

BR7704202



**PROBLEMA DE MILNE EM DOIS SEMIESPAÇOS ADJACENTES NA TEORIA  
DE TRANSPORTE DE NÉUTRONS EM DOIS GRUPOS DE ENERGIA**

**Yuji Ishiguro e José Rubens Maiorino**

**PUBLICAÇÃO IEA 476  
CEN - AFR 48**

**MAIO/1977**

**PROBLEMA DE MILNE EM DOIS SEMIESPAÇOS ADJACENTES NA TEORIA  
DE TRANSPORTE DE NÉUTRONS EM DOIS GRUPOS DE ENERGIA**

**Yuji Ishiguro e José Rubens Maorino**

**CENTRO DE ENGENHARIA NUCLEAR**  
**Área de Física de Reatores**

**INSTITUTO DE ENERGIA ATÔMICA**  
**SÃO PAULO - BRASIL**

**APROVADO PARA PUBLICAÇÃO EM DEZEMBRO/1976.**

**CONSELHO DELIBERATIVO**

Klaus Reinach – Presidente  
Roberto D'Utra Vaz -- Vice-Presidente  
Helcio Modesto da Costa  
Ivano Humbert Marchesi  
Admar Cervellini  
Regina Elisabete Azevedo Beretta  
Flávio Gori

**SUPERINTENDENTE**

Rômulo Ribeiro Pieroni

**INSTITUTO DE ENERGIA ATÔMICA**  
Caixa Postal 11.049 (Pinheiros)  
Cidade Universitária "Armando de Salles Oliveira"  
SÃO PAULO - BRASIL

**NOTA:** Este trabalho foi conferido pelo autor depois de composto e sua redação está conforme o original, sem qualquer correção ou mudança.

# PROBLEMA DE MILNE EM DOIS SEMIESPAÇOS ADJACENTES NA TEORIA DE TRANSPORTE DE NÉUTRONS EM DOIS GRUPOS DE ENERGIA

Yuji Ishiguro\* e José Rubens Maiorino\*

## RESUMO

O método de Case, combinado com o princípio da invariância, é usado para obter-se a solução de problemas de transporte de nêutrons em dois semiespaços adjacentes, considerando-se espalhamento isotrópico e o modelo de dois grupos de energia.

A condição de continuidade e o princípio da invariância são usados na obtenção de um conjunto de equações integrais regulares acopladas para a distribuição angular na interface. Os coeficientes da expansão podem então ser obtidos dos resultados dessas equações integrais e de propriedades de ortogonalidade das auto-funções.

Apresentam-se resultados numéricos para os problemas de Milne e fonte constante em meios de água pura e borada. Estes resultados mostram a viabilidade do método proposto, em fornecer resultados numéricos exatos os quais podem ser usados como padrão de comparação para vários métodos aproximados.

## INTRODUÇÃO

Problemas de transporte envolvendo dois meios têm sido estudado por vários autores<sup>(1,5,8,9)</sup>, porém a maioria destes trabalhos são limitados ao modelo de um grupo. A equação de transporte no modelo de dois grupos têm sido extensivamente estudada e vários problemas em placas<sup>(6)</sup> bem como em um semiespaço<sup>(7,10,12,14)</sup>, foram solucionados. Entretanto, se considerarmos dois meios diferentes, as condições de contorno resultam em equações integrais singulares para os coeficientes da expansão, as quais não foram regularizadas.

Nós consideramos, neste trabalho, problemas deste tipo, conhecidos como o problema de Milne e o problema da fonte constante em semiespaços adjacentes e mostramos que, através da combinação da técnica de expansão em auto-funções singulares e do princípio da invariância, podemos reduzir estes problemas à solução de um conjunto de equações integrais regulares acopladas. Embora Jauho e Rajamäki<sup>(4)</sup> tenham solucionado um problema mais geral, acreditamos ser nosso método, computacionalmente, mais vantajoso para o modelo considerado. Além disso, desde que resultados numéricos não são encontrados na Literatura, para problemas em dois meios no modelo de dois grupos e usando o método de Case, nós publicamos resultados numéricos precisos que podem ser usados como padrão na comparação com métodos aproximados.

Consideramos os meios sendo homogêneos, espalhadores isotrópicos e não multiplicativos. Portanto a equação de transporte pode ser escrita:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi_1(x, \mu) + \Sigma_1 \psi_1(x, \mu) = Q_1 \int_{-1}^1 \psi_1(x, \mu') d\mu', \quad (1)$$

onde o índice 1 refere-se ao meio 1 ( $x > 0$ ) e o índice 2 ao meio 2 ( $x < 0$ ).

(\*) Centro de Engenharia Nuclear, Área de Física de Reatores — Instituto de Energia Atômica, São Paulo, SP.

Os elementos do vetor  $\underline{I}_i(x, \mu)$  são os fluxos angulares dos grupos,  $\underline{Q}_i$  é uma matriz  $2 \times 2$  com elementos positivos  $q_{i\alpha\beta}$ , e:

$$\underline{\Sigma}_i = \begin{bmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \sigma_i = \frac{\sigma_{i1}}{\sigma_{i2}}$$

com  $\sigma_{ij}$  sendo a secção de choque total do grupo  $j$  no meio  $i$ . Assumimos,  $\sigma_1 > 1$  e  $\sigma_2 > 1$ , a matriz  $\underline{Q}_i$  não diagonal ou triangular e  $\det \underline{Q}_i \neq 0$ .

Se definirmos a matriz  $2 \times 2$ ,  $\underline{P}_i$ , com elementos dados por  $p_{i\alpha\beta} = (q_{i2\alpha} / q_{i\alpha 2})^{1/2} \delta_{\alpha\beta}$ , a solução da Eq. (1) pode ser dada por:

$$\underline{I}_i(x, \mu) = \underline{P}_i^{-1} \underline{\Psi}_i(x, \mu)$$

onde  $\underline{\Psi}_i(x, \mu)$  é a solução de

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \underline{\Psi}_i(x, \mu) + \underline{\Sigma}_i \underline{\Psi}_i(x, \mu) = \underline{C}_i \int_{-1}^1 \underline{\Psi}_i(x, \mu') d\mu' \quad (2)$$

com  $\underline{C}_i = \underline{P}_i \underline{Q}_i \underline{P}_i^{-1}$ , simétrica.

A solução geral da equação (2) é conhecida<sup>(15,16)</sup> e portanto podemos escrever a solução do problema de Milne, como:

$$\begin{aligned} \underline{J}_M(x, \mu) &= \underline{P}_1^{-1} \underline{\Psi}_1(x, \mu) + \underline{P}_1^{-1} \underline{\phi}_1(-\nu_1, \mu) e^{x/\nu_1}, x > 0, \\ &= \underline{P}_2^{-1} \underline{\Psi}_2(x, \mu), x < 0, \end{aligned} \quad (3)$$

onde

$$\begin{aligned} \underline{\Psi}_1(x, \mu) &= \sum_{i=1}^{k_1} A(\nu_i) \underline{\phi}_1(\nu_i, \mu) e^{-x/\nu_i} \\ &+ \int_0^{1/\sigma_1} [A_1^{(1)}(\nu) \underline{\phi}_{11}^{(1)}(\nu, \mu) + A_2^{(1)}(\nu) \underline{\phi}_{12}^{(1)}(\nu, \mu)] e^{-x/\nu} d\nu \\ &+ \int_{1/\sigma_1}^0 A^{(2)}(\nu) \underline{\phi}_1^{(2)}(\nu, \mu) e^{-x/\nu} d\nu \end{aligned} \quad (4)$$

e

$$\begin{aligned}
 \Psi_2(x, \mu) &= \sum_{i=1}^{k_2} B(-\eta_i) \phi_2(-\eta_i, \mu) \exp(x/\eta_i) \\
 &+ \int_0^{1/\sigma_2} [B_1^{(1)}(-\eta) \phi_{21}^{(1)}(-\eta, \mu) + B_2^{(1)}(-\eta) \phi_{22}^{(1)}(-\eta, \mu)] \exp(x/\eta) d\eta \\
 &+ \int_0^{1/\sigma_2} B^{(2)}(-\eta) \phi_2^{(2)}(-\eta, \mu) \exp(x/\eta) d\eta. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Aqui,  $k_i$  é o número de pares dos auto valores discretos para o meio  $i$  e  $\nu_i$  e  $\eta_i$  são os auto valores discretos, como  $\nu_1 > \nu_2$  quando  $k_1 = 2$  ( $k_i$  assume valores iguais a 1 ou 2<sup>(15)</sup>). As auto funções foram obtidas por Siewert e Zweifel<sup>(16)</sup> e se encontram resumidas no trabalho de Siewert e Ishiguro<sup>(14)</sup> (a partir deste ponto referido como SI) e desde que nos baseamos neste trabalho, não reescreveremos as autofunções. Entretanto queremos resumir alguns resultados, a fim de tomá-los como base para a nossa discussão. Inicialmente, temos que as auto funções formam um conjunto completo e ortogonal para um vetor de Hölder<sup>(2,14,15)</sup> arbitrário, expandido no intervalo total e no semi-intervalo.

Os coeficientes da expansão na Eq. (4) podem ser obtidos, quando  $\Psi_1(0, \mu)$ ,  $\mu \in (0,1)$ , é conhecido, através do uso do teorema da ortogonalidade no semi-intervalo (Aqui omitimos os índices que se referem aos meios e escrevemos os autovalores por  $\xi$ ):

$$\int_0^1 \tilde{\Theta}(\xi', \mu) \Theta(\xi, \mu) \mu d\mu = 0, \xi \neq \xi'; \xi, \xi' = \xi_i \text{ ou } \epsilon \in (0,1)$$

O til acima das matrizes é usado para denotar a operação de transposição e o vetor adjunto pode ser escrito como:

$$\tilde{\Theta}(\xi, \mu) = [ \xi K(\xi, \mu) h(\mu) H^{-1}(\xi) C + \delta(\xi, \mu) \lambda(\xi) ] V(\xi)$$

onde todas funções são definidas em SI.

## FORMULAÇÃO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE MILNE

É conhecido<sup>(14)</sup> que as matrizes espalhamento  $S_i(\mu, \mu')$ ,  $\mu, \mu' \in (0,1)$ , definidas por:

$$\Psi_1(x, -\mu) = \frac{1}{2\mu} \int_0^1 S_1(\mu, \mu') \Psi_1(x, \mu') d\mu', \quad x \geq 0, \mu \in (0,1), \quad (6)$$

e

$$\Psi_2(x, \mu) = \frac{1}{2\mu} \int_0^1 S_2(\mu, \mu') \Psi_2(x, -\mu') d\mu', \quad x < 0, \mu \in (0,1), \quad (7)$$

onde  $\Psi_i(x, \mu)$  é uma solução típica da Eq. (2) em problemas de semi-espacos, podem ser obtidas de:

$$\underline{S}_i(\mu, \mu') = \begin{bmatrix} s_{i11} \left( \frac{\mu}{\sigma_i}, \frac{\mu'}{\sigma_i} \right) & s_{i12} \left( \frac{\mu}{\sigma_i}, \mu' \right) \\ s_{i21} \left( \mu, \frac{\mu'}{\sigma_i} \right) & s_{i22}(\mu, \mu') \end{bmatrix}$$

onde  $s_{i\alpha\beta}$  são os elementos da matriz.

$$\tilde{s}_i(\mu, \mu') = \frac{2\mu\mu'}{\mu + \mu'} \underline{H}_i(\mu) \underline{C}_i \tilde{\underline{H}}_i(\mu').$$

A matriz  $\underline{H}$  pode ser calculada da equação abaixo, através de esquema iterativo rapidamente convergente, conforme discutido em SI:

$$\tilde{\underline{H}}(\mu) = \underline{I} + \mu \underline{C} \underline{H}(\mu) \int_0^1 \tilde{\underline{H}}(\mu') \underline{Q}(\mu') \frac{d\mu'}{\mu' + \mu}, \mu \in (0,1).$$

A solução do problema de Milne, dada pela Eq. (3), deve satisfazer, na interface a condição de continuidade, que pode ser escrita em duas equações:

$$\underline{P}_1^{-1} \underline{\Psi}_1(0, \mu) = \underline{P}_2^{-1} \underline{\Psi}_2(0, \mu) - \underline{P}_1^{-1} \underline{\Phi}_1(-\nu_1, \mu), \mu \in (0,1), \quad (8)$$

$$\underline{P}_2^{-1} \underline{\Psi}_2(0, -\mu) = \underline{P}_1^{-1} \underline{\Psi}_1(0, -\mu) + \underline{P}_1^{-1} \underline{\Phi}_1(\nu_1, \mu), \mu \in (0,1). \quad (9)$$

Então se considerarmos dois semiespaços com fluxos incidentes dadas pelas Eqs (8) e (9), os fluxos emergentes  $\underline{P}_1^{-1} \underline{\Psi}_1(0, -\mu)$  e  $\underline{P}_2^{-1} \underline{\Psi}_2(0, \mu)$  podem ser obtidos, usando-se as Eqs (6) e (7), das equações

$$\underline{\Psi}_1(0, -\mu) = \frac{1}{2\mu} \int_0^1 \underline{S}_1(\mu, \mu') [ \underline{P}_1 \underline{P}_2^{-1} \underline{\Psi}_2(0, \mu') - \underline{\Phi}_1(-\nu_1, \mu') ] d\mu', \mu \in (0,1), \quad (10)$$

$$\underline{\Psi}_2(0, \mu) = \frac{1}{2\mu} \int_0^1 \underline{S}_2(\mu, \mu') \underline{P}_2 \underline{P}_1^{-1} [ \underline{\Psi}_1(0, -\mu') + \underline{\Phi}_1(\nu_1, \mu') ] d\mu', \mu \in (0,1). \quad (11)$$

Estas equações constituem-se num conjunto de equações integrais acopladas, as quais podem ser resolvidas por iteração numérica, e portanto  $\underline{\Psi}_1(0, -\mu)$  e  $\underline{\Psi}_2(0, \mu)$  é uma expansão típica no semi-intervalo

$$\sum_{i=1}^{k_1} \underline{A}_i(\nu_i) \underline{\Phi}_i(\nu_i, \mu) + \int_0^{1/\sigma_1} [ \underline{A}_1^{(1)}(\nu) \underline{\Phi}_{11}^{(1)}(\nu, \mu) + \underline{A}_2^{(1)}(\nu) \underline{\Phi}_{12}^{(1)}(\nu, \mu) ] d\nu$$

$$+ \int_{1/\sigma_1}^1 A^{(2)}(\nu) \phi_{-1}^{(2)}(\nu, \mu) d\nu = P_{-1} P_{-2}^{-1} \Psi_2(0, \mu) - \phi_{-1}(-\nu_1, \mu), \mu \in (0, 1),$$

com o lado direito constituído de funções conhecidas. Da mesma forma, a Eq. (9) torna-se, uma expansão no semi-intervalo, de uma função conhecida. Portanto os coeficientes podem ser obtidos pelo uso das relações de ortogonalidade. Assim, por exemplo, o coeficiente  $A(\nu_i)$  pode ser calculado como:

$$A(\nu_i) = \frac{1}{N(\nu_i)} \int_0^1 \tilde{Q}_1(\nu_i, \mu) P_{-1} P_{-2}^{-1} \Psi_2(0, \mu) \mu d\mu - \frac{1}{N(\nu_i)} \frac{\nu_i \nu_1}{\nu_i + \nu_1} \tilde{V}_1(\nu_i) C_{-1} \tilde{H}_1^{-1}(\nu_i) C_{-1}^{-1} H_{-1}^{-1}(\nu_1) C_{-1} V_{-1}(\nu_1). \quad (12)$$

Desta forma o vetor fluxo angular, Eq. (3), pode ser calculado para qualquer valor de  $x$  e  $\mu$ , ou seja, é possível encontrar-se numericamente a distribuição de nêutrons no sistema, pelo método aqui proposto. Para o cálculo do fluxo total, temos:

$$\phi_M(x) = \int_{-1}^1 J_M(x, \mu') d\mu'$$

e portanto:

$$\begin{aligned} \phi_M(x) &= P_{-1}^{-1} \left[ \sum_{i=1}^{k_1} A(\nu_i) U_1(\nu_i) e^{-x/\nu_i} + U_{-1}(\nu_1) e^{x/\nu_1} + \int_0^1 A^*(\nu) e^{-x/\nu} d\nu \right]; x > 0, \\ &= P_{-2}^{-1} \left[ \sum_{i=1}^{k_2} B(-\eta_i) U_2(\eta_i) e^{x/\eta_i} + \int_0^1 B^*(-\eta) e^{x/\eta} d\eta \right]; x < 0, \end{aligned} \quad (13)$$

onde

$$\begin{aligned} A^*(\nu) &= \theta(\nu) \begin{bmatrix} A_1^{(1)}(\nu) \\ A_2^{(1)}(\nu) \end{bmatrix} + (1 - \theta(\nu)) U^{(2)}(\nu) A^{(2)}(\nu) \\ B^*(-\eta) &= \theta(\eta) \begin{bmatrix} B_1^{(1)}(-\eta) \\ B_2^{(1)}(-\eta) \end{bmatrix} + (1 - \theta(\eta)) U^{(2)}(\eta) B^{(2)}(-\eta). \end{aligned} \quad (14)$$

Analogamente para o cálculo do vetor corrente têm-se:

$$J_M(x) = \int_{-1}^1 \mu J_M(x, \mu) d\mu$$

e portanto

$$\begin{aligned}
J_M(x) &= P_1^{-1} (\Sigma_1 - 2C_1) \left\{ \sum_{i=1}^{k_1} A(\nu_i) \nu_i U_1(\nu_i) e^{-x/\nu_i} + \nu_1 U_1(\nu_1) e^{x/\nu_1} + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 \nu A^*(\nu) e^{x/\nu} d\nu \right\}; x > 0, \\
&= P_2^{-1} (2C_2 - \Sigma_2) \left\{ \sum_{i=1}^{k_2} B(-\eta_i) \eta_i U_2(\eta_i) e^{x/\eta_i} + \int_0^1 \eta B^*(-\eta) e^{x/\eta} d\eta \right\}; x < 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Notamos também que esta técnica pode ser usada para a solução de outros problemas em semi-espacos adjacentes. De fato, nós consideramos um problema no qual existe uma fonte isotrópica, constante e uniformemente distribuída no meio 1. Desta forma, a solução da equação de transporte, para este tipo de problema, deve possuir uma solução particular devido a contribuição do termo de fonte constante, e portanto a solução geral pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
J_c(x, \mu) &= P_1^{-1} \Psi_1(x, \mu) + P_1^{-1} \Psi_P; x > 0, \\
&= P_2^{-1} \Psi_2(x, \mu); x < 0,
\end{aligned} \tag{16}$$

onde, a solução particular é determinada como:

$$\Psi_P = [\Sigma_1 - 2C_1]^{-1} S' = [\Sigma_1 - 2C_1]^{-1} P_1 S$$

e  $S$  é o termo de fonte constante, no meio 1.

Notamos que a única diferença significativa entre esse resultado e aquele encontrado no problema de Milne, é a substituição do termo  $\Phi_1(-\nu_1, \mu) \exp(x/\nu_1)$  (que representa no problema de Milne, o comportamento em pontos bem afastados da interface) pelo termo  $\Psi_P$ . Desta forma as equações deste problema são análogas àquelas encontradas no problema de Milne, apenas com a troca dos termos acima citados.

## RESULTADOS NUMÉRICOS

Com o intuito de ilustrar a viabilidade do método proposto, para a solução de problemas de transporte em meios adjacentes, solucionamos os problemas de Milne e fonte constante em quatro diferentes meios.

Um deles (aqui denotado como "Conjunto I") consiste de água leve ordinária e os outros três, Conjuntos II, III e IV, consistem de água borada com concentrações de 1,025, 2,99 e 6,35 b/H<sup>(\*\*)</sup>, respectivamente.

O intervalo de energia dos dois grupos considerados, sendo:

Grupo 1:  $0 < E < 0,0253$  eV

Grupo 2:  $0,0253 < E < 0,532$  eV

(\*\*) A unidade b/H significa a quantidade de absorção, em barns, introduzida pelo boro, por átomo de hidrogênio.

As secções de choque destes meios e divisão de grupos de energia foram encontradas por Metcalf e Zweifel<sup>(11)</sup> e são mostradas na Tabela I.

Tabela I

Secções de choque macroscópicas (\*)

Conjunto	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_{11}$	$\sigma_{12}$	$\sigma_{21}$	$\sigma_{22}$
I	4,8822	3,2343	3,8180	0,3524	1,0326	2,8669
II	4,9270	3,1686	3,7953	0,3239	1,0345	2,8005
III	5,0914	3,0707	3,7659	0,2705	1,0454	2,6828
IV	5,3220	2,9738	3,6906	0,2164	1,0481	2,5341

(\*) As unidades das secções de choque são expressas em  $\text{cm}^{-1}$ .

O meio no qual se tem a fonte, meio 1, foi fixado como o conjunto 1 e variou-se a absorção no meio 2, usando-se os conjuntos II, III e IV. Além disso, solucionamos os problemas considerando o meio 2 como vácuo, a fim de incluir o caso de um semiespaço, para referência. No total estudamos quatro casos para cada problema, conforme mostramos na Tabela II, e além disso, no problema da fonte constante, admitimos uma fonte, no meio 1, do tipo  $\underline{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , ou seja, uma fonte unitária ( para efeitos de normalização) no grupo de menor energia.

Tabela II

Casos Estudados (\*\*)

Caso	Meio 2
1	Conj. II – Água borada; 1,025 b/H
2	Conj. III – Água borada; 2,99 b/H
3	Conj. IV – Água borada; 6,35 b/H
4	Vácuo

(\*\*) Para todos os casos, o meio 1 é água leve ordinária (Conj. I).

Para cada conjunto de dados calculamos os auto valores discretos, que são mostrados na Tabela III.

Tabela III

Auto-valores discretos

Conjunto	Auto - valor
I	7,190978
II	4,179546
III	2,595565
IV	1,938041

Os coeficientes, discretos e contínuos, foram calculados para ambos problemas, usando-se os resultados da iteração das equações integrais acopladas para as distribuições angulares na interface. A Tabela IV apresenta os coeficientes discretos e a distância extrapolada para o problema de Milne e a Tabela V, os coeficientes discretos para o problema da fonte constante.

**Tabela IV**  
Coeficientes discretos e distâncias extrapolada (\*)  
Problema de Milne

Caso	A ( $\nu_1$ )	B ( $-\eta_1$ )	$z_0$
1	-0,26357	0,71844	4,79442
2	-0,47037	0,47259	2,71187
3	-0,58252	0,31503	1,94298
4	-0,83095	-	0,66583

(\*) A distância extrapolada ( $z_0$ ) é expressa em unidades de livre caminho médio do meio 1.

**Tabela V**  
Coeficientes discretos - Problema da fonte constante

Caso	A ( $\nu_1$ )	B ( $-\eta_1$ )
1	- 726,75	411,93
2	- 848,31	269,25
3	- 911,33	177,78
4	-1054,8	-

Nas figuras 1, 2, 3 e 4 mostramos os coeficientes contínuos para o problema de Milne, expressos pelas Eqs. 14. Notamos que a contribuição desses coeficientes é significativa para pertencente a região  $(1/\sigma, 1)$ , onde exibem um comportamento do tipo ressonante. Desta forma, quando de sua integração numérica para o cálculo dos fluxos angulares e totais, torna-se necessário um grande número de pontos de quadratura, nesta região.

A distribuição angular na interface é mostrada nas figuras 5 e 6, para os dois grupos de energia considerados. Notamos a descontinuidade da distribuição angular para valores nulos do cosseno do ângulo zenital e o aumento desta descontinuidade conforme se aumenta a absorção no meio 2.

Nas figuras 7 e 8 mostramos o fluxo total perto da interface, sendo que para o grupo 1 apresentamos também o fluxo assintótico. Notamos que no meio 1, após 2 a 3 livres caminhos médios o fluxo assintótico praticamente confunde-se com o fluxo total, enquanto que no meio 2, esta distância é da ordem de 3 a 4 livres caminhos médios. Salienta-se que esta divergência pode ser interpretada como a região em que a correção da teoria de transporte é significante. As correntes para o problema de Milne são mostradas nas figuras 9 e 10, notamos que na interface o valor absoluto da corrente aumenta, indicando a anisotropia introduzida pela presença da interface.

Para o problema da fonte constante, restringimo-nos a apresentar resultados apenas para a distribuição de fluxo total, figuras 11 e 12.

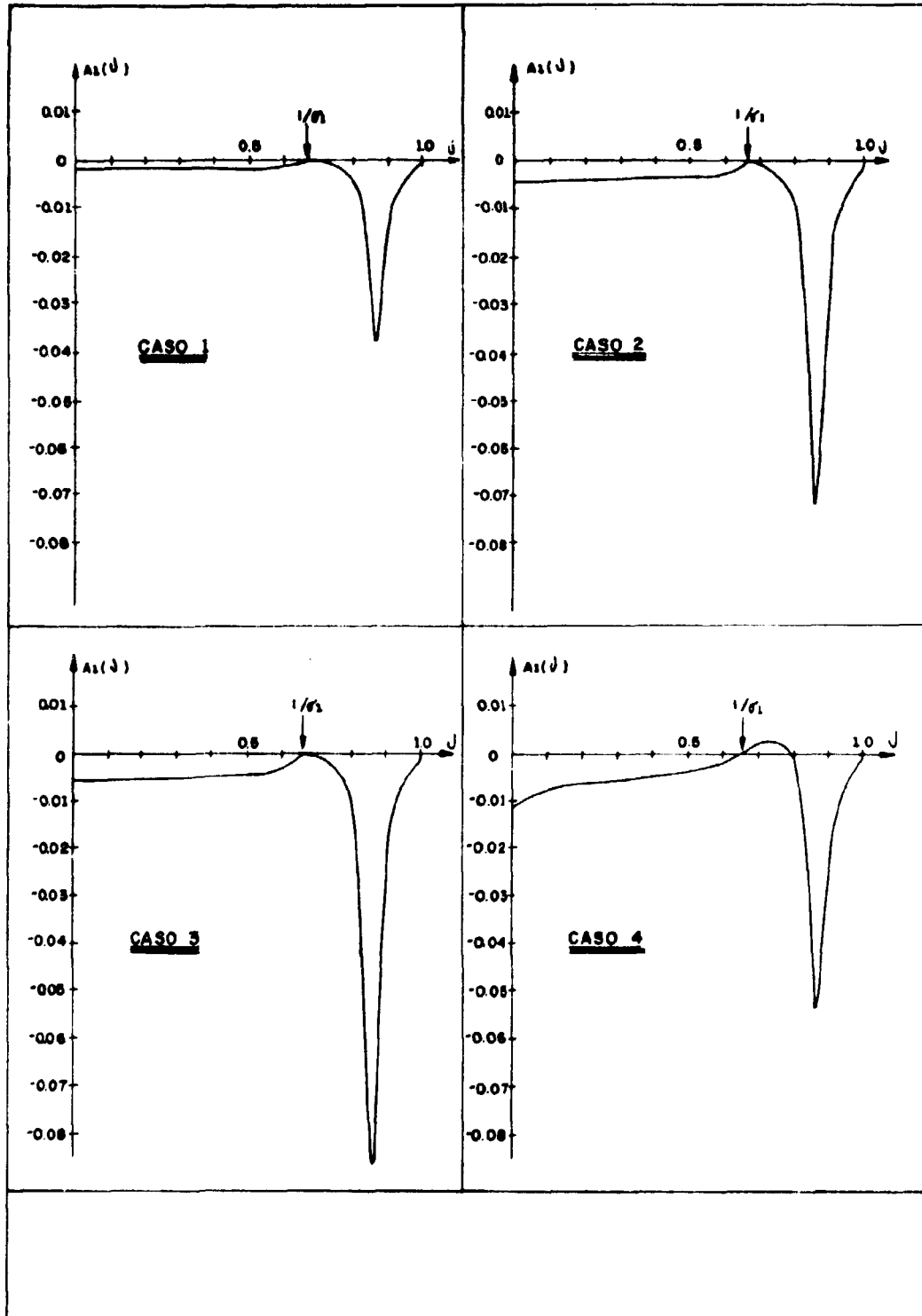


Figura 1 - Coeficientes Contínuos, meio 1,  $A_1(\nu)$  - Problema de Milne.

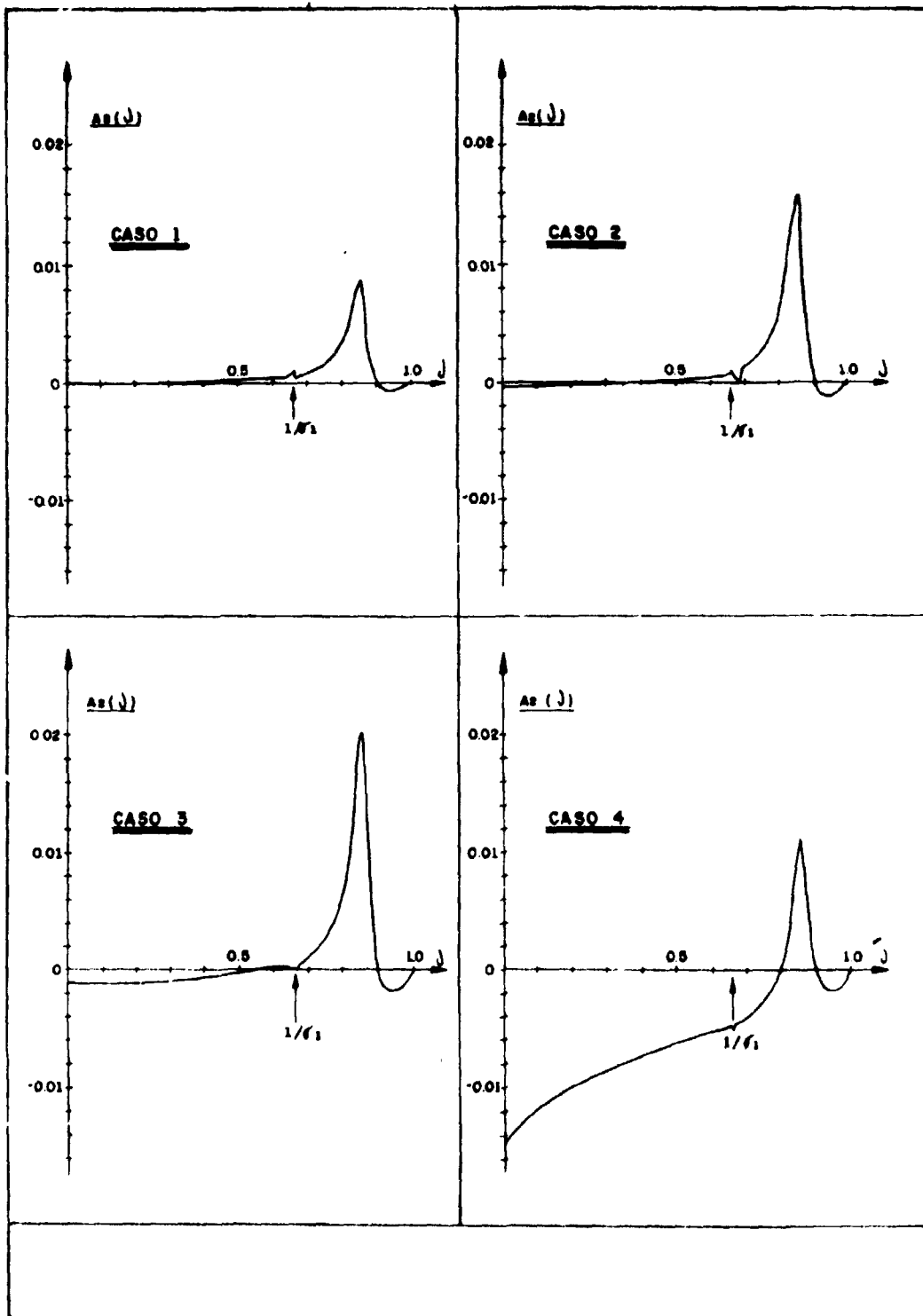


Figura 2 - Coeficientes Contínuos, meio 1,  $A_2(\nu)$  - Problema de Milne.

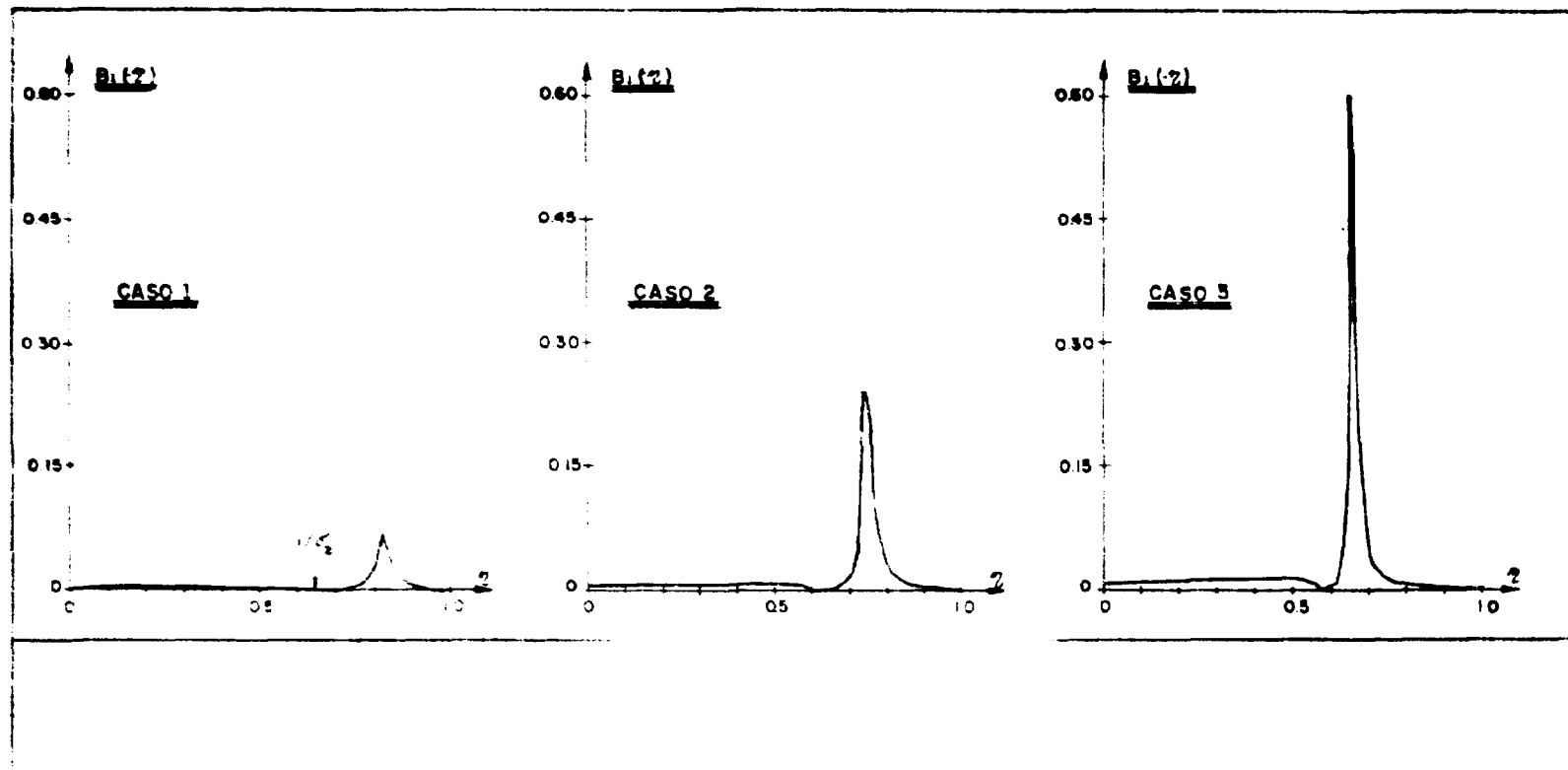


Figura 3 - Coeficiente Contínuo, meio 2 -  $B_1(-\eta)$  - Problema de Milne.

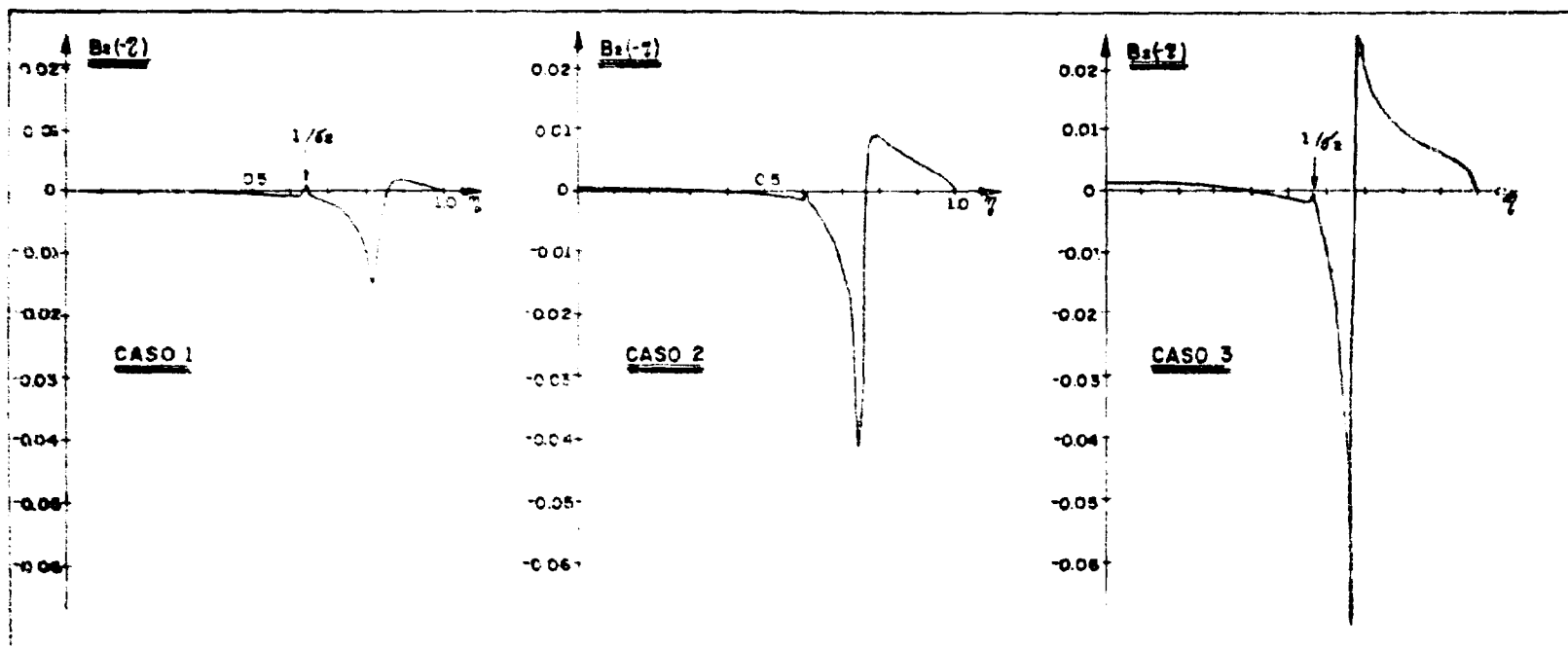


Figura 4 — Coeficiente Contínuo, meio 2 —  $B_2(-\eta)$  — Problema de Milne.

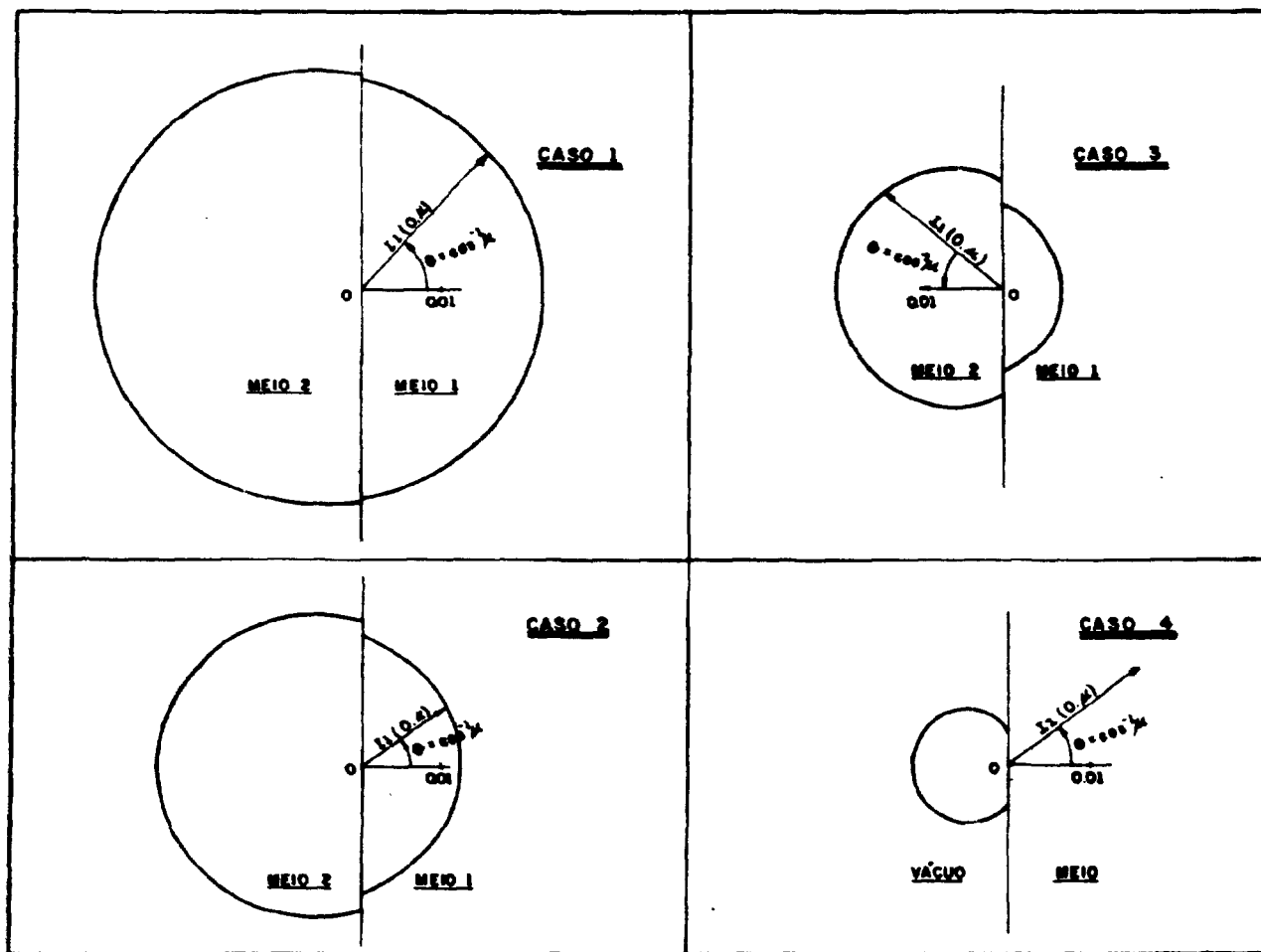


Figura 5 – Distribuição Angular na Interface ( $x=0$ ), Grupo 1 – Problema de Milne (coordenadas polares).

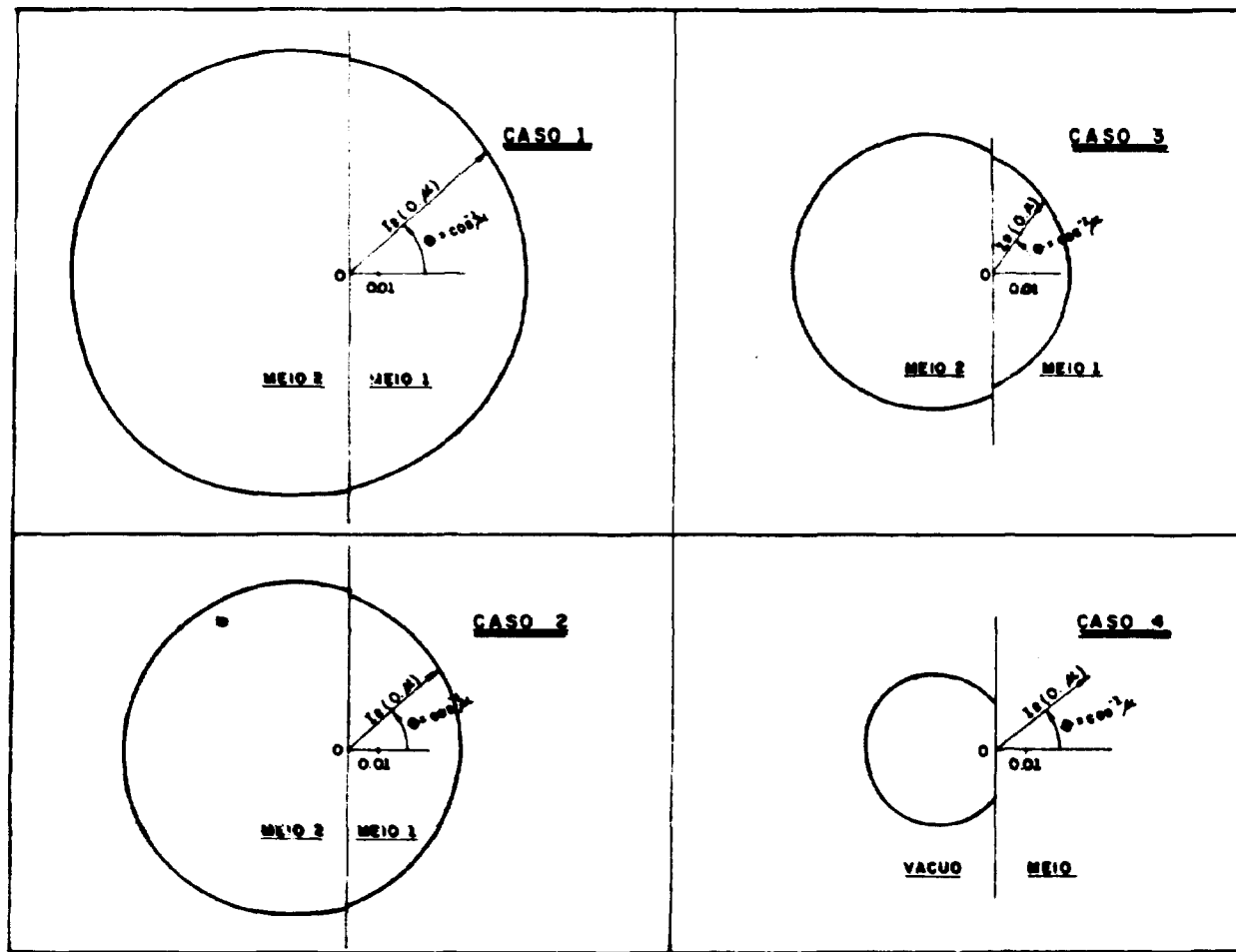


Figura 6 – Distribuição Angular na Interface ( $x=0$ ), Grupo 2 – Problema de Milne (coordenadas polares).

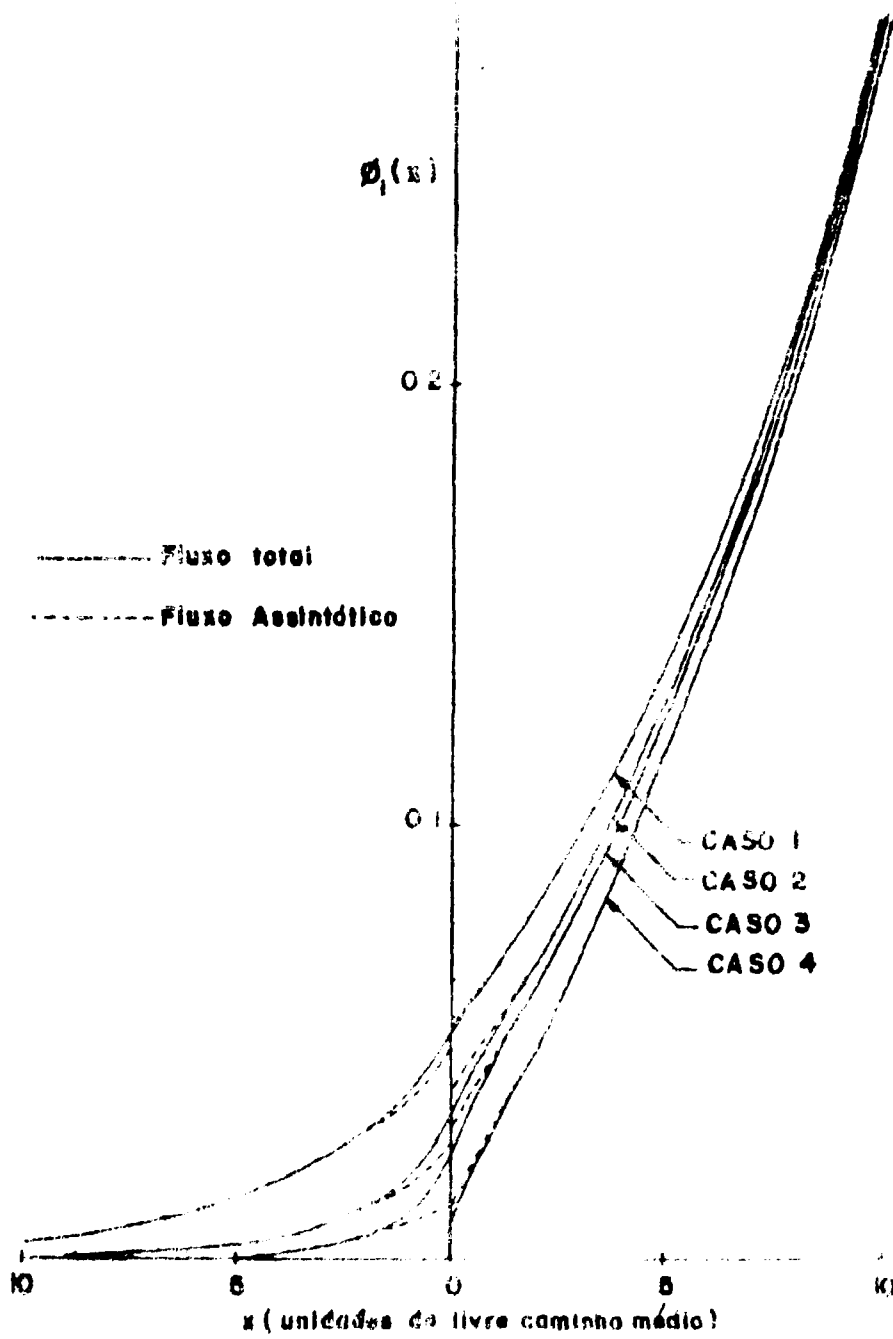


Figura 7 - Fluxo total e assintótico, Grupo 1 - Problema de Milne.

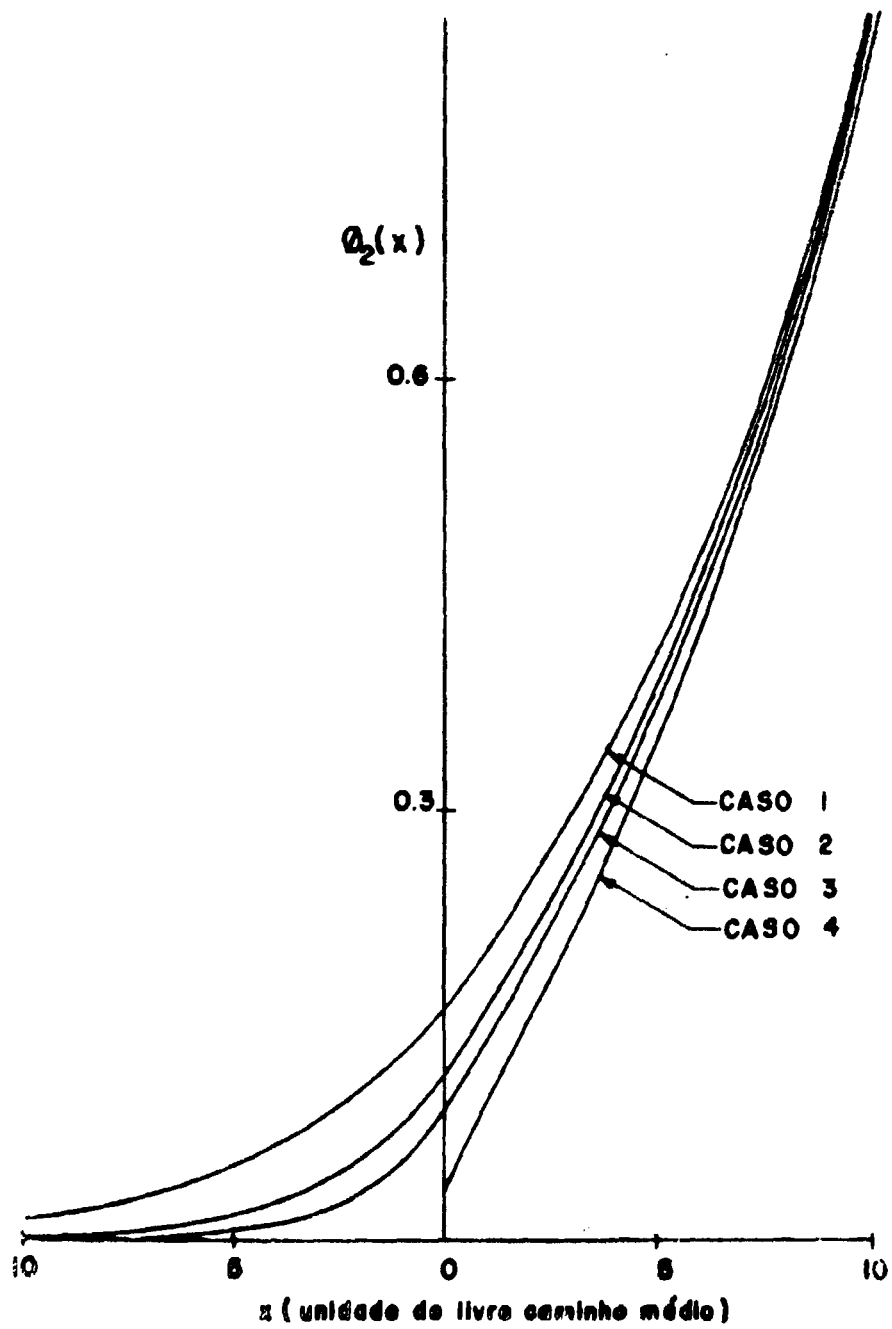


Figura 8 - Fluxo total, Grupo 2 - Problema de Milne

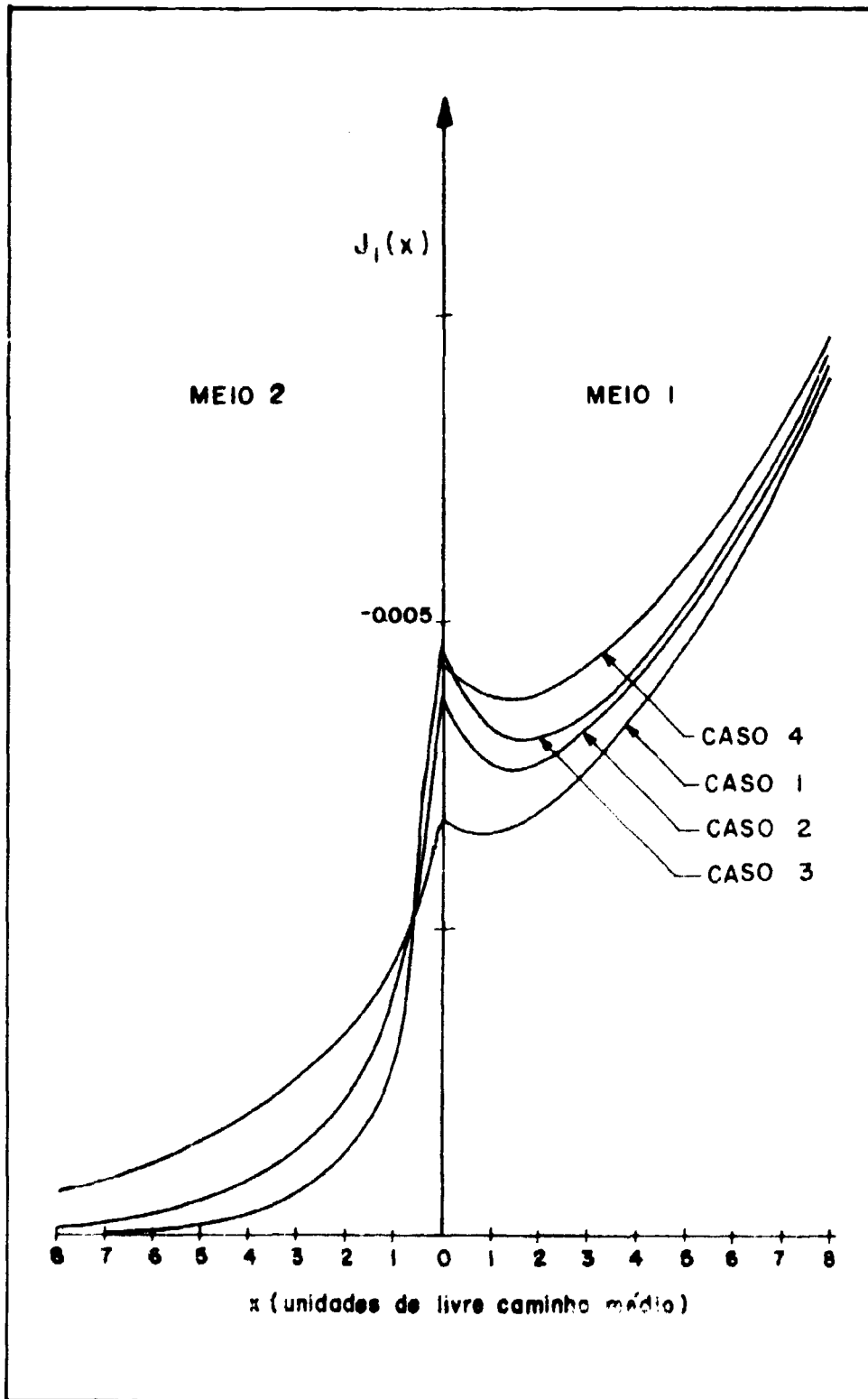


Figura 9 - Corrente, Grupo 1 - Problema de Milne.

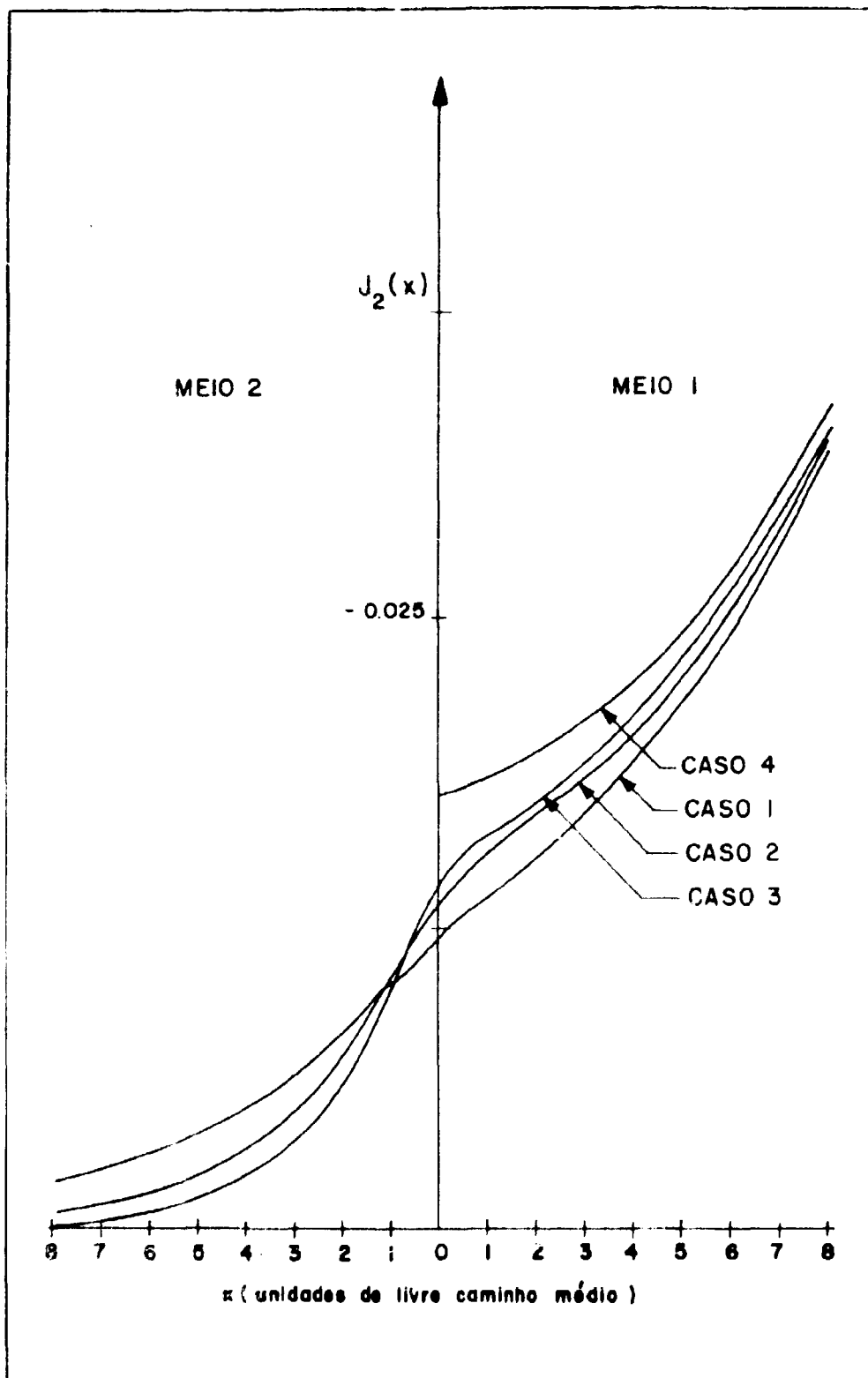


Figura 10 - Corrente, Grupo 2 - Problema de Milne.

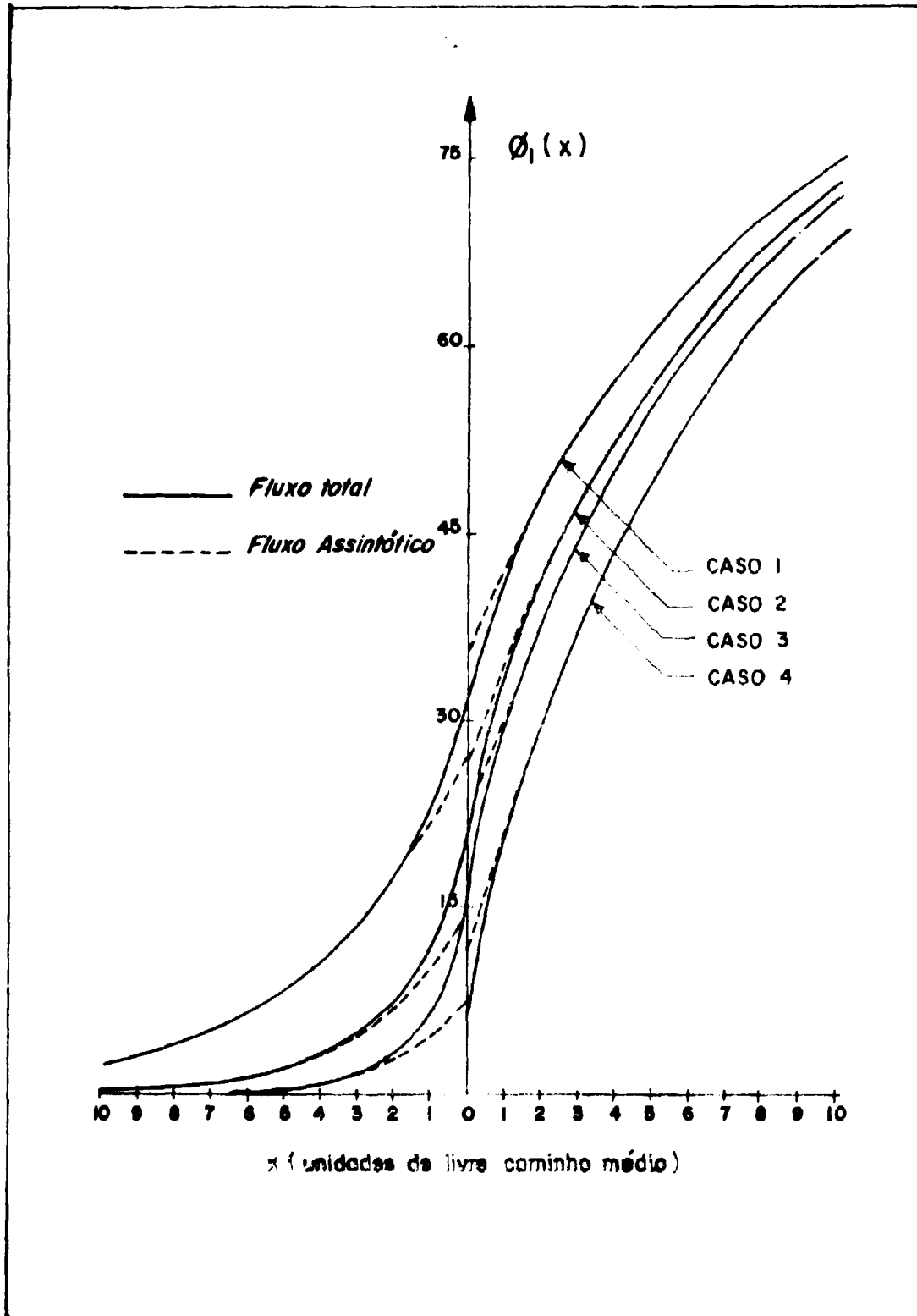


Figura 11 - Fluxo total e assintótico, Grupo 1 - Problema da Fonte Constante.

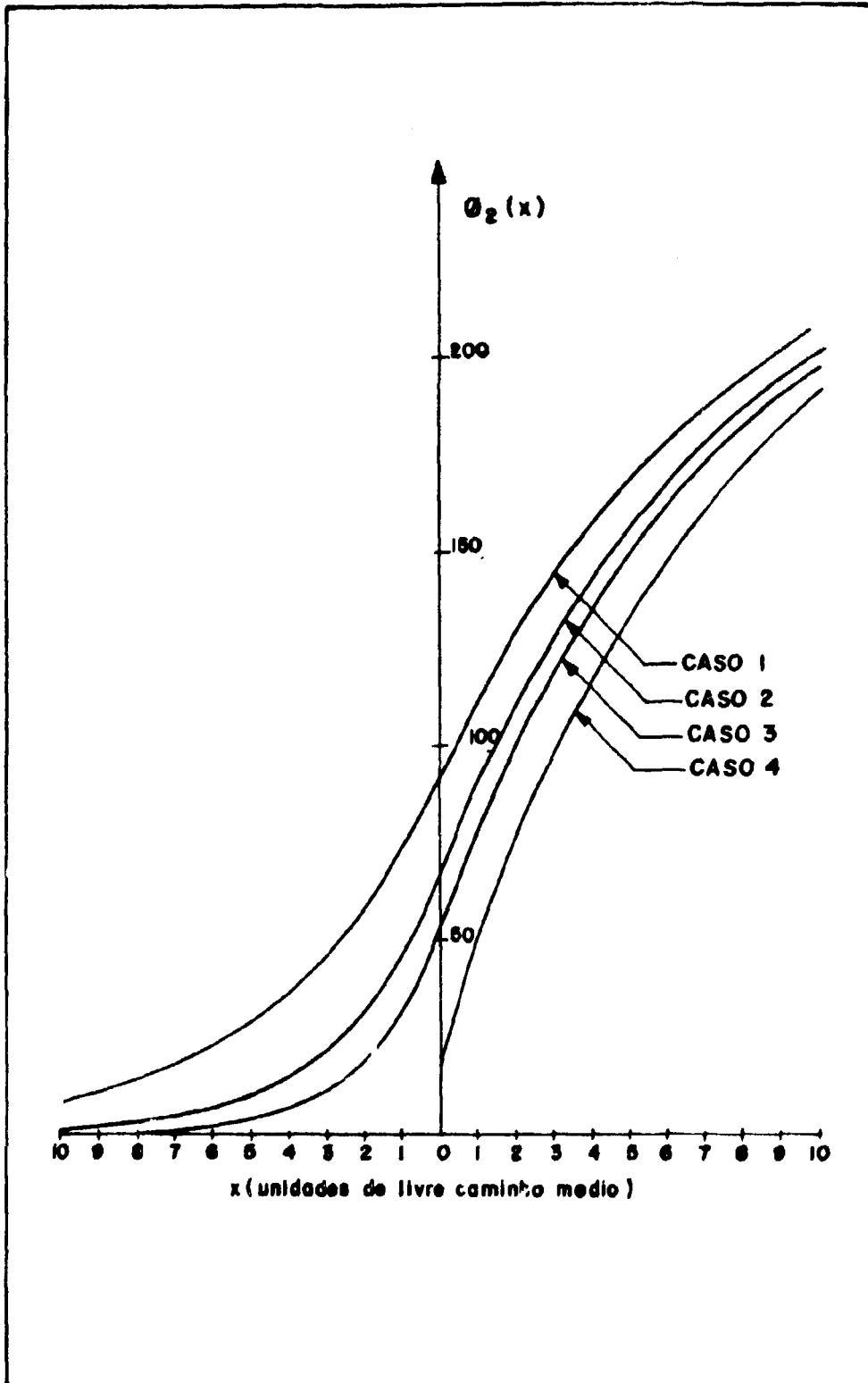


Figura 12 - Fluxo total, Grupo 2 - Problema da Fonte Constante.

## CONCLUSÕES

O princípio da invariância têm sido aplicado com sucesso na solução de problemas em um semiespaço e na derivação de relações de ortogonalidade das auto-funções singulares. Embora Chandrasekhar<sup>(3)</sup> tivesse sugerido o uso da função espalhamento para o estudo de problemas em meios adjacentes, os antigos trabalhos limitaram-se a um meio<sup>(8)</sup> e somente recentemente, Siewert e Bukart<sup>(13)</sup> e Ishiguro<sup>(4)</sup> mostraram que a idéia de combinar o método de expansão em auto funções singulares com o princípio da invariância pode ser usada com sucesso na solução de problemas em meios adjacentes na teoria de um grupo.

Neste trabalho, mostramos que a mesma técnica é viável de ser aplicada considerando-se a dependência energética através do modelo de dois grupos, apesar de não se obter resultados tão explícitos como em um grupo e nos restringirmos a meios infinitos.

## APÊNDICE

Com o intuito de mostrarmos que o método pode ser aplicado no estudo de reatores com refletor, simulamos esta situação considerando uma fonte constante e unitária no grupo de maior energia (grupo 2) situada num meio bastante absorvedor (conjunto IV), o qual pode ser encarada como o "caroço do reator", e como meio adjacente, consideramos um meio espalhador (conjunto I), o qual assume o papel de "refletor".

Os resultados encontrados são mostrados na figura A1, onde apresentamos a distribuição de fluxo para a situação acima discutida. Observamos o pico característico na distribuição de fluxo do grupo de menor energia na região do refletor. Salientamos que este comportamento é típico da distribuição de nêutrons quando se considera dois grupos de energia, sendo explicado como o acúmulo de nêutrons de menor energia, no refletor, devido a maior capacidade de moderação do refletor, relativamente à absorção, dos nêutrons de maior energia que escapam do meio no qual a fonte está localizada.

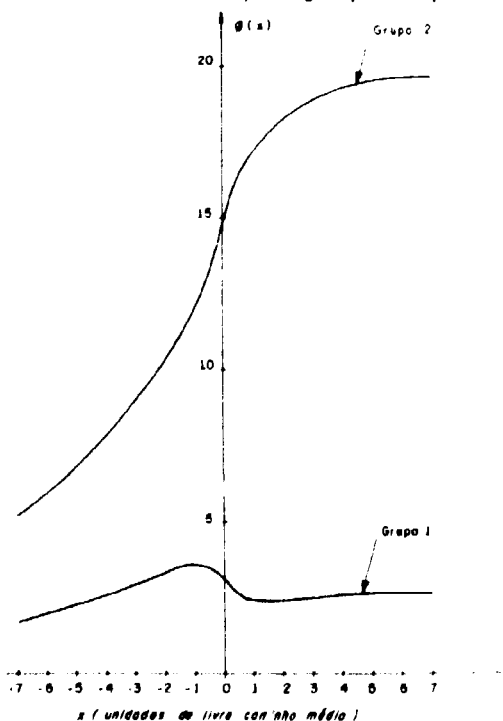


Figura A-1 – Distribuição de Fluxo total – Fonte Constante.

## ABSTRACT

Cases's method, combined with invariance principle, is used to obtain exact solutions of neutron transport problems in two adjacent half-spaces, in the two-group isotropic scattering model.

The continuity condition and the invariance principle are used to obtain a set of coupled regular integral equations for the angular distribution at the interface. The expansion coefficients can be obtained from the solutions of these integral equations using the orthogonality properties of the eigen functions.

Numerical results are presented for the Milne and the Constant Source problems for pure and beryllated light water media. The results show the feasibility of the proposed method to provide exact numerical results which can be used as standards of comparison for various approximate methods.

## RESUMÉ

La méthode de case, combinée au principe d'invariance, est utilisée afin d'obtenir des solutions exactes des problèmes de transport de neutrons, dans deux demi-espaces adjacents, pour le modèle de collision isotrope, à deux groupes.

La condition de continuité et le principe d'invariance ont été utilisés afin d'obtenir un ensemble d'équations intégrales régulières couplées pour la distribution angulaire à l'interface. Les coefficients d'expansion peuvent être obtenus à partir des solutions de ces équations intégrales en utilisant les propriétés d'orthogonalité des fonctions propres.

Des résultats numériques sont fournis pour les problèmes de Milne, ainsi que celui de la source constante dans un milieu pur ou contenant du bore.

Les résultats montrent la réalisabilité de la méthode proposée et que celle-ci permet d'obtenir des résultats numériques exacts, qui peuvent être utilisés comme standards de comparaison pour de nombreuses méthodes approchées.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BOND, G. R. & SIEWERT, C. E. The effect of linearly anisotropic neutron scattering on disadvantage factor calculations. *Nucl. Sci. Engng*, New York, 35:277-82, 1969.
2. BURNISTON, E. E. et alii. Steady-state solutions in the two group theory of neutron diffusion. *J. math. Phys.*, Lancaster, Pa., 13:1461, 1972.
3. CHANDRASEKHAR, S. The angular distribution of the interface of two adjoining media. *Can. J. Phys.*, Ottawa, 29:14-20, 1951.
4. ISHIGURO, Y. A new derivation of the two media orthogonality relations. *Trans. Am. nucl. Soc.*, Hinsdale, Ill., 21:234-5, 1975.
5. JAUHO, P. & RAJAMAKI, M. Energy dependent neutron transport theory in adjacent half-space. *Nucl. Sci. Engng*, New York, 43:145-53, 1971.
6. KRIESE, J. T. et alii. Two group critical problems for slabs and spheres in neutron transport theory. *Nucl. Sci. Engng*, New York, 50:3-9, 1973.
7. LEONARD, A. & FERZIGER, J. H. Energy-dependent neutron transport theory in plane geometry. 3. Half-range completeness and half-space problem. *Nucl. Sci. Engng*, New York, 26:181-91, 1966.
8. McCORMICK, N. J. Neutron transport for anisotropic scattering in adjacent half-space. 1. Theory. *Nucl. Sci. Engng*, New York, 37:243-51, 1969.

9. MENDELSON, M. R. & SUMMERFIELD, G. C. One speed neutron transport in two adjacent half-space. *J. math. Phys.*, Lancaster, Pa., 5:668-74, 1964.
10. METACALF, D. R. & ZWEIFEL, P. F. Solution of two group neutron transport equation. *Nucl. Sci. Engng*, New York, 33:307-17, 1968.
11. \_\_\_\_\_ & ZWEIFEL, P. F. \_\_\_\_\_ 2. *Nucl. Sci. Engng*, New York, 33:318-26, 1968.
12. PAHOR, S. & SHULTIS, J. K. Half-space general multigroup transport theory. *J. math. Phys.*, Lancaster, Pa., 10:581-9, 1969.
13. SIEWERT, C. E. & BUKART, A. R. On the critical reactor problem for a reflected slab. *Nucl. Sci. Engng*, New York, 58:253-5, 1975.
14. \_\_\_\_\_ & ISHIGURO, Y. Two group neutron transport theory: half-range orthogonality, normalization integrals, applications and computations. *J. nucl. Energy*, London, 26:251-69, 1972.
15. \_\_\_\_\_ & SHIEH, P. C. Two-group transport theory. *J. nucl. Energy*, London, 21:383-92, 1967.
16. \_\_\_\_\_ & ZWEIFEL, P. F. An exact solution of equation of radiative transfer for local thermodynamic equilibrium in the non-gray case-picket fence approximation. *Ann. Phys.*, New York, 36:61-85, 1966.
17. \_\_\_\_\_ et alii. Two group neutron transport theory: existence and uniqueness of H-matrix. *J. nucl. Energy*, London, 26:469-82, 1972.

