

# FORMULAÇÃO MATEMÁTICA PARA CARACTERIZAÇÃO DA CONFIGURAÇÃO GEOMÉTRICA DE COMPONENTES E SISTEMAS ESTRUTURAIS PLANOS EM REATORES NUCLEARES

Eric Robalinho\* e Luciano M. Bezerra\*\*

\*IPEN/CNEN

Travessa R, 400, Cidade Universitária  
05508-900, São Paulo, SP, Brasil  
e-mail: erobalin@gaivota.ipen.br

\*\*Universidade de Brasília-UnB  
Departamento de Engenharia Civil  
70910-900, Brasília, DF, Brasil  
e-mail: lmbz@guarany.cpd.unb.br

## ABSTRACT

O Método dos Elementos de Contorno (BEM-Boundary Element Method) é utilizado para o estudo e caracterização ótima de componentes e sistemas estruturais planos. Esta caracterização é obtida com a análise de mapa de tensões nos pontos internos e de contorno, via método de otimização quasi-Newtoniano. A geometria inicial é modificada para otimizar os valores de tensões na estrutura, segundo valores de referência especificados. Mudanças nas geometrias de contorno geram nova solução numérica, em termos de tensão, na aplicação do BEM. Após a otimização das tensões, os deslocamentos, deformações e tensões em qualquer ponto interno ou da superfície do corpo podem ser conhecidos. A aproximação é feita com elementos quadráticos e com cálculo das sensibilidades da função de tensões limitado ao campo elástico. A discretização apenas do contorno de sistemas estruturais contrasta com o Método dos Elementos Finitos (FEM-Finite Element Method) e com o Método das Diferenças Finitas (FDM-Finite Differences Method), onde há discretização do contínuo e atualização laboriosa da malha para cada passo do algoritmo.

## I - INTRODUÇÃO

**Da Energia Nuclear.** Baseando-se nas estatísticas mais recentes do Conselho Mundial de Energia, a referência [1] conclui que "a extrapolação das tendências atuais de consumo de energia para os próximos 15-20 anos é alarmante, prevendo-se drástica redução no fornecimento de petróleo e gás natural." Os combustíveis fósseis devem permanecer como a principal fonte de energia até o ano 2.000 e algo além, mas é provável que não mais consiga prover a maior parte da energia necessária para o século

XXI - principalmente se o dano ambiental causado por fatores como a concentração de dióxido de carbono na atmosfera limitar o seu uso. Contudo, a estimativa de estabilização da população mundial é de 10 bilhões de pessoas, por volta do ano 2.075. Isto significa que haverá necessidade de 30 TW de energia antes do ano 2.100. Como pode o mundo atender às necessidades de uma economia de 30 TW (ou 3.000 W per capita)? [2,3,4]. A energia nuclear (fissão) deve sustentar cerca de metade do crescimento da demanda de energia elétrica até o ano 2.000 e ser a fonte mais barata de eletricidade para o

próximo século, sem que as reservas de urânio ou a capacidade mundial para o seu enriquecimento ponham qualquer restrição ao crescimento dessa forma de energia. Existem presentemente cerca de quatrocentas usinas nucleares em todo o mundo. A França atende a 71% de sua demanda energética usando os 37,5 GW de capacidade nuclear nela instalados [2]. Há, contudo, uma preocupação dos projetistas de centrais nucleares com o aumento da vida das centrais já existentes, considerando-se o ritmo atual de construção de novas usinas, muito pequeno se comparado com o das últimas décadas. Esta preocupação se concretiza através do desenvolvimento de técnicas mais apuradas de projeto, com a otimização dos projetos estruturais de centrais nucleares. Entendemos que a otimização de componentes pode influir no preço do MWh nuclear e como consequência tornar a energia nuclear mais competitiva. Este tipo de fonte de energia talvez seja uma boa solução para os problemas energéticos da região sudeste do Brasil, tendo em vista o quase esgotamento das fontes disponíveis, como as hidrelétricas. O processo de otimização deve, entretanto, obedecer critérios de segurança internacionais, além de reduzir os preços dos equipamentos.

**Da Otimização.** Um problema de otimização começa com um conjunto de variáveis independentes, ou parâmetros, e frequentemente inclui condições ou restrições que definem valores aceitáveis para estas variáveis. Outra componente essencial de um problema de otimização é a chamada função objeto, que depende de alguma maneira daquelas variáveis. A solução de um problema de otimização é um conjunto de valores aceitáveis para as variáveis, para os quais a função objeto assume um valor ótimo. Em termos matemáticos, otimização está relacionada com maximização ou minimização[5]. No século XVIII, Euler escreveu que "todas as coisas neste Universo contém alguma lei de maximização ou minimização"[6].

Problemas em todas as áreas da matemática, ciências aplicadas, engenharia, economia, medicina, e estatística podem ser formulados em termos de otimização. Em particular, modelos matemáticos são muitas vezes desenvolvidos para análise e compreensão de fenômenos complexos. A otimização é usada para determinação da forma e características do modelo que mais se aproxima da realidade. Portanto, muitos algoritmos de tomada de decisão envolvem a solução explícita do problema de otimização para que se tenha condições de encontrar a escolha ótima[5].

## II - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Muitos problemas ligados à engenharia estrutural envolvem otimização. Por exemplo, qual o valor ideal para o raio de concordância entre dois elementos estruturais, a fim de que se utilize a máxima capacidade de resistência da estrutura com o mínimo possível de material, e com um nível de tensão aceitável? (Fig.1) Outro exemplo: qual seria a configuração ideal de um suporte para um determinado componente nuclear? As respostas para tais perguntas seriam de grande ajuda para um engenheiro projetista de centrais nucleares. Seria também conveniente que essas respostas fossem obtidas de forma quase que instantânea.

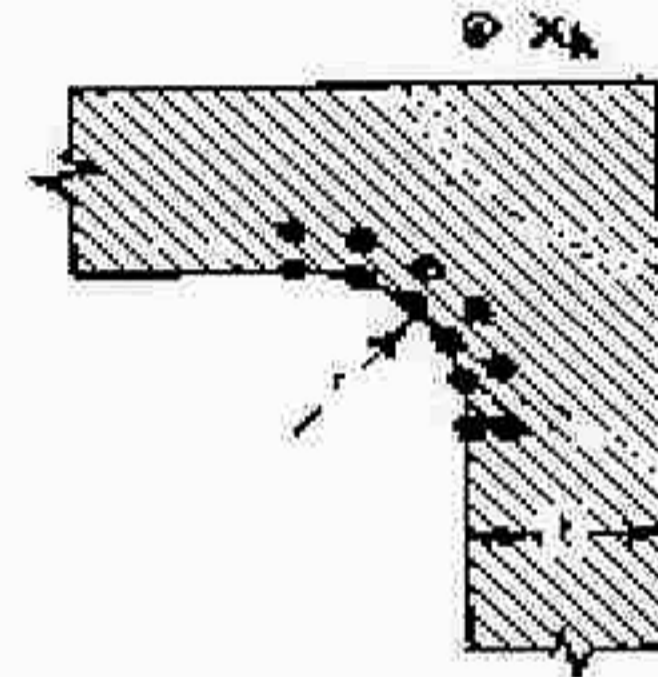


Figura 1. Região de alta concentração de tensões.  $x_k$  : pontos de referência.

Este trabalho pretende descrever uma formulação básica de otimização de estruturas utilizando um *approach* numérico. O problema a ser resolvido pode ser formulado como segue. Suponha que  $\Omega$  seja o lugar no espaço de todos os pontos que definem determinada estrutura ou objeto (por exemplo, um gerador de vapor). Suponha ainda que as tensões em determinados pontos do domínio  $\Omega$  devam ter valores pré-estabelecidos ou o mais próximo possível destes valores. A equação em campo elástico e com regime de carregamento estático que descrevem este problema poderiam ser escritas como

$$\sigma_{ij,j}(x) = -b_j(x) \quad ; \forall x \in \Omega \quad (1)$$

$$\sigma_{ij}(x) = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{ll}(x) + 2\mu \varepsilon_{ij}(x) \quad ; \forall x \in \Omega \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij}(x) = \frac{1}{2} [u_{i,j}(x) + u_{j,i}(x)] \quad ; \forall x \in \Omega \quad (3)$$

$$\sigma_{ij}(y) n_j(y) = \bar{t}_i \quad ; \forall y \in \Gamma_1 \quad (4)$$

$$u_i(y) = \bar{u}_i \quad ; \forall y \in \Gamma_2 \quad (5)$$

$$\varphi_{ik} = \hat{\varphi}_{ik} = \hat{\varphi}_i(x_k) \quad ; x_k \in \Omega^* \quad (6)$$

A equação (1) corresponde à equação de equilíbrio com  $x \in \Omega$ ;  $\Omega$  é o conjunto dos pontos que definem o domínio do sólido;  $\sigma_{ij}$  é o tensor de tensões;  $i, k, l = 1, 2$  para o plano elástico;  $b_j$  são as forças de corpo. A equação (2) representa a lei de Hooke;  $\epsilon_{ij}$  é o tensor de deformações;  $\lambda$  e  $\mu$  são as constantes de Lamé;  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker. A equação (3) relaciona pequenas deformações com deslocamentos  $u_i$ . As equações (4) e (5) descrevem as condições de contorno em termos das trações  $\bar{t}_i$  e dos deslocamentos  $\bar{u}_i$  nos pontos  $y$ ;  $y \in \Gamma$ , com  $\Gamma$  denotando o conjunto de pontos que definem a superfície de fronteira do sólido ( $\Gamma \subset \Omega$ );  $n_j$  representa as normais externas da fronteira  $\Gamma$ . A barra ( $\bar{\quad}$ ) denota condições de contorno pré-estabelecidas. A equação (6) representa os dados experimentais observados na direção  $i$ , no ponto  $k$ .

Uma das formas de otimizar um componente nuclear, em relação aos valores de referência, é escrever uma função residual [7] que calcule a diferença entre a resposta calculada da estrutura - em termos de tensão e segundo uma configuração geométrica assumida no projeto - e as tensões especificadas nos pontos de referência. Em geral, podemos escrever esta função residual como

$$f(z) = [|Az - \hat{\varphi}|^q]^{1/q}; q \geq 1 \quad (7)$$

onde  $z^T = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  são as variáveis de projeto;  $\varphi = Az$  é o modelo original;  $\hat{\varphi}$  são os dados experimentais (dados de referência ou dados observados). O valor de  $q$  depende do tipo de métrica [8] empregada na determinação do resíduo.

A minimização utilizando a norma Euclidiana ( $q=2$ ) é geralmente aplicada. Neste trabalho usaremos  $q=2$ . Para o caso bidimensional, podemos escrever

$$f(z) = w \sum_{k=1, m} \sum_{i=1, 2} (\varphi_{ik} - \hat{\varphi}_{ik})^2 \quad (8)$$

onde  $w$  é o parâmetro que pondera a função residual no processo de minimização;  $\varphi_{ik}$  são os valores calculados de tensões, na direção  $i$ , no ponto  $k$ ;  $i = 1, 2$  corresponde às direções  $x$  e  $y$ , respectivamente;  $\hat{\varphi}_{ik}$  são os valores obtidos experimentalmente.

### III - MÉTODO ALTERNATIVO NO CÁLCULO DA RESPOSTA ESTRUTURAL

Nas últimas décadas o uso de métodos numéricos em computadores digitais têm possibilitado aos engenheiros projetistas resolver uma variedade de problemas estruturais complexos e até mesmo prolongar a vida útil (via estudos de integridade estrutural) de muitas centrais nucleares. O método numérico mais largamente usado pelos engenheiros estruturais é o Método dos

Elementos Finitos (FEM - Finite Element Method). Nos últimos 20 anos um importante método numérico conhecido como Método dos Elementos de Contorno (BEM - Boundary Element Method) vem sendo gradualmente desenvolvido e incorporado como uma ferramenta numérica alternativa para o cálculo de tensões em componentes de centrais nucleares [7]. Neste artigo, o Método dos Elementos Finitos será incorporado a esquemas de otimização (seção IV). Antes porém, é importante ressaltar as vantagens e desvantagens deste método alternativo em relação a outros métodos numéricos disponíveis.

A grande desvantagem do Método dos Elementos de Contorno é a complexidade matemática do método. Este artigo enfoca estas complexidades, trazendo de forma sucinta uma discussão sobre as principais dificuldades matemáticas do método, quando utilizado em esquemas de otimização. Apesar desta desvantagem, o BEM possui atributos extremamente positivos para sua aplicação em esquemas de otimização, principalmente de partes robustas (espessas) de componentes nucleares. O BEM é um método com equações integrais de contorno (Boundary Integral Equations - BIE). A formulação aparece portanto em integrais no contorno. No domínio temos somente as forças de massa. Se as forças de massa forem aproximadas por forças de superfície ou forem desprezíveis, então as integrais no domínio podem ser abandonadas. A grande vantagem do BEM é a redução, por um, da dimensionalidade do problema. Isto é, problemas com geometria tipicamente tridimensional, massivos, podem ser reduzidos a integrais de área. Já os problemas bidimensionais podem ser reduzidos a integrais de linha. Portanto o BEM usa apenas a discretização do contorno das estruturas. O Método dos Elementos Finitos discretiza todo o interior dos objetos. A discretização processada só no contorno dos equipamentos gera sistemas de equações com menor grau de liberdade. Em métodos numéricos geralmente ter sistemas com menor grau de liberdade significa ter maior estabilidade numérica nos processos de solução [9]. Uma outra vantagem do uso do BEM em esquemas de otimização de forma (shape optimization) é que tais esquemas requerem uma contínua atualização da forma, ou malha (na linguagem dos objetos discretizados). A discretização somente no contorno dos objetos torna este processo de atualização uma tarefa mais simples. Portanto, o uso do BEM em problemas de otimização reduz enormemente os problemas de geração e de atualização de malha, associados com a evolução das formas. Finalmente, o cálculo dos deslocamentos e das tensões com o BEM é mais preciso que com o FEM. Isto se dá porque no BEM as soluções analíticas (isto é, funções de Green) da equação diferencial associada ao problema fazem parte da solução numérica, enquanto no

FEM os campos de deslocamento são, geralmente, funções polinomiais admitidas.

#### IV - MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Neste trabalho iremos adotar os conceitos do BEM referentes a um corpo de duas dimensões[7]. Consideremos um corpo bidimensional, isotrópico e homogêneo; com domínio  $\Omega$  e contorno  $\Gamma$  (Fig.2). O estado de equilíbrio deste corpo é representado por  $\sigma_{ik}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $u_i$ ,  $t_i$  e  $b_i$ . Assumimos que este mesmo corpo está sob outro estado de equilíbrio, definido por  $\sigma_{ik}^*$ ,  $\varepsilon_{ij}^*$ ,  $u_i^*$ ,  $t_i^*$  e  $b_i^*$ . Nestas condições, temos o Teorema do Princípio Virtual

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega \quad (9)$$

A integração por partes desta equação, desprezando-se as forças de massa, nos leva ao princípio de Somigliana, que pode ser escrito como

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma} [u_{ij}^*(\xi, x) t_j(x) d\Gamma(x)] - \int_{\Gamma} [t_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x)] \quad (10)$$

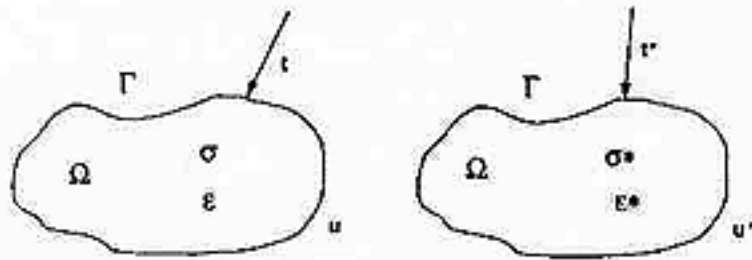


Figura 2. Corpo bidimensional com domínio  $\Omega$  e contorno  $\Gamma$ .

As soluções fundamentais [10,11] para a equação (10) são:

$$u_{ij}^*(\xi, x) = c_1 (c_2 \delta_{ij} \log R - Y_i Y_j / R^2) \quad (11)$$

$$t_{ki}^* = (c_3 / R^2) [c_4 (n_k Y_i - n_i Y_k) + (c_4 \delta_{ik} + 2Y_i Y_k / R^2) Y_j n_j] \quad (12)$$

onde

$$\mu = E/2(1 + \nu) \quad (13)$$

$$c_1 = -1/8\pi\mu(1 - \nu) \quad (14)$$

$$c_2 = 3 - 4\nu \quad (15)$$

$$c_3 = -1/4\pi(1 - \nu) \quad (16)$$

$$c_4 = 1 - 2\nu \quad (17)$$

$\nu$  é o coeficiente de Poisson;  $\mu$  é o módulo de cisalhamento;  $E$  é o módulo de Young. O termo  $Y_i = x_i - \xi_i$  é a distância entre o ponto de carregamento  $x_i$  da fronteira e o ponto  $\xi_i$ ;  $R^2 = Y_i Y_i$ ;  $n_i$  são os vetores normais externos da fronteira  $\Gamma$ . Através de manipulações algébricas obtemos as tensões para qualquer ponto do domínio

$$\sigma_{ij}(\xi) = \int_{\Gamma} [\varepsilon_{ijk}^*(\xi, x) t_k(x) - \sigma_{ijk}^*(\xi, x) u_k(x)] d\Gamma(x) \quad (18)$$

$u_k$  e  $t_k$  são valores de contorno, e são grandezas complementares.  $u_{ijk}^*(\xi, x)$  e  $t_{ijk}^*(\xi, x)$  são soluções fundamentais em deslocamentos e tensões. As expressões dos kernels destas duas soluções fundamentais são encontradas, por exemplo, em [10,11].

Introduzimos as seguintes discretizações: uma discretização na geometria ( $x$ ), no campo de deslocamentos ( $u$ ) e no campo de trações ( $t$ ),

$$x_j(\zeta) = \sum_{i=1,3} h^{(i)}(\zeta) x_j^{(i)} \quad (19)$$

$$u_j(\zeta) = \sum_{i=1,3} h^{(i)}(\zeta) u_j^{(i)} \quad (20)$$

$$t_j(\zeta) = \sum_{i=1,3} h^{(i)}(\zeta) t_j^{(i)} \quad (21)$$

onde  $x_j^{(i)}$  são as coordenadas cartesianas ( $x, y$  no plano), que definem a geometria;  $u_j^{(i)}$  são os deslocamentos nodais;  $t_j^{(i)}$  são as trações nodais;  $h^{(i)}(\zeta)$  são as funções quadráticas de interpolação, na coordenada  $\zeta$ :

$$h^{(1)}(\zeta) = (2\zeta - 1)(\zeta - 1) \quad (22)$$

$$h^{(2)}(\zeta) = -4\zeta(\zeta - 1) \quad (23)$$

$$h^{(3)}(\zeta) = \zeta(2\zeta - 1) \quad (24)$$

Substituindo as expressões de discretização em (10), teremos um sistema de equações matriciais com os deslocamentos nodais  $u_j^{(i)} \in \{U\}$  de um dos lados da igualdade, e as trações nodais  $t_j^{(i)} \in \{T\}$  do outro lado. Obtemos finalmente a clássica equação dos elementos de contorno em elastostática.

$$[F] \{U\} = [G] \{T\} \quad (25)$$

Onde os elementos das matrizes  $[F]$  e  $[G]$  são

$$G_{pq} = \sum_{k=1, Ne} \int_{-1}^{+1} [u_{ij}^*] [h] J d\zeta \quad (26)$$

$$F_{pq} = \sum_{k=1, Ne} \int_{-1}^{+1} [t_{ij}^*] [h] J d\zeta \quad (27)$$

Os índices  $p$  e  $q$  representam os nós e os elementos, respectivamente;  $N_e$  é o número total de elementos da malha;  $F_{pq}$  e  $G_{pq}$  são os coeficientes relativos à interação do nó  $q$  com todos os demais nós da fronteira do corpo. As integrações das equações (26) e (27) são feitas por quadratura de Gauss. A natureza dos kernels para planos elásticos dá origem a singularidades quando operamos as integrações. Estas singularidades aparecem quando  $x_i = \xi_i$ ; ou seja, quando o ponto de integração coincide com o ponto de carregamento, tornando os kernels nas equações (26) e (27) singulares. Os termos  $\log R$  e  $Y_i Y_j / R^2$  que aparecem no kernel  $G_{pq}$  originam singularidades fracas e são comuns quando operamos as integrações. Os termos  $Y_i Y_j / R^s$ , para  $s \geq 3$ , que aparecem em  $F_{pq}$ , originam singularidades fortes e devem ser interpretados como valores limites da integral [10]. Singularidades fortes também aparecem nos termos da diagonal da matriz [F] e são eliminados com a técnica de movimento de corpo-rígido, transformando a equação (25) em

$$[F] \{l_i\} = \{0\} \quad (28)$$

onde  $\{l_i\}$  é um vetor que define o deslocamento rígido de uma unidade, na direção  $l$ .

## V - IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DA OTIMIZAÇÃO

Entre os diversos métodos de minimização do funcional que está definido na seção II (equação (8)), destacamos os métodos quasi-Newtonianos que requerem apenas a primeira derivada da função objeto [9]. O método da métrica variável é um método quasi-Newton e é considerado como um método robusto de otimização [5,12]. Postula-se que a função a ser minimizada possa ser localmente aproximada, em qualquer ponto  $z$ , por uma expansão de Taylor

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(z) = & \mathfrak{J}(\bar{z}) + \sum_i [\partial \mathfrak{J}(\bar{z}) / \partial z_i] (z - \bar{z}) + \\ & + 1/2 \sum_{i,j} [\partial^2 \mathfrak{J}(\bar{z}) / \partial z_i \partial z_j] (z - \bar{z})^2 + \dots \end{aligned} \quad (29)$$

Considerando os termos até 2a. ordem, temos, em notação matricial

$$\mathfrak{J}(z) \approx A - Bz^T + 1/2 zHz^T \quad (30)$$

onde  $z^T$  é a matriz transposta de  $z$ , e os termos  $A$ ,  $B$ , e  $H$  são dados por

$$A \equiv \mathfrak{J}(\bar{z}) \quad (31)$$

$$B \equiv - \{ \partial \mathfrak{J}(\bar{z}) / \partial z_i \} \quad (32)$$

$$H \equiv [ \partial^2 \mathfrak{J}(\bar{z}) / \partial z_i \partial z_j ] \approx \Delta^{-1} \quad (33)$$

A matriz  $A$  é uma constante,  $B$  é o vetor gradiente, e a matriz das segundas derivadas,  $H$ , é chamada matriz Hessiana da função.

Supondo  $z^*$  valor mínimo de  $\mathfrak{J}(z)$ , obtemos, após algumas manipulações algébricas, a equação

$$z^{(k+1)} \approx z^{(k)} - [\Delta^{(k+1)} (\nabla \mathfrak{J}(z^{(k+1)}) - \nabla \mathfrak{J}(z^{(k)}))] \quad (34)$$

O termo entre colchetes na equação (34) é a direção de busca da iteração ( $k$ ), denominado  $S(x^{(k)})$ . As diferentes maneiras de atualização de  $\Delta^{(k+1)}$  sugerem as diversas formulações do método de métrica variável. Essas formulações exibem convergência quadrática e boa estabilidade numérica [13,14].

Utilizaremos a variação proposta por Broyden, Fletcher, Goldfarb e Shanno [5], conhecida por BFGS. Detalhes da formulação e implementação do BFGS são encontrados em [5,12,13,15], entre outros.

Para minimizar a função  $f$  precisaremos ainda das expressões

$$\mathfrak{J}(z) = w \sum_{k=1,m} \sum_{i=1,2} [(\varphi_{ik} - \hat{\varphi}_{ik})^2] + \mathfrak{R} \sum_{j=1,L} \sum_{i=1,p} [1/C_j(z_i)] \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \partial \mathfrak{J}(z) / \partial z = & 2w \sum_{k=1,m} \sum_{i=1,2} (\varphi_{ik} - \hat{\varphi}_{ik}) \partial \varphi / \partial z - \\ & - \mathfrak{R} \sum_{j=1,L} [(1/C_j^2(z)) (\partial C_j(z) / \partial z)] \end{aligned} \quad (36)$$

onde  $\varphi$  são os valores dos deslocamentos, deformações e tensões obtidos numericamente;  $\partial \varphi / \partial z$  representam as sensibilidades dos deslocamentos, deformações e tensões, respectivamente, em relação ao parâmetro  $z$ . Ou seja,  $\partial \varphi / \partial z$  são as derivadas da resposta em relação às variáveis de projeto.  $\mathfrak{R}$  é o parâmetro de penalidade;  $C_j(z_i) \geq 0$  é a forma geral das restrições geométricas, onde  $z_i$  são as componentes do vetor  $z$ . Neste trabalho a determinação destas sensibilidades, em termos de tensão, é feita com o uso do Método dos Elementos de Contorno de forma explícita.

## V - APLICAÇÕES NUMÉRICAS

O programa está sendo implementado na linguagem FORTRAN. Os resultados dos testes feitos nos computadores do IPEN estão sendo tabelados para efeito de observação quanto à compatibilidade relativa ao FEM e aos métodos analíticos da engenharia de estruturas.

## VII - CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentou-se uma formulação teórica para a otimização de estruturas. A implementação desta formulação está sendo desenvolvida no IPEN para aplicações na otimização de componentes nucleares. Foi utilizado o Método dos Elementos de Contorno associado a um método de otimização de métrica variável (variable metric method), especificamente o BFGS, para minimizar a função objeto. Utilizou-se também funções de penalização para considerar as restrições nos valores das variáveis. As sensibilidades da função objeto, quando do uso de métodos quasi-Newtonianos, foram obtidas por integração explícita. Discutiu-se ainda neste artigo as singularidades encontradas nas soluções fundamentais.

## VIII - REFERÊNCIAS

- [1] TOMABECHI, K., "Energy resources in the future", *Fusion Engineering and Design*, 34, 1994.
- [2] McCRORY, Jr., R.L., "Energy Supply and Demand in the Twenty-first Century", *Journal of Fusion Energy*, v.8, n.1/2, 1989.
- [3] CLOUD, P. *El Cosmos, la Tierra y el hombre, Breve História del Universo*, Alianza Editorial, Madrid, 1981.
- [4] KENNEDY, P., *Preparando para o século XXI*, Editora Campos, SP, 1993.
- [5] GILL, P.E. et al, *Practical Optimization*, Academic Press, 1981.
- [6] CLARKE, Frank H., *Optimization and Nonsmooth Analysis*, John Wiley & Sons, 1983.
- [7] BEZERRA, L.M., *Inverse Elastostatics Solutions With Boundary Elements*, PhD Thesis, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, 1993.
- [8] KOLMOGOROV A. N. and S.V. FOMIN, *Introduction to real analysis*, New York, Dover, 1970.
- [9] DORRI B., *Solution of inverse heat conduction problems using boundary integral method*, General Electric CR&D Report, 1987.
- [10] BANERJEE, P.K. and BUTTERFIELD, R., *Boundary Element Methods in Engineering Science*, McGraw-Hill, London, 1981.
- [11] BREBBIA, C.A., TELLES, J.C., WROBEL, L.C., *Boundary Elements Techniques - Theory and Applications in Engineering*, Berlin, Spring-Verlag, 1984.
- [12] FOX, R.L., *Optimization Method for Engineering Design*, Addison-Wesley, Massachusetts, 1971.
- [13] REKLAITIS, G.V., RAVINDRAN, A., RAGSDALL, K.M., *Engineering Optimization- Methods and Applications*, Wiley, New York, 1983.
- [14] FLETCHER, R. and POWELL, M.J.D., "A rapid convergent descent method for minimization", *Comput.J.*6, 163-168, 1963.
- [15] PRESS, W.H., FLANNERY, B.P., TEUKOLSKY, S.A., VETTERLING, W.T., *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, New York, 1986.

## ABSTRACT

The Boundary Element Method (BEM) is presented for the study and optimum characterization of planar structural components and systems. This characterization is obtained by the analysis of stress maps, applying quasi-Newton optimization method. The initial geometry is modified to match specified stresses on the structure. Changes in the boundary geometry configuration originate a new stress solution in boundary element framework. After the optimization in terms of stress, the displacement, strain and stress fields at the boundary of or inside the body can be known. The boundary element approximation is done with quadratic elements and with the calculation of the stress function's sensitivities, in the elastic field. Boundary discretization of the structural systems is a good alternative in front of the Finite Element Method and Finite Differences Method. Those methods require the complete remeshing of the object at each iteration, making the procedure computationally expensive and cumbersome.