \exp(-x/v_k) + A(-v_k) \underline{\phi}(-v_k, \mu) \exp(x/v_k)] + \\ & + \int_{\textcircled{1}} [A_1^{(1)}(v) \underline{\phi}_1^{(1)}(v, \mu) + A_2^{(1)}(v) \underline{\phi}_2^{(1)}(v, \mu)] \exp(-x/v) dv + \\ & + \int_{\textcircled{2}} A^{(2)}(v) \underline{\phi}^{(2)}(v, \mu) \exp(-x/v) dv, \quad \mu \in (-1, 1) \quad 4.5 \end{aligned}$$

Incorporando-se a condição de simetria (4.4) na

expressão (4.5) para $x = 0$, e utilizando-se a propriedade para autofunções (2.4.39), tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^K [A(v_k) \phi(v_k, \mu) + A(-v_k) \phi(-v_k, \mu)] + \int_0^{1/\sigma} [A_1^{(1)}(v) \phi_1^{(1)}(v, \mu) + \\
 & \qquad \qquad \qquad + A_2^{(1)}(v) \phi_2^{(1)}(v, \mu)] dv + \\
 & + \int_0^{1/\sigma} [A_1^{(1)}(-v) \phi_1^{(1)}(-v, \mu) + A_2^{(1)}(-v) \phi_2^{(1)}(-v, \mu)] dv + \\
 & \qquad \qquad \qquad + \int_{1/\sigma}^1 A^{(2)}(v) \phi^{(2)}(v, \mu) dv + \\
 & + \int_{1/\sigma}^1 A^{(2)}(-v) \phi^{(2)}(-v, \mu) dv = \sum_{k=1}^K [A(v_k) \phi(v_k, \mu) + A(-v_k) \phi(-v_k, \mu)] + \\
 & + \int_0^{1/\sigma} [A_1^{(1)}(v) \phi_1^{(1)}(-v, \mu) + A_2^{(1)}(v) \phi_2^{(1)}(-v, \mu)] dv + \\
 & \qquad \qquad \qquad + \int_0^{1/\sigma} [A_1^{(1)}(-v) \phi_1^{(1)}(v, \mu) + A_2^{(1)}(-v) \phi_2^{(1)}(v, \mu)] dv + \\
 & + \int_{1/\sigma}^1 A^{(2)}(v) \phi^{(2)}(-v, \mu) dv + \int_{1/\sigma}^1 A^{(2)}(-v) \phi^{(2)}(v, \mu) dv, \quad \mu \in (-1, 1)
 \end{aligned}$$

4.6

Aplicando-se as relações de ortogonalidade de intervalo completo, (2.4.40) a (2.4.42), na equação (4.6), ou seja, multiplicando-se cada termo por $\mu \tilde{X}(\xi, \mu)$ ou $\mu \tilde{X}(-\xi, \mu)$ para $\xi = v_k$ ou $v \in (0, 1)$, e integrando-se sobre $\mu \in (-1, 1)$, obtêm-se:

$$A(\xi) = A(-\xi), \quad \xi = v_k \quad \text{ou } v \in (0, 1) \quad 4.7$$

Portanto, aplicando-se a expressão (4.7) na solução da da pela expressão (4.5), obtêm-se para $x = \alpha_1$.

$$\begin{aligned}
\psi(\alpha_1, \mu) = & \sum_{k=1}^K A(v_k) [\phi(v_k, \mu) \exp(-\alpha_1/v_k) + \phi(-v_k, \mu) \exp(\alpha_1/v_k)] + \\
& + \int_{1/\sigma}^1 A^{(2)}(v) [\phi^{(2)}(v, \mu) \exp(-\alpha_1/v) + \phi^{(2)}(-v, \mu) \exp(\alpha_1/v)] dv + \\
& + \int_0^{1/\sigma} A_1^{(1)}(v) [\phi_1^{(1)}(v, \mu) \exp(-\alpha_1/v) + \phi_1^{(1)}(-v, \mu) \exp(\alpha_1/v)] dv + \\
& + \int_0^{1/\sigma} A_2^{(1)}(v) [\phi_2^{(1)}(v, \mu) \exp(-\alpha_1/v) + \phi_2^{(1)}(-v, \mu) \exp(\alpha_1/v)] dv
\end{aligned}$$

4.8

A meia espessura crítica α_{1c} é agora procurada através do método F_N .

Aplicando-se as relações de ortogonalidade de intervalo completo (2.4.40) a (2.4.42) na equação (4.8), obtém-se:

$$\int_1^1 \mu \tilde{\chi}(\xi, \mu) \psi(\alpha_1, \mu) d\mu = A(\xi) N(\xi) \exp(-\alpha_1/\xi), \quad 4.9$$

$$\int_{-1}^1 \mu \tilde{\chi}(-\xi, \mu) \psi(\alpha_1/\mu) d\mu = A(-\xi) N(-\xi) \exp(\alpha_1/\xi), \quad 4.10$$

onde os símbolos $\tilde{\chi}(\xi, \mu)$, $A(\xi)$ e $N(\xi)$ representam generalizações dos autovetores, coeficientes de expansão e fatores de normalização, respectivamente, daqueles representados para $\xi = v_k$, $\xi = v \in (0, 1/\sigma)$ e $\xi = v \in (1/\sigma, 1)$.

Como $A(\xi) = A(-\xi)$, conforme (4.7), e $N(-\xi) = -N(\xi)$, conforme (2.4.54), das equações (4.9) e (4.10) obtém-se:

$$\int_{-1}^1 \mu \tilde{X}(\xi, \mu) \underline{\psi}(\alpha_1, \mu) d\mu + E_1(\xi) \int_{-1}^1 \mu \tilde{X}(-\xi, \mu) \underline{\psi}(\alpha_1, \mu) d\mu = 0, \quad 4.11$$

onde novamente , $E_1(\xi) = \exp(-2\alpha_1/\xi)$.

Desdobrando-se cada integral em duas com intervalo de integração para μ igual a $(0,1)$, e incorporando-se a condição física (4.2) chega-se às seguintes equações para $\xi = v_k$, $\xi = v \in (0, 1/\sigma)$ e $\xi = v \in (1/\sigma, 1)$.

$$\int_0^1 \mu \tilde{X}(v_k, \mu) \underline{\psi}(\alpha_1, \mu) d\mu + E_1(v_k) \int_0^1 \mu \tilde{X}(-v_k, \mu) \underline{\psi}(\alpha_1, \mu) d\mu = 0 \quad 4.12$$

$$\int_0^1 \mu \tilde{X}_{\alpha}^{(1)}(v, \mu) \underline{\psi}(\alpha_1, \mu) d\mu + E_1(v) \int_0^1 \mu \tilde{X}_{\alpha}^{(1)}(-v, \mu) \underline{\psi}(\alpha_1, \mu) d\mu = 0, \alpha = 1, 2 \quad 4.13$$

$$\int_0^1 \mu \tilde{X}^{(2)}(v, \mu) \underline{\psi}(\alpha_1, \mu) d\mu + E_1(v) \int_0^1 \mu \tilde{X}^{(2)}(-v, \mu) \underline{\psi}(\alpha_1, \mu) d\mu = 0 \quad 4.14$$

É conveniente exprimir-se as equações (4.12) a (4.14) em termos dos autovetores $\underline{\phi}(\xi, \mu)$ em todo o desenvolvimento que segue. Para isto , substitui-se nessas equações as expressões dos autovetores ortogonais (2.4.43) a (2.4.46), que são escritas a seguir:

$$\tilde{X}(\pm v_k, \mu) = \underline{\phi}(\pm v_k, \mu) \quad 4.15$$

$$\tilde{X}_1^{(1)}(v, \mu) = N_{22}(v) \underline{\phi}_1^{(1)}(v, \mu) - N_{12}(v) \underline{\phi}_2^{(1)}(v, \mu) \quad 4.16$$

$$\tilde{X}_2^{(1)}(v, \mu) = N_{11}(v) \underline{\phi}_2^{(1)}(v, \mu) - N_{21}(v) \underline{\phi}_1^{(1)}(v, \mu) \quad 4.17$$

$$\underline{x}^{(2)}(v, \mu) = \underline{\phi}^{(2)}(v, \mu) \quad 4.18$$

Dessa maneira, substituindo-se (4.16) e (4.17) nas equações dadas por (4.13) para $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$ respectivamente, obtêm-se:

$$\begin{aligned} N_{22}(v) \left[\int_0^1 \mu \tilde{\phi}_1^{(1)}(\mu, \mu) \psi(\alpha_1, \mu) d\mu + E_1(v) \int_0^1 \mu \tilde{\phi}_1^{(1)}(-v, \mu) \psi(\alpha_1, \mu) d\mu \right] - \\ - N_{12}(v) \left[\int_0^1 \mu \tilde{\phi}_2^{(1)}(v, \mu) \psi(\alpha_1, \mu) d\mu + E_1(v) \int_0^1 \mu \tilde{\phi}_2^{(1)}(-v, \mu) \psi(\alpha_1, \mu) d\mu \right] = 0, \\ v \in (0, 1/\sigma) \quad 4.19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -N_{21}(v) \left[\int_0^1 \mu \tilde{\phi}_1^{(1)}(v, \mu) \psi(\alpha_1, \mu) d\mu + E_1(v) \int_0^1 \mu \tilde{\phi}_1^{(1)}(-v, \mu) \psi(\alpha_1, \mu) d\mu \right] + \\ + N_{11}(v) \left[\int_0^1 \mu \tilde{\phi}_2^{(1)}(v, \mu) \psi(\alpha_1, \mu) d\mu + E_1(v) \int_0^1 \mu \tilde{\phi}_2^{(1)}(-v, \mu) \psi(\alpha_1, \mu) d\mu \right] = 0, \\ v \in (0, 1/\sigma) \quad 4.20 \end{aligned}$$

Nota-se que estas duas expressões podem ser representadas na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} N_{22}(v) & -N_{12}(v) \\ -N_{21}(v) & N_{11}(v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_0^1 \mu \tilde{\phi}_1^{(1)}(v, \mu) \psi(\alpha_1, \mu) d\mu + E_1(v) \int_0^1 \mu \tilde{\phi}_1^{(1)}(-v, \mu) \psi(\alpha_1, \mu) d\mu \\ \int_0^1 \mu \tilde{\phi}_2^{(1)}(v, \mu) \psi(\alpha_1, \mu) d\mu + E_1(v) \int_0^1 \mu \tilde{\phi}_2^{(1)}(-v, \mu) \psi(\alpha_1, \mu) d\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.21

O determinante da matriz que contém os elementos $N_{ij}(v)$, $i=1,2, j=1,2$, de modo geral, não é nulo. Logo - segue que:

$$\int_0^1 \mu \tilde{\phi}_\alpha^{(1)}(v, \mu) \psi(\alpha_1, \mu) d\mu + E_1(v) \int_0^1 \mu \tilde{\phi}_\alpha^{(1)}(-v, \mu) \psi(\alpha_1, \mu) d\mu = 0, \alpha=1,2$$

4.22

Esta expressão representa as duas equações válidas para $\xi = v\epsilon(0, 1/\sigma)$.

De forma análoga, substituindo-se (4.15) e (4.18) nas equações (4.12) e (4.14), respectivamente, obtêm-se:

$$\int_0^1 \mu \tilde{\phi}(v_k, \mu) \psi(\alpha_1, \mu) d\mu + E_1(v_k) \int_0^1 \mu \tilde{\phi}(-v_k, \mu) \psi(\alpha_1, \mu) d\mu = 0 \quad 4.23$$

$$\int_0^1 \mu \tilde{\phi}^{(2)}(v, \mu) \psi(\alpha_1, \mu) d\mu + E_1(v) \int_0^1 \mu \tilde{\phi}^{(2)}(-v, \mu) \psi(\alpha_1, \mu) d\mu = 0 \quad 4.24$$

Estas equações são válidas para $\xi = v_k$ e $\xi = v\epsilon(1/\sigma, 1)$ respectivamente.

As equações (4.22) a (4.24) constituem as equações básicas do método F_N , desenvolvido para o modelo de dois grupos.

A seguir, é proposto neste modelo, representar-se aproximadamente, o fluxo angular na interface α_1 , como sendo:

$$\underline{I}(\alpha_1, \mu) = \sum_{i=0}^N \underline{D}_i \mu^i, \quad 4.25$$

onde,

$$\underline{D}_i = \begin{bmatrix} d_i^1 \\ d_i^2 \end{bmatrix}, \quad 4.26$$

sendo d_1^1 e d_1^2 os coeficientes da expansão nos grupos 1 e 2, respectivamente,

Tem-se de (2.4.10) que $\underline{\psi}(\alpha_1, \mu) = \underline{P} \underline{I}(\alpha_1, \mu)$, ou seja:

$$\underline{\psi}(\alpha_1, \mu) = \underline{P} \sum_{i=0}^N \underline{D}_i \mu^i \quad 4.27$$

A expressão (4.27) é substituída nas equações (4.22) a (4.24), das quais, após algumas manipulações algébricas, resultam as seguintes equações:

$$\left[\sum_{i=0}^N \underline{B}_i(\nu_k) \underline{P} + E_1(\nu_k) \sum_{i=0}^N \underline{\tilde{A}}_i(\nu_k) \underline{P} \right] \underline{D}_i = 0, \quad 4.28$$

$$\left[\sum_{i=0}^N \underline{B}_{i,\alpha}^{(1)}(\nu) \underline{P} + E_1(\nu) \sum_{i=0}^N \underline{\tilde{A}}_{i,\alpha}^{(1)}(\nu) \underline{P} \right] \underline{D}_i = 0, \quad 4.29$$

$$\left[\sum_{i=0}^N \underline{B}_i^{(2)}(\nu) \underline{P} + E_1(\nu) \sum_{i=0}^N \underline{\tilde{A}}_i^{(2)}(\nu) \underline{P} \right] \underline{D}_i = 0, \quad 4.30$$

onde foram introduzidas as seguintes definições:

$$\underline{A}_i(\xi) = \begin{bmatrix} A_i^1(\xi) \\ A_i^2(\xi) \end{bmatrix} = \frac{1}{\xi} \int_0^1 \mu^{i+1} \underline{\phi}(-\xi, \mu) d\mu, \quad 4.31$$

$$\underline{B}_i(\xi) = \begin{bmatrix} B_i^1(\xi) \\ B_i^2(\xi) \end{bmatrix} = \frac{1}{\xi} \int_0^1 \mu^{i+1} \underline{\phi}(\xi, \mu) d\mu, \quad 4.32$$

Para $i = 0$, $\underline{A}_0(\xi)$ e $\underline{B}_0(\xi)$ são calculadas diretamente

efetuando-se as integrais nas definições (4.31) e (4.32) respectivamente. Para $i \geq 1$, $A_i(\xi)$ e $B_i(\xi)$ são obtidas através de $A_{i-1}(\xi)$ e $B_{i-1}(\xi)$.

Esses cálculos são efetuados, considerando-se os dois grupos de energia e as três regiões possíveis para a seleção dos autovalores, $\xi = v_k$, $\xi = v\epsilon(0, 1/\sigma)$ e $\xi = v\epsilon(1/\sigma, 1)$. As expressões resultantes possuem estruturas analíticas diferentes, de modo geral. Um formulário completo das expressões finais é fornecido no Apêndice A.

As equações (4.28) a (4.30) podem ser representadas na forma genérica através da seguinte equação:

$$\left[\sum_{i=0}^N \tilde{B}_i(\xi) \underline{P} + E_1(\xi) \sum_{i=0}^N \tilde{A}_i(\xi) \underline{P} \right] \underline{D}_1 = 0 \quad 4.33$$

Efetuando-se o produto matricial de cada termo $\tilde{A}_i(\xi) \underline{P} \underline{D}_1$ e $\tilde{B}_i(\xi) \underline{P} \underline{D}_1$, obtém-se o seguinte tipo de equação linear algébrica:

$$P \sum_{i=0}^N \left[B_i^1(\xi) + E_1(\xi) A_i^1(\xi) \right] d_i^1 + \sum_{i=0}^N \left[B_i^2(\xi) + E_1(\xi) A_i^2(\xi) \right] d_i^2 = 0 \quad 4.34$$

onde,

$$P = \sqrt{q_{21}/q_{12}}, \quad 4.35$$

conforme definição de \underline{P} em (2.4.9).

Nota-se na equação (4.34) que existem $2(N+1)$ coeficientes d_i a serem determinados (o dobro do número de coeficientes considerados no modelo de um grupo para o mesmo reator), que juntamente com α_1 (implícita na exponencial) formam $2(N+1)+1$ incógnitas.

O processo numérico de solução é totalmente análogo - ao considerado para o modelo de um grupo, no Capítulo 3, ou seja, consideram-se $2(N+1)$ equações selecionando-se $2(N+1)$ autovalores ξ_j , desmembra-se a primeira equação, da qual explicita-se α_1 e em seguida efetua-se uma iteração entre α_1 e o sistema de equações remanescente, determinando-se, assim α_1 .

O número e os valores dos autovalores selecionados nos intervalos $(0, 1/\sigma)$ e $(1/\sigma, 1)$ são arbitrários. Entretanto, analogamente ao modelo de um grupo, o critério de escolha - exerce influência sobre os resultados numéricos obtidos. Algumas opções de escolha são discutidas na secção de resultados numéricos do modelo de dois grupos, no Capítulo 7.

Em princípio, os números de autovalores escolhidos nos intervalos $(0, 1/\sigma)$ e $(1/\sigma, 1)$ satisfazem a seguinte relação de igualdade:

$$\text{Número de equações} = 2(N+1) = K + 2m_1 + m_2 \quad 4.36$$

onde,

K = número de autovalores discretos (1 ou 2) (que devem ser considerados com primazia sobre os autovalores contínuos);

m_1 = número arbitrário de autovalores selecionados no intervalo $(0, 1/\sigma)$;

m_2 = número arbitrário de autovalores selecionados no intervalo $(1/\sigma, 1)$.

O número m_1 aparece duplicado em (4.36) devido a existência de duas equações distintas para um mesmo autovalor selecionado no intervalo $(0, 1/\sigma)$.

5. O PROBLEMA DE CRITICALIDADE PARA SISTEMAS COM TRÊS REGIÕES NO MODELO DE UM GRUPO

O objetivo deste Capítulo é aplicar o método aproximado F_N , no modelo de um grupo, para a solução do problema de criticalidade do sistema tipo placa plana, composto por três regiões distintas: um cerne multiplicador, um "blanket" e um refletor.

Dois casos distintos foram considerados para este problema no que concerne às dimensões da região refletora. Os casos considerados são:

- 1) A espessura do refletor é finita.
- 2) A espessura do refletor é infinita.

A formulação matemática do problema é elaborada inicialmente para o primeiro caso, uma vez que a segunda configuração é um caso particular, podendo ser derivado do primeiro fazendo-se, no limite, a espessura do refletor tender ao infinito.

5.1 - Sistema Crítico com Refletor Finito

Considera-se aqui o sistema constituído de uma placa de material multiplicador (meio 1, $c_1 > 1$) ocupando a região $-a_1 \leq x \leq a_1$, um "blanket" de espessura a_2 (meio 2, $c_2 \leq 1$) ocupando a região $a_1 \leq |x| \leq \beta$ e um material refletor de espessura a_3 (meio 3, $c_3 < 1$) ocupando a região

$B \leq |x| \leq \gamma$, conforme mostra a Figura 5.1.1, sendo os três materiais homogêneos.

O problema em questão consiste em se determinar o valor da meia espessura da placa multiplicadora para que exista uma solução estacionária não trivial, ou seja, deseje-se, determinar o valor de α_1 , para o qual o sistema seja crítico.

A equação de transporte (2.3.5) é reescrita para os três meios como sendo:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi_\ell(x, \mu) + \psi_\ell(x, \mu) = \frac{c_\ell}{2} \int_{-1}^1 \psi_\ell(x, \mu') d\mu', \quad 5.1.1$$

onde:

$$\ell = 1, \quad -\alpha_1 \leq x \leq \alpha_1$$

$$\ell = 2, \quad \alpha_1 \leq x \leq \beta$$

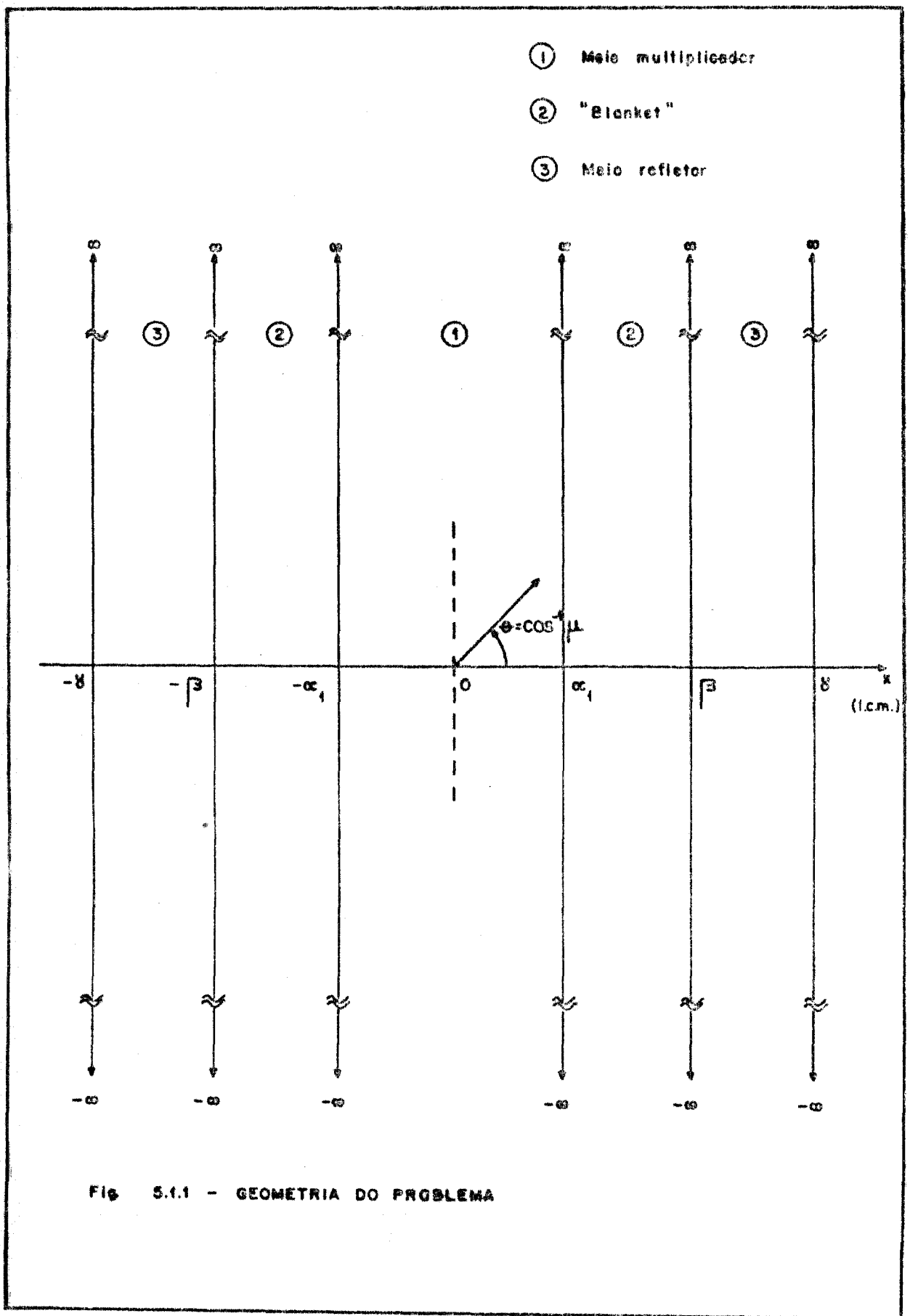
$$\ell = 3, \quad \beta \leq x \leq \gamma$$

As condições físicas que a solução $\psi_\ell(x, \mu)$ deve obedecer são:

- Condição de simetria em relação ao plano $x = 0$

$$\psi_\ell(x, \mu) = \psi_\ell(-x, -\mu) \quad , \quad \mu \in (-1, 1) \quad 5.1.2$$

Portanto, pode-se considerar apenas o semi-espço $x \geq 0$ para se encontrar a solução do problema. Em $x = 0$, de (5.1.2), tem-se que:



$$\psi_1(0, \mu) = \psi_1(0, -\mu) \quad , \quad \mu \in (-1, 1) \quad 5.1.3$$

- Condição de continuidade dos fluxos nas interfaces entre dois meios materiais.

$$\psi_1(\alpha_1, \mu) = \psi_2(\alpha_1, \mu) \quad , \quad \mu \in (-1, 1) \quad 5.1.4$$

$$\psi_2(\beta, \mu) = \psi_3(\beta, \mu) \quad , \quad \mu \in (-1, 1) \quad 5.1.5$$

- Inexistência de fluxo incidente na interface γ .

$$\psi_3(\gamma, -\mu) = 0, \quad \mu \in (0, 1) \quad 5.1.6$$

A solução geral para a equação de transporte (5.1.1) pode ser reescrita da equação (2.3.22), para cada região l , como sendo:

$$\begin{aligned} \psi_l(x, \mu) = & A_l(v_l) \phi_l(v_l, \mu) \exp(-x/v_l) + A_l(-v_l) \phi_l(-v_l, \mu) \exp(x/v_l) + \\ & + \int_{-1}^1 A_l(v) \phi_l(v, \mu) \exp(-x/v) dv, \quad l = 1, 2, 3, \quad 5.1.7 \end{aligned}$$

onde, $v_1 = i |v_1|$ e v_2 e v_3 são reais.

A solução para o meio 1 deve satisfazer a condição de simetria (5.1.3). Logo substituindo-se a solução (5.1.7) em (5.1.3) e aplicando-se, em seguida as relações de ortogonalidade de intervalo completo (2.3.25) a (2.3.27), resulta:

$$A_1(v_1) = A_1(-v_1) \quad 5.1.8$$

e,

$$A_1(v) = A_1(-v), \quad v \in (0,1) \quad 5.1.9$$

Assim a solução, para a região do meio 1, é dada por :

$$\begin{aligned} \psi_1(x, \mu) = & A_1(v_1) [\phi_1(v_1, \mu) \exp(-x/v_1) + \phi_1(-v_1, \mu) \exp(x/v_1)] + \\ & + \int_0^1 A_1(v) [\phi_1(v, \mu) \exp(-x/v) + \phi_1(-v, \mu) \exp(x/v)] dv \end{aligned} \quad 5.1.10$$

As soluções para as regiões dos meios 2 e 3 são dadas pela equação (5.1.7) com $\ell = 2$ e 3, respectivamente.

A meia espessura crítica do cerne é agora procurada - através do método F_N .

Aplicando-se as relações de ortogonalidade de intervalo completo (2.3.25) a (2.3.27) na equação (5.1.10), para $x = \alpha_1$, obtém-se:

$$\int_{-1}^1 \mu \phi_1(\xi, \mu) \psi_1(\alpha_1, \mu) d\mu = A_1(\xi) N_1(\xi) \exp(-\alpha_1/\xi), \quad \xi \in P_1, \quad 5.1.11$$

$$\int_{-1}^1 \mu \phi_1(-\xi, \mu) \psi_1(\alpha_1, \mu) d\mu = A_1(\xi) N_1(-\xi) \exp(\alpha_1/\xi), \quad \xi \in P_1, \quad 5.1.12$$

onde P_ℓ representa o conjunto de autovalores positivos ξ , tal que, $\xi = v_\ell$ ou $v \in (0,1)$.

Como pode ser observado de (2.3.28) e (2.3.29),
 $N_1(-\xi) = -N(\xi)$, logo obtêm-se de (5.1.11) e (5.1.12) a
 seguinte equação.

$$\int_{-1}^1 \mu \phi_1(\xi, \mu) \psi_1(\alpha_1, \mu) d\mu + E_1(\xi) \int_{-1}^1 \mu \phi_1(-\xi, \mu) \psi_1(\alpha_1, \mu) d\mu = 0$$

5.1.13

onde, $E_1(\xi) = \exp(-2\alpha_1/\xi)$, conforme considerado no Capítu-
 lo 3.

De forma análoga ao que foi efetuado nas equações -
 (3.8) e (3.9) do Capítulo 3, desdobra-se cada integral em
 outras duas com intervalos de integração definidos pelos li-
 mites (0,1), obtendo-se:

$$\int_0^1 \mu \phi_1(\xi, \mu) \psi_1(\alpha_1, \mu) d\mu - \int_0^1 \mu \phi_1(-\xi, \mu) \psi_1(\alpha_1, -\mu) d\mu +$$

$$+ E_1(\xi) \int_0^1 \mu \phi_1(-\xi, \mu) \psi_1(\alpha_1, \mu) d\mu - E_1(\xi) \int_0^1 \mu \phi_1(\xi, \mu) \psi_1(\alpha_1, -\mu) d\mu = 0$$

5.1.14

que é a equação para o cerne do sistema.

Pelo fato dos fluxos angulares serem contínuos nas in-
 terfaces, omite-se de ora em diante, o índice representa-
 tivo dos mesmos, assim:

$$\psi(\alpha_1, \mu) = \psi_1(\alpha_1, \mu) = \psi_2(\alpha_1, \mu) \quad 5.1.15$$

$$\psi(\beta, \mu) = \psi_2(\beta, \mu) = \psi_3(\beta, \mu) \quad 5.1.16$$

Aplicando-se agora as relações de ortogonalidade na

equação (5.1.7) com $l = 2$, para cada interface $x = \alpha_1$ e $x = \beta$, obtêm-se:

$$\int_{-1}^1 \mu \phi_2(\xi, \mu) \psi(\alpha_1, \mu) d\mu = A_2(\xi) N_2(\xi) \exp(-\alpha_1/\xi), \quad \xi \in P_2, \quad 5.1.17$$

$$\int_{-1}^1 \mu \phi_2(\xi, \mu) \psi(\beta, \mu) d\mu = A_2(\xi) N_2(\xi) \exp(-\beta/\xi), \quad \xi \in P_2, \quad 5.1.18$$

$$\int_{-1}^1 \mu \phi_2(-\xi, \mu) \psi(\alpha_1, \mu) d\mu = A_2(-\xi) N_2(-\xi) \exp(\alpha_1/\xi), \quad \xi \in P_2, \quad 5.1.19$$

$$\int_{-1}^1 \mu \phi_2(-\xi, \mu) \psi(\beta, \mu) d\mu = A_2(-\xi) N_2(-\xi) \exp(\beta/\xi), \quad \xi \in P_2, \quad 5.1.20$$

Das equações (5.1.17) e (5.1.18) e das equações (5.1.19) e (5.1.20) resultam, respectivamente, as duas seguintes equações:

$$E_2(\xi) \int_{-1}^1 \mu \phi_2(\xi, \mu) \psi(\alpha_1, \mu) d\mu - \int_{-1}^1 \mu \phi_2(\xi, \mu) \psi(\beta, \mu) d\mu = 0, \quad 5.1.21$$

$$\int_{-1}^1 \mu \phi_2(-\xi, \mu) \psi(\alpha_1, \mu) d\mu - E_2(\xi) \int_{-1}^1 \mu \phi_2(-\xi, \mu) \psi(\beta, \mu) d\mu = 0 \quad 5.1.22$$

onde, $E_2(\xi) = \exp[-(\beta - \alpha_1)/\xi]$.

De maneira análoga aos procedimentos analíticos anteriores, das equações (5.1.21) e (5.1.22), obtêm-se respectivamente:

$$E_2(\xi) \int_0^1 \mu \phi_2(\xi, \mu) \psi(\alpha_1, \mu) d\mu - E_2(\xi) \int_0^1 \mu \phi_2(-\xi, \mu) \psi(\alpha_1, -\mu) d\mu - \\ - \int_0^1 \mu \phi_2(\xi, \mu) \psi(\beta, \mu) d\mu + \int_0^1 \mu \phi_2(-\xi, \mu) \psi(\beta, -\mu) d\mu = 0. \quad 5.1.23$$

$$\int_0^1 \mu \phi_2(-\xi, \mu) \psi(\alpha_1, \mu) d\mu - \int_0^1 \mu \phi_2(\xi, \mu) \psi(\alpha_1, -\mu) d\mu -$$

$$- E_2(\xi) \int_0^1 \mu \phi_2(-\xi, \mu) \psi(\beta, \mu) d\mu + E_2(\xi) \int_0^1 \mu \phi_2(\xi, \mu) \psi(\beta, -\mu) d\mu = 0$$
5.1.24

que são as duas equações para a região do "blanket".

Através de tratamento matemático análogo ao efetuado para as regiões do cerne e do "blanket", obtêm-se as seguintes equações para a região do material refletor:

$$E_3(\xi) \int_0^1 \mu \phi_3(\xi, \mu) \psi(\beta, \mu) d\mu - E_3(\xi) \int_0^1 \mu \phi_3(-\xi, \mu) \psi(\beta, -\mu) d\mu -$$

$$- \int_0^1 \mu \phi_3(\xi, \mu) \psi(\gamma, \mu) d\mu = 0,$$
5.1.25

$$\int_0^1 \mu \phi_3(-\xi, \mu) \psi(\beta, \mu) d\mu - \int_0^1 \mu \phi_3(\xi, \mu) \psi(\beta, -\mu) d\mu -$$

$$- E_3(\xi) \int_0^1 \mu \phi_3(-\xi, \mu) \psi(\gamma, \mu) d\mu,$$
5.1.26

onde a condição (5.1.6) já foi incorporada, e $E_3(\xi) = \exp[-(\gamma - \beta) / \xi]$.

Os fluxos angulares nas interfaces α_1 , β e γ são representados pelas seguintes expansões em série:

$$\psi(\alpha_1, \mu) = \sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha}^1 \mu^{\alpha}, \quad \mu \in (0, 1)$$
5.1.27

$$\psi(\alpha_1, -\mu) = \sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha}^2 \mu^{\alpha}, \quad \mu \in (0, 1)$$
5.1.28

$$\psi(\beta, \mu) = \sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha}^3 \mu^{\alpha}, \quad \mu \in (0, 1)$$
5.1.29

$$\psi(\beta, -\mu) = \sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha}^4 \mu^{\alpha}, \quad \mu \in (0, 1)$$
5.1.30

$$\psi(\gamma, \mu) = \sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha}^5 \mu^{\alpha}, \quad \mu \in (0, 1) \quad 5.1.31$$

Estas expansões substituídas nas equações (5.1.14) e (5.1.23) a (5.1.26), e através de desenvolvimento analítico análogo ao efetuado no Capítulo 3, fornecem o seguinte sistema de $5(N+1)$ equações lineares algébricas:

$$\sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha}^1 [B_{\alpha}^1(\xi_j) + E_1(\xi_j) A_{\alpha}^1(\xi_j)] - \sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha}^2 [A_{\alpha}^1(\xi_j) + E_1(\xi_j) B_{\alpha}^1(\xi_j)] = 0 \quad 5.1.32$$

$$\xi_j \in P_1, \quad j = 0, 1, \dots, N,$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha}^1 E_2(\xi_j) B_{\alpha}^2(\xi_j) - \sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha}^2 E_2(\xi_j) A_{\alpha}^2(\xi_j) - \sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha}^3 B_{\alpha}^2(\xi_j) + \\ & + \sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha}^4 A_{\alpha}^2(\xi_j) = 0, \quad \xi_j \in P_2, \quad j = 0, 1, \dots, N, \end{aligned} \quad 5.1.33$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha}^1 A_{\alpha}^2(\xi_j) - \sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha}^2 B_{\alpha}^2(\xi_j) - \sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha}^3 E_2(\xi_j) A_{\alpha}^2(\xi_j) + \\ & + \sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha}^4 E_2(\xi_j) B_{\alpha}^2(\xi_j) = 0, \quad \xi_j \in P_2, \quad j = 0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad 5.1.34$$

$$\sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha}^3 E_3(\xi_j) B_{\alpha}^2(\xi_j) - \sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha}^4 E_3(\xi_j) A_{\alpha}^3(\xi_j) - \sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha}^5 E_3(\xi_j) B_{\alpha}^3(\xi_j) = 0,$$

$$\xi_j \in P_3, \quad j = 0, 1, \dots, N \quad 5.1.35$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha}^3 A_{\alpha}^3(\xi_j) - \sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha}^4 E_3(\xi_j) B_{\alpha}^3(\xi_j) - \sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha}^5 E_3(\xi_j) A_{\alpha}^3(\xi_j) = 0, \quad \xi_j \in P_3, \\ & j = 0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad 5.1.36$$

Nestas equações, $A_{\alpha}^{\ell}(\xi_j)$ e $B_{\alpha}^{\ell}(\xi_j)$ foram obtidas pelas expressões (3.18) a (3.21) para as regiões $\ell = 1, 2$ e 3 .

Tal como no segundo problema do Capítulo 3, este sistema possui uma incógnita a mais que o número de equações, ou seja, $5(N+1)$ coeficientes e a meia espessura α_1 que torna o sistema crítico. De forma análoga ao considerado naquele Capítulo, um coeficiente é normalizado. Escolhendo-se o coeficiente d_0^1 , ao qual é atribuído valor unitário; o primeiro termo de cada equação torna-se conhecido, o qual é levado ao segundo membro da equação como termo não homogêneo. A primeira equação do sistema é destacada do mesmo. A ordem da matriz principal do sistema fica, assim, reduzida, à ordem imediatamente inferior.

A meia espessura α_1 é explicitada da equação desmembrada do sistema original. Esta equação é expressa por:

$$\sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha}^1 [B_{\alpha}^1(v_1) + E_1(v_1)A_{\alpha}^1(v_1)] - \sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha}^2 [A_{\alpha}^1(v_1) + E_1(v_1)B_{\alpha}^1(v_1)] = 0 \quad 5.1.37$$

Como $v_1 = i|v_1|$ ($c_1 > 1$), e após as mesmas passagens algébricas consideradas no Capítulo 3, obtém-se:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} |v_1| - \frac{v_1}{2} \ln \left[\frac{\sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha}^2 A_{\alpha}^1(v_1) - \sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha}^1 B_{\alpha}^1(v_1)}{\sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha}^2 A_{\alpha}^1(v_1) - \sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha}^2 B_{\alpha}^1(v_1)} \right]$$

5.1.38

Assim a solução numérica do problema (meia distância crítica $\alpha_1 = \alpha_{1c}$ e os coeficientes das expansões dos fluxos angulares das interfaces) é encontrada através de um procedimento iterativo entre α_1 dado por (5.1.38) e o sistema remanescente, transcorrendo da seguinte maneira:

- Um valor inicial $\alpha_1 = \alpha_1^{(0)}$ é assumido, sendo introduzido no sistema de equações remanescente. Este sistema de equações lineares algébricas é colocado na forma matricial e resolvido numericamente, obtendo-se os coeficientes $d_\alpha^{(0)}$.

- Estes coeficientes são utilizados na equação (5.1.38), calculando-se $\alpha_1 = \alpha_1^{(1)}$.

- Este valor $\alpha_1 = \alpha_1^{(1)}$ substitui $\alpha_1 = \alpha_1^{(0)}$, sendo reintroduzido no sistema de equações, completando o primeiro ciclo.

- O processo prossegue até que a diferença entre duas iterações sucessivas, para a meia distância crítica e todos os coeficientes d_α , seja menor que a precisão preestabelecida.

Alguns detalhes do procedimento computacional utilizado neste trabalho são fornecidos no Apêndice B.

5.2 - Sistema Crítico com Refletor Infinito

Para este sistema, que é um caso particular daquele -

considerado na secção anterior, tem-se a seguinte condição de contorno adicional:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \psi_j(\gamma, \mu) = 0, \quad \mu \in (-1, 1) \quad 5.2.1$$

Incorporando-se esta condição nas equações (5.1.25) e (5.1.26) e levando-se em conta o fato da espessura do refletor $\alpha_3 \rightarrow \infty$, obtém-se a seguinte equação:

$$\sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha}^3 A_{\alpha}^3(\xi_j) - \sum_{\alpha=0}^N d_{\alpha}^4 B_{\alpha}^3(\xi_j) = 0, \quad \xi_j \in P_3, \quad j=0, 1, \dots, N \quad 5.2.2$$

Os conjuntos de equações expressos por (5.1.32) a (5.1.34) juntos com (5.2.2) formam o sistema de equações válido para este caso em que o refletor é infinito. A ordem da matriz principal do sistema de equações já reduzida à ordem imediatamente inferior (após desmembrar-se a primeira equação e normalizar-se d_0^1) é $4(N+1)-1$.

O procedimento iterativo é análogo ao do caso anterior.

6. PROBLEMAS CONSIDERADOS NO MODELO DE DOIS GRUPOS

O método aproximado no modelo de dois grupos de energia, cujo desenvolvimento foi feito no Capítulo 4, é aqui empregado em dois problemas simples que são:

- 1 - Problema clássico de Milne.
- 2 - Problema de Criticalidade.

Na solução do problema de criticalidade considera-se o sistema tipo placa plana composto por duas regiões preenchidas com diferentes materiais que são: um cerne multiplicador e um refletor.

Tal como no problema de criticalidade no modelo de um grupo de energia considerado no Capítulo 5, dois casos distintos são considerados, dependendo da espessura do refletor ser finita ou infinita.

O desenvolvimento analítico para cada problema é apresentado a seguir:

6.1 - O Problema de Milne

Este problema consiste na determinação da distribuição de nêutrons em um material homogêneo não multiplicador que ocupa o semi-espaco $x \geq 0$, onde existe uma fonte implícita de nêutrons localizada no infinito, responsável pelo fluxo de nêutrons.

O outro semi-espaço é vácuo e é destituído de fontes.

Para este problema procura-se uma solução divergente (para $x \rightarrow \infty$) da equação de transporte (2.4.11) reescrita - a seguir:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \underline{\psi}(x, \mu) + \Sigma \underline{\psi}(x, \mu) = C \int_{-1}^1 \underline{\psi}(x, \mu') d\mu' \quad 6.1.1$$

As condições físicas que a solução $\underline{\psi}(x, \mu)$ deve obedecer são:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \underline{\psi}(x, \mu) \exp(-x/v_1) = \text{valor finito}, \quad 6.1.2$$

onde v_1 é o autovalor dominante, isto é, $v_1 > v_2$ no caso de $k = 2$.

Condição de fluxo nulo, incidente no meio material em $x = 0$

$$\underline{\psi}(0, \mu) = 0, \quad \mu \in (0, 1) \quad 6.1.3$$

A solução do problema de Milne é escrita de (2.4.31) como sendo:

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(x, \mu) = & \underline{\phi}(-v_1, \mu) \exp(x/v_1) + \sum_{k=1}^K A(v_k) \underline{\phi}(v_k, \mu) \exp(-x/v_k) + \\ & + \int_0^{1/\sigma} \left[A_1^{(1)}(v) \underline{\phi}_1^{(1)}(v, \mu) + A_2^{(1)}(v) \underline{\phi}_2^{(1)}(v, \mu) \right] \exp(-x/v) dv + \\ & \int_{1/\sigma}^1 A^{(2)}(v) \underline{\phi}^{(2)}(v, \mu) \exp(-x/v) dv, \quad x \geq 0, \quad \mu \in (0, 1), \quad 6.1.4 \end{aligned}$$

onde o termo $A(-v_1)$ foi normalizado à unidade e

$A_2^{(1)}(-v)$, $A(-v)$, $A_1^{(1)}(-v)$, $A^{(2)}(-v)$ devem ser nulos para satisfazer a condição (6.1.2).

Aplicando-se a relação de ortogonalidade de intervalo completo (2.4.40), com $k = 1$, na expressão (6.1.4) para $x = 0$, obtêm-se:

$$\int_{-1}^1 \mu \tilde{\phi}(-v_1, \mu) \psi(0, \mu) d\mu = N(-v_1) \quad 6.1.5$$

Desdobrando-se esta integral em outras duas definidas pelos intervalos de integração $(0,1)$ e $(-1,0)$, efetuando-se inversão de sinal da variável μ na última integral para que a mesma fique definida também no intervalo $(0,1)$, obtêm-se:

$$\int_0^1 \mu \tilde{\phi}(v_1, \mu) \psi(0, -\mu) d\mu = N(v_1), \quad 6.1.6$$

onde a condição física (6.1.3) já foi incorporada, e a propriedade de autofunções (2.4.43) foi utilizada.

Analogamente, aplicando-se (2.4.40) com $k = 2$, (2.4.41) e (2.4.42) na mesma expressão (6.1.4) para $x = 0$ e incorporando-se a condição física (6.1.3), obtêm-se:

$$\int_0^1 \mu \tilde{\phi}(v_2, \mu) \psi(0, -\mu) d\mu = 0 \quad 6.1.7$$

$$\int_0^1 \mu \tilde{\phi}_\alpha^{(1)}(v, \mu) \psi(0, -\mu) d\mu = 0, \quad v \in (0, 1/\sigma), \alpha=1,2 \quad 6.1.8$$

$$\int_0^1 \mu \tilde{\phi}^{(2)}(v, \mu) \psi(0, -\mu) d\mu = 0, \quad v \in (1/\sigma, 1) \quad 6.1.9$$

O fluxo angular , para $x = 0$, pode ser representado pela expansão em série:

$$I(0, -\mu) = \sum_{i=0}^N D_i \mu_i, \quad \mu \in (0, 1) \quad 6.1.10$$

Substituindo-se a expressão (6.1.10) nas equações (6.1.6) a (6.1.9) e efetuando-se manipulações algébricas análogas às do Capítulo 4, obtém-se:

$$\sum_{i=0}^N B_i^1(v_1) p d_i^1 + \sum_{i=0}^N B_i^2(v_1) d_i^2 = N(v_1) \quad 6.1.11$$

$$\sum_{i=0}^N B_i^1(v_2) p d_i^1 + \sum_{i=0}^N B_i^2(v_2) d_i^2 = 0, \quad (\text{quando } K=2) \quad 6.1.12$$

$$\sum_{i=0}^N B_{\alpha i}^{(1)1}(v) p d_i^1 + \sum_{i=0}^N B_{\alpha i}^{(1)2}(v) d_i^2 = 0, \quad \alpha=1, 2, \quad v \in (0, 1/\sigma) \quad 6.1.13$$

e

$$\sum_{i=0}^N B_i^{(2)1}(v) p d_i^1 + \sum_{i=0}^N B_i^{(2)2}(v) d_i^2 = 0, \quad v \in (1/\sigma, 1) \quad 6.1.14$$

Tem-se , aqui, 5 equações com $2(N+1)$ incógnitas, que são os coeficientes de expansão do fluxo angular (6.1.10), o qual se deseja determinar. Selecionando-se $2(N+1)$ autovalores (entre os quais o autovalor v_1 , e v_2 se $K=2$), obtém-se um sistema de $2(N+1)$ equações lineares algébricas a

2(N+1) incógnitas, o qual solucionado fornece os coeficientes d_i^1 e d_i^2 , $i = 0, 1, \dots, N$. O número de autovalores selecionados em cada intervalo, $(0, 1/\sigma)$ e $(1/\sigma, 1)$, segue, a princípio, a expressão de igualdade (4.36). Os autovalores podem ser escolhidos igualmente espaçados entre si, dentro de cada intervalo. Devido à dificuldade de obtenção de resultados satisfatórios, outros esquemas de seleção também foram testados, os quais são discutidos no Capítulo 7 (Secção de Resultados Numéricos do Modelo de Dois Grupos).

6.2- Problema de Criticalidade

Como citado na introdução deste Capítulo, dois casos diferentes são considerados para o problema da criticalidade, que dependem da espessura da região refletora ser finita ou infinita.

A formulação matemática é inicialmente elaborada para o primeiro caso, uma vez que a segunda configuração pode ser obtida fazendo-se, no limite, a espessura tender ao infinito.

A seguir são apresentados os desenvolvimentos analíticos para esses dois casos.

6.2.1- Sistema Crítico com Refletor Finito

Considera-se aqui o sistema composto por uma placa

de material multiplicador (meio 1) ocupando a região $(-\alpha_1 \leq x \leq \alpha_1)$ e material refletor (meio 2) ocupando a região $(\alpha_1 \leq x \leq \beta)$, conforme mostra a Figura (6.2.1.1), sendo ambos materiais homogêneos.

O problema em questão consiste em se determinar o valor da meia espessura da placa para que exista uma solução estacionária não trivial, ou seja, deseja-se determinar o valor de α_1 para o qual o sistema é crítico, sendo conhecidos os materiais que constituem os meios e a espessura do refletor α_2 .

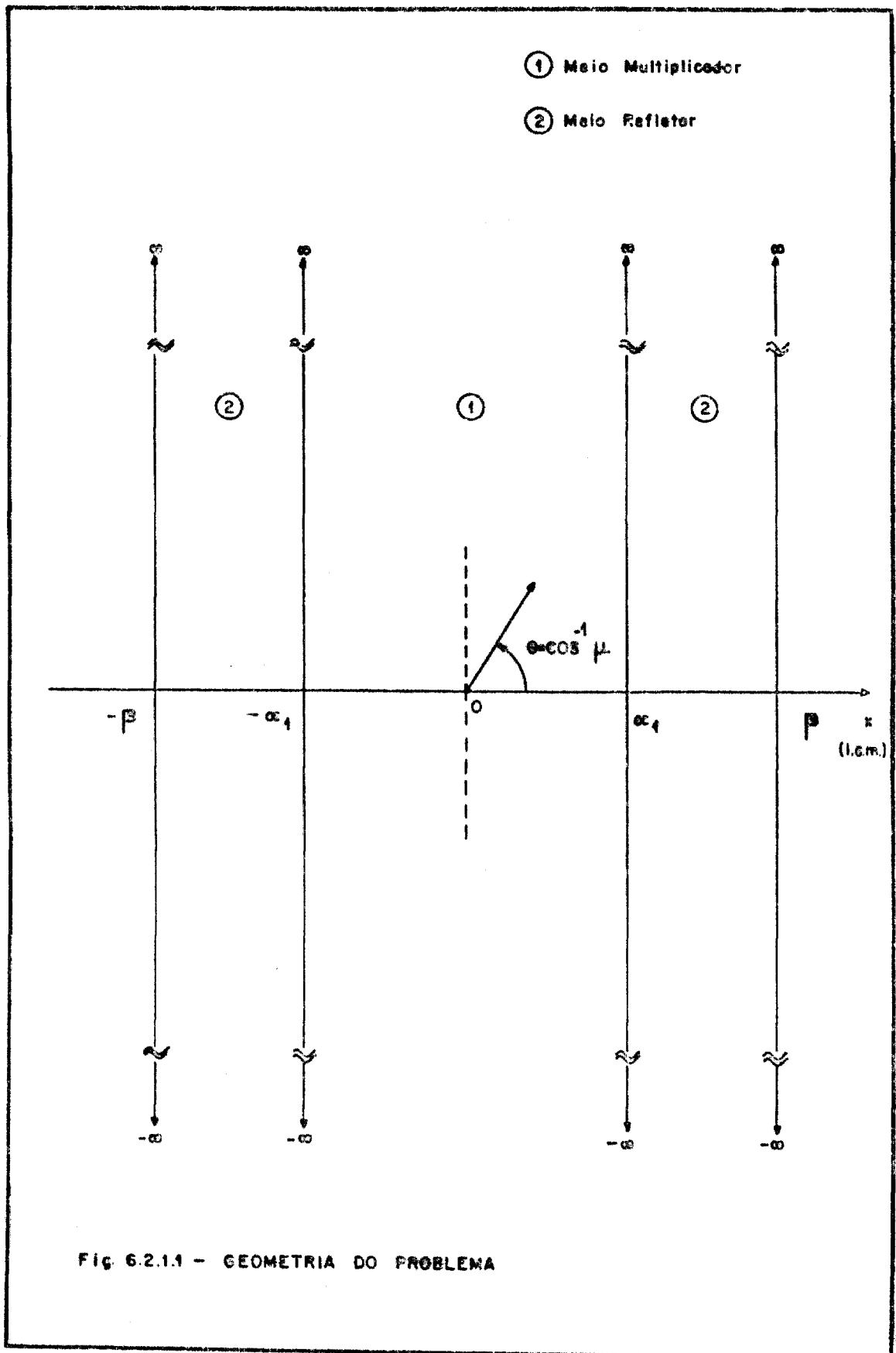
A equação de transporte (2.4.11) é reescrita para os dois meios como:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi_{\ell}(x, \mu) + \Sigma_{\ell} \psi_{\ell}(x, \mu) = C_{\ell} \int_{-1}^1 \psi_{\ell}(x, \mu') d\mu', \quad 6.2.1.1$$

onde,

$$\begin{aligned} \ell = 1, & \quad -\alpha_1 \leq x \leq \alpha_1 \\ \ell = 2, & \quad |x| \geq \alpha_1 \end{aligned}$$

As condições físicas que a solução $I_{\ell}(x, \mu) = P_{\ell}^{-1} \psi_{\ell}(x, \mu)$ deve obedecer são:



- Condição de simetria em relação ao plano $x = 0$

$$\underline{\psi}_2(x, \mu) = \underline{\psi}_2(-x, -\mu), \quad \mu \in (-1, 1) \quad 6.2.1.2$$

- Condição de continuidade(*) em $x = \alpha_1$.

$$\underline{P}_1^{-1} \underline{\psi}_1(\alpha_1, \mu) = \underline{P}_2^{-1} \underline{\psi}_2(\alpha_1, \mu), \quad \mu \in (-1, 1) \quad 6.2.1.3$$

- Inexistência de fluxo incidente na interface β .

$$\underline{\psi}_2(\beta, -\mu) = \underline{0}, \quad \mu \in (0, 1) \quad 6.2.1.4$$

A condição de simetria permite que seja considerado apenas o semi-espaço $x \geq 0$ para se encontrar a solução do problema, sendo a solução em $x \leq 0$ construída com o uso dessa condição. Para isto, a condição (6.2.1.2) pode ser considerada no plano $x = 0$.

(*) A continuidade é válida somente para $\underline{I}(x, \mu)$, que é solução da equação de transporte, pois a transformação $\underline{I}(x, \mu) = \underline{P}^{-1} \underline{\psi}(x, \mu)$ foi considerada, conforme (2.4.10) para se obter a matriz simétrica \underline{C} . Como \underline{P} é diferente para dois meios diferentes, $\underline{\psi}(x, \mu)$ é descontínua.

Portanto, mediante tratamento análogo ao considerado no Capítulo 4, a solução geral (2.4.31) é reescrita para o meio 1, na interface α_1 , como sendo:

$$\begin{aligned} \psi_1(\alpha_1, \mu) = & \sum_{k=1}^K A(v_k) \left[\phi(v_k, \mu) \exp(-\alpha_1/v_k) + \phi(-v_k, \mu) \exp(\alpha_1/v_k) \right] + \\ & + \int_{1/\sigma}^1 A^{(2)}(v) \left[\phi^{(2)}(v, \mu) \exp(-\alpha_1/v) + \phi^{(2)}(-v, \mu) \exp(\alpha_1/v) \right] dv + \\ & + \int_0^{1/\sigma} A_1^{(1)}(v) \left[\phi_1^{(1)}(v, \mu) \exp(-\alpha_1/v) + \phi_1^{(1)}(-v, \mu) \exp(\alpha_1/v) \right] dv + \\ & + \int_0^{1/\sigma} A_2^{(1)}(v) \left[\phi_2^{(1)}(v, \mu) \exp(-\alpha_1/v) + \phi_2^{(1)}(-v, \mu) \exp(\alpha_1/v) \right] dv, \end{aligned}$$

6.2.1.5

onde foi incorporado a condição (6.2.1.2).

Analogamente aplicando-se as relações de ortogonalidade de intervalo completo (2.4.40) a (2.4.42) e efetuando-se o mesmo tratamento analítico considerado no Capítulo 4, obtém-se a seguinte equação válida para a região $-\alpha_1 < x < \alpha_1$ (*):

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mu \bar{\phi}_1(\xi, \mu) \psi_1(\alpha_1, \mu) d\mu - \int_0^1 \mu \bar{\phi}_1(-\xi, \mu) \psi_1(\alpha_1, -\mu) d\mu + \\ + E_1(\xi) \int_0^1 \mu \bar{\phi}_1(-\xi, \mu) \psi_1(\alpha_1, \mu) d\mu - E_1(\xi) \int_0^1 \mu \bar{\phi}_1(\xi, \mu) \psi_1(\alpha_1, -\mu) d\mu = 0, \end{aligned}$$

$\xi \in P_1$, 6.2.1.6

(*) - Neste Capítulo, as autofunções e coeficientes de expansão, quando forem expressos em sua forma genérica (em termos da variável ξ), ficam representados como sendo $\phi_l(\pm\xi, \mu)$ e $A_l(\pm\xi)$, $l=1,2$, onde l denota o meio material, sendo $\xi = v_k$ ou $v \in (0, 1/\sigma) \cup (1/\sigma, 1)$ se $l=1$ (cerne) e $\xi = \eta_k$ ou $\eta \in (0, 1/\sigma) \cup (1/\sigma, 1)$ se $l=2$ (refletor). Quando as autofunções e coeficientes de expansão vierem descritos especificamente em termos de v_k, η_k, v ou η , o índice l será omitido dos mesmos a fim de se evitar uso excessivo de índices nas suas representações.

onde, $E_1(\xi) = \exp(-2\alpha_1/\xi)$ e P_1 é o conjunto de todos os autovalores ξ , tal que, $\xi = \eta_k$ ou $\eta \in (0, 1/\sigma) \cup (1/\sigma, 1)$.

Esta é a equação válida para o meio multiplicador.

A solução geral (2.4.31) é novamente escrita para o meio 2 como sendo:

$$\begin{aligned} \psi_2(x, \mu) = & \sum_{k=1}^K \left[A(\eta_k) \phi(\eta_k, \mu) \exp(-x/\eta_k) + A(-\eta_k) \phi(-\eta_k, \mu) \exp(x/\eta_k) \right] + \\ & + \int \textcircled{1} \left[A_1^{(1)}(\eta) \phi_1^{(1)}(\eta, \mu) + A_2^{(1)}(\eta) \phi_2^{(1)}(\eta, \mu) \right] \exp(-x/\eta) d\eta + \\ & + \int \textcircled{2} A^{(2)}(\eta) \phi^{(2)}(\eta, \mu) \exp(-x/\eta) d\eta \end{aligned} \quad 6.2.1.7$$

Aplicando-se as relações de ortogonalidade de intervalo completo na equação (6.2.1.7), obtém-se para $x = \alpha_1$ e $x = \beta$, respectivamente as seguintes expressões:

$$\int_{-1}^1 \mu \bar{X}_2(\pm\xi, \mu) \psi_z(\alpha_1, \mu) d\mu = A_2(\pm\xi) N_2(\pm\xi) \exp(\mp\alpha_1/\xi), \quad \xi \in P_2 \quad 6.2.1.8$$

$$\int_{-1}^1 \mu \bar{X}_2(\pm\xi, \mu) \psi_z(\beta, \mu) d\mu = A_2(\pm\xi) N_2(\pm\xi) \exp(\mp\beta/\xi), \quad \xi \in P_2, \quad 6.2.1.9$$

onde P_2 é o conjunto de todos autovalores ξ , tal que $\xi = \eta_k$ ou $\eta \in (0, 1/\sigma) \cup (1/\sigma, 1)$.

Das equações dadas por (6.2.1.8) e (6.2.1.9), e incorporando-se a condição física (6.2.1.4), obtém-se as seguintes equações (após substituição dos autovetores ortogonais $X_2(\xi, \mu)$ pelas combinações lineares em termos de $\psi_2(\xi, \mu)$):

$$E_2(\xi) \int_0^1 \mu \tilde{\phi}_2(\xi, \mu) \psi_2(\alpha_1, \mu) d\mu - E_2(\xi) \int_0^1 \mu \tilde{\phi}_2(-\xi, \mu) \psi_2(\alpha_1, -\mu) d\mu - \\ - \int_0^1 \mu \tilde{\phi}_2(\xi, \mu) \psi_2(\beta, \mu) d\mu = 0, \quad \xi \in P_2, \quad 6.2.1.10$$

onde , $E_2(\xi) = \exp [-(\beta - \alpha_1) / \xi]$.

$$\int_0^1 \mu \tilde{\phi}_2(-\xi, \mu) \psi_2(\alpha_1, \mu) d\mu - \int_0^1 \mu \tilde{\phi}_2(\xi, \mu) \psi_2(\alpha_1, -\mu) d\mu - \\ - E_2(\xi) \int_0^1 \mu \tilde{\phi}_2(-\xi, \mu) \psi_2(\beta, \mu) d\mu = 0, \quad \xi \in P_2 \quad 6.2.1.11$$

As equações (6.2.1.10) e (6.2.1.11) são as duas equações válidas para a região refletora.

Em seguida procede-se à substituição dos fluxos nas interfaces pelas respectivas expansões em série dos seguintes tipos:

$$\underline{I}(\alpha_1, \mu) = \sum_{i=0}^N D_i^1 \mu^i, \quad \mu \in (0, 1) \quad 6.2.1.12$$

$$\underline{I}(\alpha_1, -\mu) = \sum_{i=0}^N D_i^2 \mu^i, \quad \mu \in (0, 1) \quad 6.2.1.13$$

$$\underline{I}(\beta, \mu) = \sum_{i=0}^N D_i^3 \mu^i, \quad \mu \in (0, 1) \quad 6.2.1.14$$

Substituindo-se estas expansões nas equações (6.2.1.6), (6.2.1.10) e (6.2.1.11) e efetuando-se desenvolvimento analítico , para cada equação, análogo ao considerado no Capítulo 4, obtém-se as seguintes equações:

Para o meio multiplicador (região 1):

$$\sum_{i=0}^N \left[B_{-1}^1(\xi) + E_1(\xi) A_{-1}^1(\xi) \right] P_{-1} D_{-1}^1 - \sum_{i=0}^N \left[A_{-1}^1(\xi) + E_1(\xi) B_{-1}^1(\xi) \right] P_{-1} D_{-1}^2 = 0, \quad \xi \in P_1$$

6.2.1.15

Para o refletor (região 2):

$$E_2(\xi) \sum_{i=0}^N B_{-1}^2(\xi) P_{-2} D_{-1}^1 - E_2(\xi) \sum_{i=0}^N A_{-1}^2(\xi) P_{-2} D_{-1}^2 - \sum_{i=0}^N B_{-1}^2(\xi) P_{-2} D_{-1}^3 = 0, \quad \xi \in P_2$$

6.2.1.16

$$\sum_{i=0}^N A_{-1}^2(\xi) P_{-2} D_{-1}^1 - \sum_{i=0}^N B_{-1}^2(\xi) P_{-2} D_{-1}^2 - E_2(\xi) \sum_{i=0}^N A_{-1}^2(\xi) P_{-2} D_{-1}^3 = 0, \quad \xi \in P_2$$

6.2.1.17

Nestas equações as definições (4.31) e (4.32) foram utilizadas para cada região, $\ell = 1, 2$, ou seja, $A_{-1}^{\ell}(\xi)$ e $B_{-1}^{\ell}(\xi)$, $\ell = 1, 2$.

Efetuando-se o produto matricial, obtêm-se três equações algébricas com $6(N+1)$ coeficientes d_i a serem determinados, além de α_i . Selecionando-se $2(N+1)$ autovalores ξ_j (entre os quais v_1 e v_2 se $K = 2$) obtêm-se o seguinte sistema de $6(N+1)$ equações lineares algébricas a $6(N+1) + 1$ incógnitas:

$$\sum_{i=0}^N [B_i^{1,1}(\xi_j) + E_1(\xi_j)A_i^{1,1}(\xi_j)] p_1 d_i^{1,1} + \sum_{i=0}^N [B_i^{1,2}(\xi_j) + E_1(\xi_j)A_i^{1,2}(\xi_j)] d_i^{1,2} -$$

$$- \sum_{i=0}^N [A_i^{1,1}(\xi_j) + E_1(\xi_j)B_i^{1,1}(\xi_j)] p_1 d_i^{2,1} - \sum_{i=0}^N [A_i^{1,2}(\xi_j) + E_1(\xi_j)B_i^{1,2}(\xi_j)] d_i^{2,2} = 0,$$

$$+ \xi_j \in P_1, j=0, 1, \dots, 2N+1$$

6.2.1.18

$$E_2(\xi_j) \sum_{i=0}^N [B_i^{2,1}(\xi_j) p_2 d_i^{1,1} + B_i^{2,2}(\xi_j) d_i^{1,2}] -$$

$$- E_2(\xi_j) \sum_{i=0}^N [A_i^{2,1}(\xi_j) p_2 d_i^{2,1} + A_i^{2,2}(\xi_j) d_i^{2,2}] -$$

$$- \sum_{i=0}^N [B_i^{2,1}(\xi_j) p_2 d_i^{3,1} + B_i^{2,2}(\xi_j) d_i^{3,2}] = 0, \xi_j \in P_2, j=0, 1, \dots, 2N+1.$$

6.2.1.19

$$\sum_{i=0}^N [A_i^{2,1}(\xi_j) p_2 d_i^{1,1} + A_i^{2,2}(\xi_j) d_i^{1,2}] -$$

$$- \sum_{i=0}^N [B_i^{2,1}(\xi_j) p_2 d_i^{2,1} + B_i^{2,2}(\xi_j) d_i^{2,2}] -$$

$$- E_2(\xi_j) \sum_{i=0}^N [A_i^{2,1}(\xi_j) p_2 d_i^{3,1} + A_i^{2,2}(\xi_j) d_i^{3,2}] = 0, \xi_j \in P_2, j=0, 1, \dots, 2N+1.$$

6.2.1.20

Nestas equações, o primeiro índice superior das funções $A_i(\xi_j)$ e $B_i(\xi_j)$ denota a região do meio material $\ell = 1, 2$, e o segundo denota o grupo de energia $G = 1, 2$, ao qual a função se refere.

O número de autovalores selecionados em cada intervalo, $(0, 1/\sigma)$ e $(1/\sigma, 1)$, obedece, em princípio, a relação de igualdade (4.36), para cada meio material (cerne multiplicador e refletor), ou seja:

$$2(N+1) = K_{\ell} + 2m_{1\ell} + m_{2\ell}, \quad \ell=1,2 \quad 6.2.1.21$$

Para o problema de criticalidade considerado neste trabalho, o número de autovalores discretos para ambos meios materiais é o mesmo ($K_1 = K_2 = 2$). Além disso escolheu-se os mesmos autovalores, pertencentes aos intervalos $(0, 1/\sigma)$ e $(1/\sigma, 1)$, para os dois meios materiais. Assim, os números de autovalores, discretos, pertencentes ao intervalo $(0, 1/\sigma)$ pertencentes ao intervalo $(1/\sigma, 1)$, são denotados simplesmente por K , m_1 e m_2 , respectivamente.

Alguns detalhes acerca do esquema de seleção serão considerados na secção 7.2 (Resultados Numéricos no Modelo de Dois Grupos de Energia).

Após a seleção de autovalores, o procedimento computacional, para a determinação da meia distância crítica $\alpha_1 = \alpha_{1c}$ e dos coeficientes de expansão do fluxo angular, é análogo ao descrito no Capítulo 4.

6.2.2 - Sistema Crítico com Refletor Infinito

Para este caso impõe-se, diretamente nas equações (6.2.1.10) e (6.2.1.11), a seguinte condição física:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \psi_{\sim 2}(\beta, \mu) \rightarrow 0 \quad 6.2.2.1$$

Com esta condição física incorporada obtêm-se:

$$\int_0^1 \mu \tilde{\phi}(-\xi, \mu) \psi(\alpha_1, \mu) d\mu - \int_0^1 \mu \tilde{\phi}(\xi, \mu) \psi(\alpha_1, -\mu) d\mu = 0 \quad 6.2.2.2$$

O tratamento analítico restante e o processo numérico de solução são totalmente análogos aos do primeiro caso.

7. RESULTADOS NUMÉRICOS

Os resultados numéricos para os problemas tratados nos Capítulos 5 e 6 foram obtidos em dupla precisão através do computador IBM 370/155 do Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, sendo que o programa foi feito em linguagem Fortran IV-H.

Os fluxogramas e os procedimentos computacionais são apresentados nos Apêndices B e C, para os modelos de um e dois grupos, respectivamente.

7.1- Modelo de um Grupo

Para o problema de criticalidade de um sistema constituído por três regiões, cerne multiplicador ($c_1 > 1$), "blanket" ($c_2 < 1$) e refletor infinito ($c_3 < 1$), os resultados foram obtidos para um conjunto de doze combinações de parâmetros (c_1, c_2, c_3 e α_1).

O refinamento da meia distância crítica e dos coeficientes foram obtidos até 10^{-8} nos doze casos considerados.

Estes doze casos são apresentados na Tabela VII.1.1, e Tabela VII.1.2 contém os resultados obtidos para a meia -

TABELA VII.1.1 - Casos Estudados

CASO	c_1	c_2	c_3	α_2
1	1.01	0.90	0.80	1.00
2	1.01	0.90	0.80	2.00
3	1.01	0.90	0.80	3.00
4	1.01	0.90	0.60	2.00
5	1.01	0.80	0.90	2.00
6	1.01	0.80	0.60	2.00
7	1.05	0.90	0.80	2.00
8	1.05	0.80	0.90	2.00
9	1.10	0.90	0.80	2.00
10	1.10	0.80	0.90	2.00
11	1.20	0.90	0.80	2.00
12	1.20	0.80	0.90	2.00

TABELA VII.1.2- Meia Distância Crítica do Cerne Multiplica -
dor

CASO	EXATO	F ₁	F ₂	F ₃	F ₄	F ₅
1	7.389977	7.381313	7.389173	7.389907	7.389929	7.389965
2	7.277128	7.269275	7.275896	7.277090	7.277085	7.277122
3	7.236686	7.228624	7.235304	7.236644	7.236647	7.236679
4	7.331448	7.323137	7.330088	7.331371	7.331394	7.331442
5	7.671173	7.656446	7.668268	7.671111	7.671100	7.671158
6	7.712550	7.699643	7.710033	7.712463	7.712473	7.712539
7	2.414391	2.402835	2.412899	2.414304	2.414336	2.414382
8	2.719504	2.701214	2.716367	2.719410	2.719419	2.719486
9	1.371800	1.356682	1.369168	1.371710	1.371737	1.371785
10	1.607859	1.586151	1.603651	1.607754	1.607767	1.607837
11	0.730527	0.711546	0.725009	0.730463	0.730467	0.730503
12	0.890114	0.864563	0.882995	0.890064	0.890030	0.890076

distância crítica (*) em cada ordem de expansão (1 a 5) . Nesta tabela os valores nas cinco ordens de expansão , para cada caso, são confrontados com o valor obtido pelo método exato de Case/18/. Nota-se nesta tabela que, para cada caso considerado, o valor obtido pelo método aproximado, rapidamente tende para o valor dado pelo método exato, tomado como referência. Mesmo para a ordem de expansão 2, nota-se que a diferença é inferior a 10^{-2} em todos os casos considerados e na ordem de expansão 5, a diferença é observada apenas a partir da quarta casa decimal. Os desvios percentuais dos resultados para a meia distância crítica em relação ao resultado dado pelo método exato (para cada caso) são apresentados na Tabela VII.1.3. Os pequenos desvios observados confirmam a boa precisão do método aproximado F_N /14/.

Os tempos (C.P.U.) e os números de iterações necessários para se refinar os resultados até a oitava casa decimal, nos casos 3 e 12, são apresentados na Tabela VII.1.4. Os tempos e números de iterações são bem pequenos (da ordem de segundos), o que comprova o aspecto econômico do método em termos computacionais, pois , o método exato requer um tempo superior a 11 minutos para os cálculos no mesmo sistema de três regiões aqui considerado /33/.

Os fluxos angulares são apresentados nas seguintes tabelas:

(*) A variável espacial é sempre tratada em termos de livres caminhos médios.

TABELA VII.1.3- Desvios Percentuais

CASO	EXATO	F ₁ %	F ₂ %	F ₃ %	F ₄ %	F ₅ %
1	7.389977	0.117	0.011	< 0.001	< 0.001	< 0.001
2	7.277128	0.108	0.020	< 0.001	< 0.001	< 0.001
3	7.236686	0.111	0.019	< 0.001	< 0.001	< 0.001
4	7.331448	0.113	0.019	0.001	< 0.001	< 0.001
5	7.671173	0.192	0.038	< 0.001	< 0.001	< 0.001
6	7.712550	0.475	0.033	0.001	< 0.001	< 0.001
7	7.414391	0.479	0.062	0.004	0.002	< 0.001
8	2.719504	0.673	0.115	0.003	0.003	< 0.001
9	1.371800	1.102	0.192	0.007	0.005	0.001
10	1.607859	1.350	0.262	0.007	0.006	0.001
11	0.730527	2.598	0.755	0.009	0.008	0.003
12	0.890114	2.871	0.800	0.006	0.009	0.004

TABELA VII.1.4- Tempo de Computação e Número de Iterações para os Casos 3 e 12.

Ordem de Expansão	Caso 3		Caso 12	
	Tempo de Computação (s)	Número de Iterações	Tempo de Computação (s)	Número de Iterações
F ₁	15.32	3	15.42	3
F ₂	16.22	3	16.78	6
F ₃	16.14	3	18.28	6
F ₄	17.01	3	21.08	6
F ₅	19.90	3	24.98	6

Tabela VII.1.5- Fluxo angular para o caso 3 - Interface α_1

Tabela VII.1.6- Fluxo angular para o caso 3 - Interface β

Tabela VII.1.7- Fluxo angular para o caso 12- Interface α_1

Tabela VII.1.8- Fluxo angular para o caso 12- Interface β .

O comportamento do fluxo angular em função de μ para os casos 1, 3, 7 e 12 são apresentados nas Figuras 7.1.1, 7.1.2, 7.1.3, e 7.1.4, respectivamente. As curvas representam os fluxos nas aproximações F_1 e F_5 .

As curvas obtidas para as aproximações F_2 a F_5 são muito próximas, sendo difícil ou impossível distinguí-las graficamente, pois, como pode ser verificado nas Tabelas VII.1.5 a VII.1.8, para ordens superiores a 2, as diferenças entre os fluxos são muito pequenas.

Nota-se nas Figuras 7.1.1 a 7.1.4, que o método aproximado F_N descreve o comportamento descontínuo do fluxo angular - quando $\mu = 0$. Em comparação, no método P_N , um método aproximado tradicional, esta descontinuidade não é observada.

Não é possível efetuar-se uma comparação direta entre os fluxos angulares nas interfaces obtidos pelo método aproximado com aqueles obtidos pelo método exato, pois a normalização considerada nos dois métodos é diferente. Entretanto, os fluxos obtidos através dos dois métodos devem manter aproximadamente a mesma proporcionalidade entre si (tanto mais vá-

lida quanto maior a ordem de expansão N). A Tabela VII.1.9 apresenta os fluxos angulares na interface α_1 , para o caso 3, nas ordens de expansão F_1 e F_5 , obtidos através do método exato e aproximado. Aqui os fluxos $\psi(\alpha_1, \mu)$ do método exato e do aproximado foram divididos pelos respectivos fluxos $\psi(\alpha_1, 0.5)$, ou seja, para $\mu = 0.5$. Os desvios percentuais dos fluxos também são apresentados para ambos métodos e ordens de expansão, os quais revelam uma boa concordância entre os dois métodos, principalmente para a aproximação F_5 . Para mostrar efeitos do refletor finito, os casos 3 e 12, da Tabela VII.1.1, foram considerados.

Os cálculos foram efetuados para as aproximações F_2 e F_5 , para as espessuras do refletor: 1.0, 4.0, 7.0 e 10.0.

As Tabelas VII.1.10 e VII.1.11 contêm os valores da meia distância crítica, para os casos 3 e 12, respectivamente, para as espessuras citadas no parágrafo anterior. O refinamento para a obtenção da meia distância crítica foi considerado até a oitava casa decimal.

Para os dois casos, 3 e 12, na ordem de expansão 5, os tempos de computação (C.P.U.) médios são da ordem de 22 e 31 segundos, respectivamente. A variação do tempo de computação em relação à espessura do refletor é muito pequena.

A Tabela VII.1.12 apresenta os valores dos fluxos angulares nas interfaces α_1 e β , para o caso 3, quando se considera a espessura do refletor igual a 10.0.

TABELA VII.1.5- Fluxo Angular para o Caso 3- Interface α_1

μ	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
-1.00	0.519641	0.554622	0.557860	0.557656	0.557773
-0.90	0.556786	0.575292	0.579553	0.579218	0.579335
-0.80	0.593931	0.598846	0.602382	0.602583	0.602472
-0.70	0.631076	0.625283	0.626891	0.627673	0.627512
-0.60	0.668220	0.654604	0.653621	0.654632	0.654638
-0.50	0.705365	0.686809	0.683118	0.683818	0.684042
-0.40	0.742510	0.721898	0.715922	0.715811	0.716072
-0.30	0.779655	0.759870	0.752579	0.751409	0.751377
-0.20	0.816800	0.800726	0.793630	0.791628	0.791058
-0.10	0.853944	0.844466	0.839619	0.837703	0.836814
0.00 ⁻	0.891089	0.891089	0.891089	0.891089	0.891089
0.00 ⁺	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.10	1.054967	1.060983	1.062669	1.063955	1.064736
0.20	1.109933	1.120304	1.122931	1.124301	1.124803
0.30	1.164900	1.177964	1.180937	1.181787	1.181824
0.40	1.219866	1.233962	1.236840	1.237020	1.236809
0.50	1.274833	1.288298	1.290792	1.290461	1.290290
0.60	1.329799	1.340972	1.342945	1.342428	1.342452
0.70	1.384766	1.391984	1.393450	1.393096	1.393264
0.80	1.439732	1.441334	1.442459	1.442495	1.442610
0.90	1.494699	1.489023	1.490125	1.490511	1.490421
1.00	1.549666	1.535050	1.536599	1.536886	1.536809

TABELA VII.1.6- Fluxo Angular para o Caso 3 - Interface β

μ	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
1.00	0.066026	0.071488	0.072117	0.072079	0.072094
0.90	0.072652	0.074517	0.075328	0.075274	0.075286
0.80	0.079278	0.078111	0.078754	0.078795	0.078774
0.70	0.085905	0.082268	0.082509	0.082648	0.082621
0.60	0.092531	0.086989	0.086702	0.086876	0.086876
0.50	0.099157	0.092273	0.091448	0.091563	0.091595
0.40	0.105784	0.098121	0.096857	0.096829	0.096864
0.30	0.112410	0.104533	0.103042	0.102833	0.102820
0.20	0.119036	0.111509	0.110114	0.109774	0.109674
0.10	0.125663	0.119048	0.118186	0.117886	0.117734
0.00	0.132289	0.127151	0.127369	0.127445	0.127428
0.00 ⁺	0.148825	0.143045	0.143290	0.143376	0.143357
0.10	0.165373	0.152946	0.154511	0.155886	0.155776
0.20	0.181921	0.165014	0.167212	0.168577	0.168491
0.30	0.198469	0.179250	0.181539	0.182262	0.182233
0.40	0.215017	0.195653	0.197634	0.197591	0.197607
0.50	0.231565	0.214224	0.215642	0.215049	0.215082
0.60	0.248113	0.234962	0.235706	0.234957	0.234982
0.70	0.264661	0.257869	0.257970	0.257468	0.257474
0.80	0.281209	0.282942	0.282579	0.282572	0.282565
0.90	0.297757	0.310184	0.309675	0.310094	0.310089
1.00	0.314305	0.339593	0.339403	0.339695	0.339695

TABELA VII.1.7- Fluxo Angular para o Caso 12 - Interface α_1

μ	F ₁	F ₂	F ₃	F ₄	F ₅
-1.0	0.319117	0.355086	0.357790	0.357392	0.357768
-0.9	0.353872	0.368652	0.373054	0.373452	0.372793
-0.8	0.388627	0.386127	0.388832	0.389467	0.389279
-0.7	0.423382	0.407511	0.406233	0.408141	0.407879
-0.6	0.458137	0.432805	0.426366	0.428684	0.428871
-0.5	0.492892	0.462009	0.450341	0.451811	0.452532
-0.4	0.527647	0.495121	0.479267	0.478744	0.479500
-0.3	0.562402	0.532144	0.514253	0.511210	0.511149
-0.2	0.597157	0.573075	0.556409	0.551442	0.549956
-0.1	0.631912	0.641803	0.606844	0.602180	0.599866
-0.0	0.666667	0.666667	0.666667	0.666667	0.666667
+0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	1.034755	1.072088	1.103292	1.107280	1.106263
0.2	1.069510	1.132030	1.176705	1.180447	1.180172
0.3	1.104265	1.179826	1.224083	1.225657	1.226278
0.4	1.139020	1.215475	1.249272	1.248470	1.249452
0.5	1.173775	1.238978	1.256116	1.253852	1.254615
0.6	1.208530	1.250335	1.248459	1.246174	1.246470
0.7	1.243285	1.249546	1.230146	1.229210	1.229229
0.8	1.278040	1.236610	1.205021	1.206140	1.206348
0.9	1.312795	1.211528	1.176930	1.179549	1.180254
1.0	1.347550	1.174300	1.149717	1.151426	1.152076

TABELA VII.1.8- Fluxo Angular para o Caso 12 - Interface β

μ	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
-1.0	0.118391	0.118454	0.115402	0.115610	0.115679
-0.9	0.125581	0.122603	0.119445	0.119676	0.119749
-0.8	0.132770	0.127179	0.123811	0.124009	0.124118
-0.7	0.139960	0.132180	0.128508	0.128672	0.128794
-0.6	0.147150	0.139607	0.133548	0.133714	0.133818
-0.5	0.154339	0.143461	0.138940	0.139163	0.139243
-0.4	0.161529	0.149740	0.144695	0.145029	0.145114
-0.3	0.168718	0.156446	0.150823	0.151305	0.151450
-0.2	0.175908	0.163577	0.157335	0.157967	0.158218
-0.1	0.183097	0.171134	0.164241	0.164972	0.165321
-0.0	0.190287	0.179118	0.171551	0.172258	0.172571
+0.0	0.169144	0.159216	0.152490	0.153118	0.153397
0.1	0.189019	0.173497	0.155112	0.158906	0.162016
0.2	0.208895	0.189343	0.165391	0.169550	0.171357
0.3	0.228770	0.206756	0.182078	0.185107	0.185011
0.4	0.238646	0.225735	0.203923	0.205336	0.204341
0.5	0.268521	0.246279	0.229680	0.229697	0.229031
0.6	0.288396	0.268390	0.258099	0.257354	0.257636
0.7	0.308272	0.292066	0.287932	0.287172	0.288130
0.8	0.328147	0.317309	0.317930	0.317717	0.318460
0.9	0.348023	0.344117	0.346844	0.347259	0.347090
1.0	0.367898	0.372491	0.373427	0.373771	0.373554

TABELA VII.1.9- Comparação entre os Fluxos Angulares (Exato e Aproximados) para o Caso 3- Interface α_1

μ	EXATO	F_1	F_5	$F_1\%$	$F_5\%$
-0.90	0.4490	0.4368	0.4490	2.700	< 0.001
-0.80	0.4670	0.4659	0.4669	0.236	0.214
-0.70	0.4864	0.4950	0.4863	1.800	0.021
-0.60	0.5073	0.5242	0.5074	3.331	0.020
-0.50	0.5301	0.5533	0.5301	4.377	< 0.001
-0.40	0.5550	0.5824	0.5550	4.937	< 0.001
-0.30	0.5824	0.6116	0.5823	5.014	0.017
-0.20	0.6130	0.6407	0.6131	4.519	0.016
-0.10	0.6478	0.6698	0.6485	3.396	0.108
0.10	0.8259	0.8275	0.8252	0.194	0.085
0.20	0.8718	0.8706	0.8717	0.138	0.011
0.30	0.9158	0.9138	0.9159	0.218	0.011
0.40	0.9585	0.9569	0.9586	0.167	0.010
0.50	1.0000	1.0000	1.0000	-	-
0.60	1.0404	1.0431	1.0404	0.260	< 0.001
0.70	1.0798	1.0862	1.0798	0.589	< 0.001
0.80	1.1181	1.1294	1.1181	1.011	< 0.001
0.90	1.1551	1.1725	1.1551	1.506	< 0.001

TABELA VII.1.10- Cálculo da Meia Distância Crítica α_1 - Caso 3

Espessura do Refletor	F_2	F_5
1.0	7.244883	7.246259
4.0	7.235433	7.236811
7.0	7.235306	7.236680
10.0	7.235304	7.236679

TABELA VII-1.11- Cálculo da Meia Distância Crítica α_1 - Caso 12

Espessura do Refletor	F_2	F_5
1.0	0.892528	0.899400
4.0	0.883387	0.890466
7.0	0.883011	0.890092
10.0	0.883000	. 890076

TABELA VII.1.12- Fluxos Angulares para o Caso 3

μ	Interface α_1		Interface β	
	F2	F5	F2	F5
-1.00	0.554622	0.557773	0.714885	0.072094
-0.90	0.575292	0.579335	0.745180	0.075287
-0.80	0.598846	0.602472	0.781112	0.078774
-0.70	0.625283	0.627512	0.822681	0.082621
-0.60	0.654604	0.654638	0.869888	0.086876
-0.50	0.686809	0.684042	0.922731	0.091595
-0.40	0.721898	0.716072	0.981213	0.096864
-0.30	0.759870	0.751377	0.104533	0.102820
-0.20	0.800726	0.791058	0.111509	0.109674
-0.10	0.844466	0.836814	0.119048	0.117734
0.00	0.891089	0.891089	0.127151	0.127428
0.00 ⁺	1.000000	1.000000	0.143045	0.143357
0.10	1.060983	1.064736	0.152946	0.155776
0.20	1.120304	1.124803	0.165014	0.168491
0.30	1.177964	1.181824	0.179250	0.182233
0.40	1.233962	1.236809	0.195653	0.197607
0.50	1.288298	1.290290	0.214224	0.215082
0.60	1.340972	1.342452	0.234962	0.234981
0.70	1.391984	1.393264	0.257869	0.257474
0.80	1.441334	1.442610	0.282942	0.282565
0.90	1.489023	1.490421	0.310184	0.310089
1.00	1.535050	1.536809	0.339593	0.339695

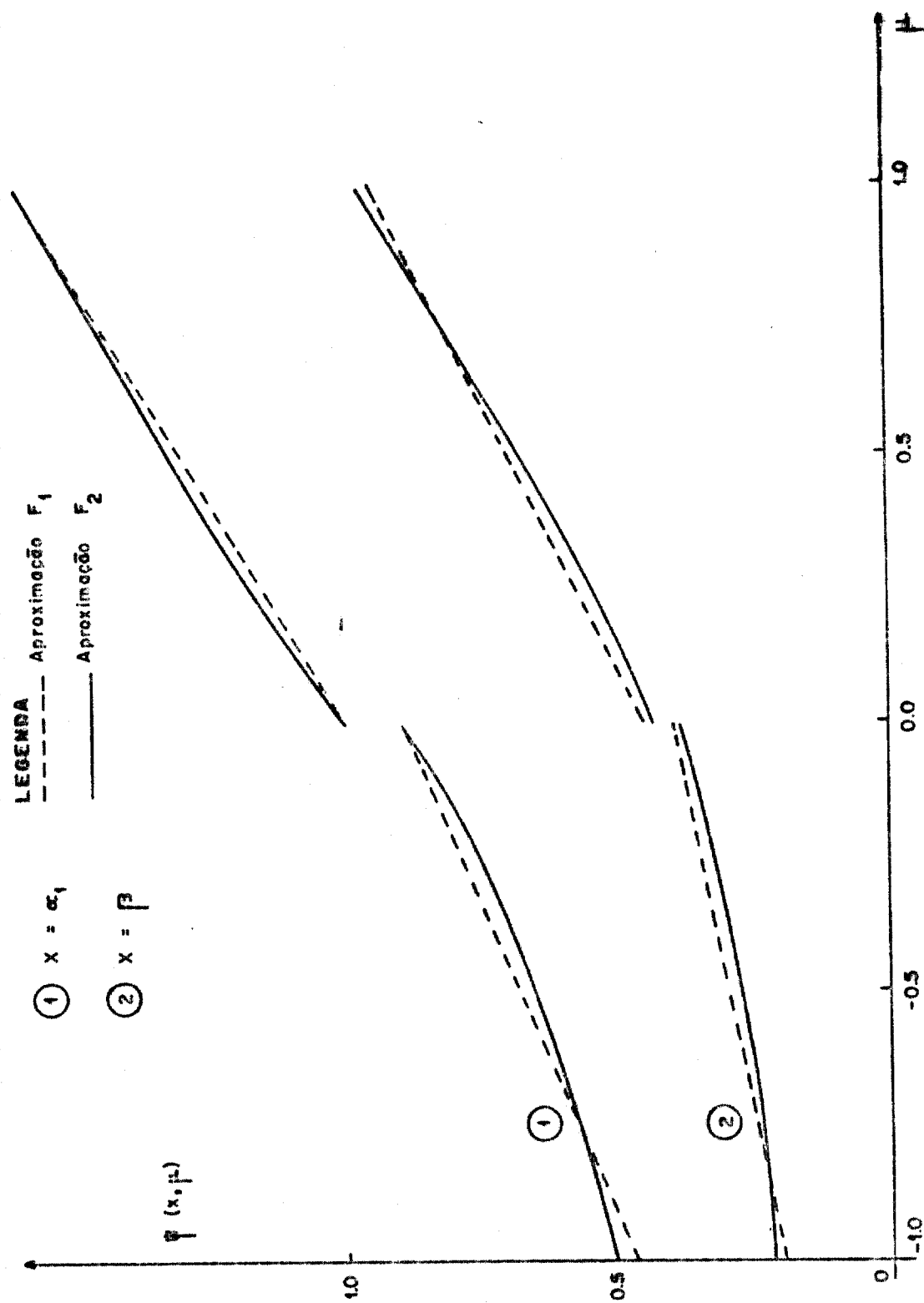


FIGURA 7.1.1 - FLUXO ANGULAR PARA O CASO 1

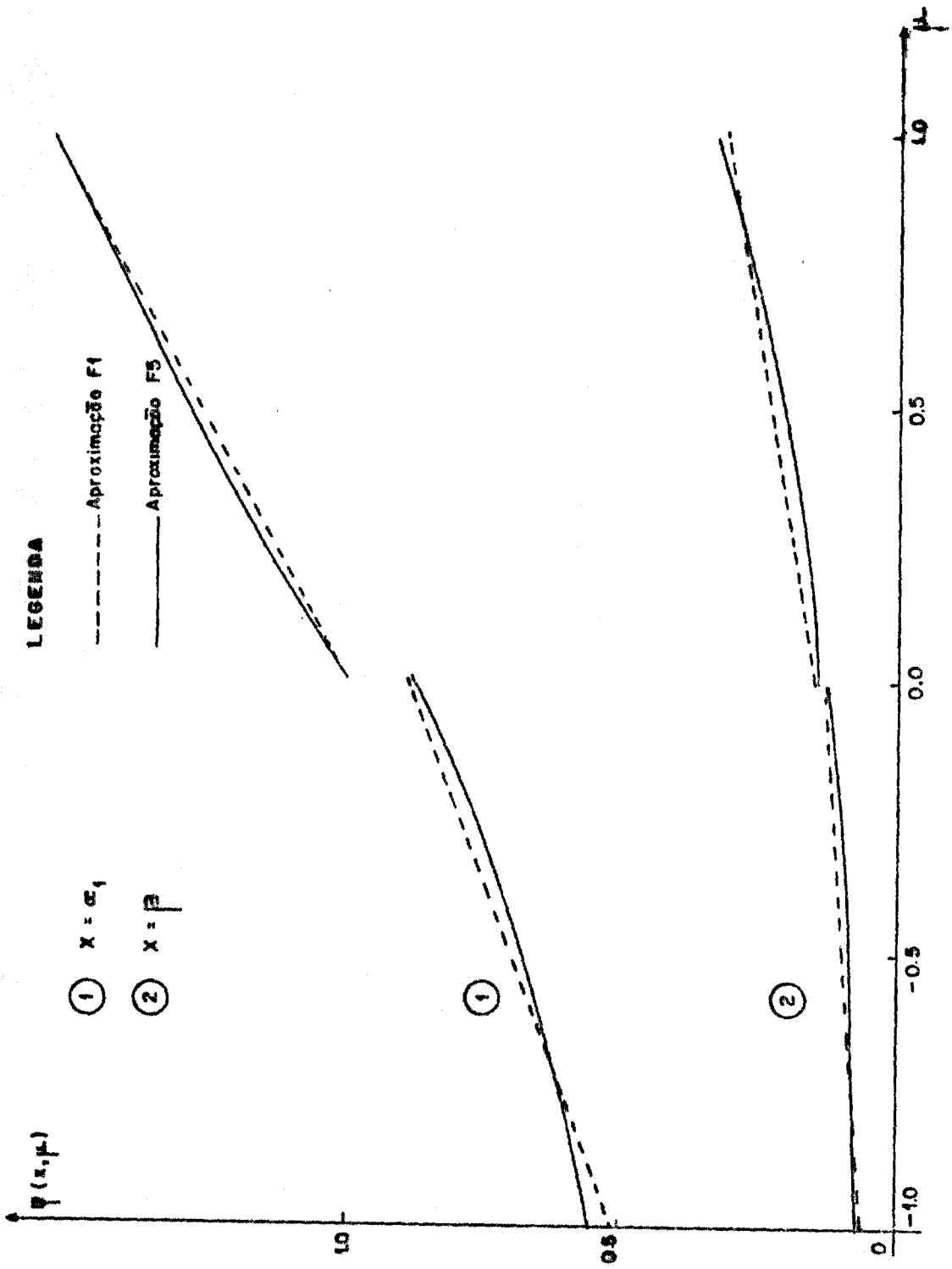


Figura 7.1.2 - FLUXO ANGULAR PARA O CASO 3

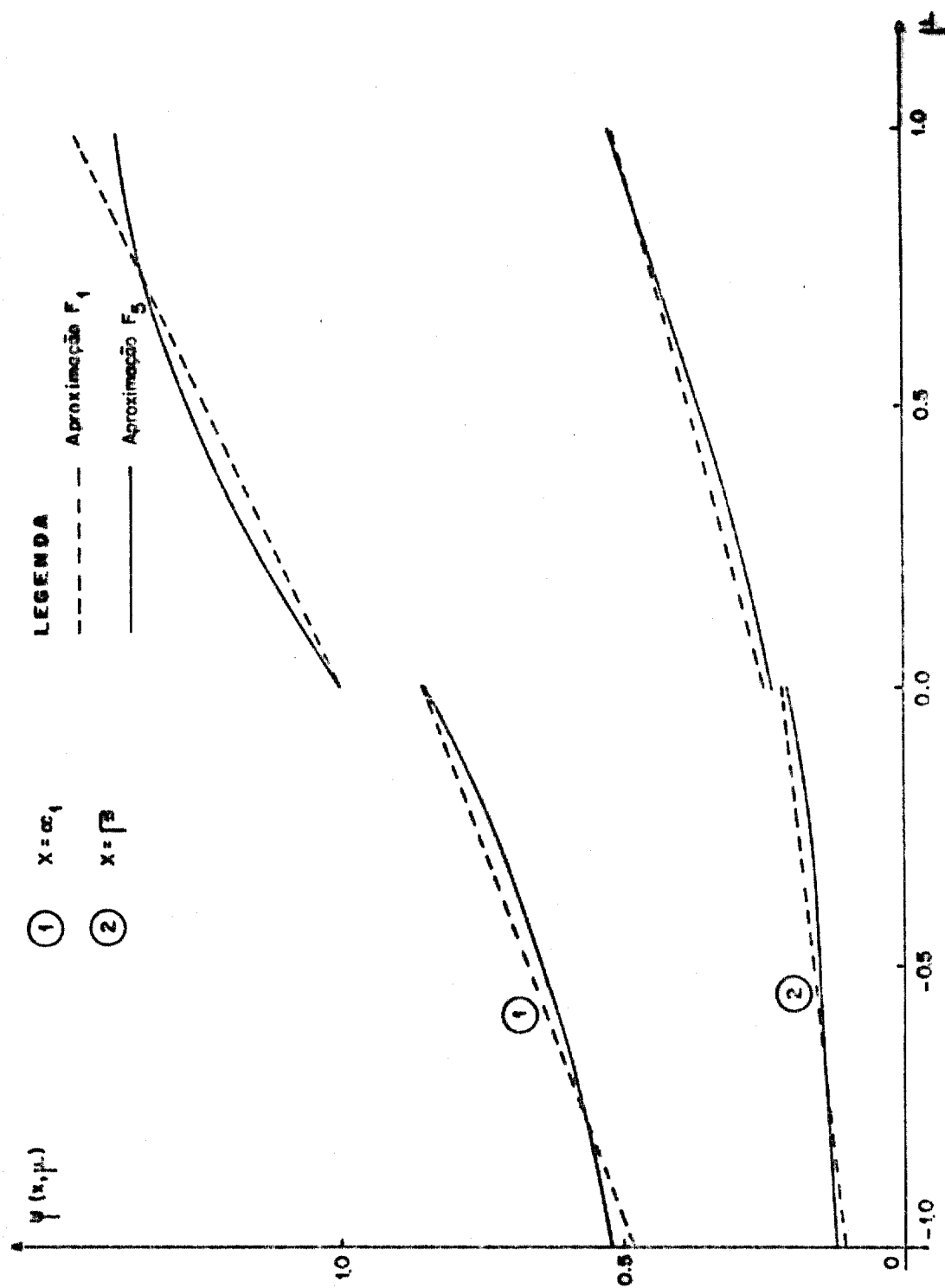


Figura 7.1.3 - FLUXO ANGULAR PARA O CASO 7

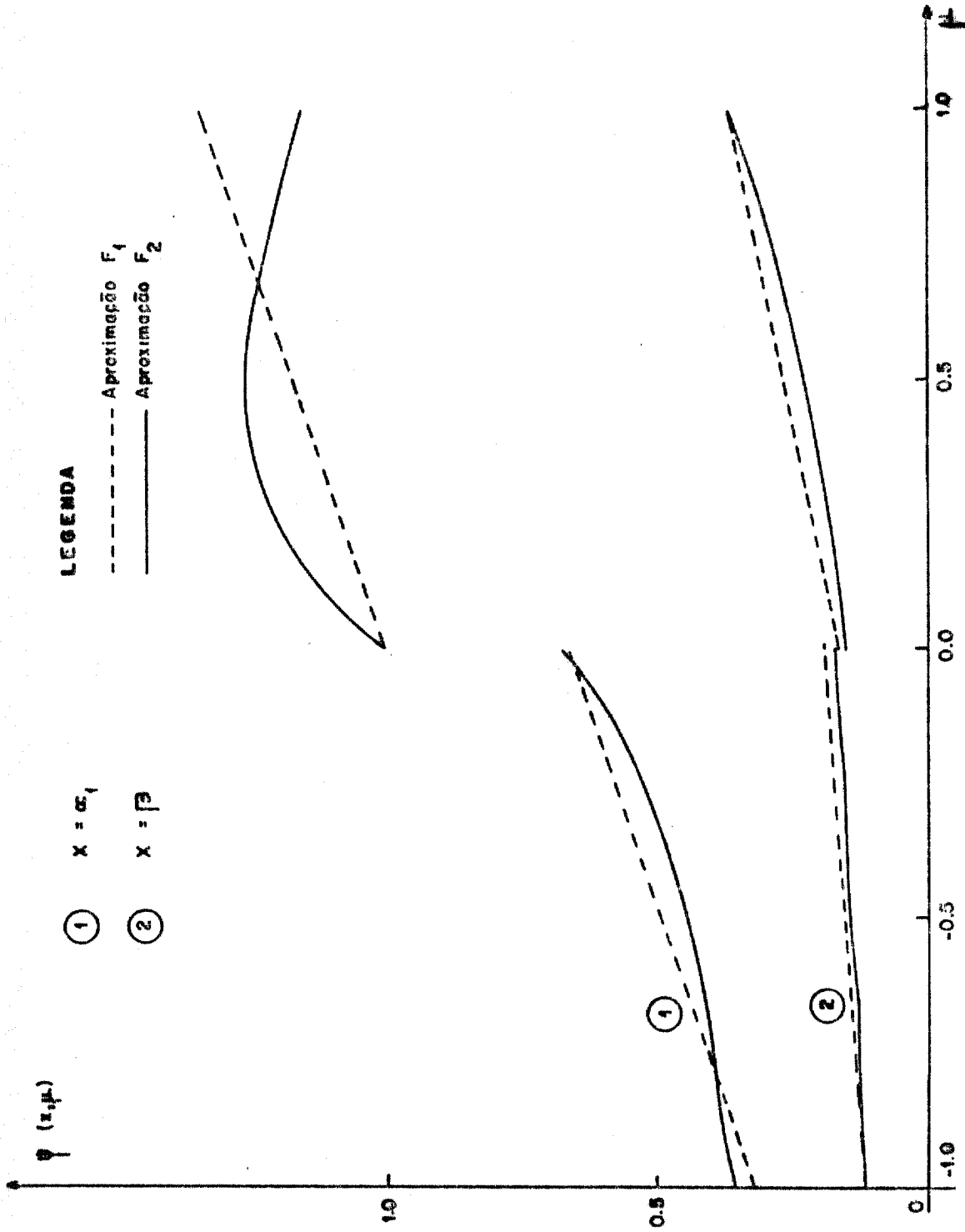


Figura 7.1.4 - FLUXO ANGULAR PARA O CASO 12

Os valores são representados até a sexta casa decimal, nas ordens de expansão 2 e 5. Confrontando-se estes valores com aqueles do sistema com refletor infinito, dados pela Tabela VII.1.5, verifica-se que as diferenças são menores do que 10^{-6} . Nestas condições, os fluxos angulares, para o sistema com refletor de espessura infinita ou igual a 10.0, são praticamente os mesmos.

Os fluxos totais e correntes nas interfaces podem ser obtidos através das seguintes expressões analíticas:

$$\phi(x) = \int_{-1}^1 \psi(x, \mu) d\mu \quad 7.1.1$$

$$J(x) = \int_{-1}^1 \mu \psi(x, \mu) d\mu \quad 7.1.2$$

As expansões dos fluxos angulares, para $x = \alpha_1$, β e γ , são dadas pelas expressões (5.1.27) a (5.1.31). Quando substituídas em (7.1.1) e (7.1.2) fornecem:

$$\phi(\alpha_1) = \sum_{\alpha=0}^N \frac{(d_{\alpha}^1 + d_{\alpha}^2)}{\alpha + 1} \quad 7.1.3$$

$$\phi(\beta) = \sum_{\alpha=0}^N \frac{(d_{\alpha}^3 + d_{\alpha}^4)}{\alpha + 1} \quad 7.1.4$$

$$\phi(\gamma) = \sum_{\alpha=0}^N \frac{d_{\alpha}^5}{\alpha + 1} \quad 7.1.5$$

$$J(\alpha_1) = \sum_{\alpha=0}^N \frac{(d_{\alpha}^1 - d_{\alpha}^2)}{\alpha + 2} \quad 7.1.6$$

$$J(\beta) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{N (d_{\alpha}^3 - d_{\alpha}^4)}{\alpha + 2} \quad 7.1.7$$

$$J(\gamma) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{N d_{\alpha}^5}{\alpha + 2} \quad 7.1.8$$

Os fluxos escalares e correntes para o caso 3 (refletor finito) são apresentados na Tabela VII.1.13 e VII.1.14, respectivamente, para as aproximações F_2 e F_5 , nas interfaces α_1 , β e γ . Na última linha da tabela são inseridos os valores obtidos para o sistema com refletor infinito.

Nota-se que os valores para espessuras do refletor ≥ 10.0 ou infinita são muito próximos, e os fluxos na interface γ se aproximam de zero rapidamente a medida que a espessura do refletor cresce.

TABELA VII.1.13- Fluxos Escalares para o Sistema com Refletor Finito e Infinito - Caso 3

Espessura do Refletor	Interface α_1		Interface β		Interface γ	
	F_2	F_5	F_2	F_5	F_2	F_5
1.0	1.006611	1.007647	0.157062	0.157397	0.053995	0.054223
4.0	1.006647	1.007677	0.170505	0.170736	0.006281	0.006403
7.0	1.006648	1.007677	0.170677	0.170913	0.000737	0.000758
10.0	1.006648	1.007677	0.170679	0.170915	0.000087	0.000090
∞	1.006648	1.007590	0.170679	0.170906	-	-

TABELA VII.1.14- Correntes para o Sistema com Refletor Finito e Infinito - Caso 3

Espessura do Refletor	Interface α_1		Interface β		Interface γ	
	F_2	F_5	F_2	F_5	F_2	F_5
1.0	0.267106	0.267105	0.068261	0.068287	0.040075	0.040098
4.0	0.265567	0.265560	0.064396	0.064360	0.004797	0.004787
7.0	0.265547	0.265539	0.064342	0.064304	0.000570	0.000568
10.0	0.265547	0.265538	0.064341	0.064303	0.000068	0.000067
∞	0.265547	0.265538	0.064341	0.064303	-	-

7.2- Modelo de Dois Grupos

Nesta secção são apresentados alguns resultados obtidos no modelo de dois grupos, para os problemas de Milne e de criticalidade, cujos desenvolvimentos analíticos foram considerados no Capítulo 6. A variável espacial é sempre tratada em termos de livres caminhos médios dos nêutrons do grupo dois.

Inicialmente o esquema considerado (problema de Milne e de criticalidade) na escolha dos autovalores, para cada meio, foi feito tomando-se valores igualmente espaçados entre si - (além dos K autovalores discretos) nos intervalos $(0, 1/\sigma)$ e $(1/\sigma, 1)$, de acordo com as seguintes expressões.

$$\xi_j = \frac{1}{\sigma} + \frac{(m_2 + K - j)(1 - 1/\sigma)}{m_2}, \quad K \leq j \leq K + m_2 - 1, \quad \xi_j \in (1/\sigma, 1)$$

7.2.1

e

$$\xi_j = \frac{1}{\sigma} \frac{K + m_1 + m_2 - 1 - j}{m_1}, \quad K + m_2 \leq j \leq K + m_2 + m_1, \quad \xi_j \in (0, 1/\sigma)$$

7.2.2

Assim, o número de autovalores considerados nos dois intervalos, obedece a relação de igualdade (4.36).

Entretanto, devido à dificuldade em se encontrar resultados satisfatórios, nos dois problemas, outros esquemas foram tentados, os quais são descritos adiante, para cada problema.

7.2.1- Problema de Milne

Utilizou-se, neste problema, para a obtenção de resultados numéricos dois conjuntos diferentes de secções de choque /28/ para o material que preenche o semi-espaço $x > 0$, conforme tabela VII.2.1.1. Em cada caso considerado a função de dispersão possui apenas duas raízes reais $\pm v_1(k=1)$ /39/. O valor positivo para cada caso é apresentado nessa Tabela VII.2.1.1.

Como neste problema $K = 1$, a condição física (6.1.2) é alterada para:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x, \mu) \cdot e^{-x} = 0 \quad 7.2.1.1$$

Os resultados obtidos para o problema de Milne através do método F_N (distribuição de nêutrons na interface $x = 0$), são confrontados com os valores calculados através do método exato da bibliografia /38/. Os resultados do método exato são apresentados na Tabela VII.2.1.2, para os casos 1 e 2, onde se utiliza a denotação para o fluxo do grupo: $I_G(x, \mu)$, $G = 1, 2$ (*)

(*) Para o problema de Milne, o símbolo $I_G(x, \mu)$, $G=1, 2$ será utilizado de ora em diante para denotar os elementos do fluxo $I(x, \mu)$, simbologia diferente da que foi utilizada na definição (2.4.6), onde $I(x, \mu) = \begin{bmatrix} \psi_1(x, \mu) \\ \psi_2(x, \mu) \end{bmatrix}$.

TABELA VII.2.1.1- Secções de Choque Macroscópicas (*)

CONJUNTO SECÇÕES DE CHOQUE E AUTOVALOR	CASO (1)	CASO (2)
σ_1	4.8822	5.3220
σ_2	3.2343	2.9738
σ_{11}	3.8180	3.6906
σ_{12}	0.3524	0.2164
σ_{21}	1.0326	1.0481
σ_{22}	2.8669	2.5341
v_1	7.190978	1.936041

(*) Expressos em cm^{-1}

TABELA VII.2.1.2 - Distribuição de Saída do Problema de Milne $I(0, -\mu)$.

μ	CASO 1		CASO 2	
	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$
0.05	0.004841	0.017021	0.008193	0.064905
0.10	0.005277	0.018736	0.008873	0.071267
0.20	0.006066	0.021900	0.010106	0.083413
0.30	0.006803	0.024920	0.011273	0.095692
0.40	0.007515	0.027879	0.012419	0.108614
0.50	0.008210	0.030813	0.013568	0.122564
0.60	0.008896	0.033739	0.014736	0.137934
0.70	0.009574	0.036672	0.015935	0.155190
0.80	0.010249	0.039620	0.017177	0.174927
0.90	0.010921	0.042590	0.018447	0.197947
1.00	0.011592	0.045588	0.019835	0.225375

Utilizando-se várias combinações de m_1 e m_2 , nas ordens de expansão $N = 2$ a $N = 4$, obteve-se os resultados para os fluxos angulares mostrados nas Tabelas VII.2.1.3 e VII.2.1.4, para os casos 1 e 2, respectivamente. Estes resultados são insatisfatórios, ocorrendo mesmo valores negativos para certas combinações de m_1 e m_2 . O aumento da ordem de expansão não torna os resultados mais precisos.

Entretanto, confrontando-se estes valores (nos dois casos) com aqueles da Tabela VII.2.1.2, verifica-se que as discrepâncias dos resultados decrescem à medida que se escolhe menos autovalores no intervalo $(1/\sigma, 1)$. Nota-se, para a ordem de expansão $N = 3$, por exemplo, que para a combinação $(m_1=0, m_2=7)$ resultam vários valores negativos, nos dois casos considerados. Para a combinação $(m_1 = 3, m_2 = 1)$, os valores obtidos, embora ainda imprecisos aproximam-se dos valores da Tabela VII.2.1.2.

Este comportamento repete-se, de forma quase sistemática para outras ordens de expansão, ou seja, para uma dada ordem de expansão, quanto maior for o número de autovalores no intervalo $(1/\sigma, 1)$, em relação ao número de autovalores no intervalo $(0, 1/\sigma)$, os resultados tornam-se mais discrepantes.

Até o momento da confecção deste trabalho não se encontrou o motivo da ocorrência destes resultados negativos quando se seleciona autovalores no intervalo $(1/\sigma, 1)$. Parece, no entanto, que o motivo desses resultados inesperados provém das funções $B_1^{(2)}(\nu)$. As funções $B_1^{(1)}(\nu)$ e $B_1^{(2)}(\nu)$ são descontínuas no ponto $1/\sigma$ e além do mais as funções $B_1^{(2)}(\nu)$ pos -

TABELA VII.2.1.3- Fluxos Angulares para o Caso 1

μ	$N=2, m_1=0, m_2=5$		$N=2, m_1=2, m_2=1$	
	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$
0.05	-0.010059	0.019282	0.004596	0.016756
0.10	-0.007592	0.020598	0.005013	0.018484
0.20	-0.003092	0.023260	0.005816	0.021868
0.30	0.000829	0.025960	0.006576	0.025156
0.40	0.004171	0.023700	0.007295	0.028348
0.50	0.006934	0.031478	0.007971	0.031445
0.60	0.009117	0.034296	0.008605	0.034446
0.70	0.010722	0.037153	0.009198	0.037351
0.80	0.011747	0.040049	0.009748	0.040160
0.90	0.012194	0.042984	0.010256	0.042874
1.00	0.012061	0.045958	0.010722	0.045492

TABELA VII.2.1.3- Fluxos Angulares para o Caso 1 (continuação)

μ	$N=3, m_1=0, m_2=7$		$N=3, m_1=3, m_2=1$	
	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$
0.05	-0.003370	0.018018	0.004894	0.016692
0.10	-0.001282	0.019465	0.005353	0.018472
0.20	0.002201	0.022353	0.006213	0.021784
0.30	0.004870	0.025236	0.007008	0.024833
0.40	0.006855	0.028119	0.007761	0.027701
0.50	0.008291	0.031008	0.008490	0.030466
0.60	0.009308	0.033907	0.009216	0.033211
0.70	0.010040	0.036822	0.009960	0.036014
0.80	0.010618	0.039758	0.010739	0.038958
0.90	0.011175	0.042719	0.011576	0.042121
1.00	0.011844	0.045712	0.012490	0.045586

TABELA VII.2.1.3 - Fluxos Angulares para o Caso 1 (Continuação)

μ	$N=3, m_1=1, m_2=5$		$N=4, m_1=4, m_2=1$	
	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$
0.05	0.006195	0.016534	0.004616	0.016989
0.10	0.007397	0.018132	0.005054	0.018791
0.20	0.009015	0.021281	0.005843	0.022052
0.30	0.009784	0.024374	0.006555	0.025070
0.40	0.009943	0.027424	0.007220	0.028038
0.50	0.009733	0.030441	0.007861	0.031070
0.60	0.009394	0.033435	0.008482	0.034202
0.70	0.009166	0.036418	0.009079	0.037392
0.80	0.009289	0.039400	0.009632	0.040518
0.90	0.010002	0.042393	0.010110	0.043383
1.00	0.011546	0.045407	0.010467	0.045709

TABELA VII.2.1.4- Fluxos Angulares para o Caso 2

μ	$N=2, m_1 = 0, m_2 = 5$		$N=2, m_1=2, m_2 = 1$	
	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$
0.05	-8.689958	0.541146	0.004392	0.06325
0.10	-7.436300	0.513659	0.004936	0.069344
0.20	-5.195587	0.464673	0.005609	0.082260
0.30	-3.310341	0.423672	0.005843	0.096471
0.40	-1.780561	0.390655	0.005638	0.111976
0.50	-0.606248	0.365624	0.004992	0.128776
0.60	0.212599	0.348577	0.003908	0.146870
0.70	0.675979	0.339516	0.002383	0.166258
0.80	0.783892	0.338439	0.000420	0.186941
0.90	0.536338	0.345347	-0.001982	0.208918
1.00	-0.066682	0.360240	-0.004825	0.232190

TABELA VII.2.1.4- Fluxos Angulares para o Caso 2 (Continuação)

μ	$N=3, m_1 = 0, m_2 = 7$		$N=3, m_1=1, m_2 = 5$	
	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$
0.05	33.851237	-0.796912	-0.155642	0.057887
0.10	26.235049	-0.723482	-0.244058	0.071143
0.20	14.308878	-0.593449	-0.329473	0.093911
0.30	6.218529	-0.483500	-0.318136	0.112728
0.40	1.277057	-0.390811	-0.240216	0.128843
0.50	-1.202480	-0.312560	-0.125882	0.143502
0.60	-1.907028	-0.245923	-0.005303	0.157954
0.70	-1.523529	-0.188078	0.091353	0.173446
0.80	-0.738927	-0.136202	0.133918	0.191227
0.90	-0.240166	-0.087471	0.092222	0.212543
1.00	-0.714188	-0.039062	-0.063900	0.238643

TABELA VII.2.1.4 - Fluxos Angulares para o Caso 2(Continuação)

μ	N=3, $m_1=3$, $m_2=1$		N=4, $m_1=4$, $m_2=1$	
	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$
0.05	0.008336	0.064153	0.007083	0.064349
0.10	0.009059	0.070808	0.007696	0.070930
0.20	0.010412	0.083453	0.008762	0.083125
0.30	0.011676	0.095740	0.009704	0.095062
0.40	0.012898	0.108307	0.010584	0.107776
0.50	0.014123	0.121789	0.011416	0.122061
0.60	0.015396	0.136824	0.012164	0.138477
0.70	0.016764	0.154048	0.012745	0.157347
0.80	0.018270	0.174096	0.013026	0.178755
0.90	0.019960	0.197606	0.012825	0.202549
1.00	0.021881	0.225214	0.011911	0.228340

suem um termo $\ln(\sigma v - 1)$ que é singular no ponto $v = 1/\sigma$.

Entretanto, é necessário uma pesquisa mais aprofundada neste sentido.

Pelo motivo exposto no parágrafo anterior, outros modos para a obtenção dos resultados foram testados, que são citados a seguir:

- 1) Selecionar-se apenas os autovalores pertencentes ao intervalo $(0, 1/\sigma)$ (além do autovalor discreto).
- 2) Selecionar-se os autovalores contínuos nos intervalos $(0, 1/\sigma)$ e $(1/\sigma, 1)$, não utilizando-se, no entanto, as funções $B_i^{(2)}(v)$, ainda que o autovalor pertença ao intervalo $(1/\sigma, 1)$, isto é, considera-se apenas as equações para $v \in (0, 1/\sigma)$, indiferentemente se o autovalor pertence ao intervalo $(0, 1/\sigma)$ ou $(1/\sigma, 1)$.
- 3) As funções $B_i^{(2)}(v)$ podem ser representados como sendo expressões do tipo: $R_i(v) + S_i(v)\ln(\sigma v - 1)$, onde $R_i(v)$ e $S_i(v)\ln(\sigma v - 1)$ são funções linearmente independentes. Assim, nas equações para os autovalores pertencentes ao intervalo $(1/\sigma, 1)$, utiliza-se $R_i(v)$ e/ou $S_i(v)$, ao invés de $B_i(v)$.

Para o esquema 1, $m_2 = 0$. Entretanto, como $K = 1$, a igualdade (4.36) é modificada para:

$$2(N+1) = K + m_1 + (m_1 - 1) \quad 7.1.1.2$$

No intervalo $(0, 1/\sigma)$, tem-se que para cada autovalor selecionado existem 2 equações distintas, independentes, como citado anteriormente. Entretanto como o número total de equações é par, utiliza-se m_1 equações de um tipo e $m_1 - 1$ equações do outro tipo.

As Tabelas VII.2.1.5 e VII.2.1.6 apresentam os resultados para os casos 1 e 2 respectivamente, nas ordens de expansão 3, 4 e 5, onde se considerou uma equação a menos no conjunto de equações em que $\alpha = 2$ (equação do segundo tipo).

As Tabelas VII.2.1.7 e VII.2.1.8 apresentam os resultados para os casos 1 e 2 respectivamente, nas ordens de expansão 3, 4 e 5, onde se considerou uma equação a menos para $\alpha = 1$.

Os resultados obtidos fazendo-se $m_2 = 0$, apresentados nas Tabelas VII.2.1.5 a VII.2.1.8, concordam mais com os resultados de referência (Tabela VII.2.1.2) do que quando existem autovalores no intervalo $(1/\sigma, 1)$. Entretanto, os valores ainda são imprecisos, e sua precisão não aumenta quando a ordem de expansão do F_N é maior. Para $N \geq 6$ (foi calculado até $N = 8$ nos dois casos) os resultados divergem sensivelmente dos valores esperados.

Para o segundo modo de selecionar-se os autovalores, isto

TABELA VII.2.1.5- Fluxos Angulares para o Caso 1

μ	$N=3, m_1=7$		$N=4, m_1=9$		$N=5, m_1=11$	
	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$
0.05	0.004889	0.016694	0.004626	0.016984	0.005038	0.016796
0.10	0.005348	0.018474	0.005065	0.018786	0.005517	0.018575
0.20	0.006206	0.021786	0.005856	0.022046	0.006374	0.021755
0.30	0.007001	0.024835	0.006570	0.025064	0.007163	0.024743
0.40	0.007753	0.027703	0.007239	0.028033	0.007930	0.027687
0.50	0.008481	0.030470	0.007882	0.031064	0.008696	0.030566
0.60	0.009205	0.033217	0.008507	0.034192	0.009473	0.033302
0.70	0.009945	0.036024	0.009109	0.037373	0.010269	0.035866
0.80	0.010722	0.038974	0.009670	0.040483	0.011107	0.038386
0.90	0.011554	0.042146	0.010158	0.043320	0.012037	0.041257
1.00	0.012463	0.045621	0.010530	0.045601	0.013145	0.045241

TABELA VII.2.1.6 - Fluxos Angulares para o Caso 2

μ	$N=3, m_1 = 7$		$N = 4, m_1 = 9$		$N = 5, m_1 = 11$	
	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$
0.05	0.009109	0.064110	0.008099	0.064865	0.008099	0.064166
0.10	0.008808	0.070744	0.008807	0.071565	0.008807	0.070568
0.20	0.010120	0.083327	0.010096	0.084012	0.010071	0.082670
0.30	0.011347	0.095550	0.011279	0.096339	0.011234	0.094716
0.40	0.012523	0.108079	0.012417	0.109566	0.012372	0.107350
0.50	0.013679	0.121581	0.013552	0.124308	0.013519	0.120527
0.60	0.014851	0.136723	0.014710	0.140772	0.014692	0.134368
0.70	0.016072	0.154171	0.015898	0.158758	0.015898	0.149906
0.80	0.017376	0.174593	0.017104	0.177659	0.017162	0.169841
0.90	0.018796	0.198654	0.018301	0.196461	0.018533	0.199292
1.00	0.020365	0.227021	0.019442	0.213740	0.020109	0.246548

TABELA VII.2.1.1.7- Fluxos Angulares para o Caso 1

μ	$N = 3, m_1 = 7$		$N = 4, m_1 = 9$		$N = 5, m_1 = 11$	
	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$
0.05	0.004155	0.017083	0.005594	0.016558	0.003668	0.017360
0.10	0.004537	0.018874	0.006128	0.018354	0.004013	0.019128
0.20	0.005257	0.022174	0.007125	0.021593	0.004608	0.022285
0.30	0.005913	0.025216	0.008060	0.024610	0.005107	0.025256
0.40	0.006500	0.028145	0.008970	0.027578	0.005535	0.028174
0.50	0.007012	0.031105	0.009898	0.030526	0.005895	0.031050
0.60	0.007443	0.034238	0.010887	0.033332	0.006167	0.033985
0.70	0.007787	0.037690	0.011987	0.035729	0.006300	0.037364
0.80	0.008040	0.041604	0.013246	0.037302	0.006209	0.042058
0.90	0.008194	0.046123	0.014719	0.037491	0.005769	0.049627
1.00	0.008245	0.051393	0.016461	0.035586	0.004810	0.062520

TABELA VII.2.1.8 - Fluxos Angulares para o Caso 2

μ	$N = 3, m_1 = 7$		$N = 4, m_1 = 9$		$N = 5, m_1 = 11$	
	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$
0.05	0.007094	0.063914	0.009691	0.065674	0.006330	0.062951
0.10	0.007685	0.070459	0.010549	0.072559	0.006875	0.069164
0.20	0.008822	0.082768	0.012185	0.085402	0.007825	0.080558
0.30	0.009882	0.094702	0.013746	0.098138	0.008627	0.091833
0.40	0.010848	0.107063	0.015288	0.112370	0.009324	0.103315
0.50	0.011701	0.120652	0.016899	0.127828	0.009936	0.114964
0.60	0.012421	0.136271	0.018698	0.144367	0.010430	0.127467
0.70	0.012991	0.154722	0.020836	0.160970	0.010698	0.143331
0.80	0.013392	0.176805	0.023494	0.175943	0.010528	0.167974
0.90	0.013605	0.203322	0.026881	0.186922	0.009577	0.210820
1.00	0.013611	0.235075	0.031240	0.190864	0.007347	0.286386

é, m_1 autovalores igualmente espaçados nos intervalos $(0, 1/\sigma)$ e $(1/\sigma, 1)$, utilizando-se apenas as equações para o intervalo $(0, 1/\sigma)$ e do primeiro tipo ($\alpha = 1$), os resultados foram obtidos até a ordem de expansão 8. Nas Tabelas VII.2.1.9 e VII.2.1.10, os resultados para os casos 1 e 2, respectivamente, e nas ordens de aproximação 3, 4 e 5, são apresentados.

Os resultados apresentados nas tabelas são razoavelmente satisfatórios e, de modo geral, concordam mais com os valores da Tabela VII.2.1.2, conforme a ordem de expansão é elevada de 3 até 5. Contudo, para as ordens de expansão $N = 6$ até $N = 8$ - os resultados, embora se mantenham próximos dos valores esperados, não convergem assintoticamente para os mesmos à medida em que a ordem de expansão é aumentada de 6 até 8.

Selecionando-se os autovalores da forma convencional, isto é, igualmente espaçados nos intervalos $(0, 1/\sigma)$ e $(1/\sigma, 1)$, mas substituindo-se $B_1^{(2)}(\nu)$ por $R_1(\nu)$, os resultados para os fluxos angulares não são precisos. Nas Tabelas VII.2.1.11 e VII.2.1.12, alguns valores são apresentados para as ordens de expansão $N = 1$ até $N = 4$ (os cálculos foram feitos até $N = 8$) considerando-se $m_2 = 1$, ou seja, apenas um autovalor no intervalo $(1/\sigma, 1)$. Observa-se que apesar de não ocorrerem valores negativos, os resultados são imprecisos e não tendem aos valores esperados da referência, dados pela Tabela VII.2.1.2, quando a ordem de expansão é elevada de $N = 1$ até 4. Verificou-se que considerando-se mais autovalores no intervalo $(1/\sigma, 1)$ ou para ordens de expansão $N > 4$, a precisão tende a piorar, ocorrendo valores negativos às vezes.

TABELA VII.2.1.1.9- Fluxos Angulares para o Caso 1

μ	$N = 3, \quad m_1 = 7$		$N = 4, \quad m_1 = 9$		$N = 5, \quad m_1 = 11$	
	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$
0.05	0.004739	0.016716	0.004762	0.016809	0.004779	0.016870
0.10	0.005174	0.018467	0.005209	0.018592	0.005231	0.018659
0.20	0.005003	0.021797	0.006038	0.021889	0.006054	0.021909
0.30	0.006782	0.024937	0.006803	0.024952	0.006806	0.024931
0.40	0.007522	0.027938	0.007524	0.027896	0.007518	0.027875
0.50	0.008231	0.030848	0.008218	0.030805	0.008210	0.030808
0.60	0.008917	0.033719	0.008898	0.033730	0.008893	0.033744
0.70	0.009590	0.036601	0.009573	0.036688	0.009571	0.036675
0.80	0.010257	0.039542	0.010247	0.039663	0.010247	0.039604
0.90	0.010928	0.042595	0.010922	0.042606	0.010918	0.042575
1.00	0.011611	0.045808	0.011595	0.045436	0.011587	0.045705

TABELA VII.2.1.10 - Fluxos Angulares Para o Caso 2

μ	$m_1 = 7$		$m_1 = 9$		$m_1 = 11$	
	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$
0.05	0.008010	0.063996	0.008048	0.064134	0.008079	0.063481
0.10	0.008675	0.070539	0.008733	0.070730	0.008777	0.071002
0.20	0.009960	0.083210	0.010031	0.083331	0.010070	0.083441
0.30	0.011197	0.095763	0.011254	0.095840	0.011273	0.095725
0.40	0.012401	0.108723	0.012433	0.108713	0.012430	0.108599
0.50	0.013589	0.122617	0.013592	0.122570	0.013577	0.122547
0.60	0.014775	0.137969	0.014756	0.137948	0.014738	0.137937
0.70	0.015977	0.155305	0.015945	0.155348	0.015934	0.155176
0.80	0.017209	0.175149	0.017180	0.175236	0.017177	0.174854
0.90	0.018487	0.198028	0.018475	0.198046	0.018476	0.197898
1.00	0.019827	0.224465	0.019847	0.224174	0.019842	0.225718

TABELA VII.2.1.11- Fluxos Angulares para o Caso I

μ	$N=1, m_1=1, m_2=1$		$N=2, m_1=2, m_2=1$		$N=3, m_1=3, m_2=1$		$N=4, m_1=4, m_2=1$	
	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$
0.05	0.004270	0.016626	0.005257	0.016415	0.004167	0.017076	0.005605	0.016552
0.10	0.004596	0.012251	0.005716	0.018162	0.004550	0.018867	0.006140	0.018350
0.20	0.005248	0.021501	0.006644	0.021508	0.005273	0.022167	0.007140	0.021587
0.30	0.005900	0.024751	0.007585	0.024657	0.005931	0.025210	0.008077	0.024604
0.40	0.006552	0.028002	0.008536	0.027610	0.006521	0.028138	0.008990	0.027573
0.50	0.007203	0.031252	0.009500	0.030366	0.007036	0.031094	0.009921	0.030520
0.60	0.007855	0.034502	0.010476	0.032925	0.007472	0.034221	0.010915	0.033322
0.70	0.008507	0.037752	0.011464	0.035289	0.007823	0.037662	0.012020	0.035710
0.80	0.009159	0.041003	0.012464	0.037455	0.008084	0.041560	0.013288	0.037266
0.90	0.009811	0.044253	0.013475	0.039426	0.008250	0.046057	0.014772	0.037424
1.00	0.010463	0.047503	0.014499	0.041199	0.008316	0.051296	0.016530	0.035470

TABELA III.2.1.12 - Fluxos Angulares para o Caso 2

μ	$N = 1, m_1 = 1, m_2 = 1$		$N = 2, m_1 = 2, m_2 = 1$		$N = 3, m_1 = 3, m_2 = 1$		$N = 2, m_1 = 4, m_2 = 1$	
	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$	$I_1(0, -\mu)$	$I_2(0, -\mu)$
0.05	0.063850	0.060428	0.015091	0.065614	0.007320	0.063958	0.010529	0.066100
0.10	0.073918	0.065217	0.016062	0.073048	0.007935	0.070523	0.011464	0.073081
0.20	0.091045	0.074795	0.018593	0.087314	0.009111	0.082892	0.013285	0.086134
0.30	0.099173	0.084372	0.021905	0.100778	0.010208	0.094891	0.015044	0.099390
0.40	0.097300	0.093950	0.025999	0.113442	0.011221	0.107289	0.016799	0.113846
0.50	0.065428	0.103527	0.030875	0.125304	0.012141	0.120859	0.018660	0.129681
0.60	0.073555	0.113105	0.036533	0.136365	0.012962	0.136372	0.020798	0.146860
0.70	0.081683	0.122682	0.042973	0.146624	0.013677	0.154599	0.023436	0.162134
0.80	0.089810	0.132260	0.050195	0.156083	0.014278	0.176313	0.026857	0.175040
0.90	0.097938	0.141837	0.058199	0.164740	0.014759	0.202284	0.031397	0.181901
1.00	0.106065	0.151415	0.066985	0.172596	0.015113	0.233284	0.037450	0.178824

Quando $B_{-1}^{(2)}(v)$ é substituído por $S_{-1}(v)$, os resultados são totalmente desprovidos de significado.

7.2.2- Problema de Criticalidade

Para este problema utilizou-se dois conjuntos de secções de choque, um para o meio multiplicador e o outro para o refletor, conforme Tabela VII.2.2.1 extraídos da bibliografia /17/, onde foram considerados os seguintes intervalos de energia para os dois grupos.

Grupo 1 - 0.0 a 0.3 e V,

Grupo 2 - 0.3 e V a 15.0 Mev.

Os autovalores discretos positivos correspondentes a cada conjunto de secções de choque são apresentados na Tabela VII.2.2.2. Nota-se que existem, para cada meio, 2 pares de autovalores ($K_{\ell}=2$, $\ell = 1,2$, ou simplesmente $K = 2$). Este número de autovalores discretos decorre das propriedades físicas de ambos materiais.

Os autovalores foram selecionados (além dos autovalores discretos, para cada meio), nos intervalos $(0, 1/\sigma)$ e $(1/\sigma, 1)$ obedecendo a relação de igualdade (6.2.1.21), considerando-se os mesmos autovalores para ambos os meios ($m_1 = m_{11} = m_{12}$, $m_2 = m_{21} = m_{22}$).

TABELA VII.2.2.1- Secções de Choque Macroscópicas(*)

Secção de choque \ Conjunto	Conjunto	
	Cerne Multiplicador	Refletor
σ_4	2.9727	2.9865
σ_2	0.88721	0.88798
σ_{s11}	2.983	2.9676
σ_{s12}	0.04635	0.04749
σ_{s21}	0.000767	0.000336
σ_{s22}	0.83892	0.83975
$v_{s1} \sigma_{f1}$	0.07391	-
$v_{s2} \sigma_{f2}$	0.00209	-
χ_1	0.0	-
χ_2	1.0	-

(*) Expressas em cm^{-1}

TABELA VII.2.2.2 - Autovalores discretos positivos.

Conjunto	Autovalores	
	v_1	v_2
Cerne Multiplicador	i 4.72108596	1.15212848
Refletor	2.60401996	2.12297930

Para este trabalho, a solução numérica do problema de criticalidade restringiu-se apenas à pesquisa da meia distância - crítica, não sendo considerado o fluxo de nêutrons no sistema. Como citado no Capítulo 6, dois casos distintos foram considerados: sistema com refletor finito e sistema com refletor infinito.

Os resultados obtidos neste trabalho foram sempre confrontados com os resultados obtidos pelo método exato apresentados na publicação "Numerical Solutions of Two-Media Problems in Two Group Neutron Transport Theory" por Yuji Ishiguro and Roberto D.M. Garcia /17/. Esses resultados são reproduzidos na Tabela VII.2.2.3.

Os resultados para a meia distância crítica foram insatisfatórios quando se considerou autovalores no intervalo $(1/\sigma, 1)$, analogamente ao que ocorreu para o problema de Milne quando autovalores nesse intervalo foram considerados.

Para a situação particular em que somente são considerados autovalores no intervalo $(0, 1/\sigma)$ e $(m_2 = 0)$, os resultados obtidos se aproximam dos esperados, como se observa na Tabela VII.2.2.4 para as ordens de expansão de 1 a 5. Confrontando-se estes resultados com os valores da Tabela VII.2.2.3, que são os valores esperados, nota-se que existe uma concordância razoável. Entretanto, não ocorre convergência assintótica com o aumento na ordem de expansão.

TABELA VII.2.2.3 - Meia Espessura Crítica (α_1)

Espessura do Refletor	α_1 (l.c.m) (*)
1.0	5.94147
2.0	5.22752
3.0	4.75065
5.0	4.31485
∞	4.15767

(*) Expressa em Livres Caminhos Médios do Grupo 2 no Meio Multiplicador.

TABELA VII.2.2.4- Meia Espessura Crítica (α_1)

Espessura do Refletor	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5
	$K = 2$ $m_1 = 1$	$K = 2$ $m_1 = 2$	$K = 2$ $m_1 = 3$	$K = 2$ $m_1 = 4$	$K = 2$ $m_1 = 5$
1.0	5.94123	5.94255	5.93676	5.95327	5.91271
2.0	5.22852	5.22863	5.22509	5.23360	5.21242
3.0	4.75215	4.75114	4.75013	4.75184	4.75242
5.0	4.31661	4.31430	4.31635	4.30985	4.33707
∞	4.15948	4.15661	4.16003	4.14981	4.18907

Os tempos de computação (C.P.U.) e o número de iterações necessários , para se obter um refinamento na meia distância crítica (α_1) até a sexta casa decimal, são apresentados na Tabela VII.2.2.5, para as ordens de expansão 1 e 5 e espessuras de refletor: 1.0, 5.0 e infinita.

Pela tabela, observa-se que o método F_N no modelo de dois grupos, para problemas tipo placa plana, envolvendo variáveis complexas , é computacionalmente econômico quando comparado ao método de Case, pois, este último requer um tempo de computação da ordem de 53 a 60 minutos, conforme citado na referência /17/, para o mesmo sistema com refletor infinito.

TABELA VII.2.2.5- Tempo de Computação e Número de Iterações

Ordem de Expansão Espes sura do Refletor	1		5	
	C.P.U. (seg.)	Número de Iterações	C.P.U. (seg)	Número de Iterações
1.0	20.6	2	24.6	3
5.0	20.2	2	24.6	3
∞	17.3	2	21.0	3

8. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Neste trabalho, o método F_N , que é um novo método aproximado para solução de problemas da teoria de transporte e que está sendo desenvolvido, foi considerado nos modelos de um e dois grupos com espalhamento isotrópico em geometria plana.

No modelo de um grupo, o método já estabelecido anteriormente, foi aplicado na solução do problema de criticalidade do reator com três regiões. Os resultados confirmaram, para o caso que envolve a variável complexa, que as conclusões das pesquisas anteriores, isto é, que o método F_N é fácil de se usar nos problemas de multi-regiões, e que os resultados numéricos são precisos bem como os cálculos necessários para a solução através do computador são fáceis e rápidos.

No modelo de dois grupos, a teoria do método F_N foi desenvolvida e aplicada na solução de problemas padrões da teoria de transporte de nêutrons. Os resultados mostram que a precisão depende da seleção utilizada para os autovalores. As causas prováveis deste comportamento, foram discutidas, e as direções de pesquisa para se estabelecer o método F_N no modelo de dois grupos, ficam assim sugeridas, ou seja, investigar-se um esquema de seleção otimizado.

APÊNDICE A - DETALHES DEDUTIVOS DAS FUNÇÕES $A_\alpha(\xi)$ E $B_\alpha(\xi)$
 E FORMULÁRIO DAS EXPRESSÕES ANALÍTICAS DE
 $A_1(\xi)$ E $B_1(\xi)$.

Neste Apêndice alguns detalhes para a obtenção das expressões analíticas de $A_\alpha(\xi)$ e $B_\alpha(\xi)$, do modelo de um grupo, são considerados. Aqui também se inclui as expressões finais das funções $A_1(\xi)$ e $B_1(\xi)$, do modelo de dois grupos.

A.1- Modelo de um Grupo - Funções $A_\alpha(\xi)$ e $B_\alpha(\xi)$

As expressões para $A_\alpha(\xi)$ e $B_\alpha(\xi)$ são derivadas - partindo-se das definições dadas por (3.16) e (3.17), reescritas a seguir.

$$A_\alpha(\xi) = \frac{2}{c\xi} \int_0^1 \phi(-\xi, \mu) \mu^{\alpha+1} d\mu \quad \text{A.1.1}$$

$$B_\alpha(\xi) = \frac{2}{c\xi} \int_0^1 \phi(\xi, \mu) \mu^{\alpha+1} d\mu \quad \text{A.1.2}$$

Como o intervalo de integração sobre μ , nas definições (A.1.1) e (A.1.2) é positivo, as autofunções (2.3.15) e (2.3.17), utilizadas no integrando são dadas por:

$$\phi(v_0, \mu) = \frac{cv_0}{2} \frac{1}{v_0 - \mu}, \quad \text{A.1.3}$$

$$\phi(-v_0, \mu) = \frac{cv_0}{2} \frac{1}{v_0 + \mu}, \quad \text{A.1.4}$$

$$\phi(v, \mu) = \frac{c}{2} Pv \frac{v}{v - \mu} + \lambda(v) \delta(v - \mu), \quad v \geq 0, \mu \geq 0, \quad \text{A.1.5}$$

$$\phi(-v, \mu) = \frac{c}{2} \frac{v}{v + \mu}, \quad v \geq 0, \mu \geq 0 \quad \text{A.1.6}$$

$$\text{onde, } \lambda(v) = \frac{c}{2} Pv \int_{-1}^1 \frac{v}{v - \mu} d\mu \quad \text{A.1.7}$$

As expressões (A.1.4) e (A.1.6) podem ser expressas para todo $\xi = v_0$ ou $v \in (0, 1)$ como sendo:

$$\phi(-\xi, \mu) = \frac{c\xi}{2} \frac{1}{\xi + \mu} \quad \text{A.1.8}$$

As expressões para $A_\alpha(\xi)$ são facilmente obtidas introduzindo-se (A.1.8) na definição (A.1.1). No integrando sempre ocorre o termo: $\frac{\mu^{\alpha+1}}{\mu + \xi}$. Este termo é desdobrado em uma soma de dois termos, i.e., $\mu^\alpha - \frac{\xi\mu^\alpha}{\mu + \xi}$.

Para $\alpha > 0$, o primeiro termo é integrado (μ^α), o segundo termo permanece no integrando, e após algumas manipulações algébricas resulta:

$$A_\alpha(\xi) = \frac{1}{\alpha + 1} - \xi A_{\alpha-1}(\xi), \quad \xi = v_0 \text{ ou } v \in (0,1) \quad \text{A.1.9}$$

Para $\alpha = 0$, a integral é efetuada, obtendo-se:

$$A_0(\xi) = 1 - \xi \ln\left(\frac{1+\xi}{\xi}\right), \quad \xi = v_0 \text{ ou } v \in (0,1) \quad \text{A.1.10}$$

As equações (A.1.9) e (A.1.10) simplificam o cálculo de todas as funções $A_\alpha(\xi)$ usando-se essa recorrência.

As expressões para $B_\alpha(\xi)$ são derivadas em seguida separadamente para $\xi = v \in (0,1)$ e $\xi = v_0$.

$$(1) \quad \xi = v \in (0,1)$$

Utilizando-se a expressão da (A.1.5) na definição (A.1.2), obtêm-se (para $\xi = v$):

$$B_\alpha(v) = \frac{2}{cv} \int_0^1 \mu^{\alpha+1} \left[\frac{cv}{2} p v \frac{1}{v-\mu} + \lambda(v) \delta(v-\mu) \right] d\mu,$$

A.1.11

$$B_\alpha(v) = \frac{2}{cv} \int_0^1 \mu^\alpha \left[\frac{cv}{2} p v \frac{\mu}{v-\mu} + \mu \lambda(v) \delta(v-\mu) \right] d\mu,$$

Substituindo-se $\frac{\mu}{v-\mu}$ por $\frac{v}{v-\mu} - 1$, no primeiro termo do integrando e μ por v no termo $\mu\lambda(v)\delta(v-\mu)$, que não altera a integral desse termo, obtém-se após um arranjo na expressão:

$$B_{\alpha}(v) = -\frac{1}{\alpha+1} + v \frac{2}{c v} \int_0^1 \mu^{\alpha} \left[\frac{c v}{2} P v \frac{1}{v-\mu} + \lambda(v) \delta(v-\mu) \right] d\mu, \quad \text{A.1.12}$$

e finalmente, de acordo com definição (A.1.2), obtém-se:

$$B_{\alpha}(v) = \frac{1}{\alpha+1} + v B_{\alpha-1}(v), \quad \alpha \geq 1 \quad \text{A.1.13}$$

Para $\alpha = 0$, tem-se de (A.1.12)

$$B_0(v) = -1 + \int_0^1 P v \frac{v}{v-\mu} d\mu + \frac{2}{c} \lambda(v) \quad \text{A.1.14}$$

Introduzindo (A.1.7) na expressão (A.1.14), obtém-se :

$$B_0(v) = \frac{2}{c} - 1 + P v \int_0^1 \frac{v}{v-\mu} d\mu - P v \int_0^1 \frac{v}{v-\mu} d\mu - P v \int_{-1}^0 \frac{v}{v-\mu} d\mu \quad \text{A.1.15}$$

$$B_0(v) = \frac{2}{c} - 1 - v \int_0^1 \frac{1}{v+\mu} d\mu \quad \text{A.1.16}$$

$$B_0(v) = \frac{2}{c} - 1 - v \ln \frac{v+1}{v} \quad \text{A.1.17}$$

Utilizando-se a expressão (A.1.9) obtém-se:

$$B_0(v) = \frac{2}{c} - 2 + A_0(v) \quad \text{A.1.18}$$

$$(2) \quad \xi = v_0$$

Neste caso, introduzindo-se (A.1.3) na definição (A.1.2), e fazendo-se $\frac{\mu^{\alpha+1}}{-\mu + v_0} = -\mu^\alpha + \frac{v_0 \mu^\alpha}{-\mu + v_0}$, obtém-se:

$$B_\alpha(v_0) = -\int_0^1 \mu^\alpha d\mu + \frac{v_0}{c} \frac{2}{v_0} \int_0^1 \mu^\alpha \frac{c v_0}{2} \frac{1}{v_0 - \mu} d\mu \quad \text{A.1.19}$$

Para $\alpha \geq 1$ resulta:

$$B_\alpha(v_0) = \frac{1}{\alpha + 1} + v_0 B_{\alpha-1}(v_0)$$

Quando $\alpha = 0$, efetuando-se as integrais dos dois termos em (A.1.19), resulta após algumas passagens algébricas.

$$B_0(v_0) = v_0 \ln v_0 - v_0 \ln (v_0 - 1) - 1 \quad \text{A.1.20}$$

Utilizando-se a função de dispersão para $z = v_0$, conforme 2.3.13:

$$\Lambda(v_0) = 1 - \frac{c}{2} v_0 \ln \frac{v_0 + 1}{v_0 - 1} = 0 \quad \text{A.1.21}$$

$$\ln(v_0 - 1) = \ln(v_0 + 1) - \frac{2}{cv_0} \quad \text{A.1.22}$$

Introduzindo-se (A.1.22) em (A.1.20), obtêm-se:

$$B_0(v_0) = \frac{2}{c} - c - v_0 \ln \frac{v_0 + 1}{v_0}, \quad \text{A.1.23}$$

$$\text{ou } B_0(v_0) = \frac{2}{c} - 2 + A_0(v_0) \quad \text{A.1.24}$$

As expressões analíticas de $A_\alpha(\xi)$ e $B_\alpha(\xi)$, para $\xi=0$, são obtidas fazendo-se $\lim_{\xi \rightarrow 0} A_\alpha(\xi)$ e $\lim_{\xi \rightarrow 0} B_\alpha(\xi)$. De (A.1.9), (A.1.10), (A.1.13) e (A.1.18), obtêm-se :

$$A_\alpha(0) = \frac{1}{\alpha+1} \quad \text{A.1.25}$$

$$A_0(0) = 1 \quad \text{A.1.26}$$

$$B_\alpha(0) = -\frac{1}{\alpha+1} \quad \text{A.1.27}$$

$$B_0(0) = \frac{2}{c} - 1 \quad \text{A.1.28}$$

A.2 - Modelo de Dois Grupos - Função $A_{-1}(\xi)$ e $B_{-1}(\xi)$

As expressões $A_{-1}(\xi)$ e $B_{-1}(\xi)$, derivadas a partir das definições (4.31) e (4.32), respectivamente são apresentadas a seguir:

$$(1) \quad \underline{\xi = v_k \text{ ou } v \in (1/\sigma, 1)}$$

$$A_1^1(\xi) = \frac{c_{12}}{i+1} - \sigma \xi \quad A_{1-1}^1(\xi) \quad \text{A.2.1}$$

$$A_1^2(\xi) = \frac{f(\xi)}{i+1} - \xi A_{1-1}^2(\xi) \quad \text{A.2.2}$$

$$B_1^1(\xi) = -\frac{c_{12}}{i+1} + \sigma \xi \quad B_{1-1}^1(\xi) \quad \text{A.2.3}$$

$$B_1^2(\xi) = -\frac{f(\xi)}{i+1} + \xi \quad B_{1-1}^2(\xi) \quad \text{A.2.4}$$

$$A_0^1(\xi) = c_{12} \left(1 - \sigma \xi \ln \frac{1 + \sigma \xi}{\sigma \xi} \right) \quad \text{A.2.5}$$

$$A_0^2(\xi) = f(\xi) \left(1 - \xi \ln \frac{1 + \xi}{\xi} \right) \quad \text{A.2.6}$$

$$B_0^1(\xi) = -c_{12} \left(1 + \sigma \xi \ln \frac{\sigma \xi - 1}{\sigma \xi} \right) \quad \text{A.2.7}$$

As expressões $B_0^2(\xi)$ possuem estruturas analíticas diferentes para $\xi = v_k$ e $\xi = v \in (1/\sigma, 1)$, e as expressões são da das por:

$$B_0^2(v_k) = -f(v_k) \left(1 + v_k \ln \frac{v_k - 1}{v_k} \right) \quad \text{A.2.8}$$

$$B_0^2(v) = 1 - f(v) - v c_{11} \ln \frac{\sigma v + 1}{\sigma v - 1} - f(v) v \ln \frac{v + 1}{v} \quad \text{A.2.9}$$

$$(2) \quad \underline{\xi = v \in (0, 1/\sigma)}$$

Mediante a introdução das autofunções $\phi_\alpha^{(1)}(v, \mu)$, $\alpha=1,2$, nas definições (4.31) e (4.32), obtêm-se as funções :

$A_{-i,\alpha}^{(1)}(v)$ e $B_{-i,\alpha}^{(1)}(v)$, $\alpha = 1, 2$. As funções $A_{-i,\alpha}^{(1)}(v)$ $\alpha = 1, 2$ podem ser reunidas, sendo dadas para uma expressão matricial (2 x 2):

$$A_{-i}^{(1)}(v) = \frac{1}{i+1} \underline{C} - v \sum_{-i-1} A_{-i-1}^{(1)}(v), \quad i \geq 1 \quad \text{A.2.10}$$

Para $i = 0$:

$$A_{-0}^{(1)}(v) = \begin{bmatrix} 1 - \sigma v \ln \frac{\sigma v + 1}{\sigma v} & 0 \\ 0 & 1 - v \ln \frac{v + 1}{v} \end{bmatrix} \underline{C} \quad \text{A.2.11}$$

Da mesma forma:

$$B_{-i}^{(1)}(v) = - \frac{1}{i+1} \underline{C} + v \sum_{-i-1} B_{-i-1}^{(1)}(v), \quad i \geq 1 \quad \text{A.2.12}$$

$$B_{-0}^{(1)}(v) = \underline{E} - A_{-0}^{(1)}(v) \quad \text{A.2.13}$$

O vetor $A_{-i,\alpha}^{(1)}(v)$ é dado por:

$$A_{-i,\alpha}^{(1)}(v) = A_{-i}^{(1)}(v) \cdot \underline{k}, \quad \text{A.2.14}$$

$$\text{onde:} \quad \underline{k} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{se } \alpha = 1 \quad \text{A.2.15}$$

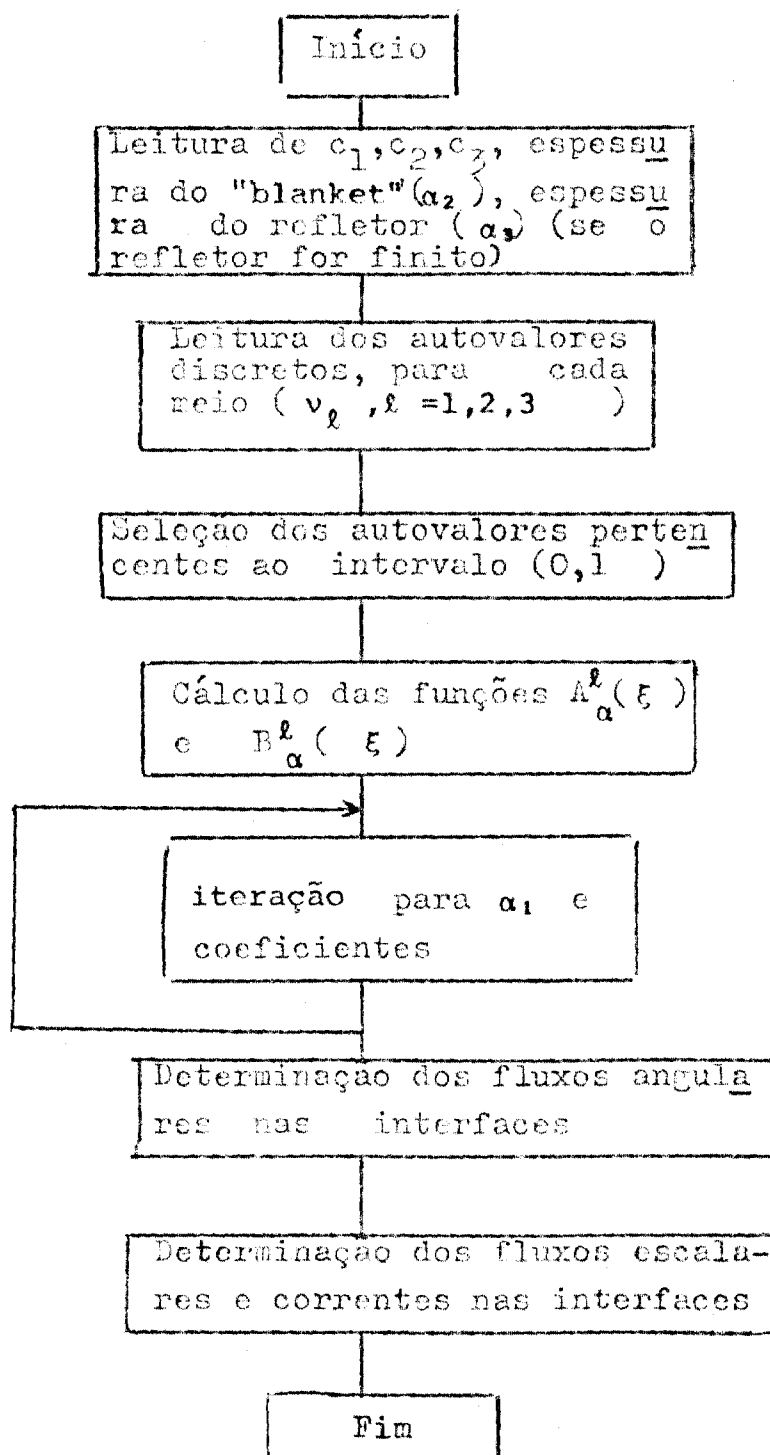
$$\text{e} \quad \underline{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{se } \alpha = 2 \quad \text{A.2.16}$$

O vetor $B_{-i,\alpha}^{(1)}(v)$ é dado na mesma maneira.

APÊNDICE B - PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL - MODELO DE UM GRUPO

Neste Apêndice o fluxograma e alguns detalhes referentes ao procedimento computacional no modelo de um grupo são apresentados:

FLUXOGRAMA



Os dados necessários para a determinação de α_1 e dos fluxos nas interfaces são: c_1, c_2, c_3, α_2 e α_3 , se o refletor for finito. O autovalor discreto para cada meio material também é lido, lembrando que para o meio multiplicador, $c_1 > 1$ e portanto $v_1 = i |v_1|$. Os autovalores pertencentes ao intervalo (0,1) são comuns aos três meios materiais. O autovalor nulo é escolhido e os restantes são selecionados de acordo com expressão (3.2.4).

Os valores de $A_\alpha(\xi_j)$ e $B_\alpha(\xi_j)$, para $\xi_j \neq 0$, são obtidos por intermédio das expressões (3.18) a (3.21). $A_\alpha(0)$ e $B_\alpha(0)$ são calculados através de (A.1.25) a (A.1.28). Um valor inicial $\alpha_1^{(0)}$ é assumido para a meia distância crítica, que é a expressão (5.1.38) com o termo logarítmico anulado, assim:

$$\alpha_1^{(0)} = \frac{\pi}{2} |v_1| \quad \text{B.1}$$

A solução do sistema de equações lineares foi descrita no Capítulo 5. Na solução do sistema de equações lineares algébricas utilizou-se o método de eliminação de Gauss-Seidel /20/. O refinamento para α_1 e os coeficientes foram considerados até a oitava casa decimal.

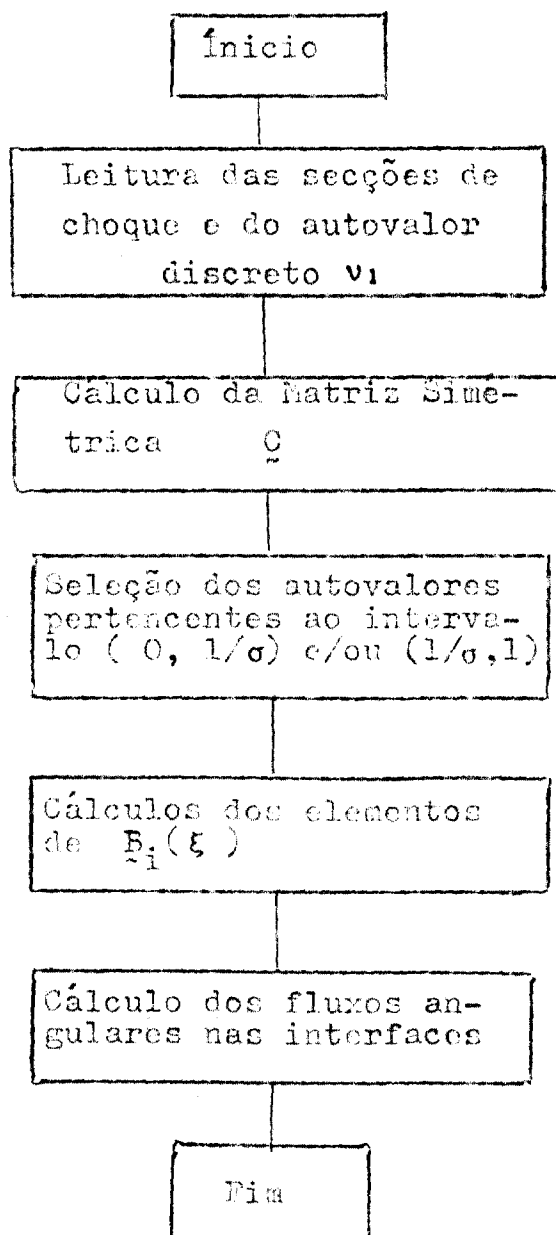
Os fluxos angulares nas interfaces foram calculados através das expressões (5.1.27) a (5.1.31) e os fluxos totais e correntes foram obtidos pelas expressões (7.1.3) a (7.1.8).

APÊNDICE C - PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL - MODELO DE DOIS GRUPOS

Neste Apêndice os fluxogramas e alguns detalhes sobre os procedimentos computacionais referentes aos problemas de Milne e da criticalidade são fornecidos.

C.1 - Problema de Milne

F L U X O G R A M A

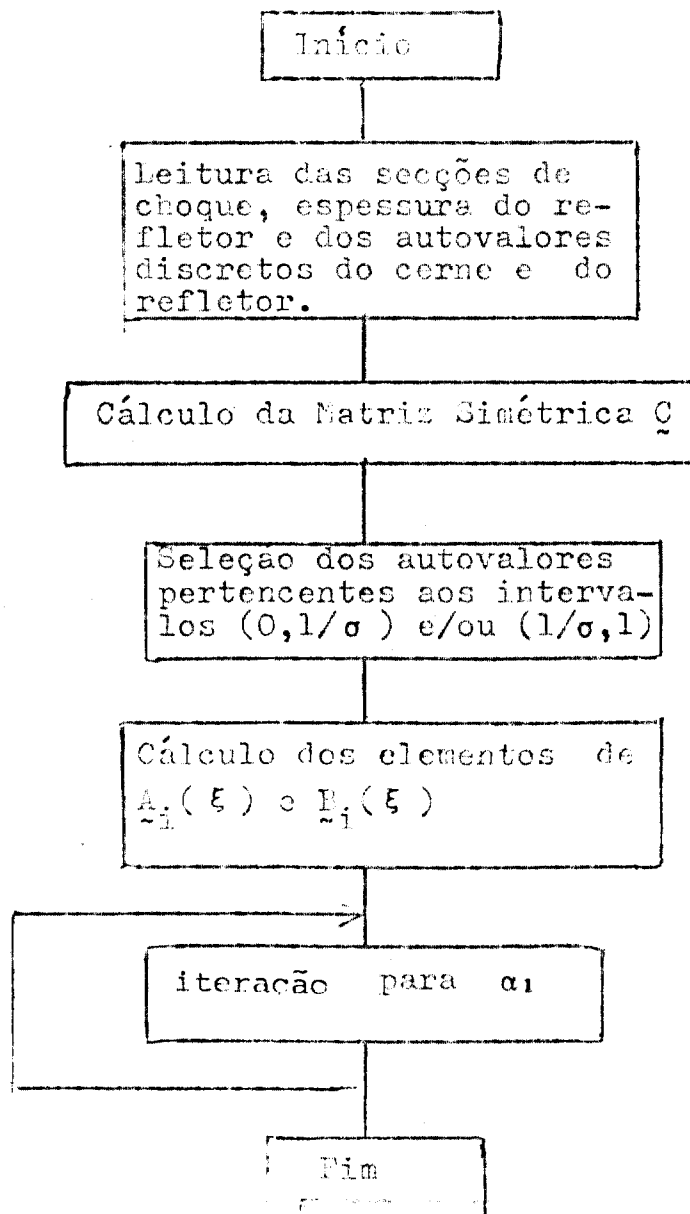


As expressões dos elementos de $B_i(\xi)$, necessárias para a solução do fluxo angular na interface são fornecidas na - secção 2 do Apêndice A.

Neste problema os coeficientes d_i^1 e d_i^2 foram determina dos mediante o método de eliminação de Gauss-Seidel /20/. O tempo de computação (C.P.U.) necessário para a solução é da ordem de 8.0 a 9.0 segundos para a ordem de aproximação 5.

C.2 - Problema de Criticalidade

F L U X O G R A M A



Os elementos de $A_i(\xi)$ e de $B_i(\xi)$ são dados no formulário da segunda secção do Apêndice A.

Inicialmente a meia distância crítica foi assumida como sendo:

$$\alpha_1^{(0)} = \frac{\pi}{2} |v_1| - \frac{v_1}{2} \ln \frac{B_0^{11}(v_1)}{A_0^{11}(v_1)} \quad C.2.1$$

O refinamento da meia distância crítica α_1 foi considerado até a sexta casa decimal.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. AMBARZUMIAN, V.A. Diffuse reflection of light by a foggy medium. C.R. Acad. Sci. USSR, 38:229-32, 1943.
2. BELL, G.I. & GLASSTONE, S. Nuclear reactor theory. New York, N.Y., Van Nostrand Reinhold, 1970.
3. BENOIST, P. & KAVENORY, A. A new method of approximation of the Boltzmann equation. Nucl. Sci. Engng, 32:225-32, 1968.
4. BURNISTON, E.E.; MULLIKIN, T.W.; SIEWERT, C.E. Steady - State solutions in two-group theory of neutron diffusion. J. math. Phys., 13:1461-65, 1972.
5. CARLSON, B.G. Solution of transport equation by S_N approximations. Los Alamos, N.M., Los Alamos Scientific Laboratory, 1953. (LA-1599).
6. CASE, K.M. Elementary solutions of the transport equation and their applications. Ann. Phys., 9:1-23, 1960.
7. CASE, K.M. & ZWEIFEL, P.F. Linear transport theory. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1967.
8. CHANDRASEKHAR, S. Radiative Transfer. London, Oxford University, 1950.
9. DAVISON, B. Angular distribution due to an isotropic point source and spherically symmetrical eigensolutions of the transport equation. Ottawa, Nat. Res. Coun. Can., 1945, (MT-112).
10. DAVISON, B. Neutron transport theory. London, Oxford University, 1957.

11. ERDMANN, R.C. & SIEWERT, C.E. Green's function for the one-speed transport equation in spherical geometry. J. math. Phys., 9:81-9, 1968.
12. GAKHOV, F.D. Boundary value problem. Reading, Mass. Addison-Wesley, 1966.
13. GARCIA, R.D. O problema da criticalidade para reatores tipo placa na teoria de transporte em dois grupos de energia. São Paulo, 1977. (Dissertação de mestrado. Instituto de Energia Atômica).
14. GRANDJEAN, P. & SIEWERT, C.E. The F_N method in neutron transport theory. Part. II: application and numerical results. Nucl. Sci. Engng., 69:161-8, 1979.
15. HOPF, E. Mathematical problems of radiative equilibrium. London, Cambridge University, 1934.
16. ISHIGURO, Y. On multi-region problems in plane geometry and the use of half-range orthogonality relations. Nucl. Sci. Engng., 65:191-6, 1978.
17. ISHIGURO, Y. & GARCIA, R.D. Numerical solutions of two media problems in two-group neutron transport theory. São Paulo, Instituto de Energia Atômica, dez. 1974. (IEA-Pub. 493).
18. ISHIGURO, Y. & SANTOS, A. Some Benchmark solutions problems in one-group transport theory. Atomkernenergie, 33:192-4, 1979.
19. KAVENOKY, A. The C_N method of solving the transport equation: application to plane geometry. Nucl. Sci. Engng., 65:209-25, 1978.

20. KELLY, L.C. Handbook of numerical methods and applications . London Addison-Wesley, 1967.
21. KUSCER, I.; McCORMICK, N.J.; SUMMERFIELD, G.C. Orthogonality of Case's eigen function in one-speed transport theory. Ann. Phys., 30:411-21, 1964.
22. KUSZELL, A. The critical problems for multilayer slab systems. Acta. phys. pol., 20:567-89, 1961.
23. LAMARSH, J.R. Introduction to nuclear reactor theory . Reading, Mass., Addison-Wesley, 1966.
24. McCORMICK, N.J. & KUSCER, I. Half-space neutron transport with linearly anisotropic scattering. J. math. Phys. 6:1939-45, 1965.
25. McCORMICK, N.J. & MENDELSON, M.R. Transport solution of the one-speed slab albedo problem. Nucl. Sci. Engng. , 20:462-7, 1964.
26. MAIA, C.R. Calculos em teoria de transporte no modelo de um grupo para células de três regiões. São Paulo, 1978, (Dissertação de Mestrado .Instituto de Energia Atômica)
27. MARK, J.C. The spherical harmonics method, I. Chalk River, Ont., National Research Council of Canada, 1957.(CRT-340).
28. METCALF, D.R. Solutions of the two-group transport equation in plane geometry. Ann Arbor, Mich. , 1968 (PhD . Thesis , University of Michigan).
29. MILNE, E.A. Radiative equilibrium in the outer layer of a star. Mon. Not. R. astr. Soc. London, 81:361, 1921.
30. MITSIS, G.J. Transport solution to the monoenergetic critical problems. Argonne, Ill., Argonne National Laboratory, 1963. (ANL-6787).

31. MUSKHELISHVILI, N.I. Singular integral equations. Groningen, Noordhoff, 1963.
32. PAHOR, S. & ZEEIFEL, P.F. Invariant Imbedding and Case Eigenfunctions. J. math. Phys., 10:222-6 , 1969.
33. SANTOS, A. Estudo numérico da criticalidade de reatores tipo placa com três regiões na teoria de transporte de um grupo. São Paulo, 1978. (Dissertação de Mestrado, Instituto de Energia Atômica, 1978).
34. SHURE, F. & NATELSON, M. Anisotropic scattering in half-space transport problems. Ann. Phys., 26:274-91, 1964.
35. SIEWERT, C.E. The F_N method for solving radiative - transfer problems in plane geometry. Nucl. Sci. Engng. , 69:161-8,
36. SIEWERT, C.E. On using the F_N method for polarization studies in finite plane-parallel atmospheres. J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer., 21:35-9, 1979.
37. SIEWERT, C.E. & BENOIST, P. The F_N method in neutron transport theory. Part. I: Theory and applications. Nucl. Sci. Engng., 69:156-60, 1979.
38. SIEWERT, C.E. & ISHIGURO, Y. Two-group neutron transport theory: Half-range orthogonality normalization integrals, applications and computations. J. nucl. Energy., 26: 251-69, 1972.
39. SIEWERT, C.E. & SHIEH, P.S. Two-group transport theory. J. nucl. Energy., 21:383-92, 1967.

40. SIEWERT, C.E. & ZWEIFEL, P.F. An exact solution of equations of radiative transfer for local thermodynamic equilibrium in the non-gray Case: picket fence approximation. Ann. Phys., 36:61-85, 1966.
41. SIEWERT, C.E.; BURNISTON, E.E.; KRIESE, J.T. Two-group neutron transport theory: existence and uniqueness of H-matrix. J. nucl. Energy., 26:469-82, 1972.
42. VAN KAMPEN, N.G. On the theory of stationary waves in plasmas. Physica, (Amsterdam), 21:949-63, 1955
43. WESTFALL, R.M. & METCALF, D.R. Singular eigenfunctions solution of the monoenergetic neutron transport equation for finite radially reflected critical cylinders. Nucl. Sci. Engng., 52:1-11, 1973.
44. WIGNER, E.P. Mathematical problems of nuclear reactor theory. Proc. Symp. appl. Math., 11:89, 1959.
45. ZELAZNY, R. Exact solution of a critical problem for a slab. J. math. Phys., 2:538-42, 1961.
46. ZELAZNY, R. & KUSZELL, A. Two-group approach in neutron transport theory in plane geometry. Ann. Phys., 16:81-5, 1961.