



CNEN/SP

**ipen** Instituto de Pesquisas  
Energéticas e Nucleares

AUTARQUIA ASSOCIADA A UNIVERSIDADE  
DE SÃO PAULO

# DETERMINAÇÃO DAS PROPRIEDADES MODAIS DE ELEMENTOS COMBUSTÍVEIS UTILIZADOS EM REATORES TIPO PWR

**CARLOS EDUARDO TRINDADE**

Dissertação apresentada ao Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares como parte dos requisitos para obtenção do Grau de Mestre em Tecnologia Nuclear.

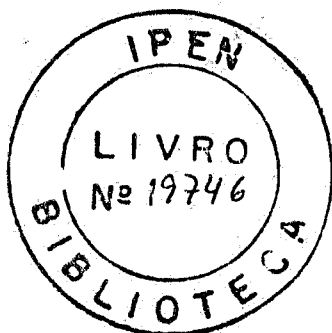
Orientador:  
Prof. Dr. Antonio Teixeira e Silva

São Paulo  
1992

INSTITUTO DE PESQUISAS ENERGÉTICAS E NUCLEARES  
AUTARQUIA ASSOCIADA À UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

DETERMINAÇÃO DAS PROPRIEDADES MODAIS DE ELEMENTOS  
COMBUSTÍVEIS UTILIZADOS, EM REATORES DO TIPO PWR

Carlos Eduardo Trindade



Dissertação apresentada ao Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Tecnologia Nuclear.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Teixeira e Silva, IPEN/CNEN-SP

SÃO PAULO

1992.

Aos meus pais.

À minha irmã.

## AGRADECIMENTOS

- A Coordenadoria para Projetos Especiais do Ministério da Marinha (COPESP) pelo apoio e incentivo constantes durante o desenrolar das atividades, contribuindo para a formação do corpo científico existente no país; bem como pelo fornecimento das instalações e equipamentos colocados à disposição, possibilitando a realização deste trabalho.
- Ao Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares da Comissão Nacional de Energia Nuclear (IPEN/CNEN-SP) pelos cursos ministrados e pela utilização do acervo bibliográfico.
- Ao Prof. Dr. Antonio Teixeira e Silva, Chefe da Seção de Análise de Acidentes da COPESP, pela orientação e incentivo durante a execução do trabalho.
- Ao MSc. José Augusto Perrotta, Chefe da Divisão de Engenharia do Núcleo da COPESP, pela co-orientação, acompanhamento, comentários e sugestões que tanto contribuíram para o andamento e enriquecimento do trabalho.
- Aos Drs. Miguel Mattar Neto e Roberto Firmento de Noronha, pelos comentários realizados, contribuindo para a elaboração do trabalho em sua forma final, bem como pela participação como membros integrantes da banca examinadora.

- Ao amigo MSc. João Roberto Loureiro de Mattos, pelo apoio no início do trabalho, e pelos comentários técnicos que acarretaram na realização da parte experimental.
- Aos colegas Giuseppe Vulcano e João Antonio Mendes pelo auxílio dado durante a fase de projeto da bancada experimental.
- Aos colegas Eng. Reynaldo Cavalcanti Serra e Gilberto Elias dos Santos, pela participação ativa nas fases de fabricação e montagem da bancada experimental.
- Aos colegas do Laboratório de Desenvolvimento de Elemento Combustível Nuclear (LADECON/COPESP), por fabricarem as estruturas protótipo utilizadas no trabalho.
- Ao colega MSc. Leandro Vieira da Silva Macedo, pelos comentários realizados durante as análises das estruturas e pelo auxílio técnico dado nos cálculos realizados com o programa ANSYS.
- Aos amigos Engs. Anibal Marone, Ricardo Fernandes Lopes e Paulo Eduardo França Padilha, pelo auxílio dado durante a fase de coleta de dados.
- Ao amigo Richard Mc Donnell Cotrim pelo auxílio na impressão do trabalho na sua forma final.

# DETERMINAÇÃO DAS PROPRIEDADES MODAIS DE ELEMENTOS COMBUSTÍVEIS UTILIZADOS EM REATORES DO TIPO PWR

CARLOS EDUARDO TRINDADE

## RESUMO

Uma metodologia experimental de análise foi desenvolvida para obtenção das características modais (frequências naturais, coeficientes de amortecimento e formas modais) de estruturas complexas similares aos elementos combustíveis de reatores nucleares do tipo PWR.

Para qualificar a metodologia, foi construída uma bancada experimental na qual foram realizados testes com diferentes estruturas (barra metálica de seção retangular, varetas combustíveis protótipo e uma estrutura formada por um feixe de tubos metálicos acoplados por espaçadores rígidos). A bancada foi montada sob a forma de um pórtico, o qual possibilita o alojamento da estrutura formada pelo feixe de tubos.

A validação dos procedimentos desenvolvidos foi feita através de testes com uma barra metálica de seção retangular, sendo os resultados experimentais obtidos (frequências naturais e formato dos modos) comparados aos resultados teóricos calculados pelo método dos elementos finitos com o programa ANSYS.

Através dos testes, foram também obtidos os coeficientes de amortecimento modal, sendo estes de difícil obtenção através de modelos teóricos simplificados.

# MODAL PROPERTIES DETERMINATION OF PWR REACTOR FUEL ASSEMBLIES

CARLOS EDUARDO TRINDADE

## ABSTRACT

An experimental methodology of analysis was developed for obtaining the modal characteristics (natural frequencies, damping ratios and modal vectors) of complex structures such as nuclear PWR fuel elements.

In order to qualify this methodology, a test section was built, in which different structures were experimented (metallic rectangular cross section beam, prototype fuel rods and a structure that consists of an assembly of metallic tubes coupled by rigid spacers). The test section was mounted as a portico that allows the placement of the coupled tube beam structure.

The validation of the developed procedure was done by means of experiments with a rectangular cross section beam. The obtained experimental results (natural frequencies and mode shapes) were compared to theoretical ones calculated with the program ANSYS using the finite element method.

Also, the modal tests yielded the modal damping ratios, being these values of difficult evaluation by means of theoretical modelling.

## ÍNDICE

	Página
AGRADECIMENTOS.....	i
RESUMO.....	iii
ABSTRACT.....	iv
LISTA DE FIGURAS.....	vii
LISTA DE TABELAS.....	x
LISTA DE SÍMBOLOS.....	xii
Capítulo 1 - INTRODUÇÃO .....	1
1.1 - Revisão Bibliográfica.....	8
Capítulo 2 - TEORIA DE VIBRAÇÕES.....	15
2.1 - Sistemas Lineares de um Grau de Liberdade.....	15
2.2 - Sistemas Lineares com Vários Graus de Liberdade...	20
2.2.1 - Desacoplamento das Equações de Movimento.....	29
2.2.2 - Vibrações Lineares Amortecidas.....	31
Capítulo 3 - PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE MODAL.....	34
3.1 - Definição das FRF's.....	35
3.2 - Excitações não-harmônicas.....	44
3.3 - Técnicas de Extração de Parâmetros.....	48
3.3.1 - Método da Amplitude de Pico.....	48
3.3.2 - Método do Ajuste de Círculo.....	50
3.3.3 - Resíduos.....	52
3.3.4 - Ajuste de Curvas com Vários Graus de Liberdade.	55
3.4 - Técnicas para Determinação das Formas Modais.....	58

Capítulo 4 - PARTE EXPERIMENTAL.....	61
4.1 - Bancada Experimental e Equipamentos.....	68
4.2 - Estruturas Testadas.....	72
4.3 - Procedimento de Aquisição e Análise.....	81
Capítulo 5 - RESULTADOS.....	86
Capítulo 6 - CONCLUSÕES.....	114
Capítulo 7 - REFERÊNCIAS.....	118
Apêndice 1 - TRANSFORMADAS DE LAPLACE E FOURIER.....	123
Apêndice 2 - SINAIS RANDÔMICOS.....	125
Apêndice 3 - CARACTERÍSTICAS DE AJUSTAGEM DOS EQUIPAMENTOS.	130

## LISTA DE FIGURAS

		Página
FIGURA 2.1	- Sistema com $n$ graus de liberdade.....	21
FIGURA 3.1	- Gráfico dos elementos da primeira coluna da matriz receptância ( $n=6$ ).....	43
FIGURA 3.2	- Método da amplitude de pico.....	50
FIGURA 3.3	- Método de ajuste de círculo.....	51
FIGURA 3.4	- Contribuição dos vários termos na série modal.....	54
FIGURA 4.1	- Exemplo de um pulso transiente.....	65
FIGURA 4.2	- Croqui da bancada experimental.....	69
FIGURA 4.3	- Esquema das conexões elétricas entre os equipamentos.....	71
FIGURA 4.4	- Arranjo da montagem da vareta combustivel simulando a condição livre-livre.....	77
FIGURA 4.5	- Esquema da geometria utilizada na descrição da estrutura formada pelo feixe de tubos acoplados por espaçadores rígidos.....	79
FIGURA 4.6	- Sequência dos ensaios realizados.....	80
FIGURA 5.1	- Formas modais obtidas para a barra.....	89
FIGURA 5.2	- Gráfico da FRF ( $6X+/6X-$ ) medida para a barra via excitação transiente.....	90
FIGURA 5.3	- Gráfico da FRF ( $6X+/6X-$ ) medida para a barra via excitação randômica.....	91
FIGURA 5.4	- Formas modais obtidas para o pórtico.....	92
FIGURA 5.5	- Gráfico da FRF ( $1X+/1X-$ ) medida para a vareta sem preenchimento.....	94

FIGURA 5.6	- Gráfico da FRF (1X+/1X-), utilizada na análise da vareta combustivel protótipo com pastilhas de 10 mm.....	97
FIGURA 5.7	- Gráfico da FRF (1X+/1X-), utilizada na análise da vareta combustivel protótipo com pastilhas de 20 mm.....	98
FIGURA 5.8	- Gráfico da FRF (1X+/1X-), utilizada na análise da vareta combustivel protótipo com pastilhas de 30 mm.....	99
FIGURA 5.9	- Forma modal para o primeiro modo de flexão da estrutura formada pelo feixe de tubos acoplados por espaçadores rígidos (poli-referência).....	101
FIGURA 5.10	- Forma modal para o primeiro modo de torção da estrutura formada pelo feixe de tubos acoplados por espaçadores rígidos (poli-referência).....	102
FIGURA 5.11	- Forma modal para o segundo modo de flexão da estrutura formada pelo feixe de tubos acoplados por espaçadores rígidos (poli-referência).....	103
FIGURA 5.12	- Forma modal para o segundo modo de torção da estrutura formada pelo feixe de tubos acoplados por espaçadores rígidos (poli-referência).....	104
FIGURA 5.13	- Forma modal para o terceiro modo de flexão da estrutura formada pelo feixe de tubos acoplados por espaçadores rígidos (poli-referência).....	105

FIGURA 5.14	- Forma modal para o terceiro modo de torção da estrutura formada pelo feixe de tubos acoplados por espaçadores rígidos (poli-referência).....	106
FIGURA 5.15	- Forma modal para o quarto modo de flexão da estrutura formada pelo feixe de tubos acoplados por espaçadores rígidos (poli-referência).....	107
FIGURA 5.16	- Gráfico da FRF (16X+/16X+), utilizada na análise da estrutura formada pelo feixe de tubos acoplados por espaçadores rígidos, em baixas frequências.....	109
FIGURA 5.17	- Gráfico da FRF (43X+/43X+), utilizada na análise da estrutura formada pelo feixe de tubos acoplados por espaçadores rígidos, em baixas frequências.....	110
FIGURA 5.18	- Gráfico da FRF (52X-/43X+), utilizada na análise da estrutura formada pelo feixe de tubos acoplados por espaçadores rígidos, em altas frequências.....	111
FIGURA 5.19	- Gráfico da FRF (53X-/43X+), utilizada na análise da estrutura formada pelo feixe de tubos acoplados por espaçadores rígidos, em altas frequências.....	112
FIGURA 5.20	- Gráfico da FRF (54X-/43X+), utilizada na análise da estrutura formada pelo feixe de tubos acoplados por espaçadores rígidos, em altas frequências.....	113

## LISTA DE TABELAS

		Página
TABELA 4.1	- Características das vigas do pórtico.....	73
TABELA 4.2	- Coordenadas dos pontos para discretização do pórtico.....	74
TABELA 4.3	- Características das vareta combustível protótipo utilizadas nos ensaios de vibração.	76
TABELA 4.4	- Definição da geometria da vareta combustível protótipo, configurada no sistema GenRad....	76
TABELA 4.5	- Características de montagem da estrutura formada por tubos metálicos acoplados por espaçadores rígidos.....	78
TABELA 4.6	- Distribuição dos pontos utilizados na discretização da estrutura formada por tubos metálicos acoplados por espaçadores rígidos.	78
TABELA 5.1	- Frequências naturais (Hz) do pórtico e da barra de seção retangular, calculadas com o programa ANSYS.....	87
TABELA 5.2	- Valores finais para a frequência e coeficiente de amortecimento dos seis primeiros modos de flexão da barra.....	88
TABELA 5.3	- Valores das frequências naturais do pórtico.	92
TABELA 5.4	- Comparação entre os valores teóricos e os experimentais para as frequências naturais da vareta combustível protótipo, sem o preenchimento.....	94

TABELA 5.5	- Valores teóricos e experimentais para os dois primeiros modos da vareta combustível protótipo, variando a altura das pastilhas utilizadas no preenchimento.....	96
TABELA 5.6	- Modos identificados para a estrutura formada por tubos metálicos acoplados por espaçadores rígidos.....	100

## LISTA DE SÍMBOLOS

- $c$  ... Coeficiente de amortecimento viscoso para um sistema com um grau de liberdade.
- $k$  ... Constante elástica, ou rigidez, de um sistema com um grau de liberdade.
- $m$  ... Massa de um sistema com um grau de liberdade.
- $n$  ... Número de graus de liberdade associados a um sistema mecânico.
- $q_i$  ... Coordenada generalizada que representa o deslocamento da  $i$ -ésima massa de um sistema com  $n$  graus de liberdade.
- $s$  ... Variável complexa utilizada na transformada de Laplace.
- $t$  ... Variável temporal, ou instante de tempo.
- $x$  ... Posição ou coordenada espacial de um sistema de um grau de liberdade, em um instante de tempo qualquer.
- $\bar{x}$  ... Posição transformada, ou transformada de Laplace da coordenada espacial do sistema.
- $\dot{x}$  ... Velocidade escalar de um sistema de um grau de liberdade em um instante de tempo qualquer.
- $\ddot{x}$  ... Aceleração total de um sistema de um grau de liberdade em um instante de tempo qualquer.
- $A$  ... Constante de movimento.
- $A(\omega)$  . Função resposta em frequência, acelerância.
- $F$  ... Força externa aplicada a um sistema de um grau de liberdade, em um determinado instante de tempo.

- $\bar{F}$  ... Força transformada, ou transformada de Laplace da força externa aplicada ao sistema.
- $\bar{G}$  ... Admitância geral do sistema, sendo definida como o inverso da impedância.
- $H(\omega)$  . Função resposta em frequência ou função transferência do sistema.
- $Q_i$  ... Somatório das forças externas aplicado a i-ésima massa de um sistema com n graus de liberdade.
- ${}_k R_{j,k}$  . Rigidez residual, ou residuo em rigidez de uma dada FRF.
- ${}_m R_{j,k}$  . Massa residual, ou residuo em massa de uma dada FRF.
- $S_{ff}$  .. Função densidade espectral de potência de  $f(t)$ .
- $S_{xf}$  .. Função densidade espectral cruzada de potência entre os sinais  $x(t)$  e  $f(t)$ .
- $S_{xx}$  .. Função densidade espectral de potência de  $x(t)$ .
- $Y(\omega)$  . Função resposta em frequência, mobilidade.
- $\bar{Z}$  ... Impedância geral do sistema, sendo a razão entre a força transformada e a posição transformada.
- $\eta_j$  ... Coordenada generalizada obtida através da combinação linear das coordenadas  $q_j(t)$ .
- $\xi_r$  ... Coeficiente de amortecimento característico de uma dada estrutura, para o modo r.
- $\tau$  ... Variável temporal utilizada nas integrais de convolução.
- $\omega$  ... Frequência do movimento harmônico, ou variável frequência.
- $\omega_d$  ... Frequência de vibração livre amortecida, definida para os sistemas com amortecimento sub-crítico.
- $\omega_r$  ... Frequência natural característica da estrutura, para o modo r.

$\alpha(\omega)$  . Função resposta em frequência, receptância.

$\Omega$  ... Frequência do movimento harmônico.

[c] ... Matriz de amortecimento de um sistema mecânico com n graus de liberdade.

[I] ... Matriz identidade de ordem n.

[k] ... Matriz de rigidez de um sistema mecânico com n graus de liberdade.

[m] ... Matriz de massa de um sistema mecânico com n graus de liberdade.

[u] ... Matriz de transformação de coordenadas, sendo em um caso particular denominada matriz modal.

$[\xi_r]$  ... Matriz dos coeficientes de amortecimento da estrutura.

$[\omega_r]$  ... Matriz de frequências naturais características da estrutura.

$[\Phi]$  ... Matriz contendo as formas modais características da estrutura.

$[\psi]$  ... Matriz dos modos naturais de um sistema mecânico.

$\{\Phi\}_r$  ... Modo natural normalizado de um sistema mecânico.

$\{\psi_r\}$  ... Modo natural r de um sistema mecânico.

[ ] ... Representação de uma matriz quadrada de ordem n.

{ } ... Representação de uma matriz coluna ou vetor de ordem n.

Sobrescritos     $\top$  ... Matriz ou vetor transposto.  
                   $*$  ... Número complexo conjugado.  
                   $\bar{\phantom{x}}$  ... Valor revisado ou redefinido, após ajuste.

Sub-escritos     $_{\phantom{x}}$  ... Índice da coordenada ou modo associado.

Os demais símbolos que aparecem no decorrer do texto são introduzidos de maneira a não gerar dúvidas, sendo portanto auto-explicativos.

## 1- INTRODUÇÃO

A produção de energia em centrais nucleares do tipo PWR é feita através da remoção do calor gerado no núcleo do reator. A água que passa pelo núcleo é aquecida durante o processo, sendo o calor proveniente das reações nucleares que ocorrem com o material físsil; que se apresenta sob a forma de pastilhas sinterizadas de dióxido de urânio ( $UO_2$ ).

Todo o material físsil existente no núcleo de um reator nuclear do tipo PWR encontra-se distribuído em estruturas celulares denominadas elementos combustíveis, sendo tais estruturas constituídas por um arranjo vertical de varetas combustíveis preenchidas com pastilhas cerâmicas de  $UO_2$ .

Cada elemento combustível possui uma estrutura principal, formada pela junção rígida dos tubos guia das varetas de controle/segurança às grades espaçadoras e aos bocais de extremidade superior e inferior. A esta estrutura principal dá-se o nome de esqueleto, possuindo esta a propriedade de suporte das varetas combustíveis e fornecendo a rigidez de conjunto ao elemento combustível. As varetas combustíveis são fixadas pelas grades espaçadoras através de um sistema mola-batente, sendo suas extremidades livres para sofrer expansão térmica axial.

O elemento combustível é fixado às placas inferior e superior do núcleo apenas por apoio de compressão, existindo uma mola de fixação no bocal superior para permitir as expansões diferenciais entre o elemento combustível e os internos do reator. Neste modo de fixação, supõem-se que cada elemento combustível não interfere com os adjacentes, sendo ligados às placas suporte do núcleo por meio de pinos guia.

A Divisão de Engenharia do Núcleo da COPESP vem realizando trabalhos na área de desenvolvimento de elementos combustíveis de reatores nucleares, objetivando a sua capacitação no projeto e análise de desempenho de tais estruturas. Assim sendo, como parte dos requisitos de projeto de elementos combustíveis utilizados em reatores do tipo PWR, é necessário um estudo detalhado dos efeitos causados pelos carregamentos dinâmicos aos quais tais elementos se encontram submetidos /1,2/. A sequência de análise é dada por: definição dos carregamentos; estimativa das respostas das várias estruturas do reator a estes carregamentos; e comparação de tais respostas com critérios de danos já conhecidos de forma a determinar a adequação do projeto.

Em reatores do tipo PWR, os elementos combustíveis estão sujeitos a um fluxo de água que causa vibração. Caso esta vibração atinja níveis ressonantes, pode-se ter um carregamento com grande probabilidade de causar danos estruturais /1/. Outros carregamentos possíveis são: vibrações induzidas por máquinas rotativas externas, terremotos /3/, colisões com o prédio do reator, acidentes de perda de refrigerante (LOCA), e cargas submarinas no caso de reatores navais /4/.

A fim de estabelecer procedimentos qualificados para a análise de elementos combustíveis quando submetidos a carregamentos dinâmicos, a Divisão de Engenharia do Núcleo da COPESP vem concentrando esforços no desenvolvimento de modelos analíticos capazes de avaliar tais estruturas quando submetidas a diferentes cargas, podendo tais modelos assumirem a forma estática (programa ELCOM /5,6/) ou a forma dinâmica (programa STYCA /7/). Como consequência natural da formulação dos modelos analíticos, surge a necessidade de verificação experimental de

tais modelos, bem como a obtenção de parâmetros cuja determinação analítica não é trivial.

No caso da análise estática, o modelo analítico desenvolvido, ELCOM /5,6/, fornece como resultado a matriz de frequências naturais características da estrutura  $[\omega_r^2]$ , bem como a matriz contendo as formas modais associadas  $[\phi]$ . De posse destas matrizes, e com o conhecimento das características de amortecimento estrutural, desenvolveu-se um método para avaliar o comportamento da estrutura quando submetida a carregamentos dinâmicos, utilizando para tanto o método da superposição modal, programa STYCA /7/. Entretanto, existe a necessidade de validação das frequências naturais e formas modais obtidas através do modelo estático desenvolvido, bem como obtenção das características de amortecimento estrutural (não determinadas analiticamente através de métodos simplificados) visando a análise dinâmica. Tais necessidades são supridas através de uma análise modal experimental da estrutura.

O objetivo deste trabalho é estabelecer um procedimento experimental que possibilite a derivação de um modelo modal ( $[\omega_r^2]$ ,  $[\xi_r]$  e  $[\phi]$ ) para elementos combustíveis de reatores PWR, evidenciando-se suas características modais. O trabalho engloba o estudo e o domínio das técnicas de medição a serem utilizadas /13/; sendo posta em prática uma etapa de capacitação na qual são testadas e validadas tais técnicas para posterior aplicação a estruturas complexas, como é o caso do elemento combustível.

Antes da realização de testes modais, é necessário um estudo que possibilite introduzir a notação geral utilizada, bem como os procedimentos de análise. Para sistemas com um grau de liberdade /8,9/, uma análise de vibrações livres fornece a sua

frequência natural e o fator de amortecimento, enquanto que uma análise de uma resposta forçada fornece a definição da função resposta em frequência, como mobilidade - razão entre a resposta de velocidade e a força imposta. Para sistemas com mais de um grau de liberdade, tem-se três fases distintas: definição das equações que regem o movimento; análise de vibrações livres gerando um conjunto com N frequências naturais e fatores de amortecimento, bem como o formato dos modos; e análise de respostas forçadas.

Os procedimentos utilizados em testes modais são variados, sendo que as principais técnicas são aquelas que permitem obter medidas diretas das várias propriedades de mobilidade da estrutura. Existem três aspectos no processo de medida que precisam ser analisados de forma a assegurar boa qualidade dos dados:

- (a) Aspectos mecânicos do suporte e excitação da estrutura;
- (b) Correta transdução das quantidades a serem medidas;
- (c) Processamento dos sinais adequado ao tipo de teste.

Quanto ao suporte da amostra a ser testada, existem três possibilidades de acoplamento: livre ou não restrita (o que usualmente implica no acoplamento através de molas); aterrada, necessitando do acoplamento rígido em certos pontos; ou "in-situ", onde a amostra é conectada a alguma outra estrutura ou componente representando uma conexão não rígida.

As excitações podem ser feitas utilizando-se um gerador de vibração (shaker), ou usando alguma forma transiente, tal como um martelo de impacto ou a liberação repentina de uma posição

deformada.

Os parâmetros de mobilidade a serem medidos podem ser obtidos diretamente aplicando-se uma excitação harmônica e medindo-se a resposta harmônica resultante. Este tipo de teste é denominado "teste de onda senoidal" sendo que este requer o acoplamento do shaker à estrutura. A faixa de frequência é varrida ou passando-se de forma discreta de uma frequência para a próxima, ou variando-se lentamente a frequência de forma contínua. Em ambos os casos deseja-se ter condições quase-estacionárias. Procedimentos alternativos de excitação são amplamente utilizados, sendo que excitações periódicas, pseudo-randômicas ou randômicas frequentemente substituem a aproximação de onda senoidal e são executáveis usando-se analisadores complexos de processamento de sinais, os quais são capazes de resolver a frequência dos sinais de entrada e resposta, usando análise de Fourier /14/, deduzindo, então, os parâmetros desejados de mobilidade. Uma extensão deste procedimento é a utilização de excitações transientes ou impulsos que são aplicados sem conectar um excitador à estrutura.

A análise dos dados de mobilidade é um processo onde procura-se achar um modelo teórico que mais se aproxime do comportamento real da estrutura. Tal processo consiste de duas etapas: identificação do tipo de modelo apropriado, e determinação dos parâmetros apropriados para o modelo escolhido.

Para os ensaios com estruturas complexas como o elemento combustível, um dos tipos de excitação a ser utilizada é a randômica. Entretanto, quando se trabalha com tais excitações, a obtenção da função resposta em frequência não é feita diretamente da transformada de Fourier da excitação e da

resposta, visto que estes sinais não obedecem as condições necessárias para o cálculo. Desta forma, é necessário o cálculo de determinadas médias no domínio temporal, conhecidas como funções auto-correlação para a excitação e resposta, e funções correlação cruzada entre excitação e resposta. A partir destas funções correlação, pode-se calcular suas respectivas transformadas de Fourier, gerando as funções densidade espectral de potência no domínio de frequência; sendo estas as funções que permitem a obtenção da função resposta em frequência.

A abordagem do problema de vibração de uma determinada estrutura pode ser feita teórica ou experimentalmente. No caso das excitações randômicas /9,13/, tanto o enfoque teórico como o experimental envolverá o cálculo e manipulação das funções densidade espectral de potência. Entretanto, existe uma diferença básica entre estes dois enfoques: no caso da abordagem teórica, considera-se sempre que todos os sinais de excitação e de resposta da estrutura são contínuos no tempo (sendo isto válido para todos os tipos de excitação), e que as transformadas de Fourier calculadas são contínuas no domínio de frequência. Já na abordagem experimental, é comum o uso de micro-computadores devido ao grande número de dados coletados e à alta velocidade de processamento dos mesmos, o que acarreta na discretização das excitações e das respostas da estrutura no domínio temporal, das médias temporais calculadas, e das respectivas transformadas de Fourier no domínio de frequências. Torna-se então necessária uma visão mais clara do processo de discretização da transformada de Fourier /15,16/, tendo em vista a abrangência de sua utilização.

No caso da análise teórica de uma estrutura sujeita a uma excitação randômica, a função auto-correlação descreve o

comportamento desta estrutura. Já no caso do estudo experimental, o objetivo principal é a derivação de um modelo modal (consistindo de duas matrizes: uma contendo as frequências naturais e coeficiente de amortecimento dos modos, e outra contendo o formato dos modos). Para tanto deve-se extrair os parâmetros desejados da função resposta em frequência, uma vez que esta já tenha sido obtida. Existem várias técnicas de extração de parâmetros modais dos dados obtidos para a função resposta em frequência. A primeira classe destas técnicas envolve o estudo isolado dos picos ressonantes da função resposta em frequência, sendo então referidas como técnicas de ajuste de curvas de um grau de liberdade. Dentre estas destacam-se: o método da amplitude de pico, o método do ajuste de círculo e o método inverso. Uma extensão natural destes procedimentos é o ajuste da função resposta em frequência (medida) a uma curva com vários graus de liberdade, sendo que tal análise já requer uma maior capacidade computacional. Caso sejam medidas várias curvas função resposta em frequência, pode-se derivar através destes procedimentos de análise várias estimativas diferentes para os parâmetros modais (frequências naturais, coeficientes de amortecimento dos modos e constantes modais), muito embora a princípio todas estas estimativas deveriam ser iguais, pois representam as propriedades de uma mesma estrutura. A diferença obtida entre estas estimativas pode ser causada por fatores como ruído em algumas medidas, dificuldade em se obter informação perto das ressonâncias, etc. A fim de evitar este tipo de problema, existe um terceiro procedimento para extração dos parâmetros modais, que considera todas as curvas medidas para as funções resposta em frequência de uma única vez, quando do ajuste

de uma curva com vários graus de liberdade.

Através destes métodos de extração de parâmetros modais obtém-se os valores para a frequência natural, coeficiente de amortecimento e constantes modais de cada um dos modos. Estas constantes modais são combinações dos elementos de cada auto-vetor, necessitando-se então de mais uma etapa de processamento que permita a obtenção de cada auto-vetor (ou vetor formato dos modos). De posse da matriz do formato dos modos e da matriz contendo as frequências naturais e coeficientes de amortecimento, fica definido o modelo modal para a estrutura sob análise.

A análise modal de uma estrutura pode ir além da determinação de um modelo modal, gerando outros tipos de modelos: o modelo de resposta e o modelo espacial para a estrutura. O modelo de resposta nada mais é do que a previsão, a partir de dados medidos para a estrutura, de toda a matriz de função resposta em frequência (ou função transferência). Por outro lado, o modelo espacial consiste na determinação das propriedades de massa e rigidez da estrutura, a partir dos valores obtidos para a matriz formato dos modos (parte do modelo modal derivado diretamente dos dados coletados).

### 1.1- Revisão Bibliográfica

O estudo do comportamento vibracional de elementos combustíveis de reatores nucleares do tipo PWR vem sendo alvo de estudo por vários pesquisadores atuando em diferentes países. Tanto para reatores de produção de energia elétrica, como para

reatores navais, as características dinâmicas de elementos combustíveis são fatores preponderantes para a análise do comportamento mecânico destes, chegando a ser um fator limitante da operação do reator, ou um fator de falha.

A fim de se qualificar um elemento combustível, bem como fornecer bases de dados para análises estruturais analíticas, e ainda validar dados gerados por modelos matemáticos é necessária a realização de ensaios experimentais de caracterização modal de tal estrutura.

Dentre os vários modelos teóricos existentes para descrever o comportamento mecânico de um elemento combustível, tem-se o modelo utilizado por Barinka /10/, que considera o elemento combustível como um conjunto de tubos subdivididos em segmentos axiais e conectados por pontos discretos de acoplamento. As equações utilizadas na modelagem baseiam-se na deformação dos tubos entre pontos adjacentes de acoplamento, e são desenvolvidas para estruturas formadas por um número qualquer de diferentes tipos de tubos. Com tal formulação, chega-se a um sistema linear de equações, sendo este resolvido através de um processo iterativo.

Mais recentemente, Perrotta e Pimenta /5/ desenvolveram um método matricial para análise estrutural estática do elemento combustível. O método tem como ponto principal a consideração de que as grades espaçadoras e bocais de extremidade possuem rigidez muito grande comparada à rigidez das varetas combustíveis e tubos guia. Este fato faz com que seja possível assumir o movimento de corpo rígido das grades espaçadoras. Cada nó da estrutura (acoplamentos vareta/grade espaçadora, tubo guia/grade espaçadora, tubo guia/bocal de extremidade) tem seus

deslocamentos e rotações relacionados aos deslocamentos e rotações do centro de gravidade da grade ou bocal. A matriz de rigidez global do sistema é obtida através do somatório das transformações de rigidez de cada sistema vareta/vínculo/grade espaçadora, ou tubo guia/grade espaçadora/bocal de extremidade, para o centro de gravidade das grades e dos bocais, reduzindo a sua dimensão. A solução da equação matricial é então obtida por métodos de análise não-linear de estruturas, havendo assim a possibilidade de avaliação da variação de rigidez nos vínculos entre varetas combustíveis e grades espaçadoras.

Como consequência da metodologia desenvolvida /5/, foi elaborado na Divisão de Engenharia do Núcleo da COPESP, por Hayashi e Perrotta /6/, um programa computacional que tem como entrada os dados referentes à geometria, materiais, carregamentos, rigidez dos vínculos das varetas com as grades espaçadoras e condições de apoio de extremidade do elemento combustível. Realiza-se, então, a montagem da matriz de rigidez e do carregamento da estrutura equivalente. Os carregamentos podem ser na forma de cargas distribuídas nas varetas, cargas concentradas nas grades, pré-tensão nas molas de fixação do elemento combustível e distribuição de temperaturas, ou na forma de deformações diferenciais entre varetas. O sistema é resolvido para incrementos de carregamentos, obtendo os deslocamentos da viga equivalente e dos nós das sub-estruturas, repetindo-se o processo para todos os incrementos de carga. Os deslocamentos obtidos para cada incremento são somados, calculando-se então os esforços atuantes nos nós das varetas e tubos guia. O programa ELCOM /6/ permite ainda verificar as frequências naturais e modos de vibração da viga equivalente, sendo a matriz de massa

discretizada um dado de entrada do programa.

Reforça-se, neste ponto, o fato de que o presente trabalho teve origem como consequência natural do programa de análise estrutural de elementos combustíveis utilizados em reatores do tipo PWR, que vêm sendo desenvolvido pela Divisão de Engenharia do Núcleo da COPESP, visando o desenvolvimento de procedimentos experimentais para obtenção das frequências naturais e modos de vibração, e dos coeficientes de amortecimento estrutural necessários para a realização de análises dinâmicas.

Trabalhos mais recentes na área de análise estrutural de elementos combustíveis, visam determinar as respectivas respostas estruturais dos elementos quando sujeitos a carregamentos sísmicos ou de choque. Os modelos analíticos desenvolvidos necessitam das características modais das estruturas sob análise, bem como do histórico das excitações. Conforme descrito por Preumont /3,11,12/ tais análises consideram a colisão entre elementos combustíveis adjacentes quando submetidos aos carregamentos impostos às placas inferior e/ou superior do núcleo do reator. Assim sendo, verifica-se a necessidade do conhecimento prévio das características modais do elemento combustível, de forma tal que o princípio da superposição modal possa ser utilizado.

Através da análise dos modelos teóricos que descrevem o comportamento mecânico de elementos combustíveis para reatores PWR, verifica-se a necessidade de inicializar estes modelos fornecendo uma série de características mecânicas da estrutura, dentre elas: características modais (frequências naturais, coeficientes de amortecimento dos modos e respectivas formas modais), rigidez dos vínculos existentes na estrutura (grades

espaçadoras), rigidez do conjunto (deformações laterais da estrutura). Dependendo da modelagem utilizada, estas propriedades não são obtidas analiticamente, devido à própria complexidade da estrutura, devendo então serem levantadas através de uma sequência bem definida de ensaios mecânicos, conforme descrito por Takada & Egusa /4/, Preumont /17/, Nakazato /18/ e McGrath /19/.

Dentre os testes mecânicos necessários para a qualificação mecânica de elementos combustíveis, ressaltam-se os testes de análise modal, objetivando a determinação das características modais do elemento combustível. Ensaios desta natureza foram realizados por Tigeot & Buland /20/, onde foram determinadas a frequência natural e a respectiva forma modal associada para os seis primeiros modos da estrutura, utilizando para tanto uma excitação ou senoidal de frequência variável, ou randômica (ruído branco) sendo ambas fornecidas por um excitador eletrodinâmico. A resposta da estrutura foi obtida através de sinais coletados por acelerômetros. Os sinais coletados (excitação e resposta) foram analisados de forma a gerar funções resposta em frequência e a partir destas, com auxílio das técnicas de análise modal, foram extraídos os parâmetros desejados.

Stokes & King /21/ realizaram medições das características modais do elemento combustível 17x17, desenvolvido pela Babcock & Wilcox Co.. A montagem experimental também utilizou um excitador eletrodinâmico, sendo que para medir as respostas do elemento combustível foram utilizados transdutores de deslocamento. Os pesquisadores determinaram o amortecimento do conjunto através de testes de liberação

repentina do elemento combustível a partir de uma posição deformada, verificando assim o decaimento da amplitude de oscilação do mesmo. Através de uma varredura senoidal na faixa de frequência de 2 a 100 Hz, foram determinadas as cinco primeiras frequências naturais da estrutura, bem como coeficientes de amortecimento e respectivas formas modais associadas. No decorrer dos trabalhos, também foram verificados alguns fatores influentes como: redução da força de fixação das varetas combustíveis, efeito de massa adicional devido ao fluido, dependência da direção de vibração (lateral ou diagonal), parametrização da influência da velocidade de escoamento e análise do efeito da temperatura.

Mais recentemente, Han et alli /22/, desenvolveram um estudo experimental objetivando determinar as frequências naturais e respectivas amplitudes do movimento sofrido por um arranjo de varetas combustíveis quando sujeito a vibrações induzidas por fluido. Entretanto são vários os fatores que contribuem ou afetam diretamente tal fenômeno, a saber: rigidez estática e dinâmica do elemento combustível, frequências naturais e coeficientes de amortecimento para cada um dos modos da estrutura, bem como uma caracterização das propriedades modais das varetas combustíveis. O trabalho mostra valores de frequência natural e coeficiente de amortecimento para o modo fundamental do elemento combustível, de frequências naturais dos oito primeiros modos das varetas combustíveis e dos tubos guia. As medidas de vibração objetivando a determinação das frequências naturais utilizaram um gerador de sinais (mas não fica claro o tipo de excitação utilizada) acoplado a um frequencímetro para determinação da frequência de excitação, sendo utilizados

extensômetros para determinação das respostas da estrutura sob a forma de deslocamentos.

Em todos os trabalhos mencionados anteriormente, fica bem definida a característica comum de não se fornecer os critérios estabelecidos e utilizados nas etapas de processamento e análise dos sinais temporais coletados, bem como um maior detalhamento sobre as técnicas de obtenção das medidas (com menor nível possível de ruído) das funções transferência e respectivos métodos de extração de parâmetros modais. Tais informações foram obtidas através do estudo dos processos de análise modal aplicados normalmente à estruturas não-nucleares, visando a posterior aplicação destas para o caso do desenvolvimento de elementos combustíveis utilizados em reatores nucleares do tipo PWR.

## 2- TEORIA DE VIBRAÇÕES

### 2.1- Sistemas Lineares de um Grau de Liberdade

Um sistema mecânico (discreto) possui elementos cujas forças estão relacionadas a deslocamentos, velocidades ou acelerações, sendo a equação de movimento escrita a partir da configuração destes no sistema.

De uma forma geral, um sistema mecânico com um grau de liberdade pode ser descrito por:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \quad (2.1.1)$$

onde  $m$  ... massa do sistema.

$c$  ... coeficiente de amortecimento do sistema.

$k$  ... constante elástica, ou rigidez do sistema.

$x(t)$  ... posição do sistema em um instante  $t$  qualquer.

$F(t)$  ... força externa aplicada ao sistema no instante  $t$ .

O caso mais simples para se analisar tal sistema é aquele no qual o somatório das forças externas aplicadas ao sistema é nulo, ou seja,  $F(t)=0$ . A equação (2.1.1) fica então da seguinte forma:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0, \text{ ou:}$$

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = 0 \quad (2.1.2)$$

onde  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$  ... frequência natural do sistema.

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_n} \quad \dots \text{ fator de amortecimento viscoso do sistema.}$$

A solução para a equação (2.1.2) pode ser escrita, de uma forma geral como:

$$x(t) = \{A_1 \exp(\sqrt{\xi^2 - 1} \omega_n t) + A_2 \exp(-\sqrt{\xi^2 - 1} \omega_n t)\} e^{-\xi \omega_n t} \quad (2.1.3)$$

Através da equação anterior, é possível notar que a solução  $x(t)$  está relacionada ao valor do fator de amortecimento viscoso, isto é:

- (a)  $\xi > 1$ : O movimento é aperiódico e decai exponencialmente com o tempo. O formato exato da curva depende de  $A_1$  e  $A_2$ , sendo tais constantes obtidas através das condições iniciais. Tal caso é conhecido como amortecimento supercrítico.
- (b)  $\xi = 1$ : A solução (2.1.3) fica reduzida a  $x(t) = (A_1 + A_2)e^{-\omega_n t}$ , também apresentando um amortecimento exponencial. As constantes  $A_1$  e  $A_2$  são determinadas a partir das condições iniciais, sendo tal caso denominado de amortecimento crítico.
- (c)  $\xi < 1$ : A solução (2.1.3) passa a ser escrita como  $x(t) = Ae^{-\xi \omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi)$ , com  $\omega_d = \sqrt{1 - \xi^2}$  sendo a frequência de vibração livre amortecida. Tal solução pode ser interpretada como um movimento oscilatório com frequência constante  $\omega_d$  e ângulo de fase  $\phi$ , mas com amplitude decaindo exponencialmente. As constantes  $A$  e  $\phi$  são determinadas através das condições iniciais. Tal caso é conhecido como amortecimento sub-crítico.

Na área de vibrações, o interesse reside na determinação da resposta do sistema à excitações externas. Tais excitações podem ser, por exemplo, deslocamentos iniciais, velocidades iniciais ou ambos. Pode-se ter o caso no qual a excitação seja uma força atuante por um longo período de tempo, ou até mesmo pulsos de força. No caso de sistemas lineares, é possível obter a resposta para as condições iniciais e para as forças externas separadamente, e então combiná-las de forma a se obter a resposta total do sistema, seguindo o princípio da superposição.

Nas situações nas quais as excitações são descritas por uma função qualquer, é usual se utilizar o método da transformada de Laplace para obtenção da resposta à excitação. Este método possui a vantagem de se poder tratar funções que apresentem descontinuidades e ainda considerar as condições iniciais do sistema.

Sendo a equação de movimento do sistema dada pela equação (2.1.1), e aplicando-se a transformada de Laplace a ambos os lados da equação, vem:

$$ms^2\bar{x}(s) - msx(0) - m\dot{x}(0) + cs\bar{x}(s) - cx(0) + k\bar{x}(s) = \bar{F}(s) \quad (2.1.4)$$

reordenando os termos, vem:

$$(ms^2 + cs + k)\bar{x}(s) = \bar{F}(s) + (ms + c)x(0) + m\dot{x}(0) \quad (2.1.5)$$

onde  $\bar{x}(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}x(t)dt$

$$\bar{F}(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt$$

$x(0)$  e  $\dot{x}(0)$  são as condições iniciais.

A fim de se concentrar esforços na solução não homogênea, supõem-se (por hipótese) que  $\dot{x}(0)=0$  e  $x(0)=0$ , logo:

$$(ms^2 + cs + k)\bar{x}(s) = \bar{F}(s) \quad (2.1.6)$$

Define-se  $\bar{Z}(s) = \bar{F}(s)/\bar{x}(s) = ms^2 + cs + k$ , como sendo a impedância geral do sistema, sendo seu inverso denominado admitância do sistema:

$$\bar{G}(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} = \frac{1}{m(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (2.1.7)$$

com  $\xi$  sendo o coeficiente de amortecimento viscoso e  $\omega_n$  a frequência natural não-amortecida do sistema.

Tem-se então que  $\bar{x}(s) = \bar{G}(s)\bar{F}(s)$ , tal que a função transformada do sistema possa ser encarada como um operador algébrico atuando sobre a excitação transformada, fornecendo a resposta transformada.

Pode-se calcular a resposta  $x(t)$  a partir da resposta transformada, bastando aplicar a transformada inversa de Laplace à função  $\bar{x}(s)$ , ou seja:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{G}(s)\bar{F}(s)\} \quad (2.1.8)$$

sendo que o operador  $\mathcal{L}^{-1}$  envolve, em geral, uma integral de linha no domínio complexo.

Para exemplificar, resolve-se a equação (2.1.1) quando sujeita às condições iniciais  $x(0)=x_0$  e  $\dot{x}(0)=v_0$ . Pelo método da transformada de Laplace, vem:

$$\bar{x}(s) = \frac{\bar{F}(s)}{m(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} + \frac{s + 2\xi\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} x_0 + \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} v_0 \quad (2.1.9)$$

A transformada inversa de  $\bar{x}(s)$  é calculada considerando separadamente cada termo da equação (2.1.9). Para obter a transformada inversa do primeiro termo, utiliza-se o teorema de Borel, ou teorema da convolução. Desta forma, obtém-se:

$$\bar{f}_1(s) = \bar{F}(s) \text{ e } \bar{f}_2(s) = \frac{1}{m(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}, \text{ logo}$$

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}_1(s)\} = F(t) \text{ e } f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}_2(s)\} = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n t} \text{sen}\omega_d t$$

$$\text{com } \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}_1(s)\bar{f}_2(s)\} &= \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = \\ &= \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(\tau)e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}\text{sen}[\omega_d(t-\tau)]d\tau \end{aligned}$$

Para os segundo e terceiro termos, obtém-se:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s + 2\xi\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_d t - \psi)$$

$$\text{com } \psi = \arctan \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\hat{\Gamma}^{-1} \left( \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \right) = \frac{1}{\omega_d} e^{-\xi\omega_n t} \text{sen}\omega_d t$$

Assim sendo, a resposta geral pode ser escrita como:

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(\tau) e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \text{sen}[\omega_d(t-\tau)] d\tau +$$

$$+ \frac{x_0}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_d t - \psi) + \frac{v_0}{\omega_d} e^{-\xi\omega_n t} \text{sen}\omega_d t \quad (2.1.10)$$

## 2.2- Sistemas Lineares com Vários Graus de Liberdade

A maioria dos sistemas vibracionais encontrados em situações físicas possuem suas propriedades distribuídas ao longo das estruturas (massa, rigidez, amortecimento). Tais sistemas são denominados de sistemas com infinitos graus de liberdade, pois o sistema fica totalmente descrito somente quando se conhece ou se determina o movimento em todos os pontos do sistema. Em vários casos, a massa e a rigidez estão distribuídas não uniformemente, construindo-se geralmente para tais sistemas, um modelo matemático que necessite apenas um número finito de coordenadas.

O movimento de um sistema com vários graus de liberdade é geralmente descrito por um conjunto finito de equações diferenciais de segunda ordem. A fim de se resolver este sistema

aconselha-se a remoção do acoplamento das equações utilizando uma transformação de coordenadas.

Atenção deve ser dada ao movimento destes sistemas com vários graus de liberdade nas vizinhanças de uma posição de equilíbrio. Assume-se que tal posição é dada pela solução trivial, e que os deslocamentos generalizados das posições de equilíbrio sejam suficientemente pequenos de forma que as relações força-deslocamento e força-velocidade sejam lineares. Isto resulta no aparecimento, nas equações de movimento, das coordenadas generalizadas e suas derivadas temporais em potências de primeira ordem.

Um sistema com  $n$  graus de liberdade pode ser representado por  $n$  massas  $m_i$  ( $i=1, \dots, n$ ), conectadas através de molas e elementos amortecedores, figura 2.1. Admite-se, para análise do sistema, o movimento em uma única dimensão, de forma a não introduzir complicações desnecessárias.

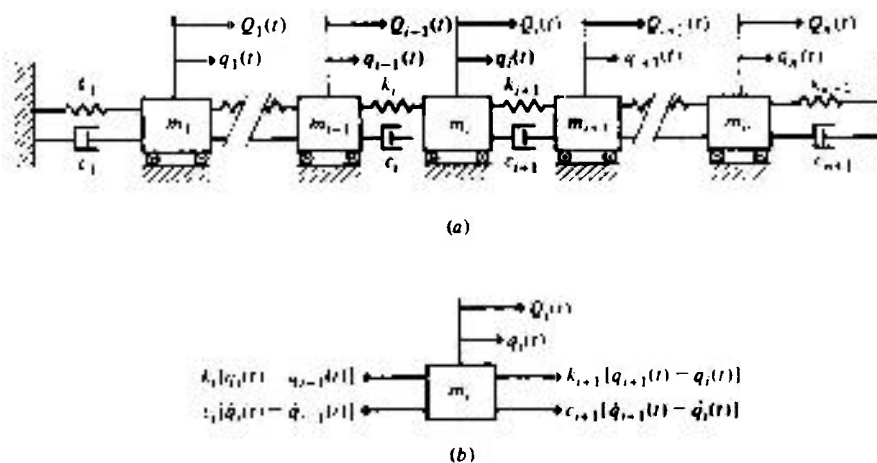


Figura 2.1. Sistema com  $n$  graus de liberdade.

Pelo fato do movimento ser uni-dimensional, o número total de graus de liberdade do sistema coincide com o número de massas  $m_i$ . Em vista disto, denomina-se por  $q_i(t)$  a coordenada generalizada que representa o deslocamento da massa  $m_i$ , e a equação de movimento para esta fica:

$$Q_i(t) + c_{i+1}[\dot{q}_{i+1}(t) - \dot{q}_i(t)] + k_{i+1}[q_{i+1}(t) - q_i(t)] - c_i[\dot{q}_i(t) - \dot{q}_{i-1}(t)] - k_i[q_i(t) - q_{i-1}(t)] = m_i \ddot{q}_i(t) \quad (2.2.1)$$

onde  $Q_i(t)$  representa a força externa (ou o somatório de forças externas) aplicada. A equação de movimento pode ser reagrupada da seguinte maneira:

$$m_i \ddot{q}_i(t) - c_{i+1} \dot{q}_{i+1}(t) + (c_i + c_{i+1}) \dot{q}_i(t) - c_i \dot{q}_{i-1}(t) - k_{i+1} q_{i+1}(t) + (k_i + k_{i+1}) q_i(t) - k_i q_{i-1}(t) = Q_i(t) \quad (2.2.2)$$

Introduz-se a notação abaixo de forma a simplificar a equação:

$$\begin{aligned} m_{i,j} &= \delta_{i,j} m_i, & i, j &= 1, \dots, n \\ c_{i,j} &= 0, \quad k_{i,j} = 0, & j &= 1, 2, \dots, i-2, i+2, \dots, n \\ c_{i,j} &= -c_i, \quad k_{i,j} = -k_i, & j &= i-1 \\ c_{i,j} &= c_i + c_{i+1}, \quad k_{i,j} = k_i + k_{i+1}, & j &= i \\ c_{i,j} &= -c_{i+1}, \quad k_{i,j} = -k_{i+1}, & j &= i+1 \end{aligned}$$

onde  $m_{i,j}$ ,  $c_{i,j}$  e  $k_{i,j}$  são denominados coeficientes de massa, amortecimento e rigidez respectivamente, e  $\delta_{i,j}$  é o delta de Kronecker:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Utilizando-se a notação anterior, pode-se reescrever o conjunto de equações para as  $n$  massas  $m_i$ , como:

$$\sum_{j=1}^n \{m_{i,j}\ddot{q}_j(t) + c_{i,j}\dot{q}_j(t) + k_{i,j}q_j(t)\} = Q_i(t) \quad i=1, \dots, n \quad (2.2.3)$$

É útil reescrever o conjunto de equações (2.2.3) sob a forma matricial, onde:

$$[m_{i,j}] = [m] = [m]^T$$

$$[k_{i,j}] = [k] = [k]^T$$

$$[c_{i,j}] = [c] = [c]^T$$

A propriedade de simetria dos coeficientes pode ser facilmente visualizada através da igualdade entre a matriz de determinada propriedade e sua transposta. Para as coordenadas  $q_i(t)$  e forças  $Q_i(t)$ , é possível a representação na forma de matrizes colunas:

$$\{q_i(t)\} = \{q(t)\} \quad \text{e} \quad \{Q_i(t)\} = \{Q(t)\}$$

O conjunto de equações (2.2.3) pode então ser representado na forma matricial:

$$[m]\{\ddot{q}(t)\} + [c]\{\dot{q}(t)\} + [k]\{q(t)\} = \{Q(t)\} \quad (2.2.4)$$

Considerando primeiro o caso não-amortecido, ( $[c]=[0]$ ), as equações (2.2.4) se reduzem a:

$$[m]\{\ddot{q}(t)\} + [k]\{q(t)\} = \{Q(t)\} \quad (2.2.5)$$

Tal conjunto de equações de movimento pode ser expresso utilizando-se um outro conjunto de coordenadas generalizadas  $\eta_j(t)$  ( $j=1, \dots, n$ ), sendo qualquer coordenada  $q_i(t)$  uma combinação linear de coordenadas  $\eta_j(t)$ . A transformação de coordenadas pode ser escrita como:

$$\{q(t)\} = [u]\{\eta(t)\} \quad (2.2.6)$$

com  $[u]$  sendo uma matriz quadrada denominada matriz de transformação. Pelo fato de  $[u]$  ser constante, vem:

$$\{\dot{q}(t)\} = [u]\{\dot{\eta}(t)\} \quad (2.2.7)$$

$$\{\ddot{q}(t)\} = [u]\{\ddot{\eta}(t)\} \quad (2.2.8)$$

Substituindo as equações (2.2.6), (2.2.7) e (2.2.8) em (2.2.5), vem:

$$[m][u]\{\ddot{\eta}(t)\} + [k][u]\{\eta(t)\} = \{Q(t)\} \quad (2.2.9)$$

Multiplicando-se ambos os lados da equação (2.2.9) por  $[u]^T$ , vem:

$$[M]\{\ddot{\eta}(t)\} + [K]\{\eta(t)\} = \{N(t)\} \quad (2.2.10)$$

$$\text{com: } [M] = [u]^T [m] [u] = [M]^T$$

$$[K] = [u]^T [k] [u] = [K]^T$$

$$\{N(t)\} = [u]^T \{Q(t)\}$$

A matriz  $[u]$  que diagonaliza  $[m]$  e  $[k]$  existe, sendo denominada matriz modal, visto que é constituída pelos vetores modais, distintos e ortogonais entre si, representando os modos naturais do sistema. As coordenadas  $\eta_j(t)$  ( $j=1, \dots, n$ ) são denominadas de coordenadas naturais ou nodais.

A fim de se determinar a matriz modal, deve-se resolver o problema de auto-valores, associado com vibrações livres do sistema. Na ausência de forças externas ( $\{Q(t)\}=\{0\}$ ), vem:

$$[m]\{\ddot{q}(t)\} + [k]\{q(t)\} = \{0\}, \text{ ou}$$

$$\sum_{j=1}^n m_{i,j} \ddot{q}_j(t) + \sum_{j=1}^n k_{i,j} q_j(t) = 0 \quad , \quad i=1, \dots, n \quad (2.2.11)$$

As soluções para as equações acima devem ser sincronizadas, ou seja, a razão entre duas coordenadas  $q_i(t)$  e  $q_j(t)$  ( $i \neq j$ ) deve permanecer constante durante o movimento. Este tipo de movimento é expresso por:

$$q_j(t) = u_j f(t) \quad , \quad j=1, 2, \dots, n \quad (2.2.12)$$

com  $f(t)$  sendo uma função limitada. Substituindo (2.2.12) em (2.2.11), vem:

$$\ddot{f}(t) \sum_{j=1}^n m_{i,j} u_j + f(t) \sum_{j=1}^n k_{i,j} u_j = 0 \quad , \quad i=1, \dots, n \quad (2.2.13)$$

$$\frac{-\ddot{f}(t)}{f(t)} = \frac{\sum k_{i,j} u_j}{\sum m_{i,j} u_j} = \lambda \quad (2.2.14)$$

o que implica na separação das dependências temporais e espaciais, ou seja:

$$\ddot{f}(t) + \lambda f(t) = 0$$

$$\sum_{j=1}^n (k_{1j} - \lambda m_{1j}) u_j = 0, \quad i=1, \dots, n \quad (2.2.15)$$

A solução da equação em  $f(t)$  pode ser dada por  $f(t) = Ae^{st}$ , resultando em:

$$s^2 + \lambda = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm \sqrt{-\lambda}$$

tem-se que  $\lambda$  deve ser positivo ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ) de forma que o conjunto de equações (2.2.15) admita solução, logo pode-se fazer  $\lambda = \omega^2$ , resultando em:

$$f(t) = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} = C \cos(\omega t - \phi) \quad (2.2.16)$$

onde  $\omega$  ... frequência do movimento harmônico

$\phi$  ... ângulo de fase

$C$  ... constante arbitrária

Para que se determine os possíveis valores de  $\omega$ , deve-se recorrer a segunda equação do conjunto (2.2.15).

$$\sum_{j=1}^n (k_{1j} - \omega^2 m_{1j}) u_j = 0, \quad i=1, \dots, n$$

$$\text{ou } [k]\{u\} = [\omega^2][m]\{u\} \quad (2.2.17)$$

O sistema (2.2.17) de equações admitirá solução não trivial se e somente se o determinante dos coeficientes  $u_j$  se anular, ou seja:

$$\Delta(\omega^2) = | k_{ij} - \omega^2 m_{ij} | = 0 \quad (2.2.18)$$

com  $\Delta(\omega^2)$  sendo denominado determinante característico. A equação (2.2.18) fornece como solução  $\omega_r$  frequências ( $r=1, \dots, n$ ), sendo que para cada valor  $\omega_r$  existe um vetor não trivial  $\{u\}_r$  com elementos reais, e com  $\{u\}_r$  sendo a solução do problema de autovalores, de forma que:

$$[k]\{u\}_r = \omega_r^2 [m]\{u\}_r \quad (2.2.19)$$

Os vetores  $\{u\}_r$  ( $r=1, \dots, n$ ) são conhecidos como vetores característicos ou auto-vetores, também sendo denominados vetores modais representando fisicamente os modos naturais de vibração do sistema. O formato dos modos normais é único, mas a amplitude não; sendo necessária a sua normalização:

$$\{u\}_r^T [m] \{u\}_r = 1 \quad , \quad r=1, \dots, n \quad (2.2.20)$$

A solução pode ser escrita como:

$$\{q(t)\}_r = \{u\}_r f_r(t) = \{u\}_r C_r \cos(\omega_r t - \phi_r) \quad (2.2.21)$$

e a solução geral como:

$$\{q(t)\} = \sum_{r=1}^n \{q(t)\}_r = \sum_{r=1}^n \{u\}_r f_r(t) = \{u\} f(t) \quad (2.2.22)$$

com  $\{u\} = [ \{u\}_1 \quad \{u\}_2 \quad \dots \quad \{u\}_n ]$

Sendo  $\{q(0)\}$  e  $\{\dot{q}(0)\}$  os deslocamentos e velocidades iniciais do movimento do sistema, vem:

$$\{q(0)\} = \sum_{r=1}^n C_r \{u\}_r \cos \phi_r$$

$$\{\dot{q}(0)\} = \sum_{r=1}^n C_r \omega_r \{u\}_r \operatorname{sen} \phi_r \quad (2.2.23)$$

Multiplicando-se as equações acima por  $\{u\}_r^T [m]$  e levando em consideração as relações de ortogonalidade :

$$\{u\}_r^T [m] \{u\}_s = \delta_{rs} \quad , \quad r, s = 1, \dots, n \quad (2.2.24)$$

vem:  $C_r \cos \phi_r = \{u\}_r^T [m] \{q(0)\}$

$$C_r \operatorname{sen} \phi_r = \{u\}_r^T [m] \{\dot{q}(0)\} \frac{1}{\omega_r} \quad (2.2.25)$$

Assim sendo, a resposta do sistema ao vetor deslocamento inicial e ao vetor velocidade inicial é dada por:

$$\{q(t)\} = \sum_{r=1}^n \left[ \{u\}_r^T [m] \{q(0)\} \cos \omega_r t + \{u\}_r^T [m] \{\dot{q}(0)\} \frac{1}{\omega_r} \operatorname{sen} \omega_r t \right] \{u\}_r \quad (2.2.26)$$

Estabelece-se assim, um procedimento de análise modal de uma estrutura, sendo este o processo pelo qual a solução de um conjunto de equações simultâneas de movimento da estrutura é obtida a partir da transformação destas em equações com base nas coordenadas nodais da estrutura, sendo tais equações resolvidas, e a forma da solução sendo uma combinação linear dos vetores modais multiplicados pelas coordenadas naturais.

### 2.2.1- Desacoplamento das Equações de Movimento

Um procedimento de análise modal análogo ao anterior pode ser utilizado para derivar a resposta de sistemas não-amortecidos sujeitos a uma excitação genérica, podendo esta ser um conjunto de excitações iniciais ou um conjunto de forças externas aplicadas ao sistema.

Para que as equações de movimento possam ser resolvidas, é necessário o desacoplamento destas. O acoplamento existente depende exclusivamente da escolha do sistema de coordenadas que serão utilizadas na descrição do movimento.

No caso de um sistema não-amortecido sujeito a forças externas, a equação matricial do movimento é:

$$[m]\{\ddot{q}(t)\} + [k]\{q(t)\} = \{Q(t)\} \quad (2.2.27)$$

sendo estas equações lineares, com as respectivas soluções podendo ser obtidas, a princípio, pelo método da transformada de Laplace. Analiticamente, a determinação da solução pode vir a ser

trabalhosa, entretanto recorre-se à análise modal para transformar o conjunto de equações simultâneas em um conjunto de equações independentes, onde a matriz de transformação é a matriz modal. Para se obter a solução, deve-se resolver o problema dos auto-valores associados com as matrizes  $[m]$  e  $[k]$ , podendo a solução ser escrita na forma:

$$[m][u][\omega^2] = [k][u] \quad (2.2.28)$$

onde  $[u]$  é a matriz modal e  $[\omega^2]$  a matriz diagonal das frequências naturais. A matriz modal pode ser normalizada de forma que:

$$\begin{aligned} [u]^T[m][u] &= [1] \\ [u]^T[k][u] &= [\omega^2] \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

De posse das frequências naturais e dos modos naturais do sistema, inicia-se a solução do problema não-homogêneo. Para tanto, utiliza-se a transformação linear de coordenadas descrita em (2.2.6), que quando aplicada em (2.2.27) com as condições de normalização (2.2.29), fornece:

$$\{\ddot{\eta}(t)\} + [\omega^2]\{\eta(t)\} = \{N(t)\}$$

com  $\{N(t)\} = [u]^T\{Q(t)\}$ . Tais equações podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\ddot{\eta}_r(t) + \omega_r^2 \eta_r(t) = N_r(t) \quad r=1,2,\dots,n \quad (2.2.30)$$

Aplicando a transformada de Laplace às equações acima, vem:

$$\eta_r(t) = \frac{1}{\omega_r} \int_0^t N_r(t) \text{sen} \omega_r(t-\tau) d\tau + \eta_r(0) \cos \omega_r t + \dot{\eta}_r(0) \frac{1}{\omega_r} \text{sen} \omega_r t \quad r = 1, \dots, n \quad (2.2.31)$$

onde  $\eta_r(0)$  e  $\dot{\eta}_r(0)$  são as condições iniciais das "coordenadas transferência", estando relacionadas às condições iniciais nas coordenadas  $\{q(t)\}$  através de :

$$\eta_r(0) = \{u\}_r^T [m] \{q(0)\} \quad \text{e} \quad \dot{\eta}_r(0) = \{u\}_r^T [m] \{\dot{q}(0)\} \quad (2.2.32)$$

A solução completa das equações de movimento (2.2.27) é obtida retornando-se na equação de transformação de coordenadas obtendo:

$$\{q(t)\} = \{u\} \{\eta(t)\} = \sum_{r=1}^n \{u\}_r \eta_r(t) \quad (2.2.33)$$

### 2.2.2- Vibrações Lineares Amortecidas

A resposta de um sistema com amortecimento viscoso, com  $n$  graus de liberdade, representa um problema mais complexo, estando a dificuldade ainda no desacoplamento das equações, introduzido pelo amortecimento. Para um sistema deste tipo (figura 2.1), a equação de movimento pode ser escrita como:

$$[m] \{\ddot{q}(t)\} + [c] \{\dot{q}(t)\} + [k] \{q(t)\} = \{Q(t)\} \quad (2.2.34)$$

Aplicando a transformação de coordenadas, vem:

$$\{\ddot{\eta}(t)\} + [C]\{\dot{\eta}(t)\} + [\omega^2]\{\eta(t)\} = \{N(t)\} \quad (2.2.35)$$

onde  $[C] = [u]^T [c] [u]$

Nota-se desta forma que nem sempre a análise modal consegue re-arranjar o conjunto de equações de movimento de modo que este seja formado por equações independentes. Isto só ocorre em alguns casos especiais nos quais  $[C]$  é uma matriz diagonal, ou possa em primeira instância ser tratada como tal.

Um caso comum é o de estruturas com amortecimento pequeno, de forma que o acoplamento introduzido pelos termos fora da diagonal da matriz  $[C]$  possam ser encarados como um efeito de segunda ordem, sendo que uma aproximação razoável pode ser obtida descartando estes termos. Quando o amortecimento não é pequeno, a matriz  $[C]$  não é diagonal e nem pode ser tratada como tal. Neste caso, utilizam-se métodos computacionais para resolver o problema. Entretanto, existe um caso especial no qual  $[c]$  é uma combinação linear das matrizes  $[m]$  e  $[k]$ , ou seja:

$$[c] = \alpha [m] + \beta [k],$$

logo  $[C] = \alpha [1] + \beta [\omega^2]$  sendo  $\alpha$  e  $\beta$  constantes.

Desta forma, as equações de movimento são independentes, sendo tal caso denominado de amortecimento proporcional. Para a matriz  $[C]$ , vem:

$$[C] = [2\xi\omega] \quad (2.2.36)$$

As equações de movimento (2.2.35), podem ser reescritas sob a forma:

$$\ddot{\eta}_r(t) + 2\xi_r\omega_r\dot{\eta}_r(t) + \omega_r^2\eta_r(t) = N_r(t) \quad r=1, \dots, n \quad (2.2.37)$$

Para este caso (bem como para aqueles nos quais a matriz [C] pode ser tratada como diagonal), a solução geral pode ser escrita como:

$$\eta_r(t) = \frac{1}{\omega_{d_r}} \int_0^t N_r(\tau) e^{-\xi_r\omega_r(t-\tau)} \text{sen}\omega_{d_r}(t-\tau) d\tau + e^{-\xi_r\omega_r t} \left\{ \frac{\eta_r(0)}{\sqrt{1-\xi_r^2}} \cos(\omega_{d_r}t - \psi_r) + \frac{\dot{\eta}_r(0)}{\omega_{d_r}} \text{sen}\omega_{d_r}t \right\} \quad r=1, \dots, n \quad (2.2.38)$$

A solução geral do problema, em termos das coordenadas originais, é obtida substituindo-se as equações anteriores (2.2.38) na transformação de coordenadas, resultando:

$$\{q(t)\} = [u]\{\eta(t)\} = \sum_{r=1}^n \{u\}_r \eta_r(t) \quad (2.2.39)$$

Através da análise do tipo de solução obtida, nota-se que além da matriz modal [u], é necessário o conhecimento da matriz dos coeficientes de amortecimento [2ξω] da estrutura. Assim sendo, o estudo teórico ou uma modelagem do movimento de uma estrutura com n graus de liberdade está diretamente relacionado com o estudo experimental deste sistema, dependendo da determinação das propriedades modais do mesmo.

### 3- PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE MODAL

O capítulo anterior mostra uma revisão de alguns conceitos e aspectos teóricos relacionados à análise de vibrações. Contudo, o modo pelo qual as equações de movimento são analisadas e interpretadas sob o ponto de vista experimental é ligeiramente diferente.

Ao invés de se trabalhar com a expressão calculada como sendo a solução da equação de movimento da estrutura, utilizam-se as respostas obtidas pelos sensores/transdutores (acelerômetros, cabeças de impedância) para a força aplicada à estrutura e para a respectiva resposta. Através da relação entre estas duas grandezas, pode-se levantar as características da estrutura /13,23,24/. Desta forma, para se comparar dados previstos por um modelo teórico com os obtidos experimentalmente, é usual a construção de uma função contendo características tanto da excitação como da respectiva resposta, pois tais sinais são medidos na prática. A função que relaciona o sinal de excitação com a resposta do sistema faz parte de uma categoria de funções denominadas funções resposta em frequência (FRF- "Frequency Response Function").

Tais funções resposta em frequência assumem formas distintas de acordo com o tipo de resposta coletada, ou seja, a resposta da estrutura pode ser registrada na forma de deslocamentos, velocidades ou acelerações. Caso a resposta seja registrada sob a forma de deslocamentos, a função resposta em frequência fica denominada de receptância ( $\alpha(\omega)$ ); no caso de se registrar velocidades obtém-se funções denominadas mobilidade ( $Y(\omega)$ ); e no caso de se trabalhar com acelerações obtém-se as

funções denominadas inércia ou aceleração ( $A(\omega)$ ). Pelo fato da função resposta em frequência ser uma função complexa (possui módulo e fase, devido ao fato da resposta poder estar defasada em relação à excitação), a sua variação com a frequência não pode ser totalmente visualizada através de um gráfico padrão x-y. As três formas mais comuns de apresentação são:

- (a) Gráficos do módulo e fase da FRF em função da frequência, denominados diagramas de Bode;
- (b) Gráficos das partes real e imaginária da FRF em função da frequência, no caso do uso de notação complexa;
- (c) Gráfico da parte real em função da parte imaginária da FRF. Tal gráfico não mostra explicitamente a dependência com a frequência, sendo denominado Diagrama de Nyquist.

### 3.1- Definição das FRF's

Para um sistema com n graus de liberdade, as equações de movimento podem ser escritas na forma matricial sob a forma:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (3.1.1)$$

Considerando o caso das oscilações livres, ou seja,  $\{f(t)\}=\{0\}$ , e com a resposta da estrutura sendo dada por  $\{x(t)\}=\{x\}e^{i\omega t}$ , vem:

$$([K] - \omega^2[M])\{x\}e^{i\omega t} = \{0\} \quad (3.1.2)$$

$$\text{logo } \Delta([K] - \omega^2[M]) = 0 \quad (3.1.3)$$

Tal equação fornece como solução um conjunto  $\omega_r$  ( $r=1, \dots, n$ ) de valores de frequência (frequências naturais), que quando inseridas nas equações de movimento geram um conjunto de valores para  $\{x\}$ , denominados modos naturais ou formato dos modos ( $\{\psi\}_r$ ). Assim sendo, a solução completa pode ser expressa em duas matrizes  $n \times n$ , denominadas auto-matrizes ( $[\omega_r^2]$  e  $[\psi]$ ).

Os modos naturais da estrutura possuem as propriedades de ortogonalidade, definidas por:

$$[\psi]^T [M] [\psi] = [m_r] \quad (3.1.4)$$

$$[\psi]^T [K] [\psi] = [k_r] \quad (3.1.5)$$

Das equações acima vem:

$$[\omega_r^2] = [m_r]^{-1} [k_r] \quad (3.1.6)$$

onde  $m_r$  e  $k_r$  são geralmente denominados de massa e rigidez generalizadas do modo  $r$ . É possível se normalizar os modos naturais de forma que:

$$[\phi]^T [M] [\phi] = [I] \quad (3.1.7)$$

$$[\phi]^T [K] [\phi] = [\omega_r^2] \quad (3.1.8)$$

sendo que a relação entre o  $r$ -ésimo modo normalizado  $\{\phi\}_r$  e a sua forma mais geral  $\{\psi\}_r$  é dada por:

$$[\phi] = [\psi] [m_r]^{-1/2} \quad (3.1.9)$$

Considerando o caso no qual a estrutura é excitada harmonicamente por um conjunto de forças com mesma frequência, mas com diferentes amplitudes e fases,  $\{f(t)\} = \{f\}e^{i\omega t}$ , e assumindo a solução também harmônica, vem:

$$\{x\} = ([K] - \omega^2[M])^{-1}\{f\} \quad (3.1.10)$$

$$\{x\} = [\alpha(\omega)]\{f\} \quad (3.1.11)$$

onde  $[\alpha(\omega)]$  é a matriz receptância ( $n \times n$ ), sendo um elemento geral da matriz definido por:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{x_j}{f_k}, \text{ com } f_m = 0 \quad m=1, \dots, n \text{ e } m \neq k \quad (3.1.12)$$

Outra forma de se obter a receptância é através do uso das propriedades modais do sistema, ou seja:

$$\begin{aligned} ([K] - \omega^2[M]) &= [\alpha(\omega)]^{-1} \\ [\phi]^T([K] - \omega^2[M])[\phi] &= [\phi]^T[\alpha(\omega)]^{-1}[\phi] \\ [\omega_j^2] - [\omega^2] &= [\phi]^T[\alpha(\omega)]^{-1}[\phi] \\ [\alpha(\omega)] &= [\phi][(\omega_j^2 - \omega^2)]^{-1}[\phi]^T \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

sendo a matriz  $[\alpha(\omega)]$  simétrica, isto é:

$$\alpha_{jk} = \frac{x_j}{f_k} = \alpha_{kj} = \frac{x_k}{f_j}$$

A equação (3.1.13) pode ser reescrita sob a forma:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{{}_r\phi_j \quad {}_r\phi_k}{\omega_r^2 - \omega^2} = \sum_{r=1}^n \frac{{}_r\psi_j \quad {}_r\psi_k}{m_r(\omega_r^2 - \omega^2)} = \sum_{r=1}^n \frac{{}_rA_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2} \quad (3.1.14)$$

sendo  ${}_rA_{jk}$  denominada de constante modal, ou residuo do pólo  $r$ .

No tratamento de sistemas amortecidos com  $n$  graus de liberdade é conveniente considerar um tipo especial de amortecimento que possa ser facilmente analisado, como é o caso do amortecimento proporcional. A vantagem em utilizar este modelo de amortecimento é o fato dos modos da estrutura serem quase idênticos àqueles do modelo sem amortecimento, isto é, o formato dos modos é idêntico sendo as frequências naturais levemente distintas.

Supondo uma estrutura com amortecimento proporcional, onde:

$$\begin{aligned} [C] &= a[M] + b[K] \\ [\psi]^T[C][\psi] &= a[\psi]^T[M][\psi] + b[\psi]^T[K][\psi] \\ [\psi]^T[C][\psi] &= a[m_r] + b[k_r] = [c_r] \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

com os elementos  $c_r$  representando o amortecimento generalizado para os vários modos do sistema. O fato da matriz  $[c_r]$  ser diagonal mostra que o formato dos modos do sistema não-amortecido é o mesmo para o sistema amortecido, sendo esta mais uma característica intrínseca ao tipo de amortecimento.

Desta forma, o sistema amortecido apresenta os seguintes auto-valores e auto-vetores:

$$\omega_r' = \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2}, \quad \xi_r = a \frac{\omega_r}{2} + \frac{b}{2\omega_r} \quad (3.1.16)$$

$$[\psi^{\text{AMORTECIDO}}] = [\psi^{\text{NÃO-AMORTECIDO}}] \quad (3.1.17)$$

com a função resposta em frequência dada por:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{r\psi_j \ r\psi_k}{(k_r - \omega^2 m_r) + i(\omega c_r)} \quad (3.1.18)$$

No caso de se analisar a equação geral de movimento para um sistema com vários graus de liberdade e amortecimento viscoso, sujeito a uma excitação harmônica, tem-se que resolver:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (3.1.19)$$

Analisando primeiramente o caso homogêneo, e admitindo a solução da forma  $\{x(t)\} = \{x\}e^{st}$ , vem:

$$(s^2[M] + s[C] + [K])\{x\} = \{0\} \quad (3.1.20)$$

as soluções do sistema acima são dadas por complexos conjugados, ou seja:  $s_r$  e  $s_r^*$ ,  $\{\psi\}_r$  e  $\{\psi^*\}_r$ , com  $r=1, \dots, n$ .

$$s_r = \omega_r(-\xi_r + i \sqrt{1-\xi_r^2}) \quad (3.1.21)$$

com  $\omega_r$  ... frequência natural do modo  $r$ .

$\xi_r$  ... razão de amortecimento crítico.

Caso este sistema esteja sujeito a uma dada força harmônica  $\{f(t)\} = \{f\}e^{i\omega t}$ , com a resposta sendo dada por  $\{x(t)\} = \{x\}e^{i\omega t}$ , vem:

$$\{x\} = [ [K] - \omega^2[M] + i\omega^2[C] ]^{-1}\{f\} \quad (3.1.22)$$

Sendo esta uma representação não apropriada para a solução, visto que procura-se uma expansão em série. Para tanto, define-se uma transformação de coordenadas contendo  $\{x\}$  e  $\{\dot{x}\}$ , isto é:

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix}_{2n \times 1} \quad (3.1.23)$$

e a equação de movimento podendo ser reescrita como:

$$[C : M]\{\dot{y}\} + [K : 0]\{y\} = \{0\} \quad (3.1.24)$$

Neste caso tem-se  $n$  equações e  $2n$  incógnitas, sendo necessária a adição de uma equação identidade do tipo:

$$[M : 0]\{\dot{y}\} - [0 : M]\{y\} = \{0\} \quad (3.1.25)$$

Agrupando-se as equações (3.1.24) e (3.1.25) vem:

$$\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \{\dot{y}\} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \{y\} = \{0\} \quad (3.1.26)$$

podendo ser reescrita como  $[A]\{\dot{y}\} + [B]\{y\} = \{0\}$ , e assumindo a solução da forma  $\{y(t)\} = \{y\}e^{st}$ , obtém-se os auto-valores  $\lambda_r$  e os auto-vetores  $\{\theta\}_r$ , do sistema, sendo que estes satisfazem:

$$(\lambda_r [A] + [B])\{\theta\}_r = \{0\} \quad r=1, \dots, 2n \quad (3.1.27)$$

sendo as propriedades de ortogonalidade dadas por:

$$\{\theta\}_r^T [A] \{\theta\}_s = [a_r] \quad (3.1.28)$$

$$\{ \theta \}^T \{ \mathbf{B} \} \{ \theta \} = \{ b_r \} \quad (3.1.29)$$

$$\lambda_r = -\frac{b_r}{a_r}, \quad r=1, \dots, 2n \quad (3.1.30)$$

O vetor força ou excitação pode ser escrito no novo sistema de coordenadas, como sendo:

$$\{ \mathbf{P} \} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.1.31)$$

Assumindo-se a resposta também harmônica, vem:

$$\begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ i\omega x \end{Bmatrix} = \sum_{r=1}^{2n} \frac{\{ \theta \}_r^T \{ \mathbf{P} \} \{ \theta \}_r}{a_r (i\omega - s_r)} \quad (3.1.32)$$

mas pelo fato dos auto-valores serem pares de complexos conjugados, vem:

$$\begin{Bmatrix} x \\ i\omega x \end{Bmatrix} = \sum_{r=1}^n \frac{\{ \theta \}_r^T \{ \mathbf{P} \} \{ \theta \}_r}{a_r (i\omega - s_r)} + \sum_{r=1}^n \frac{\{ \theta^* \}_r^T \{ \mathbf{P} \} \{ \theta^* \}_r}{a_r^* (i\omega - s_r^*)} \quad (3.1.33)$$

Desta forma, a função resposta em frequência da resposta  $x$ , devida à uma única força  $f$ , fica definida como:

$$\alpha_{ph}(\omega) = \sum_{r=1}^n \left[ \frac{{}_r\theta_r, {}_r\theta_k}{a_r (\omega_r \xi_r + i(\omega - \omega_r \sqrt{1-\xi_r^2}))} + \frac{{}_r\theta_r^*, {}_r\theta_k^*}{a_r^* (\omega_r \xi_r + i(\omega - \omega_r \sqrt{1-\xi_r^2}))} \right] \quad (3.1.34)$$

sendo re-arranjada fornecendo:

$$\alpha_{j,k}(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{{}_rR_{j,k} + i(\omega/\omega_r){}_rS_{j,k}}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\omega\omega_r\xi_r} \quad (3.1.35)$$

$$\text{com } {}_rR_{j,k} = 2(\xi_r \text{Re}({}_rG_{j,k}) - \sqrt{1-\xi_r^2} \text{Im}({}_rG_{j,k}))$$

$${}_rS_{j,k} = 2\text{Re}({}_rG_{j,k})$$

$${}_rG_{j,k} = \omega_r \frac{{}_r\theta_j \quad {}_r\theta_k}{a_r}$$

Todo o desenvolvimento anterior foi realizado utilizando as respostas na forma de deslocamento  $\{x\}$ ; entretanto, é possível se trabalhar com velocidades  $\{\dot{x}\}$ , ou acelerações  $\{\ddot{x}\}$ . Neste caso, obtém-se as respectivas funções resposta em frequência na forma de mobilidades e inertâncias, estando estas relacionadas às receptâncias, através de :

$$[Y(\omega)] = i\omega[\alpha(\omega)] \quad (3.1.36)$$

$$[A(\omega)] = -\omega^2[\alpha(\omega)] = i\omega[Y(\omega)] \quad (3.1.37)$$

Para os sistemas com vários graus de liberdade, define-se dois tipos de função resposta em frequência:

- (a) FRF pontual: aquela onde a resposta e a excitação são medidas no mesmo ponto da estrutura;
- (b) FRF transferência: aquela onde a resposta e a excitação são medidas em pontos distintos da estrutura.

A figura 3.1, a seguir, exemplifica as diferenças existentes nas FRF's pontuais e transferências, para um caso de um sistema (massas-molas) com seis graus de liberdade, sendo

mostrada apenas a primeira coluna da matriz receptância  $[\alpha(\omega)]$ .

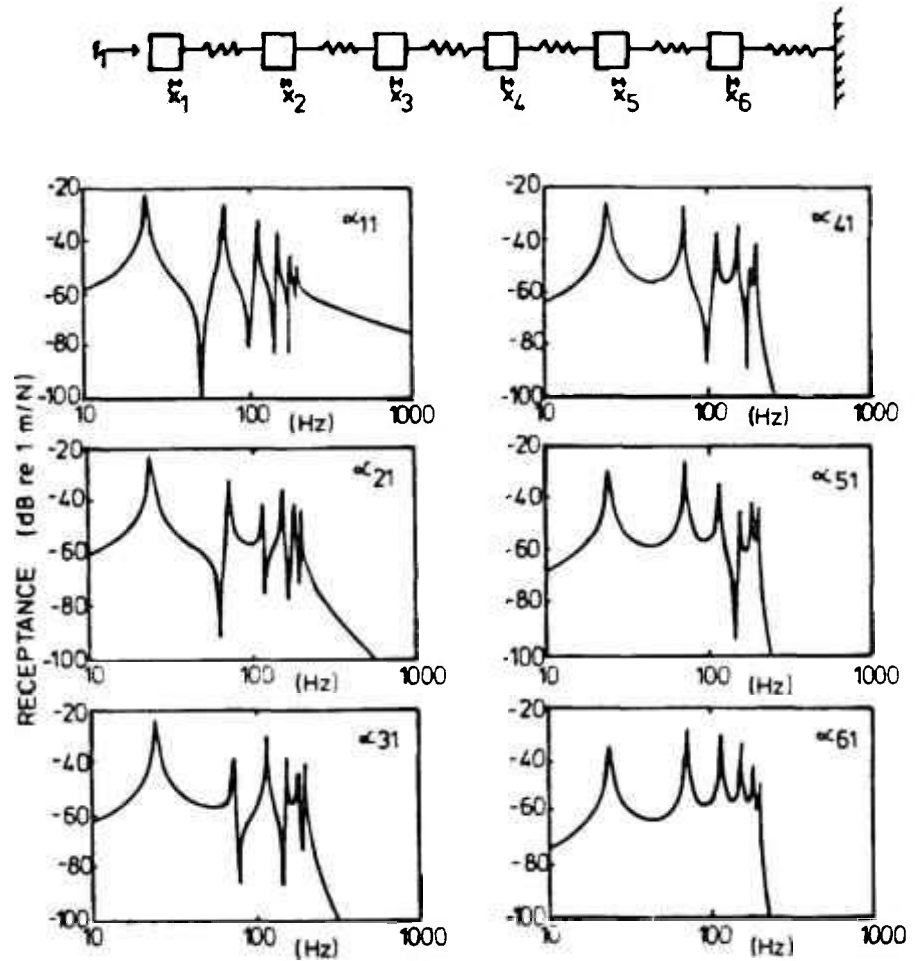


Figura 3.1- Gráfico dos elementos da primeira coluna da matriz receptância ( $n=6$ ).

### 3.2- Excitações não-harmônicas

A resposta de um sistema com vários graus de liberdade sujeito a uma excitação harmônica (conjunto de forças harmônicas de amplitudes e fases diferentes, mas todas com mesma frequência), pode ser calculada através de dados da função resposta em frequência. Entretanto, existe na prática outros tipos de excitações/respostas que podem ser analisados usando as mesmas funções resposta em frequência; sendo interessante se obter as propriedades da função resposta em frequência a partir de medidas realizadas durante testes de vibração.

O caso mais simples de excitações não-harmônicas é aquele no qual a excitação embora não-senoidal, ainda possui a propriedade de periodicidade /25/. Neste caso, não existe mais a relação simples entre as entradas e saídas, tal como para vibrações harmônicas. Assim sendo, a forma para o cálculo das respostas é, neste caso, através de séries de Fourier; onde o princípio básico é que qualquer função periódica pode ser representada por uma série de senos com valores apropriados para frequências, amplitudes e fases.

Uma vez obtida a decomposição em frequência da função força  $f(t)$ , pode-se utilizar os dados da função resposta em frequência correspondente para se calcular os componentes em frequência da resposta; sendo que esta possuirá exatamente as mesmas frequências do espectro de excitação. Obtém-se desta forma, históricos temporais da resposta  $x(t)$ , periódicos com o mesmo período da excitação, mas com formatos diferentes.

É possível determinar os respectivos componentes da série de Fourier dos sinais da força inicial e resposta

associada. Ambas as séries possuirão componentes no mesmo conjunto discreto de frequências, sendo estes múltiplos inteiros do período fundamental ( $T=2\pi/\omega$ ). De posse destas séries, a função resposta em frequência fica definida, no mesmo conjunto de pontos de frequência, através da razão entre o componente resposta e o componente excitação. Para cada conjunto de dados, existirão duas partes de cada componente: magnitude e fase.

Outro tipo possível de excitação é a transiente, sendo que esta não pode ser tratada como as periódicas. Entretanto, é possível em alguns casos estender o tratamento de séries de Fourier para a transformada de Fourier com um período infinitamente longo. Nestes casos, a transformada de Fourier da função excitação  $f(t)$  pode ser calculada:

$$F(\omega) = \mathfrak{F}\{f(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (3.2.1)$$

Em qualquer frequência  $\omega$ , a transformada de Fourier correspondente para a resposta,  $X(\omega)$ , pode ser determinada por:

$$X(\omega) = H(\omega) F(\omega) \quad (3.2.2)$$

onde  $H(\omega)$  é a versão apropriada da função resposta em frequência. A resposta temporal  $x(t)$  fica definida a partir da transformada inversa de Fourier de  $X(\omega)$  /26/, ou seja:

$$x(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (3.2.3)$$

O tipo mais complexo de sinal de vibração é o randômico. Poderia-se ter em mente que tais sinais também pudessem ser tratados como periódicos com período infinito, mas estes sinais não satisfazem as condições de Dirichlet, para aplicação da transformada de Fourier. Torna-se então necessária a introdução de dois conjuntos de parâmetros utilizados na descrição dos sinais randômicos: Um baseado no domínio temporal (funções correlação) e outro no domínio de frequência (densidades espectrais).

As funções correlação podem ser calculadas para um único sinal  $x(t)$  ou  $f(t)$  (funções auto-correlação), ou para o produto cruzado destes sinais (funções correlação cruzada). Em ambos os casos, tais funções são definidas como o valor esperado (ou médio) dos produtos  $x(t)x(t+\tau)$ ,  $f(t)f(t+\tau)$  e  $x(t)f(t+\tau)$ , calculado sobre o eixo dos tempos. Tais correlações, ao contrário dos sinais originais, satisfazem as condições para aplicação da transformada de Fourier. Os parâmetros resultantes são as densidades espectrais de potência, possuindo como unidade  $(\text{frequência})^2/\omega$ .

Através da manipulação das densidades espectrais de potência dos sinais  $x(t)$  e  $f(t)$ , chega-se ao seguinte conjunto de equações:

$$S_{xx}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{ff}(\omega)$$

$$S_{fx}(\omega) = H(\omega) S_{ff}(\omega) \quad (3.2.4)$$

$$S_{xx}(\omega) = H(\omega) S_{xf}(\omega)$$

onde  $S_{xx}(\omega)$  ... densidade espectral de potência do sinal  $x(t)$ .

$S_{ff}(\omega)$  ... densidade espectral de potência do sinal  $f(t)$ .

$S_{xf}(\omega)$  e  $S_{fx}(\omega)$  ... densidade espectral cruzada entre os sinais  $x(t)$  e  $f(t)$ .

$H(\omega)$  ... função resposta em frequência do sistema.

O conjunto (3.2.4) de equações fornece um método para determinação das propriedades da função resposta em frequência do sistema, a partir da medida e análise de testes de vibração randômica.

Conforme visto, a resposta de um sistema a uma excitação arbitrária pode ser feita ou através da integral de convolução, ou através da aplicação da transformada de Fourier aos sinais de excitação e resposta. Tais cálculos tornam-se extremamente trabalhosos, devendo-se recorrer ao cálculo numérico aplicado a computadores digitais. Por outro lado, todas as funções utilizadas no estudo de vibrações são contínuas no tempo, não podendo serem analisadas em computadores digitais; o que leva ao conceito da discretização temporal dos sinais.

O processo de cálculo da transformada de Fourier em computadores digitais é denominado transformada discreta de Fourier (DFT - "Discrete Fourier Transform") /16/ e envolve três passos básicos: amostragem (ou conversão) no domínio temporal, truncamento e conversão no domínio de frequência. Este processo demanda um certo tempo de processamento; assim sendo, otimizam-se tais cálculos utilizando um algoritmo para o cálculo da DFT, sendo este denominado FFT ("Fast Fourier Transform"), ou transformada rápida de Fourier.

### 3.3- Técnicas de Extração de Parâmetros

Já com as funções resposta em frequência obtidas, é preciso o desenvolvimento de técnicas de análise destas funções de forma a extrair as características modais da estrutura sob ensaio. Estas técnicas consistem basicamente no ajuste de curvas para uma expressão teórica para uma determinada FRF obtida experimentalmente /27/. Tal etapa do processo dos ensaios modais é denominada análise modal ou análise modal experimental, visto que é o estágio correspondente no estudo experimental à chamada análise modal teórica. Em ambos os casos, a análise modal leva à derivação das propriedades modais do sistema; entretanto, os processos são totalmente distintos entre si: um é um procedimento de ajuste de curva, enquanto o outro é um exercício de cálculo das raízes ou solução de um problema de auto-valores.

A maioria dos processos de ajuste operam sobre as características da resposta no domínio de frequência, isto é, na própria FRF, mas há outros procedimentos que realizam o ajuste no domínio temporal /28/. Estes métodos usam o fato de que a transformada de Fourier da função resposta em frequência é também uma função característica do sistema.

#### 3.3.1- Método da Amplitude de Pico

Este método /29/ fornece bons resultados quando aplicado a estruturas cuja FRF exiba modos bem separados, que não sejam amortecidos levemente de forma que medidas precisas perto

de ressonâncias sejam de difícil obtenção, e que não sejam fortemente amortecidas de forma que a resposta em uma ressonância não seja influenciada por mais de um modo. O método consiste em:

- (a) Registrar na FRF os picos ressonantes isolando-os e tomando como frequência natural de cada modo ( $\omega_r$ ) os valores de frequência para a máxima resposta;
- (b) Registrar o valor máximo da FRF em cada pico ( $|\hat{\alpha}|$ ), determinando a largura de banda ( $\Delta\omega$ ) em frequência da FRF para o nível de resposta  $|\hat{\alpha}|/\sqrt{2}$ . Os pontos de frequência identificados ( $\omega_a, \omega_b$ ) são os pontos a meia-altura;
- (c) Determinar o amortecimento através de:

$$\eta_r = \frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{\omega_r^2} \cong \frac{\Delta\omega}{\omega_r}$$

$$\xi_r = 2\eta_r \quad (3.3.1)$$

- (d) Estima-se a constante modal do modo em análise, assumindo que a resposta total nesta região ressonante é atribuída a um único termo na série geral da FRF, isto é:

$$\alpha_{j,k}(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{r A_{j,k}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega_r^2}$$

$$|\hat{\alpha}| = \frac{A_r}{\omega_r^2 \eta_r} \Rightarrow A_r = |\hat{\alpha}| \omega_r^2 \eta_r \quad (3.3.2)$$

A figura 3.2 exemplifica o método da amplitude de pico. As estimativas da constante de amortecimento e da constante modal dependem da exatidão na determinação do nível máximo da FRF

$(|\hat{\alpha}|)$ , sendo esta uma quantidade não bem definida.

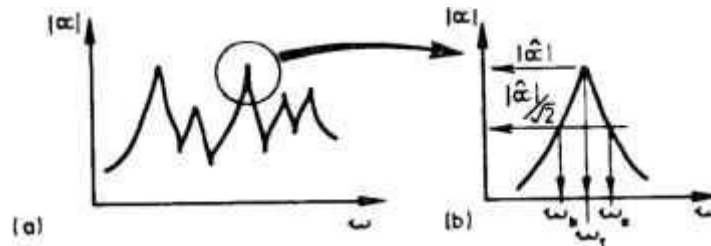


Figura 3.2. Método da amplitude de pico.

A maioria dos erros nas medidas das FRF's concentra-se em torno da região de ressonância, sendo que cuidado especial deve ser dado às estruturas levemente amortecidas onde o valor do pico pode depender inteiramente da validade dos pontos do espectro da FRF. Outro ponto, é que a imposição de modo único não é estritamente aplicável, mesmo quando os modos estiverem amplamente separados.

### 3.3.2- Método do Ajuste de Círculo

O método /30/ baseia-se no fato de que na vizinhança de uma ressonância, o comportamento da maioria dos sistemas é dominado por um único modo. O método explora algumas das propriedades do círculo modal, pois estas fornecem meios para extração dos parâmetros.

Para o caso de análise de uma estrutura com amortecimento (amortecimento viscoso), utilizam-se as FRF's sob a

forma de mobilidades. Estas curvas quando representadas no diagrama de Nyquist, em torno das ressonâncias, descrevem círculos; sendo a partir do ajuste dos respectivos raios e centros, determinados os parâmetros modais.

A visualização do método pode ser feita através da figura 3.3, e melhor compreendida através do equacionamento.

$$Y(\omega) = \frac{i\omega}{(k - \omega^2 m) + i\omega c} \quad (3.3.3)$$

$$\text{Re}(Y) = \frac{\omega^2 c}{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2}$$

$$\text{Im}(Y) = \frac{\omega^2 c}{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2}$$

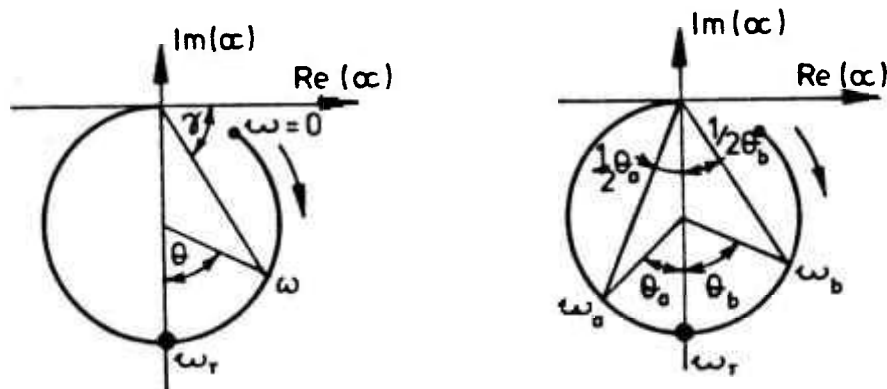


Figura 3.3. Método de Ajuste de Circulo.

Sendo  $\theta$  definido conforme mostrado na figura 3.3, vem:

$$\text{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{\omega(k - \omega^2 m)}{\omega^2 c} = \frac{1 - (\omega/\omega_0)^2}{2\xi\omega/\omega_0} \quad (3.3.4)$$

onde  $\omega_0$  é a frequência de ressonância associada ao modo em questão. Tomando-se pontos do círculo que correspondam às frequências  $\omega_a$  e  $\omega_b$ , ou seja, pouco menor e pouco maior que a frequência ressonante ( $\omega_0$ ), vem:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\theta_b}{2} &= \frac{1 - (\omega_b/\omega_0)^2}{2\xi\omega_b/\omega_0} \\ \operatorname{tg} \frac{\theta_a}{2} &= \frac{1 - (\omega_a/\omega_0)^2}{2\xi\omega_a/\omega_0} \\ \xi &= \frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{2\omega_0(\omega_a \operatorname{tg}(\theta_a/2) + \omega_b \operatorname{tg}(\theta_b/2))} \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Assim sendo, estabelece-se um procedimento básico de ajuste:

- (a) Seleção dos pontos a serem utilizados;
- (b) Ajuste do círculo, determinando a qualidade do ajuste;
- (c) Localização da frequência natural, obtendo uma estimativa do amortecimento;
- (d) Cálculo de estimativas múltiplas de amortecimento e a dispersão associada;
- (e) Determinação das constantes modais, através da determinação dos raios dos círculos ajustados.

### 3.3.3- Resíduos

A introdução do conceito de termos residuais é necessária de forma a considerar, no processo de análise modal, os modos que não estejam sendo investigados diretamente, mas que

estejam presentes e influenciando os dados utilizados das FRF's. É comum limitar a faixa de frequência das medidas e/ou análise por motivos práticos, ou mesmo pelo interesse na resposta da estrutura dentro de uma faixa limitada de frequência, o que não implica na não existência de modos da estrutura em frequências fora desta faixa.

Sendo a curva de FRF modelada a partir de parâmetros modais extraídos dos dados medidos, o formato desta será dado pela equação:

$$Y_{j,k}(\omega) = \sum_{r=m_1}^{m_2} \frac{i\omega_r A_{j,k}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega_r^2} \quad (3.3.6)$$

com os limites da série modal indicados por  $m_1$  e  $m_2$  de forma a refletir o fato de que nem sempre se inicia a análise com o primeiro modo ( $r=1$ ) e raramente se atinge o modo mais alto ( $r=n$ ). Entretanto, a limitação da faixa de frequência tanto durante as medidas como na análise, não implica em que os dados medidos para a FRF não sejam afetados por modos que estejam fora da faixa, e a equação que melhor representa tais dados é:

$$Y_{j,k}(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{i\omega_r A_{j,k}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega_r^2}, \quad \text{ou:}$$

$$Y_{j,k}(\omega) = \sum_{r=1}^{m_1-1} \frac{i\omega_r A_{j,k}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega_r^2} + \sum_{r=m_1}^{m_2} \frac{i\omega_r A_{j,k}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega_r^2} +$$

$$+ \sum_{r=m_2+1}^n \frac{i\omega_r A_{j,k}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega_r^2} \quad (3.3.7)$$

A figura 3.4 exemplifica a contribuição dos modos que estão fora de uma determinada faixa de frequência. Nota-se que na região de baixas frequências deve-se ter um comportamento assintótico de massa, e na região de altas frequências deve-se ter um comportamento assintótico de rigidez.

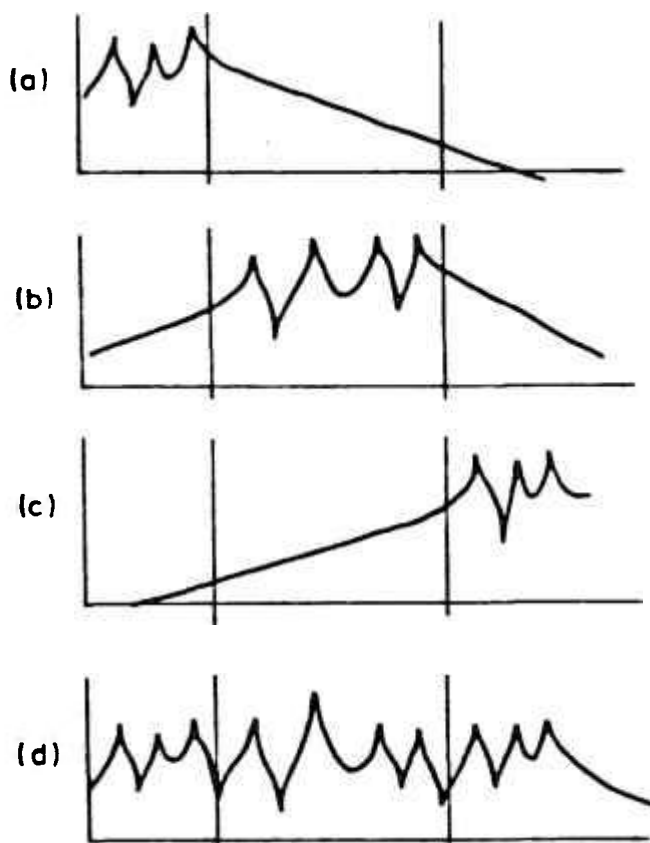


Figura 3.4- Contribuição dos vários termos na série modal.

Aplicando intuitivamente estes conceitos, pode-se definir as bases para a introdução dos termos residuais:

$$Y_{j,k}(\omega) = \frac{-i\omega}{\omega^2 \cdot mR_{j,k}} + \sum_{r=m_1}^{m_2} \frac{i\omega \cdot rA_{j,k}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r\omega_r^2} + \frac{i\omega}{kR_{j,k}} \quad (3.3.8)$$

onde  $mR_{j,k}$  e  $kR_{j,k}$  são a massa e a rigidez residuais para esta FRF, e para esta faixa particular de frequência.

A maneira pela qual os termos residuais são calculados é relativamente direta e envolve o exame da curva FRF em ambas as extremidades da faixa de frequência de interesse. Primeiro, calculam-se alguns valores da curva FRF "teórica" (curva obtida através dos parâmetros modais identificados) nas frequências mais baixas abrangidas pelo teste, usando somente parâmetros modais identificados. Então, por comparação destes valores com os realmente medidos, estima-se a constante residual de massa que será adicionada à curva "teórica". O processo é repetido na extremidade superior do intervalo de frequência, fornecendo a constante residual de rigidez.

#### 3.3.4- Ajuste de Curvas com Vários Graus de Liberdade

Existem várias situações nas quais as técnicas de um único grau de liberdade para a análise modal são inadequadas ou inapropriadas, sendo que para estas situações existem vários métodos alternativos que podem ser classificados como ajustes de curvas com vários graus de liberdade. Os casos particulares que necessitam de um tratamento mais elaborado do que o utilizado pelo conceito de um grau de liberdade, são aqueles com modos acoplados fortemente, e aqueles com amortecimento pequeno /31/, para os quais as medidas na ressonância são de difícil obtenção e imprecisas. Por modos acoplados fortemente entende-se aqueles

sistemas para os quais ou as frequências naturais estejam muito próximas, ou os que apresentam amortecimento relativamente forte, ou ambos, sendo que nestes casos a resposta mesmo na ressonância fica determinada por todos os termos modais e não somente por um único termo.

A medida em que são utilizadas técnicas de análise numérica mais sofisticadas, preocupa-se cada vez menos com as diferenças entre modelos de amortecimento (viscoso ou histerético), pois matematicamente a diferença está simplesmente em que as partes imaginárias das FRF's podem ser ou constantes ou dependentes da frequência.

Os termos residuais são aplicáveis da mesma maneira para o caso da análise de vários graus de liberdade. Como se deseja considerar a curva inteira em um único passo, é absolutamente necessária a incorporação dos termos residuais no processo; caso isto não seja realizado, os parâmetros modais que resultarão da análise modal serão distorcidos, de forma a compensar a influência dos modos que estejam fora da faixa de frequência utilizada durante a coleta de dados.

Para exemplificar a filosofia geral dos procedimentos de ajuste para vários graus de liberdade /32/, denota-se os dados medidos para uma FRF como  $\alpha_{jk}^m(\Omega_1) = \alpha_1^m$ , e os dados teóricos correspondentes sendo dados por:

$$\alpha_{jk}(\Omega_1) = \alpha_1 = \frac{-1}{\Omega_1^2 - \omega_1^2} + \sum_{r=2}^{m_2} \frac{r A_{jk}}{\omega_r^2 - \Omega_1^2 + i \eta_r \omega_r^2} + \frac{1}{\omega_k R_{jk}} \quad (3.3.9)$$

com os coeficientes  ${}_1A_{jk}$ ,  ${}_2A_{jk}$ , ...,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ , ...,  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ , ...,  ${}_kR_{jk}$  e  ${}_mR_{jk}$  devendo ser determinados pelo ajuste. Pode-se definir

o erro individual como  $e_i = (\alpha_i^m - \alpha_i)$ , expressando-o como uma quantidade escalar  $|e_i^2|$ .

Aumenta-se o grau de generalidade através da adoção de um fator de ponderação  $W_i$  a cada ponto de frequência de interesse. Logo, o processo de ajuste deve determinar os valores dos coeficientes desconhecidos de forma a minimizar o erro total  $E$ , dado pela expressão:

$$E = \sum_{i=1}^P W_i |e_i^2| \quad (3.3.10)$$

ou seja, deve-se fazer:

$$\frac{dE}{dq} = 0, \quad q = {}_1A_{jk}, {}_2A_{jk}, \dots \quad (3.3.11)$$

O conjunto de equações resultantes é não linear em vários dos coeficientes (para todos  $\omega_s$  e  $\eta_s$ ), não podendo ser resolvido diretamente. Neste ponto baseiam-se as diferenças entre os vários algoritmos existentes: quanto à escolha do procedimento, assumindo várias simplificações e considerações de forma a controlar o tamanho do esforço computacional. Vários procedimentos utilizam soluções iterativas, alguns linearizam as expressões de forma a simplificar o problema, e quase todos os procedimentos desenvolvidos ficam comprometidos pela qualidade da estimativa inicial.

### 3.4- Técnicas para Determinação das Formas Modais

A fim de derivar o modelo modal de determinada estrutura, definem-se duas matrizes: uma com as frequências naturais e com os fatores de amortecimento dos modos incluídos, e outra com o formato dos modos correspondentes. Assim sendo, de uma única FRF  $Y_{jk}$ , é possível extrair certas propriedades modais do  $r$ -ésimo modo através do ajuste de curvas, determinando  $\omega_r$ ,  $\eta_r$  e  ${}_rA_{jk}$  ( $r=1, \dots, n$ ).

Embora o ajuste forneça as frequências naturais e as propriedades de amortecimento diretamente, este não fornece explicitamente o formato dos modos, e sim uma constante modal que é formada com dados dos formatos dos modos. A fim de extrair os elementos "individuais" da matriz dos modos  $[\phi]$ , é necessária a realização de uma série de medidas das FRF's, incluindo principalmente a FRF pontual na posição de excitação,  $Y_{kk}$ . No caso de  $Y_{kk}$  ser medida, e através da técnica de ajuste, a análise fornecerá não só as propriedades de frequência natural, mas também os elementos específicos na matriz dos modos que correspondem ao ponto de excitação.

$$Y_{kk}(\omega) \Rightarrow \omega_r, \eta_r, {}_rA_{kk} \Rightarrow {}_r\phi_k \quad (r=1, \dots, m)$$

Caso seja medida qualquer outra função FRF usando a mesma posição de excitação, como  $Y_{jk}$ , é possível deduzir o formato do modo correspondente ao novo ponto de resposta, usando o fato de que uma constante modal pode ser combinada com aquela do ponto medido através de:

$${}_r\phi_j = \frac{{}_rA_{jk}}{{}_r\phi_k} \quad (3.4.1)$$

Desta forma, para a determinação do modelo modal relativo a um conjunto particular de  $n$  coordenadas, é necessário medir e analisar um conjunto de  $n$  FRF's, todas com o mesmo ponto de excitação (ou mesmo ponto de resposta, variando-se os pontos de excitação), totalizando  $n-1$  FRF's transferência e uma FRF pontual /33/. Em termos da matriz FRF completa, isto corresponde a se medir uma coluna (ou uma linha). Na prática, este é o mínimo conjunto de dados que fornecerá o modelo desejado, sendo recomendada a medição de mais de uma coluna.

Quando todas as curvas FRF's selecionadas tiverem sido medidas e analisadas individualmente, ficará faltando um estágio de processamento visto que ter-se-á em mãos várias estimativas para a frequência natural e fator de amortecimento de cada modo de interesse. Teoricamente, todas estas estimativas deveriam ser idênticas, mas na prática raramente o são, devido até mesmo a erros experimentais.

O procedimento mais simples para calcular a média de todas as estimativas individuais consiste na média aritmética de valores de  $\omega_r$  e  $\eta_r$ . Na prática, nem todas as estimativas possuem o mesmo peso, pois algumas destas provavelmente derivam de ajustes muito mais satisfatórios que as demais, logo um procedimento mais refinado seria o cálculo de médias ponderadas pela confiabilidade de cada estimativa.

No caso de se aceitar um valor médio para a frequência natural e coeficiente de amortecimento, para um dado modo, as constantes modais em alguns casos deverão ser revisadas. No processo de ajuste de curvas, o diâmetro do círculo modal é dado

pela expressão:

$${}_r D_{j,k} = \frac{{}_r A_{j,k}}{\omega_r^2 \eta_r} \quad (3.4.2)$$

logo, se forem redefinidos os valores de  $\omega_r$  e  $\eta_r$ , deve-se revisar o valor de  ${}_r A_{j,k}$  desde que não há razão para modificação no diâmetro do círculo. Assim sendo, fica definido um conjunto corrigido de constantes modais, e conseqüentemente um conjunto para os elementos dos formatos dos modos, para cada uma das FRF's analisadas.

$$\tilde{{}_r A}_{j,k} = {}_r A_{j,k} \frac{\omega_r^2 \eta_r}{\tilde{\omega}_r^2 \tilde{\eta}_r} \quad (3.4.3)$$

onde  $\tilde{\phantom{x}}$  indica o valor revisado.

Para a simples obtenção das formas modais, é comum proceder a medição e análise completa de uma FRF (de preferência a pontual), determinando os valores de  $\omega_r$  e  $\eta_r$ . A análise das demais FRF's se resume apenas à determinação dos diâmetros dos círculos modais, omitindo os estágios que forneçam outras estimativas para  $\omega_r$  e  $\eta_r$ .

A visualização das formas modais obtidas, em geral é feita através de gráficos estáticos e dinâmicos, sendo os gráficos estáticos limitados para ilustrar algumas das características dos modos complexos.

#### 4- PARTE EXPERIMENTAL

Para se obter as propriedades do sistema diretamente dos dados coletados, é necessário que se realize medidas dos sinais de entrada (excitação) e das respostas do sistema. Nas medidas de mobilidade, a aparelhagem utilizada é composta basicamente por: um mecanismo excitador, um sistema de transdução e um analisador.

Quando são utilizados vários canais de medição, é comum a incorporação de um gerenciador de sinais sendo este geralmente um micro-computador. Tal inclusão também é justificada pelo fato de que vários dos procedimentos na área de análise das FRF's são repetitivos, com o uso do micro-computador o processamento destes dados fica otimizado.

Os testes de análise modal podem ser realizados com a estrutura livre ou fixa. Por livre entende-se que a estrutura não esteja conectada a um determinado piso, através de qualquer uma de suas coordenadas, estando suspensa no espaço. Nesta condição, a estrutura exibirá modos de corpo rígido determinados somente por sua massa e suas propriedades de inércia. Na prática, não é fácil fornecer uma condição puramente livre, sendo possível arranjar um sistema de sustentação que se aproxime desta condição. Isto pode ser feito utilizando "molas" muito leves, de forma que os modos de corpo rígido possuam valores baixos comparados aos modos de flexão (em geral de 10% a 20% do modo mais baixo de flexão). Com um sistema de sustentação deste tipo pode-se derivar as propriedades de corpo rígido a partir do comportamento da estrutura a baixas frequências.

O outro tipo de suporte, denominado fixo, acarreta em uma fixação de pontos selecionados da estrutura ao chão. Enquanto tal condição é extremamente fácil de se aplicar em análises teóricas (simplesmente suprimindo as coordenadas apropriadas), torna-se muito mais difícil na prática. A razão para tanto consiste em ser muito mais trabalhoso fornecer uma base ou fundação para a estrutura de forma que tal base seja suficientemente rígida resultando na fixação desejada. Todas as estruturas possuem mobilidade não nula, não podendo serem tratadas como puramente rígidas. É necessária a medição da mobilidade da própria estrutura base na faixa de frequência do teste, estabelecendo que esta seja muito menor do que os níveis de mobilidade correspondentes para a estrutura a ser testada, no ponto de fixação. Caso tal condição seja satisfeita para todas as coordenadas a serem fixadas, a estrutura base pode ser considerada como razoavelmente fixada.

Outro ponto de grande importância em testes modais diz respeito a forma pela qual a estrutura será excitada, sendo comum a utilização de excitadores eletrodinâmicos e/ou um martelo de impacto.

O tipo mais comum de excitador é o eletrodinâmico (também chamado shaker), no qual o sinal que entra é convertido em um campo magnético alternado que alimenta uma bobina conectada à parte móvel do aparelho e à estrutura. Neste caso, a frequência e a amplitude de excitação são controladas independentemente, dando uma maior flexibilidade operacional (útil quando se trabalha na região de ressonâncias). Entretanto, deve ser notado que a impedância elétrica destes aparelhos varia com a amplitude do movimento da bobina e portanto não é possível deduzir a força

excitadora a partir da medida da tensão aplicada ao shaker. Nem é usual deduzir a força excitadora através da medida da corrente que passa pelo shaker, pois tal corrente mede a força aplicada não só a estrutura, e sim a estrutura e ao próprio shaker. Embora possa parecer que a diferença entre esta força (gerada pelo próprio shaker) e a força aplicada à estrutura seja pequena, deve-se notar que perto de ressonâncias, uma pequena força basta para produzir uma grande resposta, e o que usualmente ocorre é que sem alterar as regulagens do amplificador ou do gerador de sinais, existe uma redução marcante no nível de força nas proximidades das frequências naturais da estrutura. Como resultado, a verdadeira força aplicada à estrutura torna-se a pequena diferença entre a força gerada no excitador e a força de inércia necessária para mover a ponta e a mesa do shaker.

Para utilização de um excitador eletrodinâmico, torna-se necessária a conexão entre a plataforma sustentadora do shaker e a estrutura, acoplando-se usualmente um transdutor de força. Retornando a definição de mobilidade  $Y_{jk}$ , vê-se que esta é a razão entre a resposta harmônica no ponto  $j$ , causada por uma força harmônica aplicada na coordenada  $k$  (sendo esta força a única excitação que deve existir na estrutura). Embora possa parecer que o shaker seja capaz de aplicar forças em uma única direção, existe um problema com as estruturas em geral, cujo movimento é multi-direcional. Quando a estrutura é excitada em uma direção, a resposta se dá não só nesta direção, mas também em outras. Tal movimento é perfeitamente aceito e esperado, mas é possível que ele origine uma forma secundária de excitação se o shaker estiver conectado de forma incorreta.

É usual que a parte móvel do shaker possua mobilidade

ao longo deste eixo, mas seja muito rígida nas outras direções. Então, se a estrutura tende a responder, por exemplo, na direção lateral bem como na linha de excitação, então a rigidez do excitador causará forças resistentes ou momentos, que atuarão na estrutura como excitações secundárias. Os transdutores de resposta captam a resposta total que é causada tanto pela força excitadora como por esta força secundária (intensidade desconhecida).

A solução é a conexão do shaker a estrutura através de uma haste ou um conector similar que possua a característica de ser rígido em uma direção, mas sendo relativamente flexível nas outras cinco direções. Deve-se tomar cuidado de forma a não compensar exageradamente: se a ponta for muito longa, ou muito flexível, introduz-se o efeito de sua própria ressonância nas medidas e isto pode ser de difícil extração dos dados.

Outro método de excitação utilizado é através do martelo de impacto. Embora este tipo de teste necessite de maiores tempos na fase de análise e no processo de medidas, é um meio relativamente simples de excitar a estrutura /34,35/. O equipamento consiste basicamente de um impactador, usualmente com um conjunto de cabeças e pontas diferentes que servem para estender as faixas dos níveis de força e frequência. A faixa útil pode também ser estendida usando diferentes tamanhos de impactadores. Acoplado ao impactador existe uma célula de carga, ou transdutor de força, que detecta a magnitude da força sentida pelo impactador, e que é assumida igual e oposta àquela sofrida pela estrutura. Quando aplicado manualmente, o impactador possui um cabo (dando formato de martelo), mas também pode ser utilizado com um arranjo de sustentação.

Basicamente, a magnitude do impacto é determinada pela massa da cabeça do martelo e pela velocidade com que este se move quando atinge a estrutura. Frequentemente, o operador controla a velocidade ao invés da força propriamente dita, e portanto, uma maneira apropriada de ajustar a ordem do nível de força é através da variação da massa da cabeça do martelo.

A faixa de frequência que é excitada efetivamente por este tipo de aparelho é controlada pela rigidez da superfície de contato e pela massa da cabeça impactante; existindo uma ressonância do sistema dada por  $(\text{rigidez do contato/massa impactante})^{1/2}$ , acima da qual é difícil transmitir energia para a estrutura. Quando a ponta do martelo colidir com a estrutura, esta sofrerá a ação de um pulso que possui a forma de meio-seno (figura 4.1, a seguir).

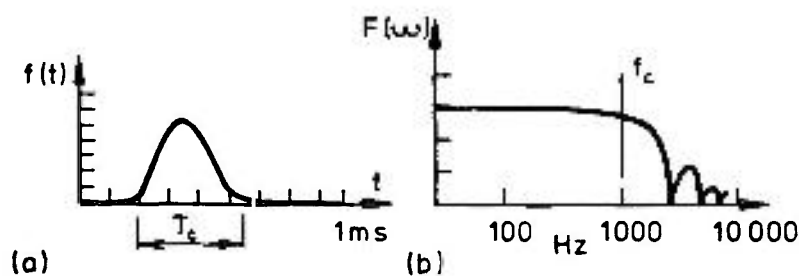


Figura 4.1- Exemplo de um pulso transiente.

Nota-se a ineficácia deste pulso para excitar vibrações na faixa de frequência acima de  $f_c$ , precisando-se então ter alguma forma de controle sobre este parâmetro. Pode-se mostrar

que existe uma relação direta entre a primeira frequência de corte ( $f_c$ ) e a duração do pulso ( $T_c$ ), e que para aumentar a faixa de frequência é necessário induzir um pulso de curta duração. Este por sua vez, pode ser encarado como estando relacionado com a rigidez (não a dureza) da superfície de contato e a massa do impactador. Quanto mais rígido for o material, menor será a faixa de frequência abrangida pelo impacto.

Outro aspecto, é a dificuldade de se aplicar a excitação usando um martelo de impacto, assegurando que cada impacto seja essencialmente idêntico aos anteriores, não só em magnitude mas também em posição e em orientação relativa à superfície normal da estrutura.

Como transdutores, utilizam-se em ensaios modais os do tipo pizoelétrico, a saber: acelerômetros /36/ e transdutores de força. O princípio básico de operação faz uso do fato de que um elemento de material pizoelétrico (cristal natural ou artificial) gera uma carga elétrica sobre seus terminais quando sujeito a tensões mecânicas. Através de um projeto adequado, tal cristal pode ser incorporado em um aparelho que induza nele uma tensão proporcional a grandeza a ser medida (força ou aceleração).

O transdutor de força é o tipo mais simples, a força  $F$  transmitida (ou uma fração conhecida desta) é aplicada diretamente sobre o cristal que então gera uma carga correspondente  $q$ , proporcional a  $F$ . Uma característica importante no projeto de transdutores de força é a rigidez relativa (na direção axial) do cristal e do invólucro, sendo que a fração de  $F$  que é transmitida através dos cristais depende diretamente desta relação. Além disto, existe a possibilidade de uma sensibilidade cruzada não desejada, isto é, uma saída elétrica quando a força é

nula, dita carga transversal ou de cisalhamento. A força induzida pela carga de saída do cristal será sempre levemente diferente daquela aplicada pelo shaker, e também daquela transmitida à estrutura. Isto se deve ao fato de uma fração da força detectada pelo cristal ser utilizada para mover a pequena quantidade de material entre o cristal e a estrutura.

Em um acelerômetro, a transdução é indireta sendo feita usando uma massa auxiliar ou sísmica. Nesta configuração, a força exercida no cristal é a força de inércia da massa sísmica. Então, conforme o corpo e a massa sísmica se movimentem juntos, a saída do transdutor será proporcional à aceleração de seu corpo e conseqüentemente à da estrutura conectada.

Uma das vantagens dos transdutores pizoelétricos é o fato de serem aparelhos ativos, não precisando de fonte elétrica para o funcionamento. Entretanto, isto implica na característica de o transdutor não medir verdadeiramente quantidades estáticas e portanto, existe um limite de baixa frequência abaixo do qual as medidas não são realizadas. Este limite é determinado pelas propriedades do transdutor e pelas propriedades do amplificador de carga (necessário para amplificar a pequena carga elétrica gerada pelo cristal, fornecendo um sinal forte o bastante para ser medido pelo analisador).

O último integrante de um sistema básico de medição e análise de curvas FRF's é um analisador de espectros. A princípio, um analisador é um voltímetro, embora o processamento dos sinais (necessário para extração de informações sobre a fase e a magnitude de cada parâmetro) utilize uma eletrônica mais sofisticada. Em todos os casos, os dados são fornecidos ao analisador em uma forma analógica, históricos temporais de

resposta e excitação, sendo então realizada a conversão analógico-digital (AD) de modo que as quantidades a serem processadas estejam na forma de uma sequência de valores discretizados no tempo. Os estágios subsequentes de processamento são realizados digitalmente, usando várias rotinas que geralmente estão instaladas no analisador. Um analisador de espectro mede simultaneamente todos os componentes de frequência presentes em um sinal complexo variável no tempo. Sua saída consiste de um espectro, usualmente discreto contendo um número finito de componentes que descrevem a magnitude relativa em uma faixa de frequência presente no sinal. O analisador digital de espectro /37/ (ou analisador de Fourier) possui as rotinas para o cálculo de várias propriedades dos sinais recebidos, incluindo aquelas necessárias para o cálculo de FRF's.

#### 4.1- Bancada Experimental e Equipamentos

Para a realização dos testes modais com uma estrutura composta por um feixe de tubos metálicos acoplados por espaçadores rígidos (simulando uma estrutura típica de elementos combustíveis) foi necessária a construção de uma bancada experimental que possibilitasse a fixação do componente sob ensaio, de forma a simular suas condições de fixação no vaso de um reator nuclear tipo PWR (figura 4.2).

A bancada, BAVEC, (Bancada de Análise de Vibração de Elementos Combustíveis) foi instalada sobre uma base de concreto, visando possibilitar o seu isolamento de eventuais vibrações

externas que pudessem vir a interferir no processo de aquisição de dados. A área ocupada pela bancada é equivalente à de um retângulo de 1,00 x 3,00 metros, já incluindo o espaço para acesso, sendo sua altura máxima 1,90 metros. Os componentes da parte estrutural são:

- (a) Vigas verticais com perfil "I";
- (b) Viga horizontal com perfil "I";
- (c) Estrutura de sustentação do shaker;
- (d) Placa de assentamento da estrutura sob teste;
- (e) Placas superiores de fixação da estrutura a ser testada no pórtico.

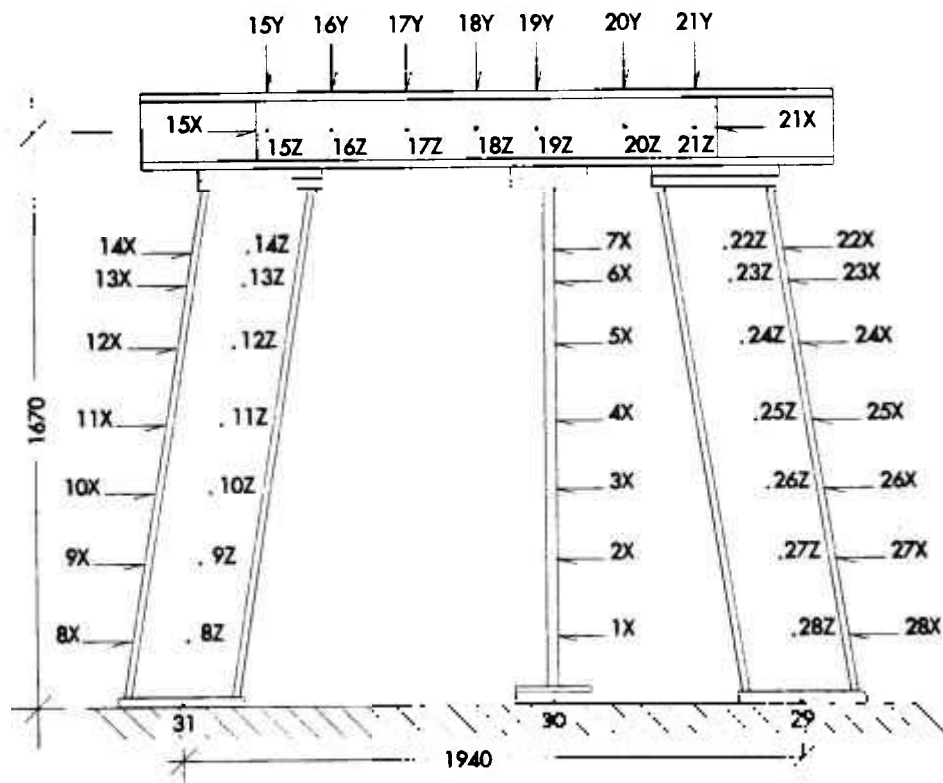


Figura 4.2- Croqui da bancada experimental.

As vigas verticais, a estrutura de sustentação do shaker e a base sobre a qual se posicionam as estruturas a serem testadas foram chumbadas na base de concreto.

A estrutura de sustentação do shaker foi dimensionada de forma a resistir ao seu peso. Para conexão do shaker à estrutura sob ensaio, utilizou-se uma haste de nylon (rígida axialmente, e flexível longitudinalmente) para transferência da excitação. O sistema de içamento do shaker é constituído por um guincho (sistema coroa/sem-fim/tubo/cabos de aço) através do qual é possível a regulagem de altura, permitindo que a excitação seja aplicada em qualquer ponto axial da estrutura. Variações de posicionamento do shaker na direção transversal ao eixo da estrutura sob teste são possíveis através do enrolamento do cabo de aço sobre o tubo do guincho.

Além dos componentes mecânicos, a bancada experimental também possui todo o sistema eletrônico para aquisição/tratamento dos dados:

- (a) Amplificador de potência PA2000/ LDS;
- (b) Excitador eletrodinâmico 650/ LDS;
- (c) 7 acelerômetros 4371/ Bruel & Kjaer;
- (d) 8 amplificadores de carga 2635/ Bruel & Kjaer;
- (e) 1 transdutor de força 8200/ Bruel & Kjaer;
- (f) Martelo de impacto 8202/ Bruel & Kjaer;
- (g) Sistema de aquisição e análise 2515 CAT/ GenRad;
- (h) Impressora matricial 2228A/ Hewlett-Packard;
- (i) Plotter 7475A/ Hewlett-Packard;
- (j) 35 metros de cabo com três condutores para alimentação do shaker;

- (k) 35 metros de cabo com um condutor atuando como "terra" na instalação do shaker;
- (l) Cabos coaxiais para as ligações acelerômetros - amplificadores de carga - sistema de aquisição, para cada um dos oito canais de medição;
- (m) Haste de nylon, com roscas (M8 e UNF 10-32) para as conexões com o shaker e transdutor de força;
- (n) 4 anéis de borracha especial (SANDOW) para a sustentação do shaker;
- (o) Cera de abelha e cola para a fixação das bases dos acelerômetros e transdutor de força;
- (p) Bases para fixação dos transdutores.

A figura 4.3 mostra esquematicamente o arranjo utilizado para a coleta de dados.

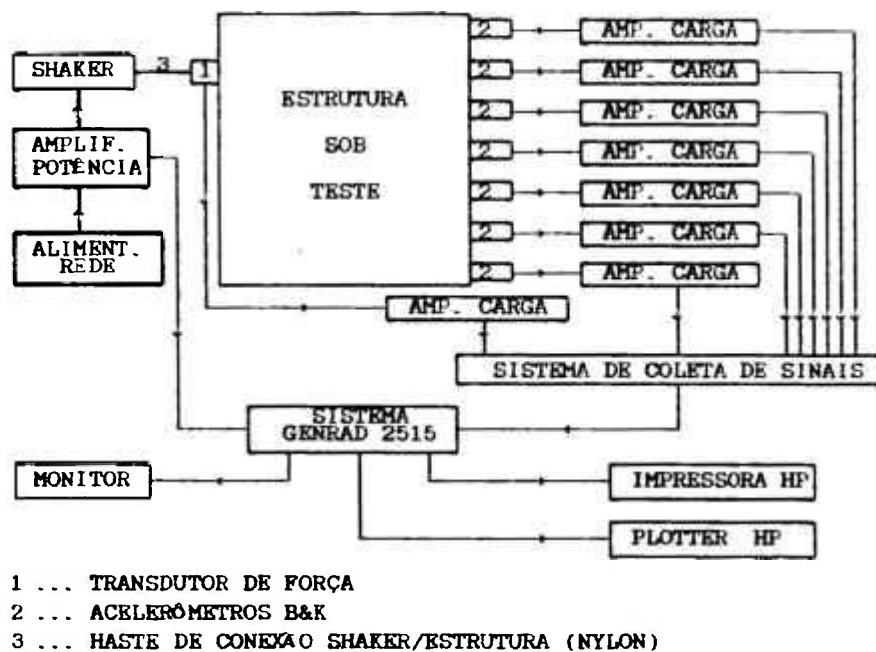


Figura 4.3- Esquema das conexões elétricas entre os equipamentos.

As características de ajustagem , Apêndice 3, da potência de saída do shaker, dos filtros (passa baixa e passa alta), do tipo de janelamento dos sinais e do número de médias, foram estabelecidos de acordo com dois fatores:

- (1) Tipo de excitação utilizado, podendo ser transiente (através do martelo de impacto) ou aleatória (utilizando o gerador de sinais do sistema GenRad para alimentar o shaker);
- (2) Tipo de estrutura a ser testada, pois variando-se a estrutura sob ensaio, alteram-se as relações de entrada/saída dos sinais.

#### 4.2- Estruturas Testadas

Com o objetivo final de determinar as características modais de uma estrutura similar a um elemento combustível utilizado em reatores nucleares do tipo PWR, foi necessário o cumprimento de uma sequência de testes com diferentes estruturas, possibilitando a qualificação e validação dos procedimentos de aquisição/análise/interpretação de dados, bem como a garantia de que os níveis de função resposta em frequência no pórtico de fixação estivessem suficientemente baixos de forma a não interferir nas demais medições.

Assim sendo, foram testadas (em sequência) as seguintes estruturas:

(1) Pórtico de fixação: Estrutura formada pelas vigas com perfil "I", sendo suas características mostradas na tabela 4.1. Esta estrutura foi analisada nas três direções (XYZ), uma vez que supunha-se que os modos do pórtico (mesmo fora de seu plano de maior rigidez - direção X), pudessem interferir nos modos das demais estruturas. Tal estrutura foi discretizada (total de 21 pontos) de forma a relacionar estas coordenadas com os pontos de medição das FRF's.

VIGA	VERTICAL	HORIZONTAL
Tamanho (mm)	300 x 300	200 x 200
Densidade (Kg/m)	93.78	49.71
Altura (mm)	300	200

Tabela 4.1- Características das vigas do pórtico.

Os pontos utilizados para definição da geometria do pórtico foram associados às coordenadas (x,y,z) sendo o plano xy definido como o plano que passa pela linha de centro (alma) das vigas verticais, coincidindo com a direção principal de excitação da bancada (direção de posicionamento do shaker para excitação da estrutura sob teste). A tabela 4.2, a seguir, mostra os pontos utilizados para definir a geometria do pórtico (pontos 8 a 29 e ponto 31, conforme figura 4.2).

PONTO	X (mm)	Y (mm)	Z (mm)
1	1110,0	237,0	0,0
2	1110,0	442,0	0,0
3	1110,0	647,0	0,0
4	1110,0	852,0	0,0
5	1110,0	1057,0	0,0
6	1110,0	1262,0	0,0
7	1110,0	1335,0	0,0
8	38,0	197,0	0,0
9	75,0	408,0	0,0
10	112,0	618,0	0,0
11	148,0	825,0	0,0
12	182,0	1024,0	0,0
13	220,0	1243,0	0,0
14	232,0	1314,0	0,0
15	295,0	1675,0	0,0
16	505,0	1675,0	0,0
17	715,0	1675,0	0,0
18	925,0	1675,0	0,0
19	1110,0	1675,0	0,0
20	1346,0	1675,0	0,0
21	1556,0	1675,0	0,0
22	1619,0	1314,0	0,0
23	1632,0	1243,0	0,0
24	1670,0	1024,0	0,0
25	1704,0	825,0	0,0
26	1740,0	618,0	0,0
27	1777,0	408,0	0,0
28	1813,0	197,0	0,0
29	1852,0	0,0	0,0
30	1110,0	0,0	0,0
31	0,0	0,0	0,0

Tabela 4.2- Coordenadas dos pontos para discretização do pórtico.

(2) Barra de seção retangular: Barra metálica (aço carbono) de seção retangular (2,0 x 0,5 polegadas), tendo em suas extremidades chapas quadradas (240 x 240 x 25 mm), a fim de permitir a fixação da barra sob o pórtico. A barra foi posicionada sob o pórtico de modo que sua lateral com largura de duas polegadas estivesse montada perpendicularmente à direção XY da bancada, sendo esta a face que será submetida à excitação. A barra foi discretizada por sete pontos (figura

4.2), sendo seu engastamento inferior descrito por um ponto (ponto 30). A fixação da barra sob o pórtico foi feita através de quatro pinos guia existentes nas placas inferior e superior da bancada. Tal estrutura foi ensaiada de forma a comparar diretamente os resultados experimentais obtidos com aqueles fornecidos por cálculos analíticos, visto que a estrutura é simples e sua modelagem é relativamente fácil. Através destes ensaios, realizou-se a capacitação e validação das técnicas experimentais.

(3) Varetas combustíveis protótipo: A fim de se representar uma estrutura similar a uma vareta combustível utilizada em elementos combustíveis de reatores nucleares do tipo PWR, foram fabricadas varetas protótipo com pastilhas de chumbo ao invés de pastilhas de  $UO_2$ , mas mantendo-se a equivalência em massa. As dimensões das varetas combustíveis protótipo (tabela 4.3) foram determinadas de maneira a manter o diâmetro dentro dos valores utilizados comercialmente, mas com seu comprimento reduzido a um valor mínimo (reduzindo assim as dimensões da bancada, quando da montagem de uma estrutura composta por um feixe de tubos acoplados por espaçadores rígidos).

Os testes com as varetas combustíveis foram realizados na posição vertical, simulando-se as condições de fixação pela situação livre-livre (figura 4.4). Utilizaram-se seis pontos para definir a geometria da vareta (tabela 4.4), sendo as cotas medidas em relação à extremidade inferior da vareta.

REVESTIMENTO	MATERIAL $\phi_{\text{exterior}} \text{ (mm)}$	AISI 304 9,8
PASTILHAS	MATERIAL ALTURAS TESTADAS (mm) ALTURA DA COLUNA (mm)	CHUMBO 10;20;30 1085
MASSA TOTAL DA VARETA (g)		0,768
COMPRIMENTO TOTAL DA VARETA (mm)		1195,0

Tabela 4.3- Características das varetas combustíveis protótipo utilizadas nos ensaios de vibração.

PONTO	COTA (mm)
1	1080
2	944
3	708
4	472
5	236
6	0

Tabela 4.4- Definição da geometria da vareta combustível protótipo, configurada no sistema 2515 GenRad.

- 1 ... Placa superior de apoio.
- 2 ... Placa inferior de apoio.
- 3 ... Sistema de apoio, coluna guia.
- 4 ... Elásticos para a sustentação da vareta (SANDOW).
- 5 ... Vareta combustivel protótipo.

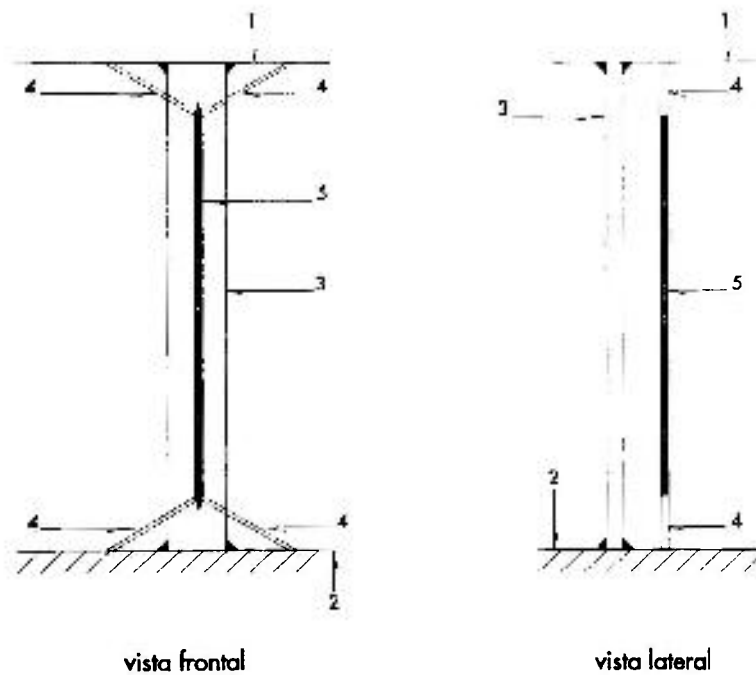


Figura 4.4- Arranjo da montagem da vareta combustivel, simulando a condição livre-livre.

(4) Estrutura formada por um feixe de tubos acoplados por espaçadores rígidos: Esta estrutura é um arranjo de tubos metálicos (simulando os tubos guia e tubo de instrumentação), fixados por luvas em espaçadores rígidos (simulando as grades espaçadoras) distribuídos ao longo do comprimento dos tubos, sendo que nas extremidades encontram-se os bocais superior e inferior. A fixação desta estrutura na bancada é feita através de oito pinos guia, sendo quatro deles cravados na chapa superior do pórtico e os demais na placa inferior. A tabela 4.5, a seguir, mostra as principais características dimensionais da estrutura utilizada.

NÚMERO DE TUBOS	29
ALTURA DO CONJUNTO (mm)	1455
LARGURA DO CONJUNTO (mm)	220
NÚMERO DE ESPAÇADORES	6

Tabela 4.5- Características de montagem da estrutura formada por um feixe de tubos acoplados por espaçadores rígidos.

PONTO	X (mm)	Y (mm)	Z (mm)	PONTO	X (mm)	Y (mm)	Z (mm)
1	0,0	0,0	0,0	31	192,0	0,0	0,0
2	0,0	212,0	0,0	32	192,0	212,0	0,0
3	0,0	417,0	0,0	33	192,0	417,0	0,0
4	0,0	622,0	0,0	34	192,0	622,0	0,0
5	0,0	827,0	0,0	35	192,0	827,0	0,0
6	0,0	1032,0	0,0	36	192,0	1032,0	0,0
7	0,0	1237,0	0,0	37	192,0	1237,0	0,0
8	0,0	1346,0	0,0	38	192,0	1346,0	0,0
9	0,0	1477,0	0,0	39	192,0	1477,0	0,0
10	0,0	1477,0	48,0	40	96,0	1477,0	0,0
11	0,0	0,0	192,0	41	0,0	0,0	96,0
12	0,0	212,0	192,0	42	0,0	212,0	96,0
13	0,0	417,0	192,0	43	0,0	417,0	96,0
14	0,0	622,0	192,0	44	0,0	622,0	96,0
15	0,0	827,0	192,0	45	0,0	827,0	96,0
16	0,0	1032,0	192,0	46	0,0	1032,0	96,0
17	0,0	1237,0	192,0	47	0,0	1237,0	96,0
18	0,0	1346,0	192,0	48	0,0	1346,0	96,0
19	0,0	1477,0	192,0	49	0,0	1477,0	96,0
20	96,0	1477,0	192,0	50	0,0	1477,0	144,0
21	192,0	0,0	192,0	51	192,0	0,0	96,0
22	192,0	212,0	192,0	52	192,0	212,0	96,0
23	192,0	417,0	192,0	53	192,0	417,0	96,0
24	192,0	622,0	192,0	54	192,0	622,0	96,0
25	192,0	827,0	192,0	55	192,0	827,0	96,0
26	192,0	1032,0	192,0	56	192,0	1032,0	96,0
27	192,0	1237,0	192,0	57	192,0	1237,0	96,0
28	192,0	1346,0	192,0	58	192,0	1346,0	96,0
29	192,0	1477,0	192,0	59	192,0	1477,0	96,0
30	192,0	1477,0	144,0	60	192,0	1477,0	48,0

Tabela 4.6- Distribuição dos pontos utilizados na discretização da estrutura formada por um feixe de tubos acoplados por espaçadores rígidos.

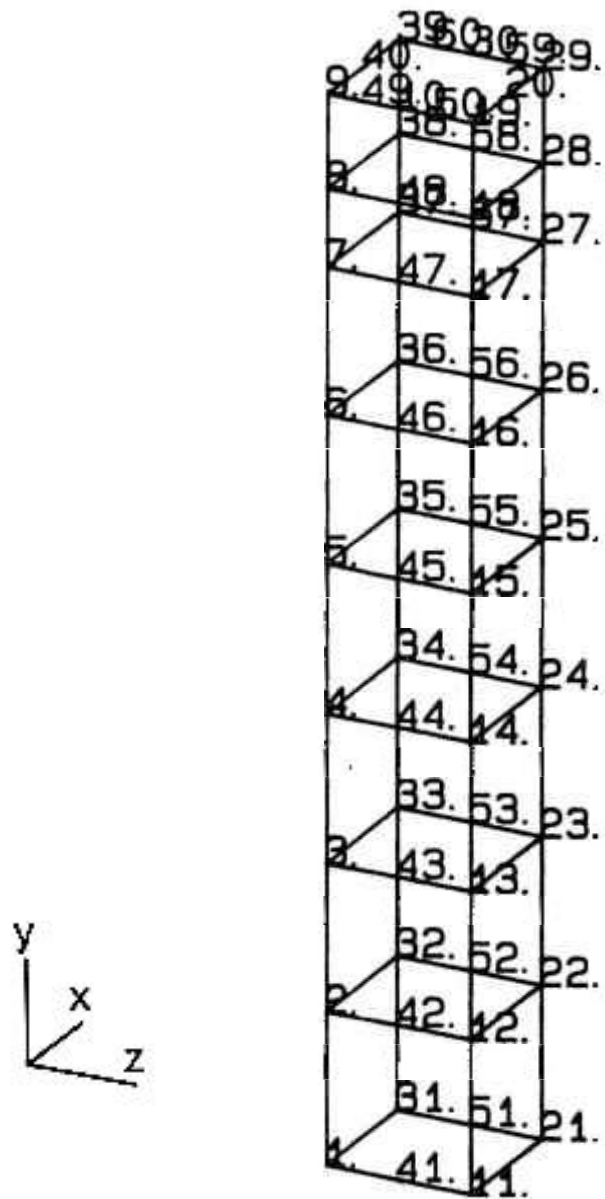


Figura 4.5- Esquema da geometria utilizada na descrição da estrutura composta por um feixe de tubos acoplados por espaçadores rígidos.

Foram utilizados 60 pontos para descrever a estrutura (figura 4.5, tabela 4.6) sendo seis pontos por espaçador, seis pontos na extremidade inferior do bocal inferior, seis pontos na extremidade inferior do bocal superior e doze pontos na extremidade superior do bocal superior.

A sequência de ensaios com as diferentes estruturas (figura 4.6) demonstra a necessidade dos testes realizados, atingindo assim um conhecimento das características modais do sistema como um todo, possibilitando identificar nas FRF's os picos referentes a cada estrutura.

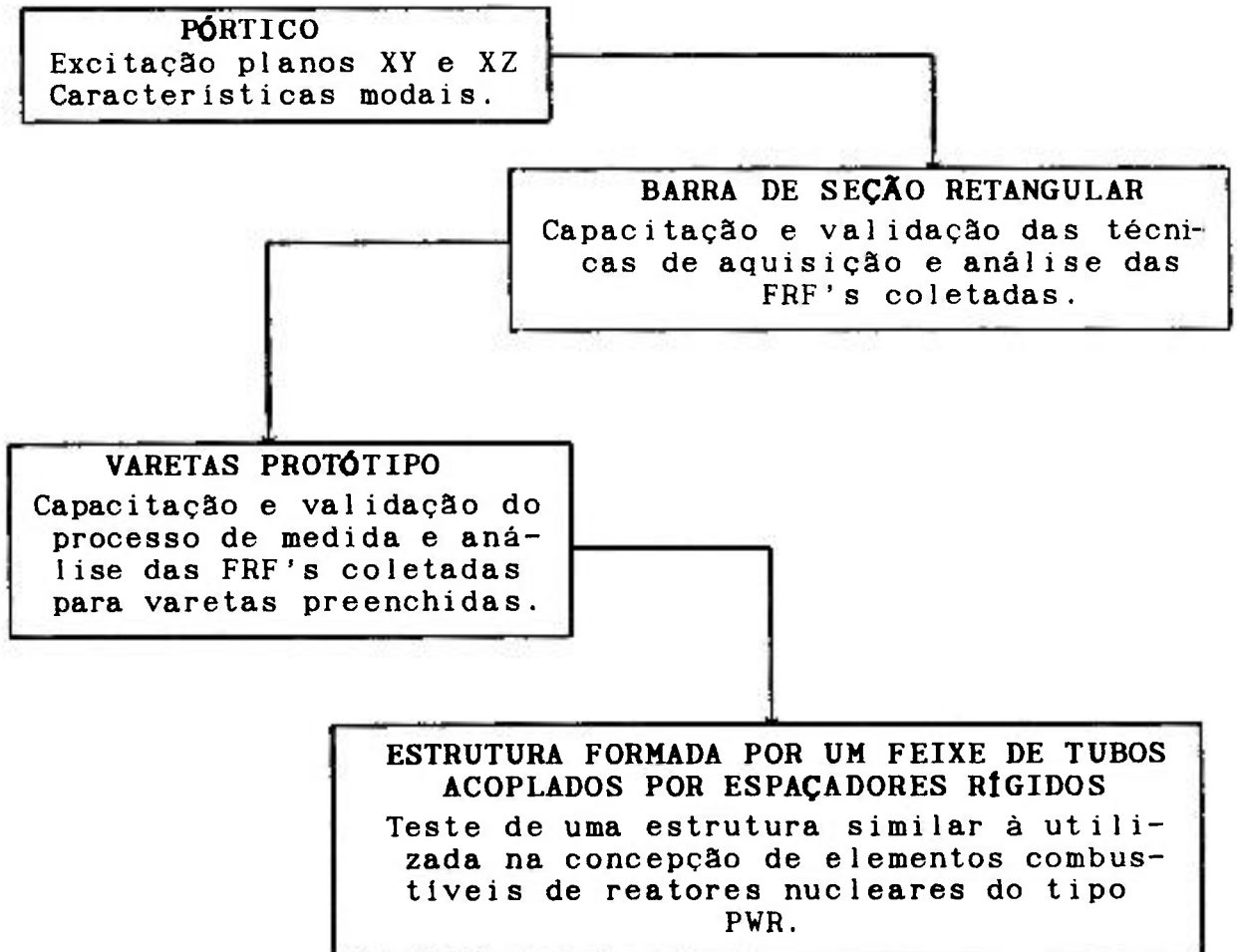


Figura 4.6- Sequência de ensaios realizados.

#### 4.3- Procedimento de Aquisição e Análise

Para a obtenção das FRF's com sinal transiente foi utilizado o martelo de impacto, o qual produz uma força impulsiva na estrutura. A amplitude, a duração e conseqüentemente a faixa de frequência do pulso foram ajustadas alterando-se a ponteira do martelo (borracha, plástico ou metal). Utilizou-se a ponteira de plástico, ideal para a faixa de frequência de 0 a 1 KHz.

Com o martelo de impacto, foi possível excitar não só a barra de seção retangular, mas também o pórtico (nas três direções). A barra metálica também foi excitada com o shaker, possibilitando assim a comparação com resultados anteriores. O excitador foi conectado à barra através de uma haste de interface, recebendo como entrada um sinal puramente aleatório ("true random") gerado pelo sistema CAT 2515 GenRad.

A partir dos dados coletados através das duas técnicas de excitação, foi feita a análise para obtenção das características modais da barra e do pórtico, através do programa de análise MODAL-PLUS /38/. Para a determinação das características modais é necessária a execução de três passos: definição geométrica da estrutura, extração de parâmetros e obtenção das formas modais correspondentes.

O programa de análise de dados permite a extração de parâmetros através de quatro técnicas distintas:

- (a) Identificação de picos: Considera cada FRF como possuindo um grau de liberdade e ajusta em torno do pico, um polinômio de segundo grau. Utiliza uma única FRF para análise e opera no domínio de frequência;

- (b) Exponencial complexa: Trata os dados no domínio temporal, utilizando a transformada inversa de Fourier da FRF analisada;
- (c) Extração direta de parâmetros: Algoritmo com múltiplos graus de liberdade para estimar os parâmetros em bandas estreitas de frequência, a partir de várias FRF's que tenham uma mesma referência (mesmo ponto de excitação);
- (d) Poli-referência: Utiliza um ajuste por mínimos quadrados para obter os parâmetros, a partir de funções de resposta impulsiva (transformada inversa de Fourier da FRF, no domínio do tempo) de várias FRF's com até três referências simultâneas.

Para a determinação das formas modais, uma vez identificados os parâmetros modais da estrutura, o programa de análise utiliza uma das seguintes técnicas:

- (a) Resposta na ressonância: Os vetores modais são estimados usando um ajuste de curvas de um grau de liberdade para as FRF's medidas, nas proximidades de cada ressonância detetada na estimativa dos parâmetros;
- (b) Ajuste de círculo: Ajuste de um círculo aos dados da FRF quando representada em um diagrama de Argand, nas proximidades de cada frequência natural estimada, considerando-se um grau de liberdade;
- (c) Extração direta dos parâmetros: Por esta técnica, os vetores modais são obtidos a partir de ajuste de curva com múltiplos graus de liberdade, feito nas FRF's de todas as coordenadas de uma mesma referência;
- (d) Poli-referência: Ajuste de curva por mínimos quadrados, com

múltiplos graus de liberdade, para a determinação dos vetores nas FRF's de até três referências simultâneas.

Nos testes realizados com o pórtico e com a barra de seção retangular, tanto nos ensaios com o martelo de impacto como com o shaker, utilizou-se a técnica da exponencial complexa para gerar os parâmetros modais ( $\omega_r$  e  $\xi_r$ ), analisando as FRF's em bandas estreitas de frequência, com no máximo quatro picos. Para a obtenção das formas modais da barra, referentes ao ensaio com o shaker (FRF's na forma de mobilidades), utilizou-se a técnica de ajuste círculo com auto-vetores complexos. Para os dados obtidos com o martelo de impacto (FRF's na forma de acelerâncias) a técnica utilizada foi a de resposta na ressonância, considerando novamente os auto-vetores complexos.

Os testes com as varetas combustíveis protótipo foram realizados, a princípio, com duas varetas: uma totalmente vazia, sem a mola de sustentação da coluna de pastilhas e sem as pastilhas de chumbo; e outra reproduzindo a massa de uma vareta que estivesse com pastilhas de  $UO_2$ , sendo utilizadas pastilhas de chumbo nos ensaios. A extração dos parâmetros modais em ambos os casos foi feita através da técnica da exponencial complexa, sendo que não foi realizada a etapa de determinação das formas modais pois as varetas foram ensaiadas simulando uma condição livre-livre de fixação, e o objetivo deste ensaio especificamente era a verificação do efeito do preenchimento da vareta nas frequências naturais e coeficientes de amortecimento.

Para o caso da estrutura formada por um feixe de tubos acoplados por espaçadores rígidos, foram utilizadas duas técnicas

de extração de parâmetros: exponencial complexa e poli-referência, sendo a primeira destas utilizada em uma verificação mais rápida dos valores das frequências naturais. Para a extração de parâmetros pela técnica de poli-referência, inicialmente é gerada uma matriz de correlações, utilizando as funções de resposta impulsiva (IRF's) calculadas através da transformada inversa de Fourier das FRF's consideradas. A partir desta matriz, são estimadas as raízes, ou seja, as frequências e os fatores de amortecimento modal. Posteriormente, é calculado o resíduo (complexo ou real) de uma das FRF's previamente selecionada. Esta técnica se mostrou eficaz quando não se analisou, de uma só vez, toda a faixa de frequência medida para os dados de FRF com mais de uma referência.

Quando se utiliza a técnica de poli-referência para a obtenção dos modos, os resíduos também são estimados por mínimos quadrados, considerando os parâmetros modais obtidos anteriormente. Nas análises realizadas, sempre foram utilizados resíduos complexos.

A princípio, foram escolhidas quatro FRF's coletadas para serem previamente analisadas pela técnica de exponencial complexa, sendo a escolha destas FRF's determinada pelo aspecto geral das curvas. Durante a análise destas funções, foram obtidas diferentes estimativas para os valores de frequência natural e coeficiente de amortecimento para cada pico, entretanto, tais valores eram ajustes em frequência e largura de banda para cada pico verificado na FRF sob análise. Após se estimar tais parâmetros, averiguou-se rapidamente as formas modais utilizando a técnica de ajuste de círculo, objetivando a identificação dos picos que realmente representavam modos do conjunto (e não modos

locais de sub-estruturas), sendo realizada posteriormente uma nova análise através da técnica de poli-referência para determinação das frequências naturais, dos coeficientes de amortecimento e das formas modais.

Uma vez de posse das estimativas iniciais da faixa de frequência para os modos do conjunto, iniciou-se a análise mais refinada (poli-referência) para as FRF's relativas a dois pontos distintos de excitação (16X+ e 43X+). Os modos obtidos para a estrutura foram verificados através de um critério amplamente utilizado em análise modal, denominado MAC /39,40,41/ ("Modal Assurance Criterium"), sendo este baseado nas propriedades de ortonormalidade entre os modos. Tal verificação se fez necessária principalmente para os modos de ordem mais elevada, onde a forma modal não estava perfeitamente definida.

A metodologia de análise e obtenção das características modais de estruturas formadas por feixes de tubos acoplados através de espaçadores rígidos (similares a elementos combustíveis utilizados em reatores PWR) se mostrou eficaz no decorrer das análises desenvolvidas, podendo ser estendida para outros componentes de centrais nucleares, ou outras concepções de elementos combustíveis, necessitando então a realização de uma sequência de ensaios similar à descrita acima para validação do processo.

## 5- RESULTADOS

Com o intuito inicial de validar as técnicas experimentais desenvolvidas, foi realizada uma modelagem teórica do sistema barra-pórtico, utilizando para tanto o programa ANSYS de elementos finitos. Tal modelagem forneceu valores para as frequências naturais do pórtico (tanto no plano XY, como no plano transversal YZ) e da barra, sendo esta considerada como bi-engastada. Os resultados obtidos para as frequências naturais do pórtico e da barra são mostrados na tabela 5.1.

A análise das FRF's coletadas para a barra de seção retangular foi iniciada utilizando as funções coletadas com a excitação sendo aplicada através do shaker (total de 42 FRF's, sinal randômico). Fez-se uma identificação inicial dos picos observados em uma dada FRF (7X+/7X-) através da técnica de exponencial complexa /38/. Para cada uma das frequências selecionadas, realizou-se uma verificação prévia das formas de vibração associadas. Também foi utilizado o critério MAC, e através da combinação dos resultados, foi possível a correta identificação dos modos da estrutura. Para estes picos confirmados como característicos, realizou-se novamente a extração das formas modais utilizando uma técnica de ajuste mais refinada, a técnica de ajuste de círculos ("Circle Fit", /38/); podendo visualizar as formas modais resultantes na figura 5.1. O método utilizado para obtenção das frequências naturais e coeficiente de amortecimento associados, analisa uma FRF por vez, logo, foram obtidas seis estimativas para as frequências naturais e respectivos coeficientes de amortecimento, uma vez que foram analisadas todas as seis FRF's coletadas nesta etapa.

O procedimento de análise foi repetido para a barra de seção retangular, para aquelas FRF's coletadas utilizando a excitação transiente (total de 49 funções coletadas, sete destas sendo FRF's pontuais). Foram obtidas desta forma, treze estimativas distintas para os parâmetros modais da barra (sete com a excitação sendo transiente e seis com a excitação randômica). A tabela 5.2 mostra os valores resultantes do ensaio para a frequência e coeficiente de amortecimento de cada um dos modos identificados.

PÓRTICO PLANO X	PÓRTICO PLANO YZ	BARRA (X)
55,4	20,7	33,8
197,0	61,3	93,1
521,0	191,2	183,0
587,0	308,0	302,0
686,0	-----	452,0
-----	-----	632,0

Tabela 5.1- Frequências naturais (Hz) do pórtico e da barra de seção retangular calculadas com o programa ANSYS.

$F_{shaker}$ (HZ)	$\xi_{shaker}$	$F_{martelo}$ (Hz)	$\xi_{martelo}$
36,4 ± 0,7	0,038 ± 0,008	36,4 ± 0,1	0,007 ± 0,003
99,3 ± 0,5	0,015 ± 0,003	99,9 ± 0,3	0,014 ± 0,006
194,2 ± 0,5	0,010 ± 0,004	195,0 ± 0,6	0,013 ± 0,007
335,0 ± 0,6	0,0044 ± 0,0003	335 ± 1	0,006 ± 0,002
500,1 ± 0,2	0,0035 ± 0,0004	499 ± 1	0,006 ± 0,001
696 ± 9	0,016 ± 0,009	701 ± 9	0,04 ± 0,01

VALORES MÉDIOS GLOBAIS

FREQUÊNCIA (Hz)	AMORTECIMENTO $\xi$
36,4 ± 0,4	0,02 ± 0,01
100,0 ± 0,5	0,015 ± 0,004
195,0 ± 0,6	0,012 ± 0,006
335 ± 1	0,005 ± 0,001
499,6 ± 0,9	0,005 ± 0,001
698 ± 9	0,03 ± 0,01

Tabela 5.2- Valores finais para a frequência e coeficiente de amortecimento dos seis primeiros modos de flexão da barra de seção retangular.

A forma das curvas de função resposta em frequência, medidas para o caso da barra de seção retangular, é exemplificada através das figuras 5.2 e 5.3; podendo-se identificar com clareza os picos ressonantes.

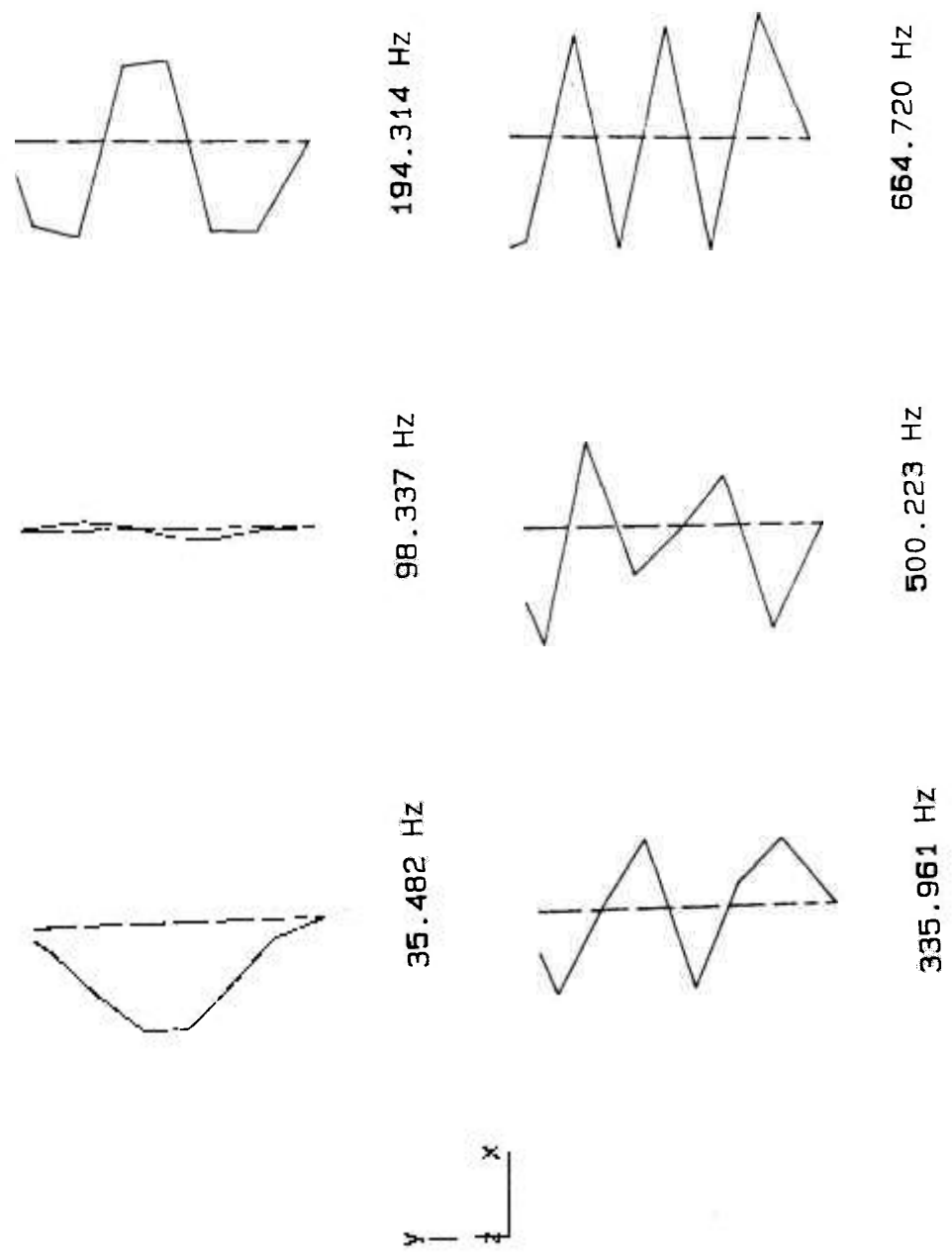


Figura 5.1- Formas modais obtidas para a barra.

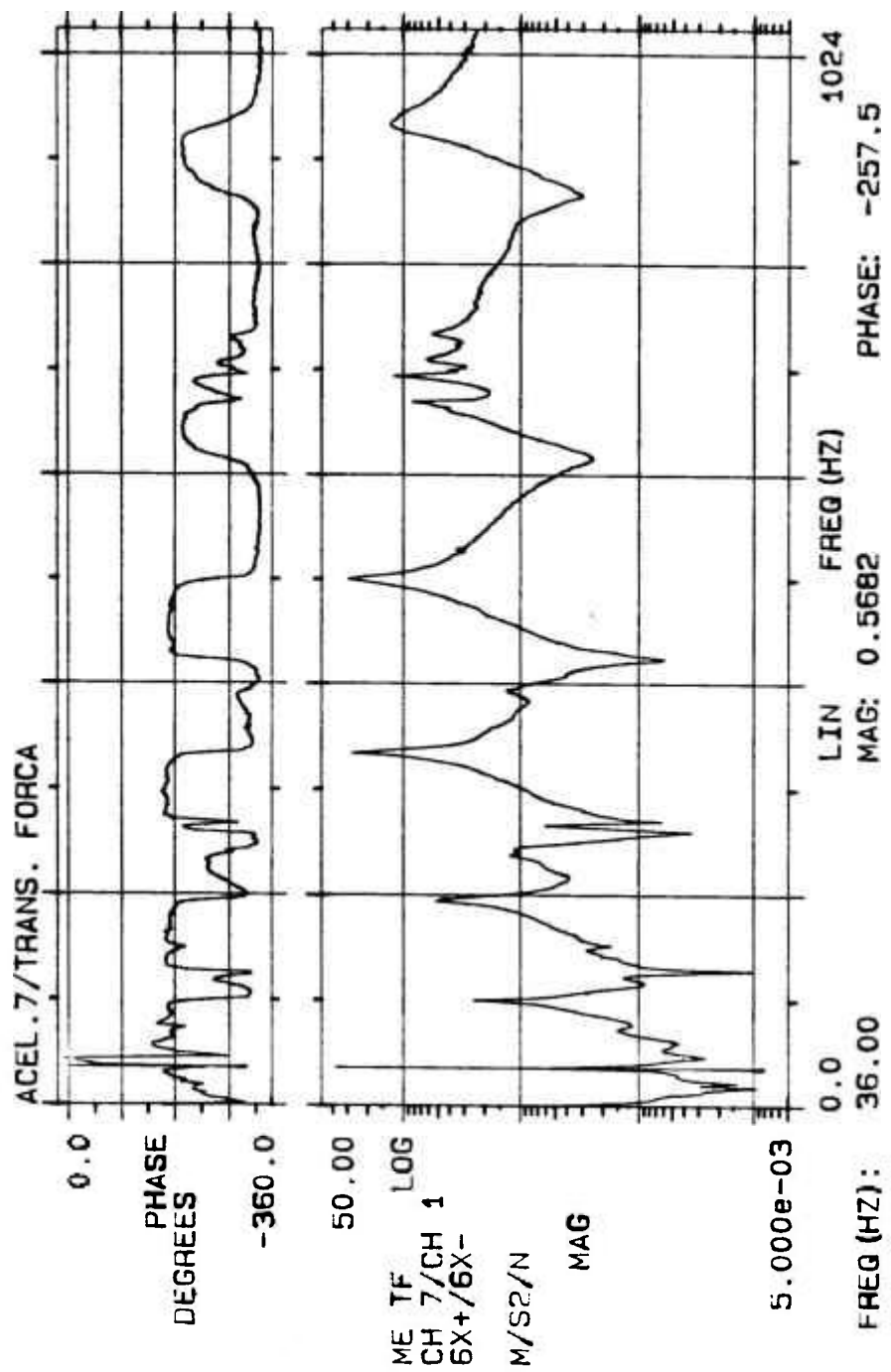


Figura 5.2- Gráfico da FRF (6X+/6X-) medida para a barra, via excitação transiente.

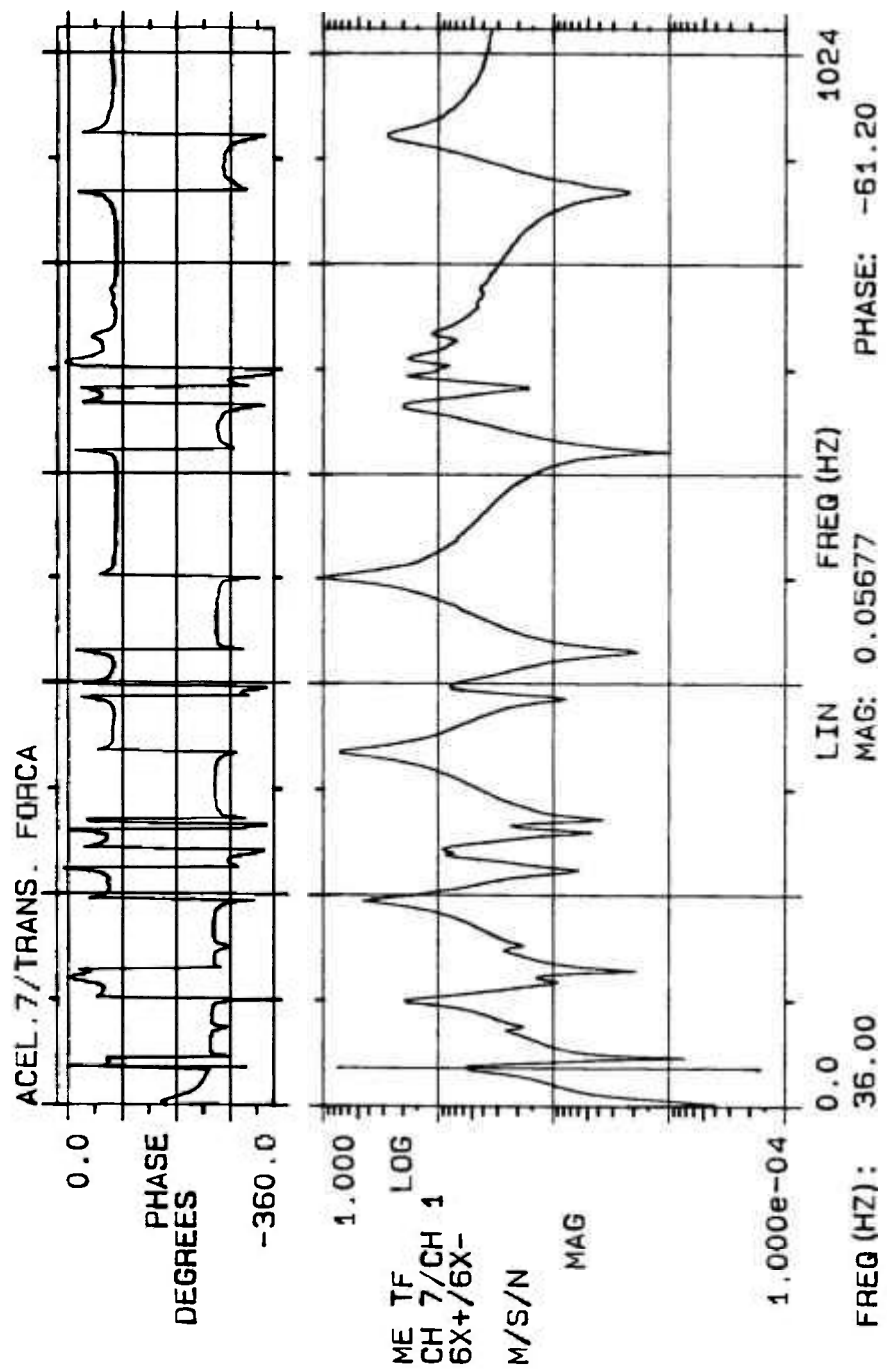


Figura 5.3- Gráfico da FRF (6X+/6X-) medida para a barra, via excitação randômica.

Após a análise da barra, analisaram-se as FRF's coletadas para o pórtico (total de 74 FRF's medidas, sendo a excitação aplicada tanto na barra como no próprio pórtico, através do martelo de impacto). Foi aplicada a mesma metodologia de análise para se obter as características modais (tabela 5.3) e respectivas formas modais associadas (figura 5.4).

Freq. (Hz)	$\xi$	FRF	DIREÇÃO
20,56	0,02001	15Z-/15Z-	YZ
35,98	0,01490	15X-/6X-	XY
71,01	0,01970	15Z-/5X-	YZ
118,88	0,01633	15Z-/5X-	YZ
148,67	0,00994	15Z-/5X-	YZ
205,43	0,01281	17Y+/17Y+	XY
265,69	0,00530	17Y+/17Y+	XY
330,26	0,01591	15Z-/15Z-	YZ
362,34	0,01674	17Y+/17Y+	XY

Tabela 5.3- Valores das frequências naturais do pórtico.

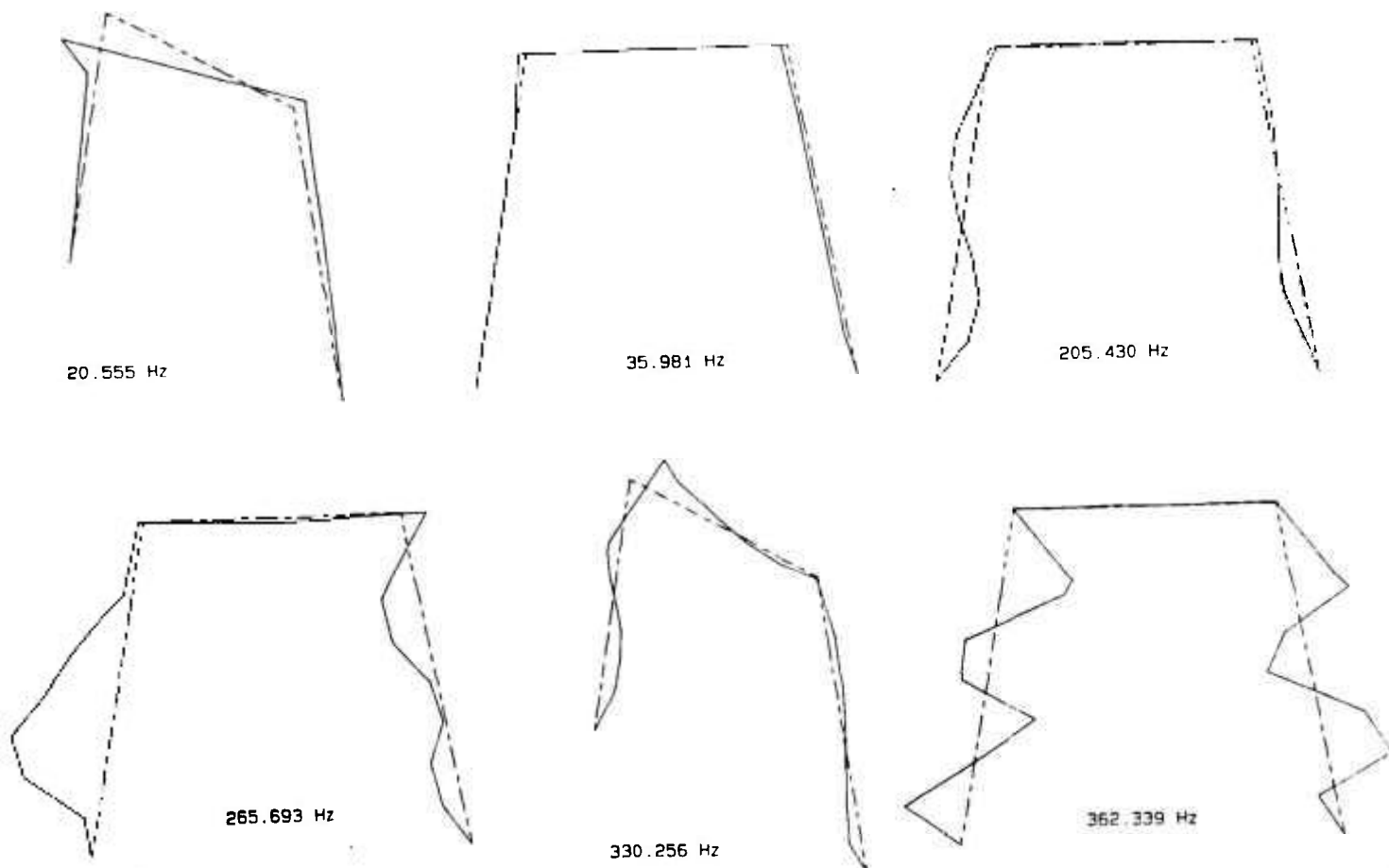


Figura 5.4- Formas modais obtidas para o pórtico.

As varetas combustíveis protótipo foram testadas utilizando excitações transientes, aplicadas através do martelo de impacto.

Inicialmente, foi realizado o ensaio com a vareta sem preenchimento, ou seja, somente o tubo de revestimento com suas extremidades seladas por tampões. A fim de comparar os resultados experimentais e verificar a validade da utilização do modelo de suporte livre-livre, foram calculadas as frequências naturais /42/ da estrutura (tabela 5.4), através de:

$$\omega_1 = (k_1)^2 \sqrt{\frac{EI}{m L^4}} \quad (\text{rad/s}) \quad (5.1)$$

com I ... momento de inércia.

L ... comprimento da vareta.

m ... massa por unidade de comprimento.

E ... módulo de elasticidade do material.

Foram coletadas seis FRF's nesta etapa dos ensaios, sendo todas analisadas segundo a técnica de exponencial complexa para a extração de parâmetros; de posse destas estimativas obteve-se o valor médio representativo para a frequência e coeficiente de amortecimento dos seis primeiros modos da vareta oca (tabela 5.4).

A figura 5.5 mostra a magnitude e a fase de uma FRF coletada, ficando claro o efeito de pequena distorção no formato da curva devido ao fato da excitação ter sido aplicada através do martelo de impacto; por outro lado, fica nítida a identificação dos picos ressonantes para análise.

MODO	(k <sub>1</sub> )	F <sub>teoria</sub> (Hz)	F <sub>experimento</sub> (Hz)	ξ <sub>experimento</sub>
1	4,73	40,45	37,6 ± 0,5	0,0043 ± 0,0009
2	7,85	111,50	102 ± 1	0,007 ± 0,004
3	10,99	218,58	200 ± 1	0,002 ± 0,001
4	14,14	361,33	332 ± 2	0,0015 ± 0,0006
5	17,28	539,77	500 ± 2	0,0016 ± 0,0006
6	20,42	753,89	698 ± 4	0,0013 ± 0,0003
7	-----	-----	928 ± 3	0,0011 ± 0,0002

Tabela 5.4- Comparação entre os valores teóricos e experimentais para as frequências naturais da vareta combustível protótipo, sem o preenchimento.

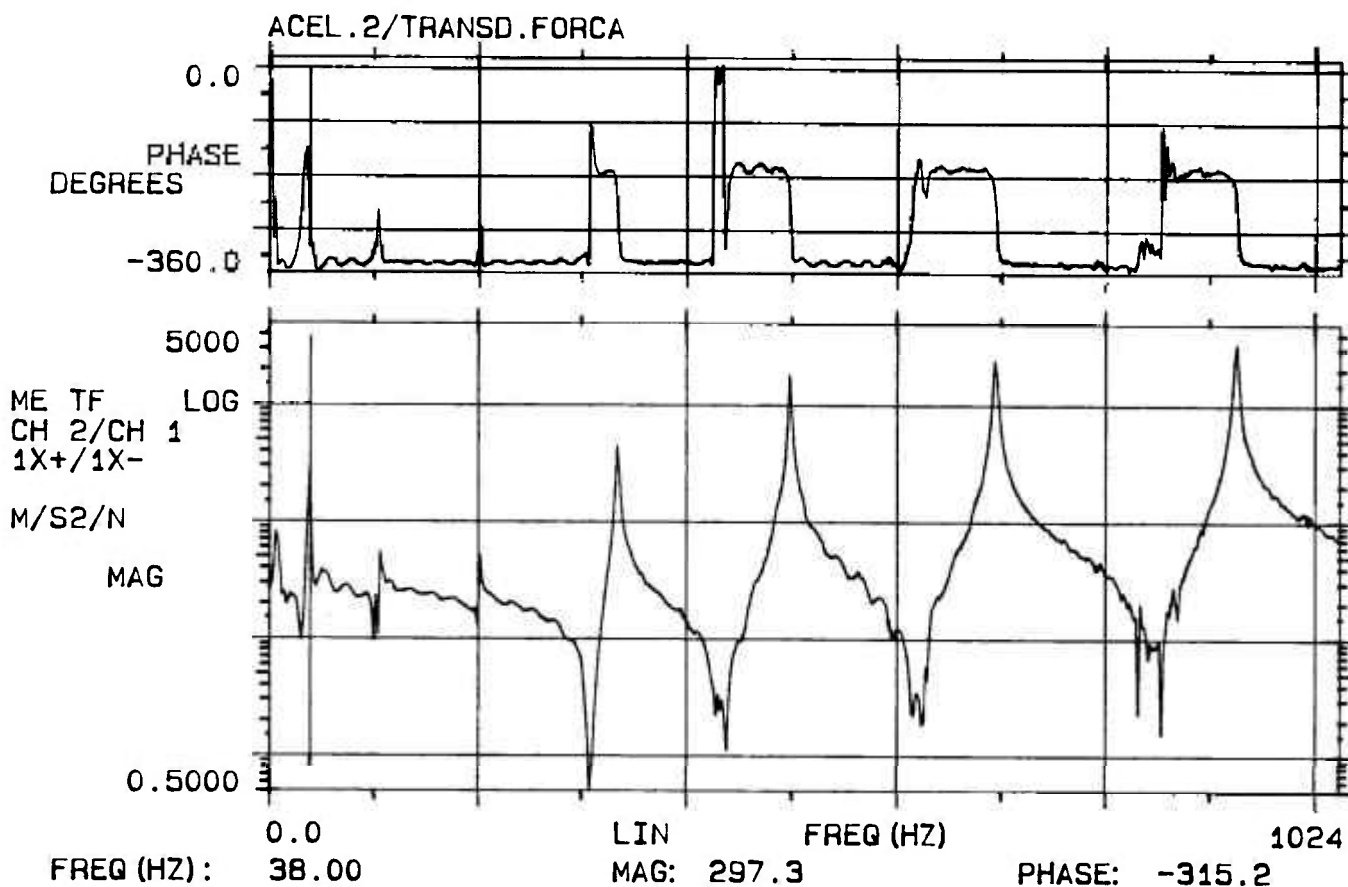


Figura 5.5- Gráfico da FRF medida para a vareta sem o preenchimento (1X+/1X-).

No caso da vareta combustível protótipo (com as pastilhas de chumbo), o objetivo consistia na verificação do fato de que o preenchimento atua como massa distribuída na vareta, não contribuindo para a rigidez do sistema. Calculou-se a frequência dos dois primeiros modos /42/, considerando-se a rigidez da vareta (EI) igual à do tubo de revestimento, com sua massa total distribuída ao longo de seu comprimento. Foram utilizadas, para efeito de comparação, três varetas distintas preenchidas com pastilhas de chumbo com alturas de 10, 20 e 30 milímetros, visando verificar o efeito da altura da pastilha no coeficiente de amortecimento.

Através da análise das FRF's coletadas, constatou-se o fato de que o preenchimento das varetas causa um amortecimento muito grande nos modos de ordem superior a três, podendo tal efeito ser visualizado diretamente através do formato das curvas de FRF (figuras 5.6 a 5.8). A tabela 5.5 mostra os valores obtidos para a frequência e coeficiente de amortecimento dos dois primeiros modos de flexão da vareta, para os diferentes tipos de preenchimento. Verifica-se através desta, que não ocorre alteração significativa nos valores de frequência, entretanto, o coeficiente de amortecimento do modo diminui à medida que a altura da pastilha aumenta, tendendo a se aproximar do caso limite onde ter-se-ia um único bloco de chumbo preenchendo a vareta, sendo o amortecimento controlado por tal bloco.

MODO	F <sub>teoria</sub> (Hz)	h(mm)	F <sub>experimental</sub> (Hz)	ξ <sub>experimental</sub>
1	18,76	10	21,4 ± 0,1	0,013 ± 0,004
		20	21,10 ± 0,05	0,011 ± 0,001
		30	21,8 ± 0,2	0,009 ± 0,001
2	51,73	10	54,6 ± 0,9	0,07 ± 0,02
		20	53,8 ± 0,6	0,060 ± 0,004
		30	52,8 ± 0,8	0,056 ± 0,004

Tabela 5.5- Valores teóricos e experimentais para os dois primeiros modos da vareta combustível protótipo, variando a altura das pastilhas utilizadas no preenchimento.

Para a análise das FRF's coletadas nos ensaios realizados com a estrutura formada por um feixe de tubos metálicos acoplados por espaçadores rígidos, utilizou-se a faixa de frequência de 0 a 511 Hz, visto que para frequências mais altas seria necessário um mapeamento da estrutura com um número de pontos maior.

Inicialmente foram utilizadas quatro FRF's distintas para a verificação inicial dos picos existentes, a saber:

16X+/16X+ (0-115 Hz, 120-280 Hz, 298-511 Hz)

43X+/43X+ (0-300 Hz, 250-400 Hz)

3X+/43X+ (300-511 Hz)

46X+/43X+ (0-280 Hz, 250-511 Hz)

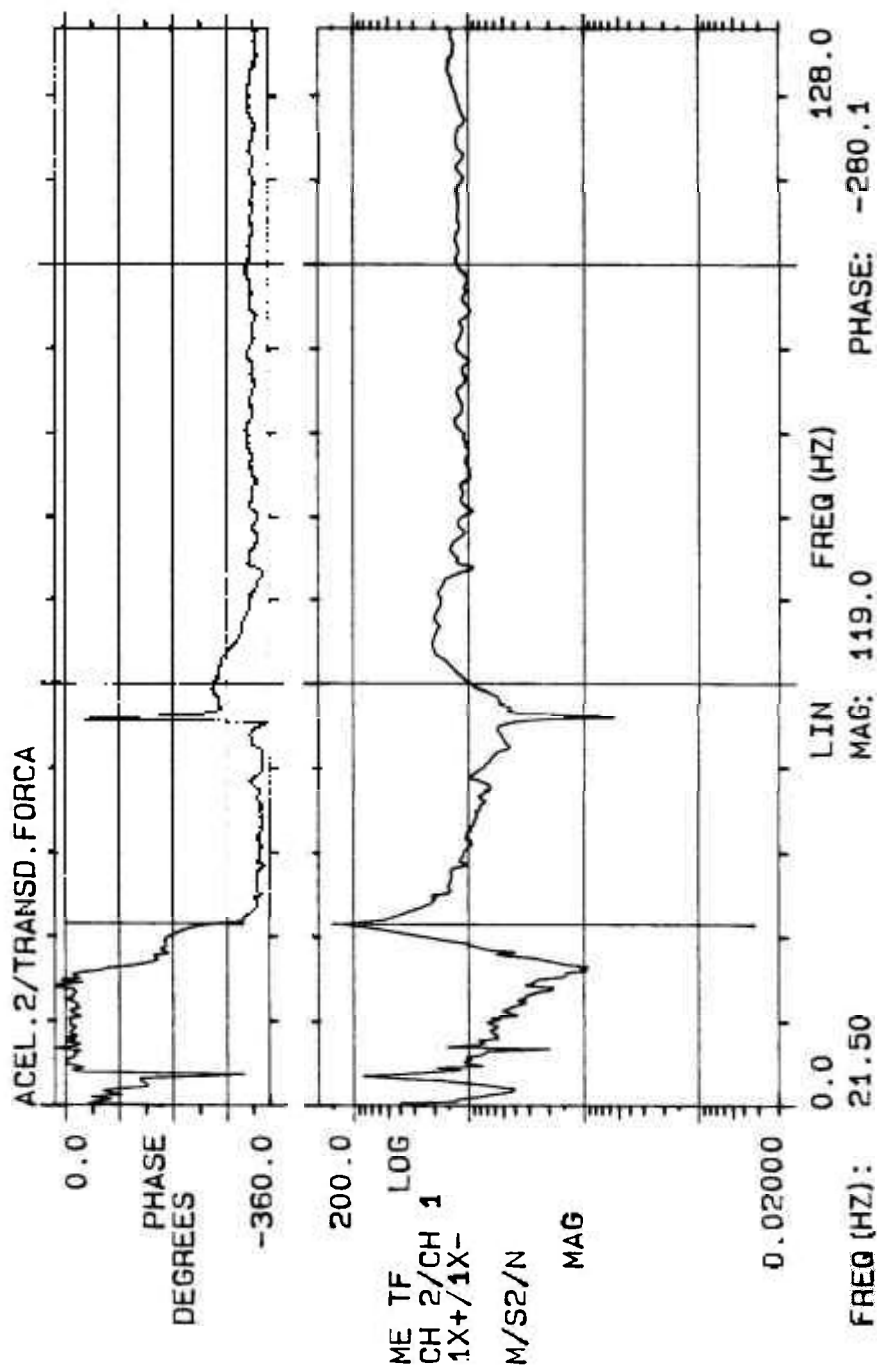


Figura 5.6- Gráfico da FRF 1X+/1X-, utilizada na análise da vareta combustível protótipo, pastilhas de 10mm.

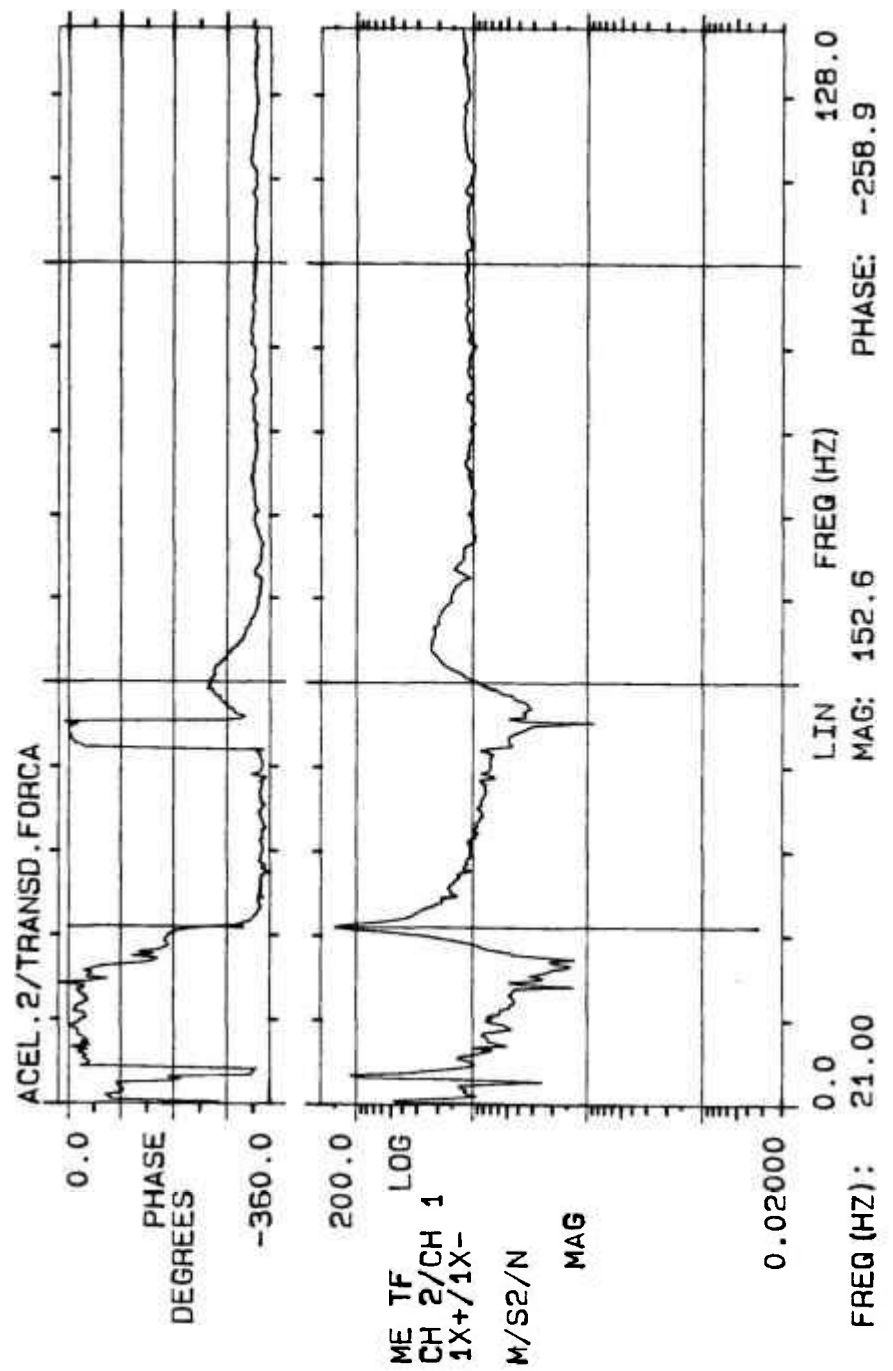


Figura 5.7- Gráfico da FRF 1X+/1X-, utilizada na análise da vareta combustível protótipo, pastilhas de 20mm.

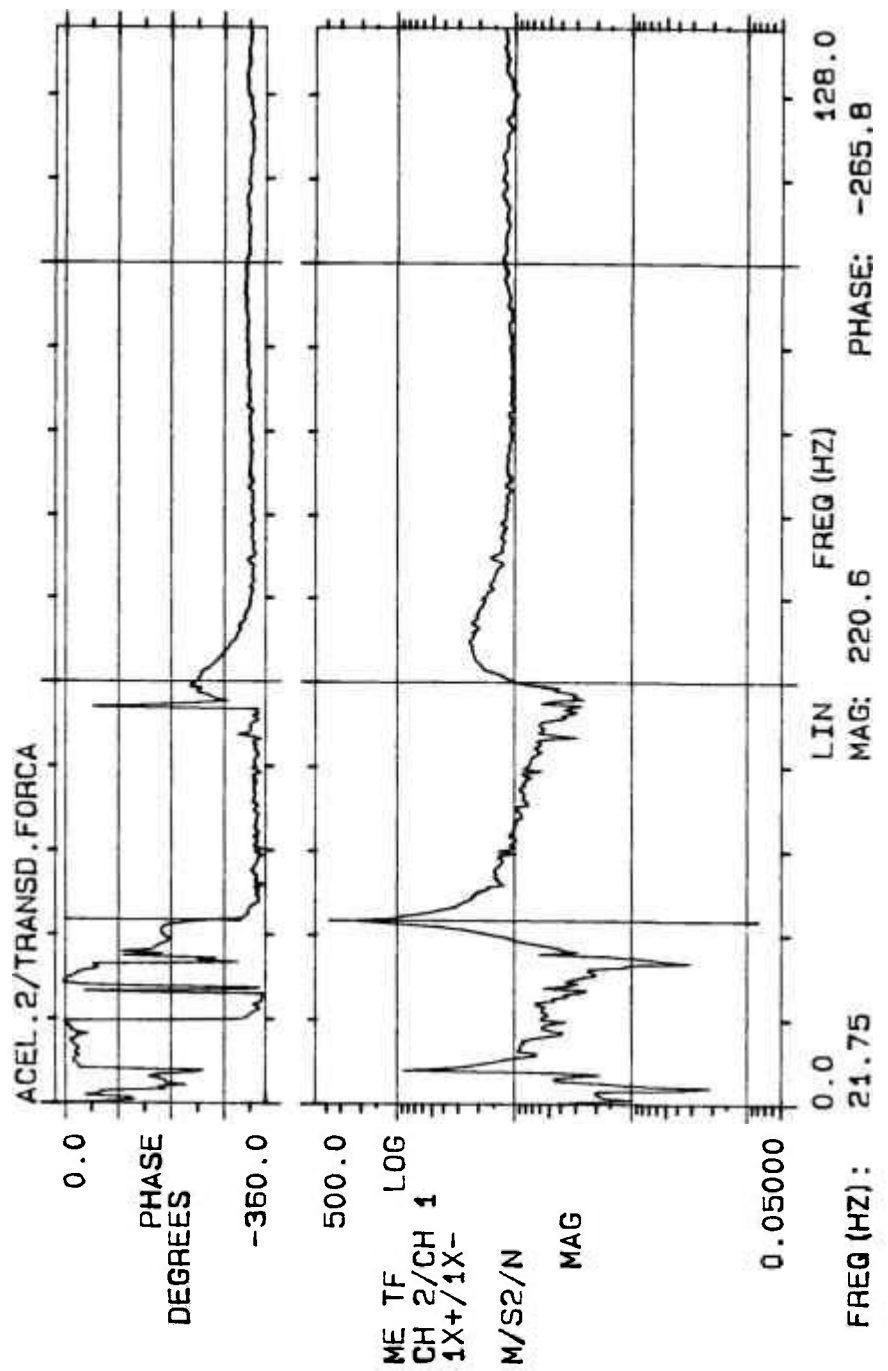


Figura 5.8- Gráfico da FRF 1X+/1X-, utilizada na análise da vareta combustível protótipo, pastilhas de 30mm.

De posse da estimativa da faixa de frequência para os picos correspondentes a modos do conjunto, repetiu-se o processo de análise utilizando a técnica de poli-referência, sendo a excitação aplicada aos pontos 16X+ e 43X+. Para confirmar os modos da estrutura, utilizou-se o critério MAC em conjunto com a visualização das formas modais.

Devido ao fato de se ter utilizado excitações simétricas e assimétricas, foram obtidos não só os modos de flexão do conjunto testado, como também aqueles referentes à torção, conforme mostra a tabela 5.6, sendo as formas modais obtidas mostradas nas figuras 5.9 à 5.15.

$F_{\text{experimental}}$ (Hz)	$\xi_{\text{experimental}}$	Observação
79,6 ± 0,1	0,026 ± 0,003	1ª flexão
98,5 ± 0,2	0,017 ± 0,003	1ª torção
153 ± 1	0,022 ± 0,005	2ª flexão
183 ± 1	0,025 ± 0,05	2ª torção
276 ± 3	0,010 ± 0,001	3ª flexão
311 ± 3	0,017 ± 0,005	3ª torção
477 ± 9	0,011 ± 0,003	4ª flexão

Tabela 5.6- Modos identificados para a estrutura formada por um feixe de tubos acoplados por espaçadores rígidos.

79.662 Hz

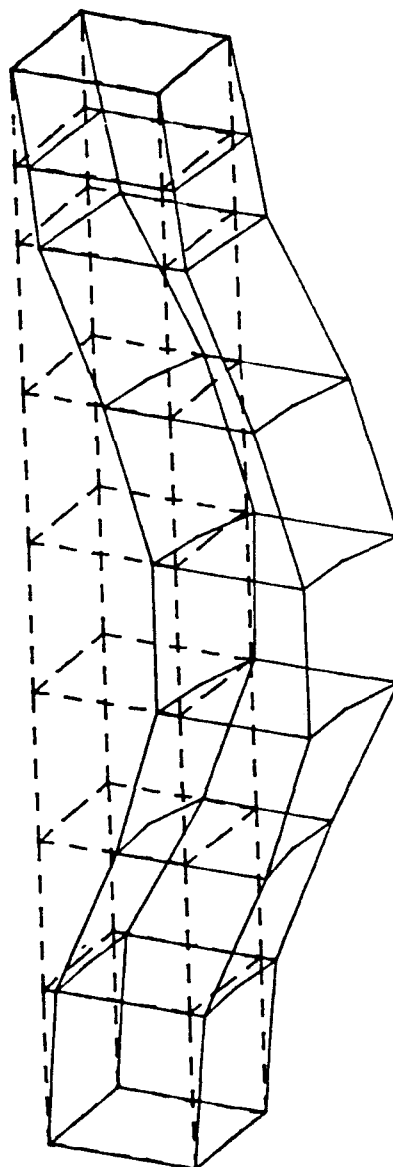
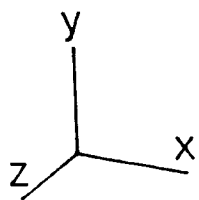


Figura 5.9- Forma modal para a 1ª flexão da estrutura formada por um feixe de tubos com espaçadores rígidos (poli-referência).

98.512 Hz

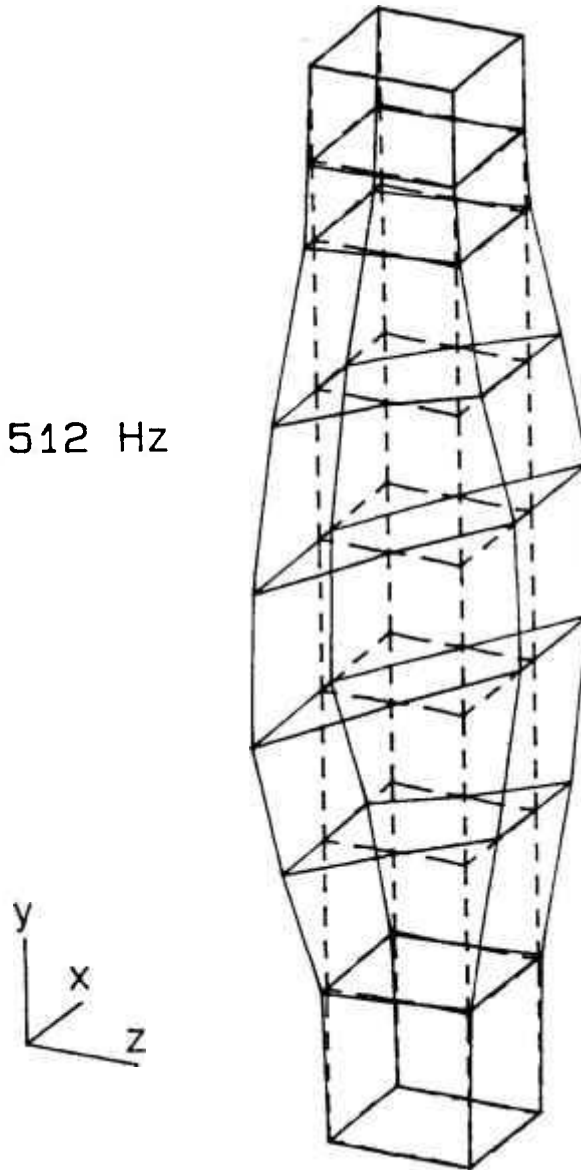


Figura 5.10- Forma modal para a 1ª torção da estrutura formada por um feixe de tubos com espaçadores rígidos (poli-referência).

152.866 Hz

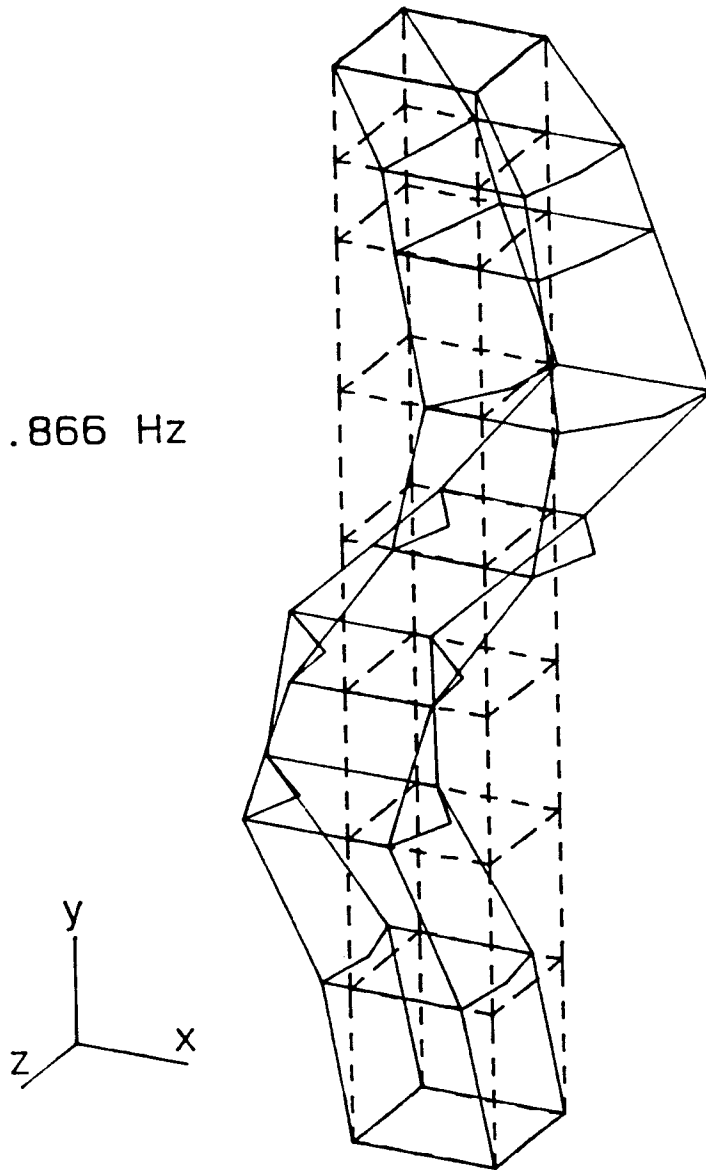


Figura 5.11- Forma modal para a 2ª flexão da estrutura formada por um feixe de tubos com espaçadores rígidos (poli-referência).

182.660 Hz

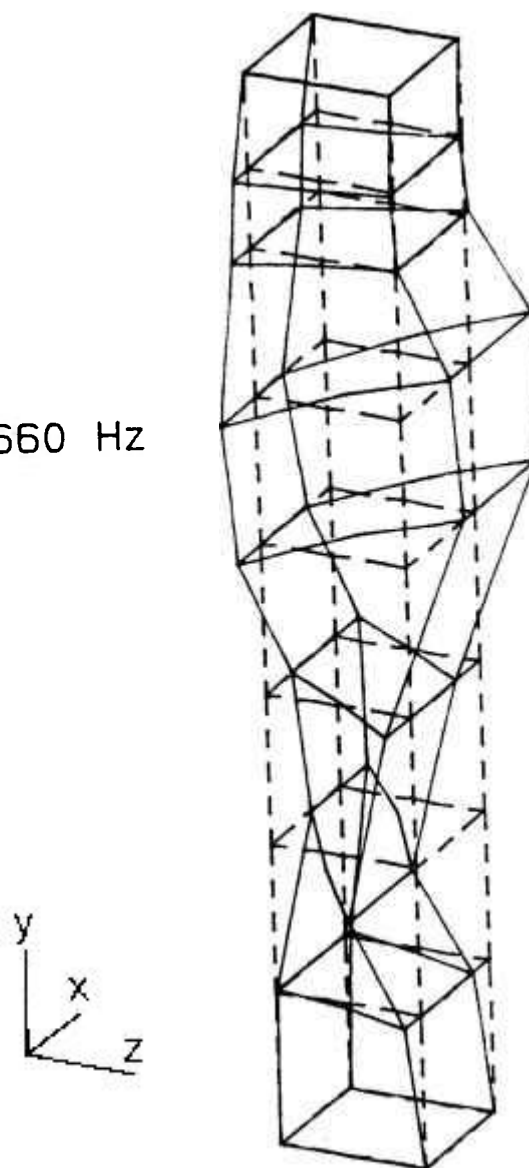


Figura 5.12- Forma modal para a 2ª torção da estrutura formada por um feixe de tubos com espaçadores rígidos (poli-referência).

276.554 Hz

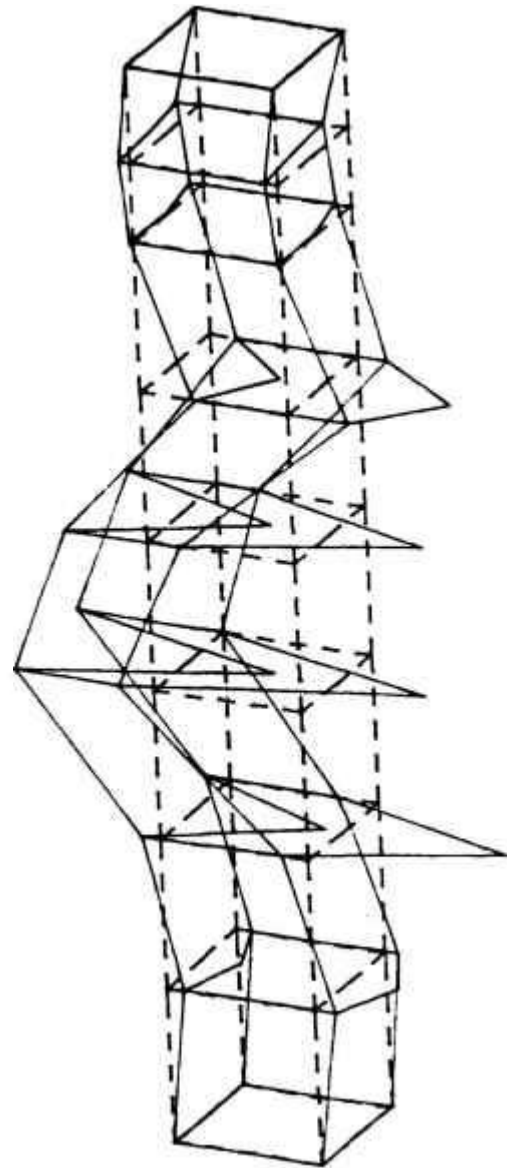
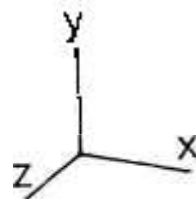


Figura 5.13- Forma modal para a 3ª flexão da estrutura formada por um feixe de tubos com espaçadores rígidos (poli-referência).

311.446 Hz

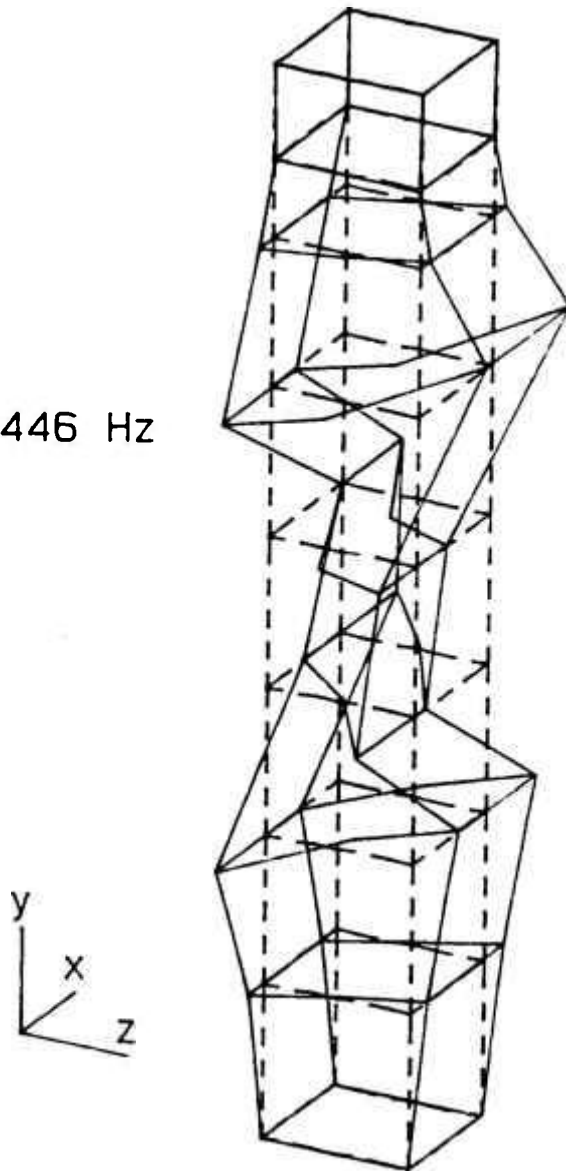


Figura 5.14- Forma modal para a 3ª torção da estrutura formada por um feixe de tubos com espaçadores rígidos (poli-referência).

477.363 Hz

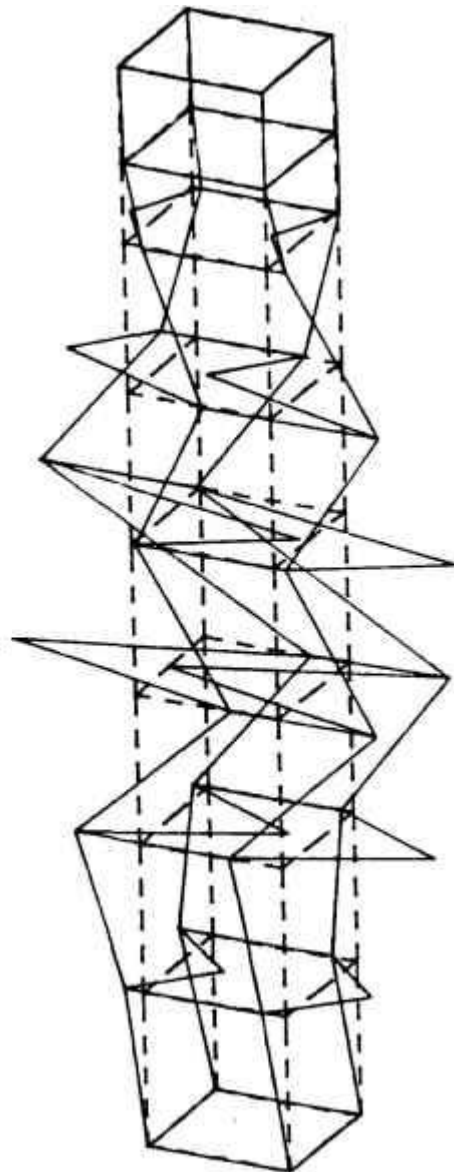
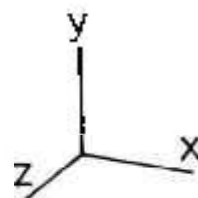


Figura 5.15- Forma modal para a 4ª flexão da estrutura formada por um feixe de tubos com espaçadores rígidos (poli-referência).

A primeira etapa de análise das FRF's foi realizada na faixa de baixas frequências (0-511 Hz), sendo em seguida avaliada a região de altas frequências (512-1024 Hz), utilizando a técnica de exponencial complexa para extração das frequências de pico e respectivos coeficientes de amortecimento. Através da visualização de diferentes FRF's coletadas, figuras 5.16 a 5.20, nota-se a existência de picos que não correspondem a modos de vibração do conjunto, sendo possíveis modos locais de sub-estruturas (espaçadores ou tubos). Entretanto, só seria possível afirmar tal hipótese realizando-se a análise modal com cada componente do conjunto, mantendo sua situação de montagem. Um outro fator a ser considerado é que para melhorar a caracterização do comportamento da estrutura em altas frequências é necessário um aumento no número de pontos de coleta de resposta.

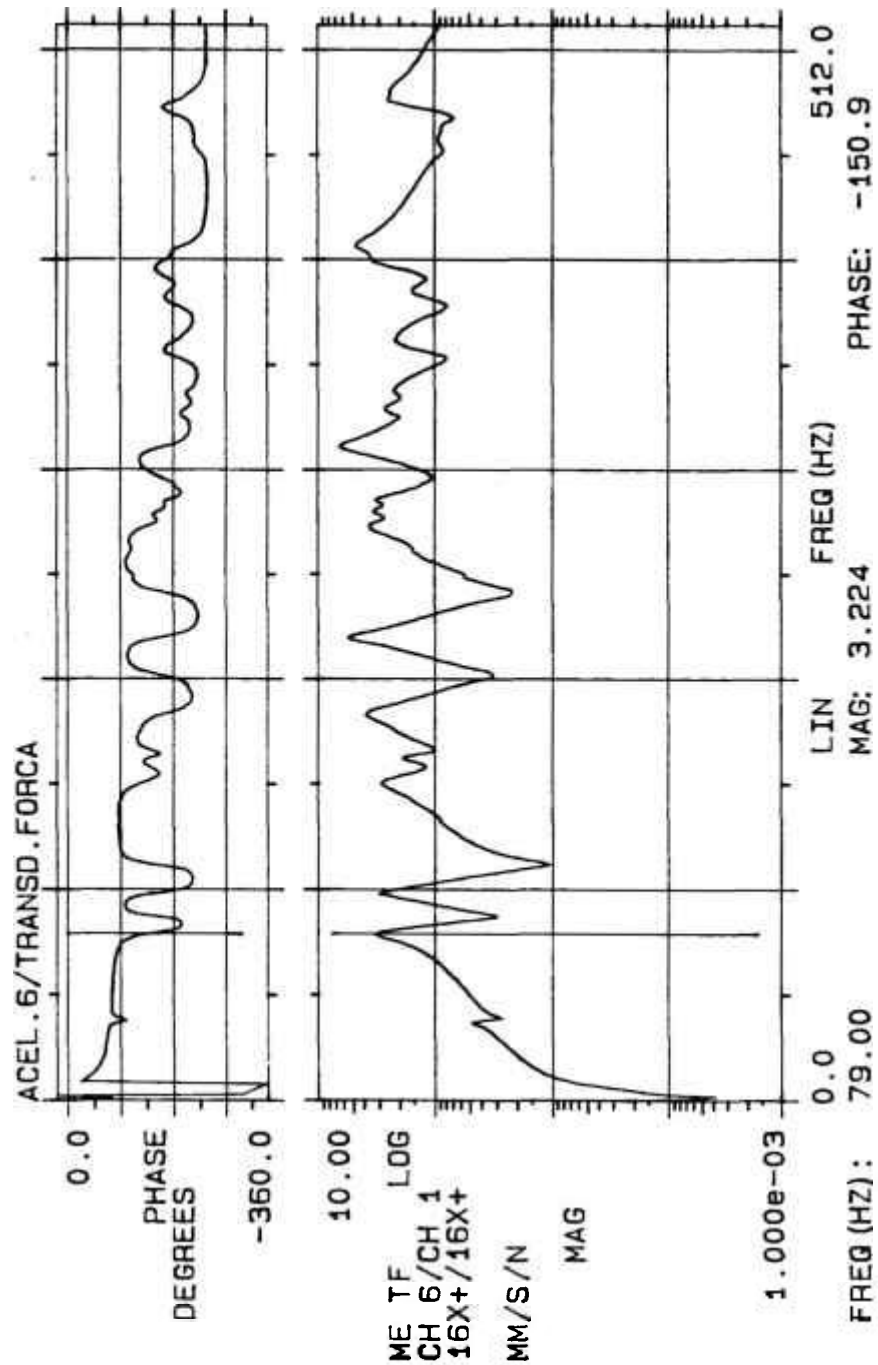


Figura 5.16- Gráfico da FRF (16X+/16X+), utilizada na análise da estrutura formada por um feixe de tubos acoplados por espaçadores rígidos, em baixas frequências.

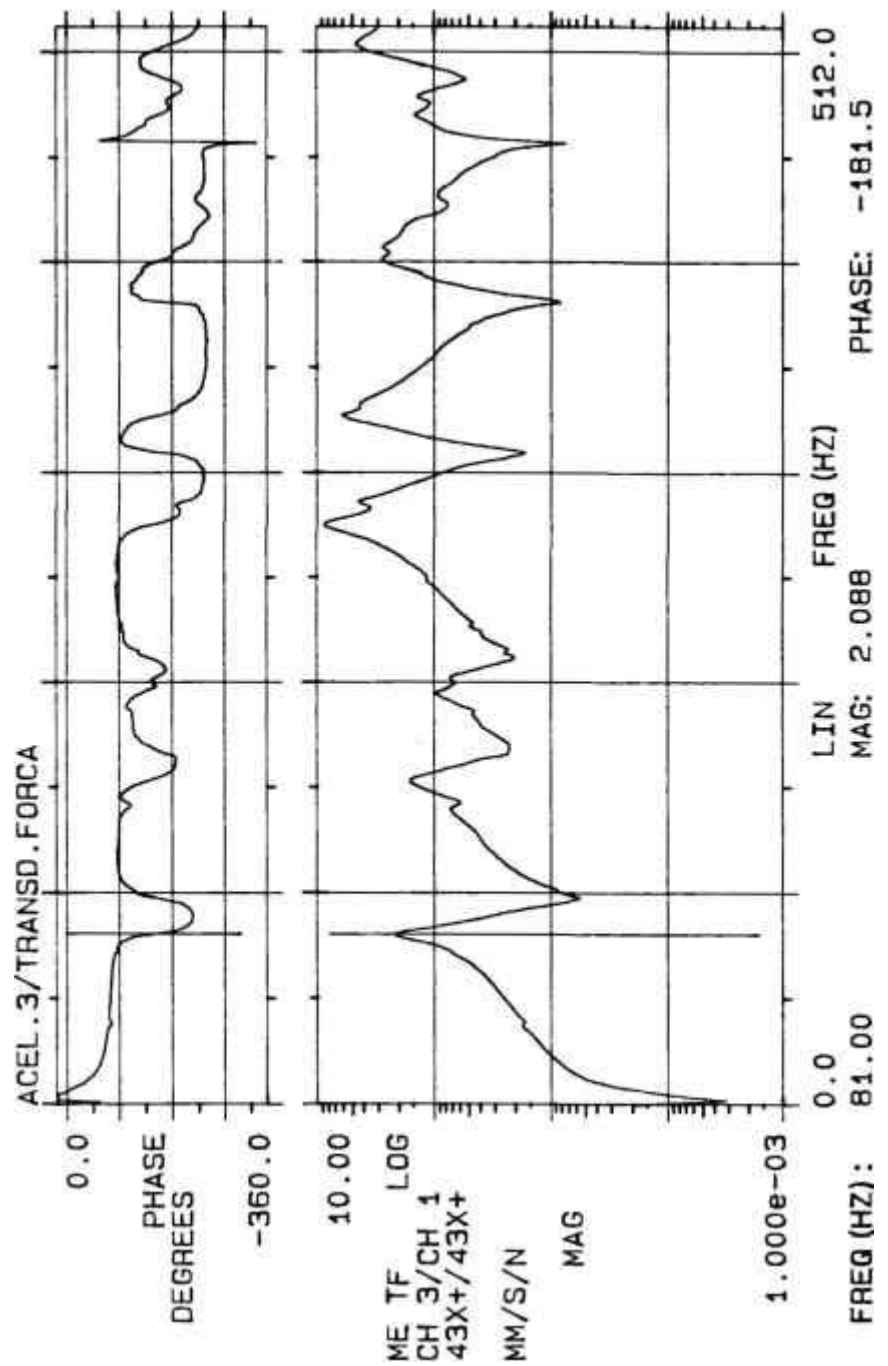


Figura 5.17- Gráfico da FRF (43X+/43X+), utilizada na análise da estrutura formada por um feixe de tubos acoplados por espaçadores rígidos, em baixas frequências.

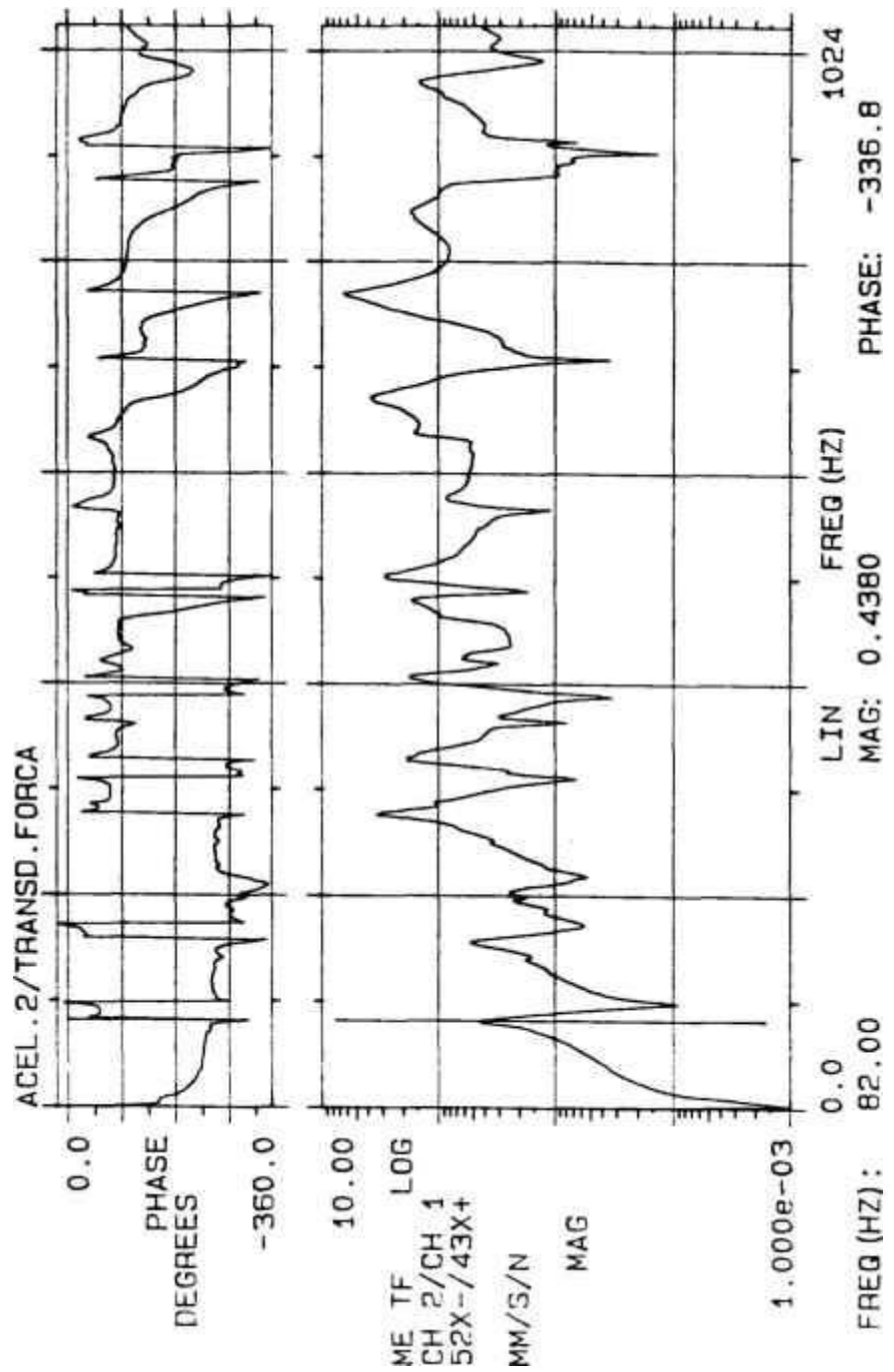


Figura 5.18- Gráfico da FRF (52X-/43X+), utilizada na análise da estrutura formada por um feixe de tubos acoplados por espaçadores rígidos, em altas frequências.

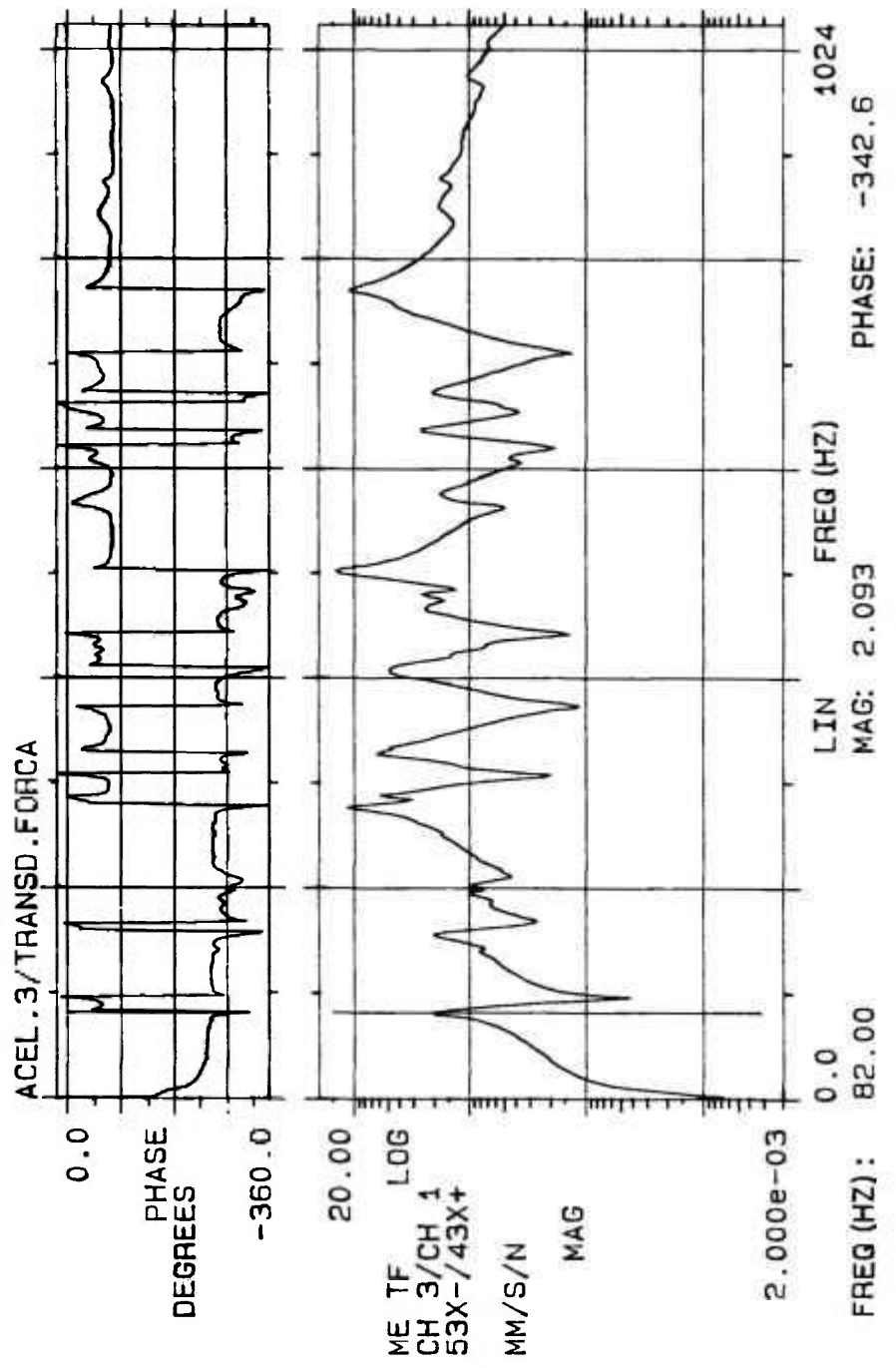


Figura 5.19- Gráfico da FRF (53X-/43X+), utilizada na análise da estrutura formada por um feixe de tubos acoplados por espaçadores rígidos, em altas frequências.

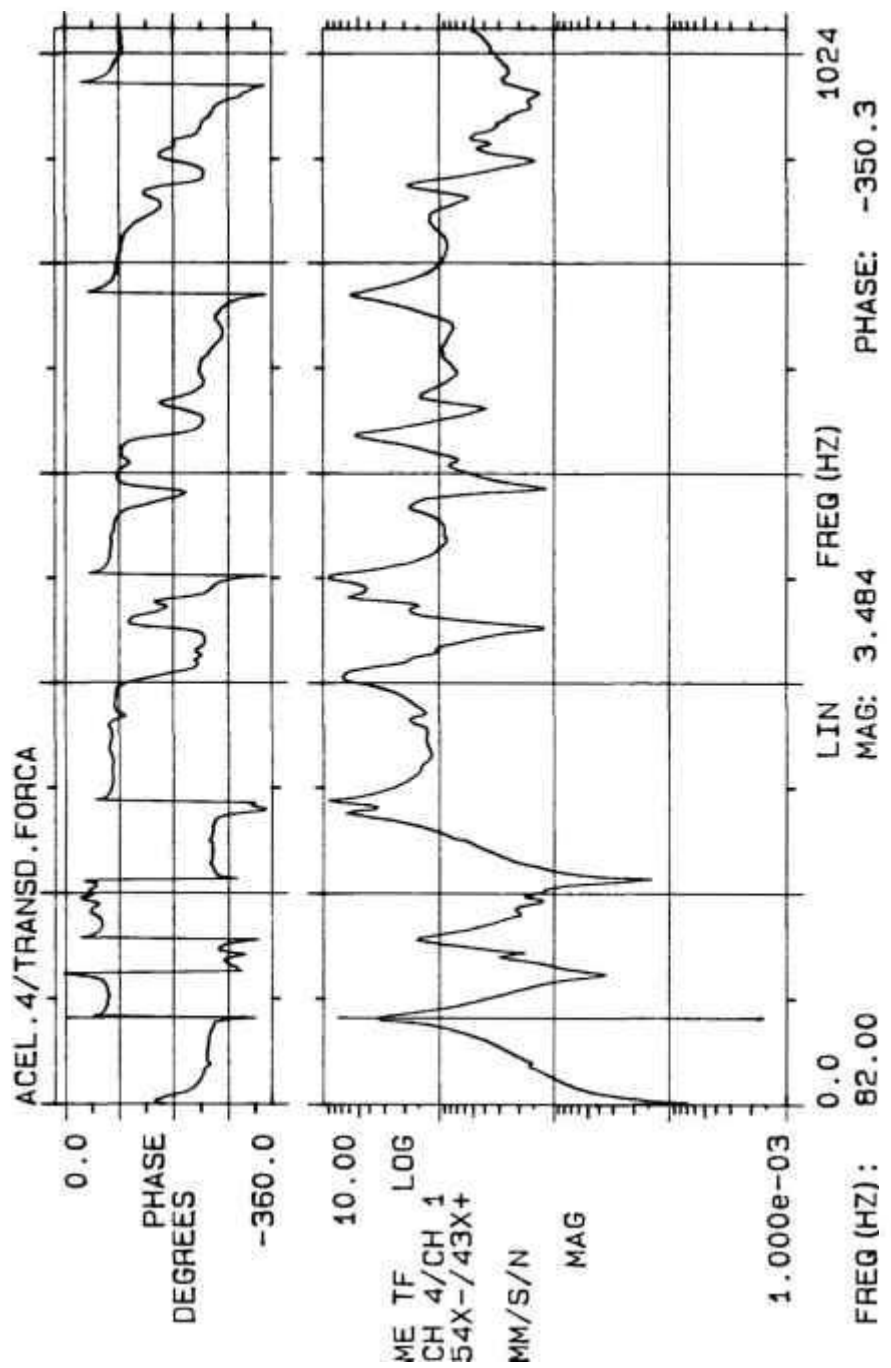


Figura 5.20- Gráfico da FRF (54X-/43X+), utilizada na análise da estrutura formada por um feixe de tubos acoplados por espaçadores rígidos, em altas frequências.

## 6 - CONCLUSÕES

Uma metodologia de ensaios e de técnicas de análise modal experimental foi aplicada a uma estrutura similar a elementos combustíveis utilizados em reatores nucleares do tipo PWR.

Foram estudadas e desenvolvidas técnicas e procedimentos de análise, que em conjunto com um programa de testes com diferentes estruturas possibilitaram a qualificação do processo.

Duas técnicas de medição das funções resposta em frequência (FRF's) foram empregadas. Uma com o martelo de impacto (excitação transiente) e outra com um shaker (excitação randômica). A excitação com o shaker se mostrou mais repetitiva e independente do operador, embora seja menos versátil e tenha sido notada alguma influência do próprio shaker nos resultados da análise, apresentando uma ligeira queda nas frequências naturais e aumento nos fatores de amortecimento quando do teste com estruturas com pequena massa. Tal tendência desaparece quando do ensaio de estruturas cuja relação  $(\text{massa shaker})/(\text{massa estrutura})$  diminui.

A técnica de extração imediata de parâmetros que permitiu o melhor ajuste às curvas FRF's medidas foi a da exponencial complexa. Para a obtenção das formas modais, a técnica de resposta na ressonância forneceu os melhores resultados quando dos ajustes com medidas de inertância (aceleração/força). Para as medidas com mobilidades (velocidade/força), a técnica de ajuste de círculo apresentou melhores resultados. Para estruturas complexas como é o caso de

elementos combustíveis, é recomendável que a aquisição das FRF's seja feita na forma de mobilidade, sendo estas funções mais adequadas para a análise em baixas frequências.

Os ensaios com a barra de seção retangular mostraram que as respectivas frequências naturais estão próximas dos valores previstos por modelagens analíticas (situação bi-engastada), apresentando um desvio relativo na faixa de 6 a 10%. O coeficiente de amortecimento obtido para o primeiro modo de vibração da barra apresentou uma incerteza muito alta devido à influência da massa do shaker nas medidas. Para os modos de ordem mais elevadas, as altas incertezas obtidas nos coeficientes de amortecimento são funções do número limitado de pontos de resposta utilizados no ensaio, necessitando-se de mais pontos de resposta para melhor caracterização da barra em altas frequências.

A influência do pórtico nos resultados das FRF's medidas para as demais estruturas foi avaliada. Comprovou-se experimentalmente a condição de que o pórtico possui características suficientemente rígidas (direção X), o que acarreta em uma pequena interferência nas regiões de altas frequências, onde a grande densidade modal das estruturas impede uma análise confiável com um número limitado de pontos de coleta de resposta.

Nos ensaios realizados com as varetas combustíveis protótipo, preenchidas com diferentes pastilhas de chumbo (alturas de 10, 20 e 30 mm), o preenchimento das varetas atuou efetivamente como uma massa adicionada à estrutura, não contribuindo para a rigidez da mesma. Este preenchimento causou um aumento do coeficiente de amortecimento de cada modo das

varetas, principalmente para os modos de ordem mais elevada (maiores frequências).

Os valores obtidos para os parâmetros modais identificados para as varetas combustíveis protótipo se aproximaram dos valores teóricos, apresentando desvios de 14% para a frequência natural do primeiro modo (21Hz), e de 4% para o segundo modo (54Hz). O preenchimento das varetas causa um amortecimento extremamente atuante, tornando difícil a identificação dos modos de ordem superior a dois.

Para o caso de estruturas complexas, como é o caso do feixe de tubos acoplados por espaçadores rígidos, é imprescindível a utilização de um grande número de pontos de coleta de resposta para se obter uma boa caracterização da estrutura, aliando-se a tal fato a aplicação de técnicas de análise que utilizem processos de ajuste de curvas (FRF's) com vários graus de liberdade, como é o caso da técnica de poli-referência para extração dos parâmetros modais e das formas modais associadas. Em todo o processo, cuidados experimentais devem ser tomados a fim de caracterizar perfeitamente condições como: nível de ruído extremamente baixo, tipo de fixação da estrutura sob ensaio, nível real de excitação aplicado à estrutura, correta discretização e transdução dos sinais coletados.

Após os ensaios realizados com as diversas estruturas, ficou qualificado e caracterizado um procedimento de extração das características modais de estruturas similares à elementos combustíveis utilizados em reatores nucleares do tipo PWR, sendo que os resultados obtidos (frequências naturais, coeficientes de amortecimento e formato dos modos) poderão ser aplicados

diretamente nas análises dinâmicas efetuadas com tais componentes, visando a segurança e o melhor desempenho destas centrais.

O modelo modal ( $[\omega_n]$ ,  $[\xi_n]$  e  $[\phi]$ ) obtido para a estrutura formada por um feixe de tubos acoplados por espaçadores rígidos servirá também para qualificar o programa ELCOM /5,6/, bem como para alimentar o modelo dinâmico de análise estrutural de elementos combustíveis de reatores do tipo PWR, programa STYCA /7/. Atenção deve ser dada ao fato de que a metodologia desenvolvida, além de gerar as matrizes de frequência natural e formato dos modos, também gera a matriz de amortecimento modal, sendo esta não obtida através de modelos simplificados (estáticos ou dinâmicos).

Todos os testes foram realizados no ar, sugerindo-se para trabalhos futuros o estudo mais detalhado das características amortecedoras introduzidas pela adição da massa do fluido refrigerante à estrutura, bem como o início de um trabalho experimental que possibilite a melhor compreensão dos processos envolvidos no fenômeno de vibrações induzidas por fluido, característico da operação de reatores nucleares. Sugere-se também, uma parametrização experimental do efeito da temperatura nas características de rigidez tanto das grades espaçadoras, como dos elementos combustíveis, alterando diretamente as frequências naturais destas estruturas.

## 7- REFERÊNCIAS

- /01/. Tong, L. S., Weisman, J., "Thermal Analysis of Pressurized Water Reactor", ANS Publishers, Hinsdale - Ill, USA, 1970.
- /02/. El-Wakil, M. M., "Nuclear Heat Transport", ANS Publishers, Hinsdale - Ill, USA, 1978.
- /03/. Preumont, A., Thomson, P., Parent, J., "Seismic Analysis of PWR-RCC Fuel Assemblies", "Nuclear Engineering and Design", Vol. 71, pp. 103-119, 1982.
- /04/. Takada, Y., Egusa, T., "Vibration of the Fuel Assembly of a Marine Reactor", "Nuclear Engineering and Design", Vol. 7, pp. 578-584, 1968.
- /05/. Perrotta, J. A., Pimenta, P. M., "Análise Matricial de Estruturas Compostas de Tubos Interligados por Espaçadores", "5° Congresso Latino-Americano de Métodos Computacionais para Engenharia", Salvador - BA, Brasil, 1984.
- /06/. Hayashi, I. M. V., Perrotta, J. A., "Um Programa Computacional para Análise Estrutural de Elementos Combustíveis", 2° CGEN, "2° Congresso Geral de Energia Nuclear", Vol. 1, pp. 325-329, Rio de Janeiro - RJ, Brasil, 1988.
- /07/. Macedo, L. V. da S., "Análise Estrutural Dinâmica de um Conjunto de Elementos Combustíveis no Núcleo de um Reator Nuclear PWR", Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da USP, São Paulo - SP, Brasil, 1991.
- /08/. Clough, R. W., Penzien, J., "Dynamic of Structures", McGraw-Hill International Editions, New York - NY, USA, 1982.

- /09/. Meirovitch, L., "Elements of Vibration Analysis", McGraw-Hill Inc., New York - NY, USA, 1986.
- /10/. Barinka, L. L., "On the Lateral Deformation of Coupled Tubular Structures", 1<sup>st</sup> SMiRT, "1<sup>st</sup> International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology", Vol. F, F02/4, Berlin, Germany, 1971.
- /11/. Preumont, A., "A Two-Time Step Algorithm for Seismic Analysis of a PWR Core", "Nuclear Engineering and Design", Vol. 65, pp. 49-62, 1981.
- /12/. Preumont, A., Van Steenberghe, T., "Dynamic Characteristics of a PWR Fuel Assemblies", 6<sup>th</sup> SMiRT, "6<sup>th</sup> International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology", Vol. D, D03/8, Paris, France, 1981.
- /13/. Ewins, D. J., "Modal Testing: Theory and Practice", Research Studies Press, Somerset, England, 1984.
- /14/. Arfken, G., "Mathematical Methods for Physicists", Academic Press Inc, New York - NY, USA, 1970.
- /15/. Meirovitch, L., "Computational Methods in Structural Dynamics", Sijthooff & Noordhoof, Netherlands, 1980.
- /16/. Brigham, E. O., "The Fast Fourier Transform", Prentice-Hall Inc., New York - NY, USA, 1974.
- /17/. Preumont, A., "On the Vibrational Behavior of Pressurized Water Reactor Fuel Rods", "Nuclear Technology", Vol. 58(3), pp. 483-491, 1982.
- /18/. Nakazato, S., "Development of a 17 x 17 Fuel Assembly for PWR's", "Nuclear Engineering International", Vol. 5, pp. 406-410, 1974.
- /19/. McGrath, G., Roll, J. B., "Development of a Nuclear Fuel Assembly for Improved Safety Margin", "American Power"

- Conference", pp. 1-28, Chicago - Ill, USA, 1974.
- /20/. Tigéot, Y., Buland, P., "Analyse du Comportement Vibratoire des Assemblages Combustibles Destinés à Equiper les Réacteurs de Puissance du Type Eau Ordinaire sous Pression", "Bull. Inf. Sci. Tech.", Vol. 213, pp. 29-42, 1976.
- /21/. Stokes, F. E., King, R. A., "PWR Fuel Assembly Dynamic Characteristics", "International Conference on Vibration in Nuclear Plant", Vol. 1, Session 1 (1:3), pp. 27-45, Keswick, UK, 1978.
- /22/. Han, L., "et alli", "Experimental Study of Flow Induced Vibration of a Model Fuel Assembly", 10<sup>th</sup> SMiRT, "10<sup>th</sup> International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology", Vol. T, T04/3, Anaheim - CA, USA, 1989.
- /23/. Ewins, D. J., Griffin, J., "A State-of-the-Art Assessment of Mobility Measurement Techniques - Results for the Mid-Range Structures (30-30000Hz)", "Journal of Sound and Vibration", Vol. 78(2), pp. 197-222, 1981.
- /24/. Ewins, D. J., "A State-of-the-Art Assessment of Mobility Measurement - A Summary of European Results", "Shock and Vibration Bulletin", Vol. 51(1), pp. 15-35, 1981.
- /25/. Done, G. T. S., Hughes, A. D., "The Response of a Vibrating Structure as a Function of Structural Parameters", "Journal of Sound and Vibration", Vol. 38(2), pp. 255-266, 1975.
- /26/. Gaukroger, D. R., Heron, K. H., Skingle, C. W., "The Processing of Response Data to Obtain Modal Frequencies and Damping Ratios", "Journal of Sound and Vibration", Vol. 35(4), pp. 559-571, 1974.

- /27/. Dovel, G., "Modal Analysis: A Dynamic Tool for Design and Troubleshooting", "Mechanical Engineering", Vol. 3, pp. 82-86, 1989.
- /28/. Pi, Y. L., Mickleborough, N. C., "Modal Identification of Vibrating Structure in the Time Domain", "Computers and Structures", Vol. 32(5), pp. 1105-1115, 1989.
- /29/. Ewins, D.J., "Estimation of Resonant Peak Amplitudes", "Journal of Sound and Vibration", Vol. 43(4), pp. 595-605, 1975.
- /30/. Gaukroger, D. R., Skingle, C. W., Heron, K. H., "Numerical Analysis of Vector Response Loci", "Journal of Sound and Vibration", Vol. 29(3), pp. 341-353, 1973.
- /31/. Ewins, D. J., Gleeson, P. T., "A Method for Modal Identification of Lightly Damped Structures", "Journal of Sound and Vibration", Vol. 84(1), pp. 57-79, 1982.
- /32/. Goyder, H. G. D., "Methods and Application of Structural Modelling from Measured Structural Frequency Response Data", "Journal of Sound and Vibration", Vol. 68(2), pp. 209-230, 1980.
- /33/. Ewins, D. J., "On the Predicting Point Mobility Plots from Measurements of Other Mobility Parameters", "Journal of Sound and Vibration", Vol. 70(1), pp. 69-75, 1980.
- /34/. White, R. G., "Evaluation of the Dynamic Characteristics of Structures by Transient Testing", "Journal of Sound and Vibration", Vol. 15(2), pp. 147-161, 1971.
- /35/. Holmes, P. G., White, R. G., "Data Analysis Criteria and Instrumentation Requirements for the Transient Measurement of Mechanical Impedance", "Journal of Sound and Vibration", Vol. 25(2), pp. 217-243, 1972.

- /36/. Licht, T. R., Andersen, H., "Recent Developments in Accelerometer Design", "Briel & Kjaer Technical Review", n° 2, pp. 1-22, 1987.
- /37/. Thrane, N., "The Discrete Fourier Transform and FFT Analysers", "Briel & Kjaer Technical Review", n° 1, pp. 3-25, 1979.
- /38/. "SDRC Modal Analysis User Manual 9.0", General Electric CAE International Inc., Mildford - OH, USA, 1990.
- /39/. Allemang, R. J., Brown, D. L., "Coefficient for Modal Vector Analysis", 1<sup>st</sup> IMAC, "Proceedings of the 1<sup>st</sup> International Modal Analysis Conference", pp.110-116, USA, 1983.
- /40/. Lieven, N. A. J., Ewins, D. J., "Spatial Correlation of Mode Shapes, the Coordinate Modal Assurance Criterion (COMAC), 6<sup>th</sup> IMAC, "Proceedings of the 6<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference", pp. 690-695, USA, 1988.
- /41/. Heylon, W., Janter, T., "Extensions of the Modal Assurance Criterion", "Journal of Vibration and Acoustics", Vol. 112, pp. 468-472, 1990.
- /42/. Harris, C. M., "Shock and Vibration Handbook", McGraw-Hill International Editions, New York - NY, USA, 1988.

APÊNDICE - 1

TRANSFORMADAS DE LAPLACE E FOURIER

(1) Propriedades da Transformada de Laplace:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (\text{A1.1})$$

$$sF(s) - f(0) = \mathcal{L}\{f'(t)\} \quad (\text{A1.2})$$

$$s^2F(s) - sf(0) - f'(0) = \mathcal{L}\{f''(t)\} \quad (\text{A1.3})$$

$$\frac{1}{s} F(s) = \mathcal{L}\left\{ \int_0^t f(x) dx \right\} \quad (\text{A1.4})$$

$$F(s - a) = \mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} \quad (\text{A1.5})$$

$$e^{-bs} F(s) = \mathcal{L}\{f(t - b)\} \quad (\text{A1.6})$$

$$F^{(n)}(s) = \mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\} \quad (\text{A1.7})$$

$$\int_0^{\infty} F(x) dx = \mathcal{L}\left\{ \frac{f(t)}{t} \right\} \quad (\text{A1.8})$$

$$F_1(s) F_2(s) = \mathcal{L}\left\{ \int_0^t f_1(t-z) f_2(z) dz \right\} \quad (\text{A1.9})$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s) ds = f(t) \quad (\text{A1.10})$$

(2) Propriedades da Transformada de Fourier:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (\text{A1.11})$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) e^{i2\pi ft} df \quad (\text{A1.12})$$

$$\frac{1}{|k|} h\left(\frac{t}{k}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(kf) e^{i2\pi ft} df \quad (\text{A1.13})$$

$$e^{-i2\pi ft_0} H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-t_0) e^{-i2\pi ft} dt \quad (\text{A1.14})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(f-f_0) e^{i2\pi ft} dt = e^{i2\pi ft_0} h(t) \quad (\text{A1.15})$$

$$H(f)X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t-\tau) x(\tau) e^{i2\pi f\tau} d\tau \quad (\text{A1.16})$$

APÊNDICE - 2  
SINAIS RANDÔMICOS

A resposta de um sistema dinâmico a uma dada excitação randômica é também um fenômeno randômico, sendo este descrito em termos de certas médias, de forma que a excitação e a resposta sejam descritas em termos de probabilidades de ocorrência.

Um histórico temporal individual  $x_k(t)$ , descrevendo um fenômeno randômico é denominado função amostra, com a variável  $x_k$  sendo denominada variável randômica. O conjunto de todos os históricos temporais que possam resultar do experimento é conhecido como processo randômico ou estocástico, sendo denotado por  $\{x_k(t)\}$ .

Assumindo um determinado processo randômico formado por  $n$  funções amostra  $x_k(t)$ ,  $k=1, \dots, n$ ; o valor médio do processo no instante  $t=t_1$ , é:

$$u_k(t_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t) \quad (\text{A2.1})$$

Outro tipo de média é obtido somando-se o produto dos valores instantâneos das funções amostra em dois instantes de tempo ( $t_1$  e  $t_1+\tau$ ), dividindo o resultado pelo número de funções amostra. Obtém-se assim o valor esperado, denominado função auto-correlação, sendo dado por:

$$R_{xx}(t_1, t_1+\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t) x_k(t_1+\tau) \quad (\text{A2.2})$$

As médias obtidas anteriormente, em geral, requerem um grande número de funções amostra, mas sob certas condições, é possível obter o mesmo valor médio e a mesma função auto-correlação para um processo randômico  $\{x_k(t)\}$ , usando uma única função amostra "representativa" e calculando a média no tempo  $t$ . Estas médias temporais são dadas por:

$$u_k(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_k(t) dt \quad (\text{A2.3})$$

$$R_{xx}(k, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_k(t) x_k(t+\tau) dt \quad (\text{A2.4})$$

Caso o processo randômico  $\{x_k(t)\}$  seja estacionário, e o valor da média temporal  $u_k(k)$  e da função auto-correlação  $R_{xx}(k, \tau)$  sejam iguais, independentemente do histórico temporal  $x_k(t)$  sobre o qual estas médias são calculadas, diz-se que o processo é ergódico. Para tais processos, vem:

$$u_x(k) = u_x = \text{cte.} \quad \text{e} \quad R_{xx}(k, \tau) = R_{xx}(\tau) \quad (\text{A2.5})$$

A hipótese de ergodicidade permite o uso de uma única função amostra para calcular as médias que descrevem o processo randômico ao invés de se ter que usar todo o conjunto. Logo, a função amostra escolhida deve representar o processo randômico inteiro. Em vista deste fato, o índice  $k$  que identifica um dado histórico temporal pode ser ignorado.

A função auto-correlação fornece informação relativa às propriedades de uma variável randômica no domínio temporal. A

função densidade espectral de potência fornece informações similares no domínio de frequência.

Seja a função amostra  $f(t)$  de um processo randômico ergódico  $\{f(t)\}$ . Define-se a sua função auto-correlação como:

$$R_{ff}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) f(t+\tau) dt \quad (\text{A2.6})$$

A função densidade espectral de potência,  $S_{ff}(\omega)$  é definida como a transformada de Fourier de  $R_{ff}(\tau)$ :

$$S_{ff}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ff}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (\text{A2.7})$$

$$\text{ou } R_{ff}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (\text{A2.8})$$

Definições similares podem ser aplicadas a um par de funções amostra,  $x(t)$  e  $f(t)$ , de um processo ergódico, de forma a gerar as funções correlação cruzada e a densidade espectral de potência associada, isto é:

$$R_{xf}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) f(t+\tau) dt \quad (\text{A2.9})$$

$$S_{xf}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xf}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = S_{fx}^*(\omega) \quad (\text{A2.10})$$

Partindo-se da definição da função auto-correlação  $R_{xx}(\tau)$  para um sinal de resposta  $x(t)$ , através de manipulações matemáticas, é possível descrevê-la em termos da função correspondente para a excitação,  $R_{ff}(\tau)$ , sendo o resultado expresso na forma de uma integral tripla. Entretanto, esta mesma expressão pode ser transformada para o domínio de frequência, via transformada de Fourier, resultando:

$$S_{xx}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{ff}(\omega) \quad (\text{A2.11})$$

Esta equação não fornece uma descrição completa das condições do processo randômico. Também é notado que tal relação não pode ser utilizada para determinar as curvas de FRF a partir dos sinais de excitação e resposta, fornecendo apenas informações sobre a magnitude de  $H(\omega)$ . Uma outra equação pode ser derivada através de um procedimento similar para a função correlação cruzada entre os sinais de excitação e resposta; sendo que no domínio de frequência vem:

$$S_{fx}(\omega) = H(\omega) S_{ff}(\omega) \quad (\text{A2.12})$$

$$\text{ou} \quad S_{xx}(\omega) = H(\omega) S_{xf}(\omega) \quad (\text{A2.13})$$

A análise descrita acima pode ser estendida para situações nas quais várias excitações sejam aplicadas simultaneamente, independentemente do fato de estarem correlacionadas ou não entre si. Tal análise envolve não só o auto-espectro de todas as excitações, mas também os respectivos espectros cruzados. A equação geral para a relação entrada/saída

é expressa por:

$$[S_{xx}(\omega)] = [S_{ff}(\omega)] [H(\omega)] \quad (A2.14)$$

As equações (A2.12) e (A2.13) fornecem a base para um método que determine as FRF's do sistema mecânico a partir de medidas e análise de testes utilizando excitação randômica. Desta forma vem:

$$H_1(\omega) = \frac{S_{fx}(\omega)}{S_{ff}(\omega)} \quad (A2.15)$$

$$H_2(\omega) = \frac{S_{xx}(\omega)}{S_{xf}(\omega)} \quad (A2.16)$$

Pelo fato de se ter analisado diferentes sinais na derivação das duas estimativas para  $H(\omega)$ , deve-se esperar que estas não sejam idênticas. Expressa-se o grau de diferenciação existente entre tais grandezas através de uma relação denominada coerência ou função coerência, sendo dada por:

$$\gamma^2 = \frac{H_1(\omega)}{H_2(\omega)} \leq 1,0 \quad (A2.17)$$

Caso o ensaio seja perfeito, a coerência é igual a um, sendo esta a condição ideal. Porém, a coerência pode ser diferente da unidade, sendo necessário estabelecer as eventuais fontes de interferência e então determinar a forma correta da FRF, para a partir desta gerar com segurança os parâmetros modais desejados.

### APÊNDICE - 3

#### CARACTERÍSTICAS DOS ENSAIOS

Os acelerômetros utilizados nos ensaios foram numerados de 2 a 8 e o transdutor de força foi associado ao número 1. Tais associações numéricas possibilitaram a correspondência direta entre transdutor e canal de aquisição. As características dos transdutores utilizados são mostradas na tabela A3.1; sendo que para o caso do transdutor de força, foram utilizados dois transdutores distintos: um acoplado ao martelo de impacto (1,000 pC/m/s<sup>2</sup>) e outro acoplado ao shaker (4,14 pC/m/s<sup>2</sup>).

Transdutor	Sensibilidade (pC/m/s <sup>2</sup> )
TF1	1,000 ou 4,14
AC2	0,986
AC3	1,007
AC4	1,001
AC5	1,004
AC6	1,005
AC7	1,012
AC8	1,002

Tabela A4.1- Característica dos transdutores utilizados no ensaio.

Nos primeiros testes realizados com a barra de seção retangular e com o pórtico, utilizaram-se as seguintes características de regulagem nos amplificadores de carga e no sistema GenRad (gerador de sinais):

(a) Barra de seção retangular:

Excitação: Transiente, via martelo de impacto (1 massa, ponta plástica), ponto 6, direção X, sentido negativo.

Faixa de frequência de 0 a 1024 Hz (análise).

Número de médias igual a 30.

Tipo de janelamento: retangular

Acelerôm.: Ganho = 10 mV/m/s<sup>2</sup> (100 mV/m/s<sup>2</sup>)

Filtro passa baixa = 2 Hz

Filtro passa alta = 1 KHz

Fundo de escala nos canais = 8 V ( 4 V ).

Posição dos Acelerômetros: 1X+, 2X+, 3X+, 4X+, 5X+, 6X+, 7X+

8X-, 9X-, 10X-, 11X-, 12X-, 13X-, 14X-

28X+, 27X+, 26X+, 25X+, 24X+, 23X+, 22X+

(b) Pórtico:

Excitação: Transiente, via martelo de impacto (2 massas, ponta plástica), ponto 15, direção Z, sentido negativo.

Faixa de frequência de 0 a 1024 Hz (análise).

Número de médias igual a 30.

Tipo de janelamento: retangular.

Acelerôm.: Ganho do transdutor de força = 3,16 mV/m/s<sup>2</sup>

Ganho dos acelerômetros = 100 mV/m/s<sup>2</sup>

Filtro passa baixa = 2 Hz

Filtro passa alta = 1 KHz

Fundo de escala: TF = 8V, AC = 4V.

Posição dos acelerômetros: 8Z-, 9Z-, 10Z-, 11Z-, 12Z-, 13Z-, 14Z-

15Z-, 16Z-, 17Z-, 18Z-, 19Z-, 20Z-, 21Z-

22Z-, 23Z-, 24Z-, 25Z-, 26Z-, 27Z-, 28Z-

Mantendo as demais características, alterou-se ainda o ponto de excitação e os pontos de coleta de resposta para:

Excitação: ponto 17, direção Y, sentido negativo.

Posição dos acelerômetros: 22X+,23X+,24X+,25X+,26X+,27X+,28X+  
15Y+,16Y+,17Y+,18Y+,19Y+,20Y+,21Y+  
8X-,9X-,10X-,11X-,12X-,13X-,14X-  
15X-,21X+.

Repetiram-se as medidas realizadas com o martelo de impacto como fonte excitadora da barra de seção retangular, excitando um a um todos os sete pontos discretizados para esta estrutura, obtendo assim 49 FRF's dado que são sete os pontos de coleta de resposta.

Em seguida, inicializou-se a etapa de medição utilizando o shaker como fonte excitadora. Os sinais de resposta não foram tomados na forma de aceleração e sim como sinais de velocidades, realizando para tanto uma integração eletrônica através dos amplificadores de carga de cada canal de resposta. As FRF's obtidas se apresentaram assim, sob a forma de mobilidades.

Todos os pontos da barra de seção retangular foram utilizados como pontos de excitação, excetuando-se o ponto 1X- (ponto inferior) devido à limitação espacial para alojamento do cabo de alimentação do shaker e sua mangueira de refrigeração. Obteve-se assim, mais 42 FRF's mobilidades. As características de medição foram:

Excitação: Randômica, via shaker, sinal de saída = 0,08 V.

Pontos utilizados: 2X-, 3X-, 4X-, 5X-, 6X-, 7X-

Faixa de frequência de 0 a 1024 Hz (análise).

Número de médias = 100

Tipo de janelamento = hanning

Resposta: Ganho do TF = 1000 mV/N

Ganho dos acelerômetros = 100 mV/m/s

Sensibilidade do TF = 4,14 pC/N

Filtro passa baixa = 10 Hz

Filtro passa alta = 1 KHz

Fundo de escala: TF = 8 V, AC = 1 V.

Para avaliar as propriedades do pórtico no plano XY e no plano perpendicular YZ, excitou-se a barra de seção retangular e coletaram-se as respostas no pórtico, verificando assim a existência de modos acoplados barra-pórtico. A excitação foi novamente através do shaker. Desta forma, tem-se:

Excitação: Randômica, via shaker, sinal de saída = 0,08 V

Ponto 5, direção X, sentido negativo.

Faixa de frequência de 0 a 1024 Hz (análise).

Número de médias = 100

Tipo de janelamento = hanning.

Resposta: Ganho do TF = 100 mV/m/s<sup>2</sup>

Ganho dos acelerômetros 2 a 7 = 100 mV/m/s

Ganho do acelerômetro 8 = 316 mV/m/s

Filtro passa baixa = 2 Hz (TF), 10 Hz (AC's)

Filtro passa alta = 1 KHz

Fundo de escala: TF = 8 V , AC = 1 V.

Posição dos acelerômetros: 1X+, 2X+, 3X+, 4X+, 5X+, 6X+, 7X+

15Z-, 16Z-, 17Z-, 18Z-, 19Z-, 20Z-, 21Z-

15Y+, 16Y+, 17Y+, 18Y+, 19Y+, 20Y+, 21Y+

15X-, 21X+.

Sendo que para as medidas realizadas no pórtico, os amplificadores de carga tiveram seus ganhos alterados:

Transdutor de força: Ganho = 31,6 mV/m/s<sup>2</sup>

Fundo de escala (GenRad) = 8 V.

Acelerômetros: Ganho = 316 mV/m/s<sup>2</sup>

Fundo de escala = 0,25 V (#2,7,8)

0,5 V (#3,4,5,6).

Sinal de saída do shaker = 0,05 V.

Quando se visualizou as formas das FRF's medidas para o pórtico, com as respostas na direção Z, verificou-se a existência de vários picos em baixas frequências; assim sendo, realizaram-se novas medidas com as seguintes características (as demais permanecendo inalteradas):

Faixa de frequência = 0-256 Hz.

Ponto de excitação = 5X-.

Pontos de resposta = 15Z-,16Z-,17Z-,18Z-,19Z-,20Z-,21Z-

Nas medidas realizadas com as varetas combustíveis protótipo, preenchidas ou não com as pastilhas de chumbo, foram utilizados apenas dois canais: um de excitação (martelo de impacto) e um de resposta (acelerômetro Bruel & Kjaer 4393).

(c) Vareta combustível protótipo sem preenchimento:

Faixa de frequência: 0-1024 Hz

Acelerômetro: sensibilidade = 0,316 pC/m/s<sup>2</sup>

ganho do amplificador = 1 mV/m/s<sup>2</sup>

fundo de escala (GenRad) = 2 V

Transdutor: sensibilidade = 1,00 pC/m/s<sup>2</sup>

ganho do amplificador = 31,6 mV/N

fundo de escala (GenRad) = 2 V

Filtro passa baixa = 2 Hz

Filtro passa alta = 1 KHz.

Ponto de excitação = ponto 1, direção X, sentido negativo.

Ponto de resposta = 6X+, 5X+, 4X+, 3X+, 2X+, 1X+.

(d) Vareta combustivel com pastilhas de chumbo, h= 20 mm:

Faixa de frequência: 0-128 Hz

Filtro passa baixa: 2 Hz

Filtro passa alta: 1 KHz

Fundo de escala (acelerômetro) = 8 V

(transdutor) = 8 V

Ganho no amplificador (transdutor) = 1 mV/N

(e) Estrutura formada por um feixe de tubos acoplados por espaçadores rígidos:

Excitação: randômica (shaker), sinal de saída de 0,02V

pontos 16X+ e 43X+

Faixa de frequência (análise): 0-511 Hz.

Número de médias = 50

Tipo de janelamento: Hanning

Acelerômetro, ganho = 100 V/m/s

Transdutor de força, ganho = 1 V/N

Filtro passa baixa = 10 Hz, filtro passa alta = 1 KHz

Pontos de Resposta: 2X+, 3X+, 4X+, 5X+, 6X+, 7X+, 8X+

42X+, 43X+, 44X+, 45X+, 46X+, 47X+, 48X+

12X+, 13X+, 14X+, 15X+, 16X+, 17X+, 18X+

22X-, 23X-, 24X-, 25X-, 26X-, 27X-, 28X-

52X-, 53X-, 54X-, 55X-, 56X-, 57X-, 58X-

32X-, 33X-, 34X-, 35X-, 36X-, 37X-, 38X-.