IX ENFIR - Caxambu, MG (Outubro 1993)

APLICAÇÕES DA TÉCNICA DE MODELOS AUTO-REGRESSIVOS NO CÁLCULO DE TEMPO DE RESPOSTA DE SENSORES EM INSTALAÇÕES NUCLEARES

Eduardo O. Assumpção Filho e Paulo R. L. Lopes
Coordenadoria para Projetos Especiais - COPESP-SP
Alvaro L. G. Carneiro e Aucyone A. da Silva
Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares - IPEN/CNEN-SP

RESUMO

Neste trabalho é apresentado um método de medida do tempo de resposta utilizando modelos auto-regressivos sobre os sinais estatísticos de sensores. O método apresenta a vantagem de ser realizado com a planta em operação normal sem interferência no processo monitorado.

INTRODUÇÃO

Os sistemas de segurança em uma instalação nuclear recebem informações dos sensores de temperatura, pressão e fluxo de neutrons. As informações devem ser precisas e , em caso de um transiente, devem ser recebidas rapidamente para iniciar a ação dos sistemas de segurança da instalação. A precisão é verificada periodicamente através de aferições e a velocidade do fluxo de informação é determinada pelo tempo de resposta do sensor, pelos equipamentos do canal de instrumentação e pela linha onde o sensor esta instalado . A precisão e o tempo de resposta são tratados em geral de forma independente. O escopo deste trabalho analisa a metodologia de obtenção do tempo de resposta de sensores de uma instalação qualquer, através de técnicas auto-regressivas sobre séries temporais [1,2,3].

MEDIDA DE TEMPO DE RESPOSTA

O tempo de resposta de um sensor é definido como o tempo requerido para a resposta do sensor atingir 63,2 porcento do valor da resposta final ou estado estacionario, para uma variação tipo degrau na variável monitorada. Este tempo pode ser medido em laboratório expondo o sensor a uma entrada do tipo degrau, rampa ou senoidal, tendo o incoveniente da retirada do sensor da instalação.

Dessa forma foram desenvolvidos testes de tempo de resposta "in-situ", cujo objetivo é estimar o modelo matemático da dinâmica do sensor. Até 1975, o único método bem conhecido para teste de tempo de resposta "in-situ" para sensores de processo era a Análise de Ruído. A partir de 1975, outros métodos foram desenvolvidos, validados, e utilizados, porém, não apresentando versatilidade. Estes testes são: teste Loop Current Step Response (LCSR), aplicável a sensores de temperatura do tipo resistência (Resistance Temperature Detectors - RTD) e do tipo termopares; teste Power Interrupt (PI), aplicado a transmissores de pressão do tipo balanço de forças produzidos pela Foxboro Co.; e o teste de rampa que envolve o uso de um gerador de rampa de pressão hidráulica para fornecer um sinal, simultâneamente, ao sensor de pressão e ao sensor de pressão de referência de resposta rápida.

A técnica de análise de ruído é especialmente util para teste de tempos de resposta de sensores porque, diferente dos outros métodos, ela considera a linha do sensor na instalação.

Na análise de ruído, um método que é potencialmente útil para medida do tempo de resposta de um sensor é a análise no domínio da frequência das flutuações dos sinais medidos pelo sensor. No domínio da frequência, a constante de tempo é estimada a partir da Densidade Espectral de Potência (PSD) das flutuações obtidas por algoritmos de Transformada Rápida de Fourier (FFT), obtendo-se a função de transferência do sensor. Já, o metodo aqui apresentado, é uma análise no domínio do tempo.

REGRESSÃO LINEAR E MODELOS AUTOREGRESSIVOS

A função

$$Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n \qquad (1)$$

define a variável dependente Y como uma combinação linear da variável independente X_i. Para uma sequência de N observações temos:

$$Y_j = a_0 + a_1X_{j1} + a_2X_{j2} + \ldots + a_nX_{jn} \qquad (2)$$

onde j=1,2,..N

Quando o número de observações N excede o número de parâmetros não podemos realizar uma regressão linear, em que se determinam os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ que melhor estimam o valor de Y a partir de $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

$$Y = \hat{a}_0 + \hat{a}_1X_1 + \hat{a}_2X_2 + \ldots + \hat{a}_nX_n + \text{erro} \qquad (3)$$

O método de mínimos quadrados (MMQ) pode ser usado para determinar a_i, tal que a soma dos quadrados da diferença entre Y observado e

Y estimado é mínima.

Tomando-se uma sequência de N números (com **média zero**) amostrados a intervalos de tempo T uniformes podemos combinar linearmente os n valores prévios de X para predizer o valor atual, ou seja:

$$X_{N-j} = a_1 X_{N-j-1} + a_2 X_{N-j-2} + \ldots + a_n X_{N-j-n} \qquad (4)$$

onde j=0,1,..,N-n-1

A auto-regressão obtida desta forma resulta em um modelo auto-regressivo de ordem n

Tomando $\{X_k\}$ e $\{U_{ik}\}$, i=1,2,...,p, denotando processos multivariáveis estocásticos ou sinais ergodicos estacionários vinculados, é $\{V_k\}$ uma sequência de ruído branco, podemos representar o processo $\{X_k\}$, de uma forma geral, por -

$$X_k = \sum_{i=1}^{\infty} A_i X_{k-i} + \sum_{i=1}^{\infty} B_{1i} U_{1,k-i} + \ldots + \sum_{i=1}^{\infty} B_{pi} U_{p,k-i} + \sum_{i=0}^{\infty} C_i V_{k-i} \qquad (5)$$

$\{A_i,\ B_{ki}\ (k=1,2,\ldots,p),\ C_i$ com $i>0\}$ são matrizes com coeficientes constantes. X_k é vetor de dimensão n x 1 e $U_{L,k}$ é um vetor de dimensão m x 1 para L=1,2,...,p. V é um vetor de dimensão m x 1. $\{U_L(.),\ L=1,\ldots,p\}$ é uma sequência de entrada de estatística conhecida.

Um caso especial é um sinal X_k unidimensional produzido por um ruído branco agregado V_k dado por

$$X_k = \sum_{i=1}^{\infty} A_i\ X_{k-i} + \sum_{i=1}^{\infty} C_i\ V_{k-i} + V_k \qquad (6)$$

Porém esta representação não é realizável.

Frequentemente os parâmetros são derivados de ordens de modelos auto-regressivos finitos

$$Xk = \sum_{i=1}^{n} A_i X_{k-i} + \sum_{i=1}^{m} C_i V_{k-i} + V_k \qquad (7)$$

Esta representação é conhecido por Processso Auto-regressivo de Média Móvel (ARMA), o qual é uma auto-regressão no qual é acrescentado um ruído branco operado por um filtro discreto.

$$X_k - \sum_{i=1}^{n} A_i X_{k-i} = V_k + \sum_{i=1}^{m} C_i\ V_{k-i} \qquad (8)$$

Note que os C_i's são computados recursivamente, partindo-se do começo da sequência. A expressão geral de A_{k-j} é obtida aplicando uma estimativa prévia dos parâmetros no próximo passo da série temporal

$$A_{k-j} = X_{k-1} - \sum_{i=1}^{n} A_i X_{k-j-i} + \sum_{i=1}^{m} C_i V_{k-j-i} \qquad (9)$$

que quando substituido na expressão ARMA torna a equação não linear. Logo é necessário realizar uma regressão não-linear com o método de mínimos quadrados para estimar os parâmetros da equação ARMA.

Se tomarmos a transformada Z da equação ARMA, podemos mostrar que as raízes do modelo auto-regressivo são raízes no plano z correspondente aos pólos e zeros da função de transferência que transforma o sinal branco no sinal observado.

Muitos casos especiais podem ser obtidos a partir de um processo ARMA.

- Modelo Auto-regressivo de Média Movel (ARMA)

$$X_k = \sum_{i=1}^{n} A_i X_{k-i} + \sum_{i=1}^{m} C_i V_{k-i} + V_k \qquad (10)$$

- Modelo Auto-regressivo (AR)

$$X_k = \sum_{i=1}^{n} A_i X_{k-i} + V_k \qquad (11)$$

- Modelo Auto-regressivo Generalizado

$$X_k = \sum_{i=1}^{n} A_i f(X_{k-i}) + V_k \qquad (12)$$

- Modelo de Média Movel (MA)

$$X_k = \sum_{i=1}^{m} C_i V_{k-i} + V_k \qquad (13)$$

- Modelo Regressivo

$$X_k = \sum_{i=1}^{n} B_i U_{k-i} + V_k \qquad (14)$$

ESTIMATIVA DO TEMPO DE RESPOSTA ATRAVÉS DO MODELO AR

Assumindo que a grandeza do processo que o sensor mede flutua aleatóriamente sem a superposição de sinais periódicos,sinais lentamente variáveis ou componentes DC, a flutuação no sinal medido pelo sensor pode ser representada por um modelo de série temporal do tipo AR (equação 11).

O procedimento adotado consiste em:

(a) Estimar os parâmetros do modelo;
(b) Selecionar o modelo de ordem ótima;
(c) Verificar a validade do modelo assumido; e
(d) Calcular as caracteristicas do sensor a partir do modelo assumido.

A estimativa dos parâmetros é realizada utilizando o MMQ sobre a equação 11.

Se V_k é um ruído branco, possui uma estatística não correlacionada com valores esperados

$$E[V_k] = 0 \text{ e } E[V_k^2] = \sigma^2 \text{ para qualquer K.} \qquad (15)$$

Define-se a função de auto-correlação do processo estocástico X_k para um atraso K, como o valor esperado de $X_t.X_{t+k}$

$$C_k = E\,[X_t \cdot X_{t+k}] \qquad (16)$$

sendo C_k simétrico.

Multiplicando-se a equação 11 por X_{t-k} obtém-se

$$X_{t-k}\, X_t = \sum_{i=1}^{n} A_i\, X_{t-i}\, X_{t-k} + X_{t-k}\, Vk \qquad (17)$$

e determinado os valores esperados

$$E[X_{t-k}X_t] = \sum_{i=1}^{n} A_i E[X_{t-i}X_{t-k}] + E[X_{t-k}V_k] \quad (18)$$

tem-se, devido a independencia de X_{t-k} com V_k,

$$C_k = \sum_{i=1}^{n} A_i\, C_{k-i} \quad \text{para } k>0 \qquad (19)$$

denominada de equação de Yule-Walker. Ou na forma matricial

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & C_{n-1} \\ C_1 & C_0 & & C_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n-1} & C_{n-2} & \cdots & C_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \qquad (20)$$

ou

$$C = P\ A$$

Logo os parâmetros do modelo AR de ordem n são calculados por

$$\hat{A} = P^{-1}\ C \qquad (21)$$

Pode ser desmonstrado que os parâmetros assim calculados tem incertezas dadas por:

$$E[(\hat{A}-A)(\hat{A}-A)^T] = \frac{\sigma^2}{N} \cdot P \qquad (22)$$

Calculado os parâmetros do modelo de ordem n, que melhor estimam os sinais observados, calcula-se a resposta do sensor à um sinal de entrada impulsivo. A resposta a impulso pode ser calculada recursivamente computando X_k como uma função prévia de X quando V_k=0 para k>0 e V_0=constante

$$X_k^I = \sum_{i=1}^{n} \hat{A}_i \cdot X_{k-i}^I \qquad (23)$$

Calculado a resposta do sensor à entrada impulso calcula-se a resposta à entrada degrau

$$X^S(t) = \int_0^t X^I(t')\ dt' \qquad (24)$$

utilizando uma simples integração trapezoidal no cálculo numérico da resposta à degrau.

O tempo de resposta pode ser obtido da resposta à degrau fazendo-se a interpolação linear no intervalo entre os instantes imediatamente acima e imediatamente abaixo de 63% do valor da resposta em t muito grande.

Pode-se ainda calcular o PSD do sinal Xk calculando

$$S_{xx}(f) = \sigma^2 \cdot T \div \left[\ 1 - \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \exp(-j \cdot 2\pi f i T)\ \right]^2 \qquad (25)$$

onde f é a frequência em Hz no intervalo [0, 1/(2T)].

CRITÉRIOS DE ESCOLHA DO MODELO AR ÓTIMO

Há muitos critérios para decidir objetivamente a seleção do melhor modelo [1]. É muito difícil escolher o modelo absolutamente ótimo baseado em um critério, por esta razão são utilizados vários critérios simultaneamente. Em geral estes critérios são baseados em teste de hipóteses que utilizam quantidades estatísticas.

Aproximação Probabilística (AIC). Este método é baseado em que a estimativa de (A,S) deve maximizar o valor logaritmo da função de densidade de probabilidade condicional para a medida com N observações, e para uma ordem n.

Dado os parâmetros (A,S) calcula-se o valor esperado do logaritmo da função de densidade de probabilidade para a medida com N observações, denominado de máxima probabilidade condicional (CML)

$$E[\ln p(X_N|(A,S))] = \ln p(X_N|(\hat{A},S)) - (n+1) \qquad (26)$$

Logo o critério utilizado é: dado um modelo de ordem n calcular o CML para os parâmetros (A,S). Calcula-se

$$L = \ln p(X_N \mid (A,S)) - (n+1) \qquad (27)$$

e escolhe-se o modelo de L máximo.

O cálculo de L requer o conhecimento da distribuição da sequência de ruído V_k. Em muitos casos assume-se que V_k tem distribuição Gaussiana.

$$p(X_N|(\hat{A},S)) = 1/(2\sigma^2)^{N/2}\ \exp(\ -1/2\sigma^2 \cdot \sum_{k=1}^{N} V_k^2) \qquad (28)$$

onde $V_k = X_k - \sum_{i=1}^{n} \hat{A}_i X_{k-i}$, $K=1,2,...,N$

Neste caso o MMQ e a equação de Yule-Walker dá a mesma estimativa que a dada pela máxima probabilidade Gaussiana, e L é calculado por

$$AIC = N \ln (\sigma^2) + 2n \quad (29)$$

Chama-se de critério AIC quando

$$\min AIC = N \ln (\sigma^2) + 2n^* \quad (30)$$

onde n^* é a ordem do modelo ótimo.

Estimativa do Erro Final (FPE). A Estimativa do Erro Final é definida como

$$FPE = E[(X_N - \hat{X})^2] \quad (31)$$

onde $XN = \sum_{i=1}^{n} A_i X_{N-i}$

A evolução de FPE assume que a medida que N aumenta, a depêndencia dos parâmetros com N desaparece. Ou seja, as estimativas de A são independentes dos valores das observações presentes ou recentes e que a estimativa de XN depende da estatística dos valores anteriores.

Para a equação de Yule-Walker a expressão para o cálculo do FPE é

$$(FPE)_n = \frac{N+n}{N-n} SS(n) \quad (32)$$

onde $SS(n) = C0 - \sum_{i=1}^{n} A_i C_i$

Chama-se de critério FPE quando

$$\min FPE = \frac{N+n^*}{N-n^*} SS(n^*) \quad (33)$$

onde n^* é a ordem do modelo ótimo.

Quando o ruído tem distribuição Gaussiana, o critério do (FPE)n se aproxima assintóticamente do critério do AIC.

$$\lim_{N\to\infty} \ln (FPE)_n = 1/N \quad AIC \quad (34)$$

Critério de Comparação Bayesiana (BPC). O critério de Bayes é derivado do fato de que a probabilidade do erro de seleção de um modelo ótimo é minimizado

$$\text{Probabilidade do Erro} = 1 - P(n_i|X_N) \quad (35)$$

onde i é um dos q modelos com parâmetros n_i.

Ou seja, a regra de decisão é

$$\max_{i\in\{1,2,...,q\}} P(ni \mid XN) \quad (36)$$

Para um processo AR com distribuição Gaussiana, o critério BPC é

$$\max BPC = N \ln \sigma_v^2 - n \ln N - n\{\ln(\sigma_y^2/\sigma_v^2)-1\} \quad (37)$$

onde σ_v^2 é a variância de V_k, σ_x^2 é a variância de X_k.

CONCLUSÃO

O método aqui apresentado é extremamente prático pois, além do fato de não ser necessária a retirada do sensor, permite sua realização com a planta em operação normal.

Esta metodologia está sendo utilizada na medida do tempo de resposta dos sensores do sistema de proteção da usina nuclear de ANGRA I, e vem apresentando bons resultados [4,5].

A existência de componentes periódicas no sinal fornecido pelo sensor impossibilita a utilização do modelo auto-regressivo, devendo ser utilizado o metodo ARMA através de uma regressão não-linear.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Upadhyaya, B.R.; Kerlin, T.W. **In-situ Response Time Testing of Platinum Resistance Thermometers**. Volume 2, Palo Alto, Eletric Power Research Institute, 1978. (EPRI-NP-834)

[2] Hashemian, H.M. et alii. Sensor Response Time Monitoring Using Noise Analysis. **Progress in Nuclear Energy**, 21:583-592, 1988.

[3] Currie, R.L. et alii. **ARMA Sensor Response Time Analisys**. Palo Alto, Eletric Power Research Institute, 1980. (EPRI-NP-1166)

[4] Assumpção Filho, E.O. et alii. Reavaliação do Método de Análise do Tempo de Resposta através da Técnica de Análise de Ruído. São Paulo, Coordenadoria para Projetos Especiais, 1992 (relatório interno).

[5] - Carneiro, A.L.G et alii. Medidas dos Tempos de Resposta dos Sensores de Segurança do Reator PWR ANGRA I Utilizando a Técnica de Análise de Ruído, a ser publicado no IX ENFIR.

Abstract

This paper presents a sensor response time measurement using autoregressive time series modeling. The main advantage of this method is it permits to perform all measurements while the plant is operating without any interference in the monitoring process.