



**SOBRE A TEORIA DO CONTROLE ÓTIMO  
APLICAÇÃO EM REATORES NUCLEARES**

*P. GOLDENBERG e V. PROVENZANO*

**PUBLICAÇÃO IEA N.º 385**  
Março — 1975

**INSTITUTO DE ENERGIA ATÔMICA**  
Caixa Postal 11049 (Pinheiros)  
CIDADE UNIVERSITÁRIA "ARMANDO DE SALLES OLIVEIRA"  
SÃO PAULO — BRASIL

**SOBRE A TEORIA DO CONTROLE ÓTIMO  
APLICAÇÃO EM REATORES NUCLEARÉS**

**P. Goldenberg e V. Provenzano**

**Coordenadoria de Processamento de Dados  
Instituto de Energia Atômica  
São Paulo - Brasil**

**Publicação IEA Nº 385  
Março - 1975**

**Instituto de Energia Atômica**

**Conselho Superior**

Eng<sup>o</sup> Roberto N. Jafet – Presidente  
Prof. Dr. Emilio Mattar – Vice-Presidente  
Prof. Dr. José Augusto Martins  
Prof. Dr. Milton Campos  
Eng<sup>o</sup> Helcio Modesto da Costa

**Superintendente**

Prof. Dr. Rômulo Ribeiro Pieróni

# SOBRE A TEORIA DO CONTROLE ÓTIMO APLICAÇÃO EM REATORES NUCLEARES

P. Goldenberg e V. Provenzano

## RESUMO

A "teoria do controle ótimo" é uma formulação matemática recente utilizada na resolução de uma classe importante de problemas em ciência e tecnologia que não podem ser resolvidos pelo Cálculo das Variações Clássico. Tal classe de problemas aparecem também em controle de reatores nucleares.

No presente trabalho são apontados certos aspectos da teoria do controle ótimo, salientando a contribuição de Pontryagin com a formulação do "Princípio do Máximo".

Uma aplicação desta teoria, no caso particular do tempo mínimo, é apresentada. Tal aplicação refere-se a um problema de controle de potência de um reator nuclear (considerando-se um modelo simplificado deste), em tempo mínimo.

## I - Introdução

Os processos físicos que aparecem em ciência e em tecnologia são usualmente controláveis, isto é, eles podem processar-se de diversas maneiras dependendo da vontade dos pesquisadores.

Neste sentido, um problema importante se apresenta: encontrar o melhor controle possível (melhor em algum aspecto), ou em outras palavras, obter o "controle ótimo" para os processos físicos em questão.

Podemos, por exemplo, desejar otimização no sentido de rapidez de ação, isto é, atingir o objetivo do processo no menor tempo possível ou, atingir o objetivo de um processo com o mínimo de energia. A formulação matemática desses problemas teve origem no cálculo das variações. Entretanto, a solução de uma grande quantidade de problemas importantes em tecnologia moderna não pode ser obtida pelo cálculo das variações clássico. Este fato ocorre, pois as variáveis que aparecem nas equações que descrevem os sistemas devem, de alguma maneira, ser limitadas.

Surge assim, a necessidade de uma formulação matemática, cujo objetivo central é o de solucionar tais problemas práticos muito importantes, não resolvíveis por meio dos métodos do cálculo das variações.

Esta formulação matemática é usualmente conhecida por "Teoria do Controle Ótimo".

Diversos pesquisadores dedicaram-se ao desenvolvimento dessa teoria. Entre eles devemos destacar o trabalho de Pontryagin<sup>6</sup>, cujos resultados se apresentaram como fundamentais para a teoria.

Realmente, por volta de 1956, Pontryagin demonstrou um teorema que conduz à solução do problema geral de encontrar um controle ótimo.

Este teorema, conhecido por "Princípio do Máximo", foi inicialmente verificado para tipos especiais de sistemas, e em particular foi demonstrado para o caso dos sistemas lineares.

Pretendemos, no desenrolar deste trabalho, apresentar certos aspectos da Teoria do Controle Ótimo; antes, entretanto, consideraremos a questão relativa à classe de controles viáveis que se apresentam nos processos ótimos. Isso significa que inicialmente teremos que exibir uma classe de controles admissíveis que se apresenta nos processos de controle reais.

A seguir, formularemos os problemas gerais de controle. Posteriormente, será analisada a questão dos controles descontínuos. Juntamente com esta questão, ver-se-á que é preciso encarar as equações que descrevem os sistemas reais, segundo Carathéodory, e não no sentido clássico de Cauchy-Euler-Peano.

O princípio do Máximo será enunciado e comentado. Por último, ilustrar-se-á por meio de um exemplo, uma aplicação desse princípio. Este exemplo diz respeito ao problema de tempo mínimo ligado a um modelo simplificado de um reator nuclear.

A propósito, cabe aqui o seguinte comentário. Este trabalho não se propõe apresentar nada realmente original. Sua finalidade é a de informar e introduzir o leitor à Teoria do Controle Ótimo. Esta teoria é mais poderosa do que será possível notar nos desenvolvimentos seguintes, visando à solução de uma larga classe de problemas importantes em tecnologia.

## II - Preliminares

Consideremos um objeto cujo movimento em função do tempo é descrito pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, \dots, x^n, u^1, \dots, u^r), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Nesse sistema,

$x^1(t), \dots, x^n(t)$  são funções reais incógnitas da variável  $t$  (tempo), definidas em um intervalo  $t_0 \leq t \leq t_1$ , e assumindo valores em um conjunto  $X$  do espaço real de  $n$  dimensões  $R^n$ ;

$u^1(t), \dots, u^r(t)$  são funções reais de controle, também definidas em  $t_0 \leq t \leq t_1$ , com valores num compacto  $\bar{U}$  de  $R^r$ ;

$f^1, \dots, f^n$  são funções reais de  $n + r$  variáveis, definidas no produto cartesiano  $X \times \bar{U}$ .

Faremos uso do cálculo vetorial. Um ponto  $(x^1, \dots, x^n)$  de  $X$  será designado por  $x$ . Pode-se, então, dar ao sistema (1), a seguinte forma vetorial

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u).$$

Dadas as posições inicial e final do objeto, designadas respectivamente por  $x_0$  e  $x_1$ , diremos que o objeto é controlável no intervalo  $t_0 \leq t \leq t_1$ , se existe algum controle  $u(t)$  definido nesse intervalo, com valores em  $\bar{U}$ , e correspondente uma solução

$$\dot{x} = x(t, u)$$

do sistema (1), tal que

$$x(t_0, u) = x_0$$

$$x(t_1, u) = x_1.$$

O problema de controle consiste então no seguinte:

- a) Estabelecer sob quais condições o objeto é controlável;
- b) Determinar os controles admissíveis, isto é, aqueles compatíveis com o desempenho do objeto.

Em diversas aplicações práticas, o uso de controles descontínuos não pode ser evitado. Daí ser conveniente considerar a classe D dos controles admissíveis, descrita pelas seguintes condições:

- 1) Todos os controles  $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , que pertencem à classe D, são mensuráveis e limitados;
- 2) Se  $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$  é um controle admissível,  $v$  é um ponto arbitrário de  $\bar{U}$  e  $t'$ ,  $t''$  são números satisfazendo  $t_0 \leq t' \leq t'' \leq t_1$ , o controle  $u_1(t)$  definido em  $t_0 \leq t \leq t_1$  pela expressão

$$u_1(t) = \begin{cases} v & \text{se } t' \leq t \leq t'' \\ u(t) & \text{se } t_0 \leq t < t' \text{ ou } t'' < t \leq t_1, \end{cases}$$

também é admissível;

- 3) Se o intervalo  $t_0 \leq t \leq t_1$  é dividido em um número finito de subintervalos, onde em cada subintervalo o controle  $u(t)$  é admissível, então este controle é também admissível em todo o intervalo  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

Além disso, o controle admissível definido em  $t_0 \leq t \leq t_1$ , quando restrito a um subintervalo qualquer, é também admissível, e o controle obtido de um controle admissível  $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , por uma translação em  $t$ , também é admissível.

As descontinuidades na função de controle  $u(t)$ , levam a considerar o sistema (1) no sentido de Carathéodory, ao invés de encará-lo no sentido clássico de Cauchy-Euler-Peano.

Assumiremos então, que as funções

$$f^i(x^1, \dots, x^n, u^1, \dots, u^r), \quad i = 1, \dots, n,$$

independentes da variável  $t$ , satisfazem as condições de Carathéodory em  $X \times \bar{U}$ . Com isto queremos afirmar que as referidas funções são contínuas em relação a todas as variáveis  $x^1, \dots, x^n, u^1, \dots, u^r$  em  $X \times \bar{U}$ ; e que são majoradas por funções integráveis segundo Lebesgue nas vizinhanças de qualquer ponto desse conjunto.

Assumiremos ainda, que existem as derivadas parciais

$$\frac{\partial f^i(x^1, \dots, x^n, u^1, \dots, u^r)}{\partial x^j}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n,$$

em  $X \times U$ , satisfazendo, também, as condições de Carathéodory nesse conjunto.

Além disso, sendo  $u(t)$  uma função limitada qualquer, mensurável, definida em  $t_0 \leq t \leq t_1$ , com valores em  $U$ , as funções

$$x^1(t), \dots, x^n(t),$$

absolutamente contínuas em qualquer segmento contido no intervalo  $t_0 \leq t \leq t_1$

$$\frac{dx^i(t)}{dt} = f^i(x^1(t), \dots, x^n(t), u^1(t), \dots, u^r(t)), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

quase sempre nesses segmentos, denominam-se solução do sistema (1), correspondente à função de controle  $u(t)$ .

Ao considerar-se as soluções do sistema (1) neste sentido, grande parte dos resultados básicos da teoria das equações diferenciais ordinárias, e em particular os teoremas de existência e unicidade de solução, permanecem válidos, qualquer que seja o controle  $u(t)$  considerado.

Rigorosamente falando, as soluções do sistema (1) não são sempre definidas em todo o intervalo  $t_0 \leq t \leq t_1$ , onde  $u(t)$  foi definido. Entretanto, quando o sistema (1) é linear nas variáveis  $x^1, \dots, x^n$ , o intervalo de definição de suas soluções, coincide com todo o intervalo  $t_0 \leq t \leq t_1$  onde as funções  $u(t)$  foram definidas.

Julgamos oportuno mencionar aqui que relativamente ao sistema de Carathéodory são válidos os teoremas da dependência contínua da solução com relação a parâmetros.

As questões de existência e unicidade etc., relativas às soluções do sistema (1) são discutidas em pormenores por diversos autores. A propósito, gostaríamos de conduzir os leitores interessados neste assunto, a um estudo elaborado sobre os sistemas de Carathéodory, que é o tema de dissertação de Mestrado de um dos autores deste trabalho.

### III - Enunciado do Problema Fundamental de Controle Ótimo e o Princípio do Máximo

O problema de controle mencionado na seção anterior é o que antecede o problema de controle ótimo.

A presente seção é primordialmente dedicada ao enunciado do problema fundamental com o Princípio do Máximo.

Conforme já se referiu na seção anterior, consideraremos o sistema de equações diferenciais

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, \dots, x^n, u^1, \dots, u^r), i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

descrevendo o movimento de um objeto (o efeito do controle também é levado em consideração).

Observar que o sistema (3) é um sistema autônomo, considerado no sentido de Carathéodory.

Dado um controle admissível  $u = u(t)$ , definido em  $t_0 \leq t \leq t_1$ , a equação (3) acima, escrita sob a forma vetorial

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u),$$

assume a seguinte forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u(t)), \quad (4)$$

Juntamente com a equação (4), tomemos dois pontos  $x_0$  e  $x_1$  de  $X$ , e sejam

$$x(t_0, u) = x_0$$

e

$$x(t_1, u) = x_1$$

respectivamente, as condições inicial e final do problema.

Finalmente, uma função adicional  $f^0(x^1, \dots, x^n, u) = f^0(x, u)$  é dada, função esta definida e contínua em  $X \times \bar{U}$ , possuindo derivadas parciais

$$\frac{\partial f^0}{\partial x^i}, i = 1, \dots, n$$

definidas e contínuas no mesmo conjunto  $X \times \bar{U}$ .

A partir das considerações feitas acima pode-se enunciar o problema fundamental do Controle Ótimo da maneira seguinte:

“No espaço de fase  $X$ , são dados dois pontos  $x_0$  e  $x_1$ . Entre todos os controles admissíveis

$$u = u(t)$$

que transferem o ponto de fase da posição  $x_0$  para a posição  $x_1$  (supõe-se que tal controle existe), encontrar um tal que o funcional

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t)) dt, \quad (5)$$

assuma valor mínimo”.

Note-se que

$$\dot{x} = x(t)$$

é a solução do sistema (4), satisfazendo a condição inicial

$$x(t_0) = x_0,$$

solução esta correspondente ao controle  $u(t)$ , passando no instante  $t_1$  pelo ponto de fase  $x_1$ .

O controle  $u(t)$ , solução do problema acima, denomina-se "controle ótimo" correspondente à transferência do objeto do ponto  $x_0$  para o ponto  $x_1$ . A correspondente trajetória  $x(t)$ , denomina-se "trajetória ótima".

Sucintamente, o problema de controle ótimo, consiste em determinar um controle ótimo e a trajetória ótima correspondente.

Um caso particularmente importante do problema de controle ótimo ocorre quando  $f^0(x, u) = 1$ . Trata-se do problema designado por "problema de tempo ótimo", onde se deseja minimizar o funcional (5) que possui aqui a seguinte forma específica

$$J = t_1 - t_0.$$

O problema de tempo ótimo nos casos práticos visa a minimizar o "tempo de transferência" dos pontos de fase da posição inicial à posição final. A propósito, o exemplo que exibiremos na secção seguinte será um problema de tempo ótimo.

Fassemos, em seguida, a examinar algumas relações que serão utilizadas na formulação do Princípio do Máximo. Convém lembrar que tal princípio constitui a ferramenta central para o exemplo ilustrativo que exibiremos na secção IV.

Além do sistema fundamental de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x, u), \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (6)$$

considere-se um outro sistema auxiliar de equações diferenciais ordinárias nas variáveis  $\psi^0, \psi^1, \dots, \psi^n$ , a saber

$$\frac{d\psi^i}{dt} = - \sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial f^\alpha(x, u)}{\partial x^i} \psi^\alpha, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (7)$$

Dado um controle admissível  $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , e uma correspondente trajetória  $x(t)$ , (solução do sistema (6), satisfazendo a condição inicial  $x(t_0) = x_0$ ), o sistema (7) assume a forma

$$\frac{d\psi^i(t)}{dt} = - \sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial f^\alpha(x(t), u(t))}{\partial x^i} \psi^\alpha, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (8)$$

O sistema (8) é linear e homogêneo; daí, para dados valores iniciais, existe uma única solução

$$\psi = (\psi^0, \psi^1, \dots, \psi^n)$$

do sistema, definida em  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

Assim como a solução  $x(t)$  do sistema (6), a solução do sistema (8) é uma função contínua em  $t_0 \leq t \leq t_1$  e derivável quase sempre neste intervalo, isto é, derivável exceto em um conjunto de medida de Lebesgue nula.

O passo seguinte consiste em reunir (6) e (7) em uma única relação. Para tanto, consideremos a função  $\mathcal{H}$  nas variáveis  $x^1, \dots, x^n, \psi^0, \psi^1, \dots, \psi^n, u^1, \dots, u^r$  definida pela relação seguinte:

$$\mathcal{H}(\psi, x, u) = (\psi, f(x, u)) = \sum_{\alpha=0}^n \psi^\alpha f^\alpha(x, u)$$

Vê-se, facilmente, que os sistemas (6) e (7) podem ser reescritos com o auxílio da função  $\mathcal{H}$ , nas formas seguintes

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi^i}, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (9)$$

$$\frac{d\psi^i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (10)$$

Dai, tomando um controle admissível arbitrário  $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$  e a condição inicial  $x(t_0) = x_0$ , podemos determinar a correspondente trajetória  $x(t) = (x^0(t), x^1(t), \dots, x^n(t))$ . Posteriormente, encontraremos as soluções do sistema (10)

$$\psi(t) = (\psi^0(t), \psi^1(t), \dots, \psi^n(t))$$

correspondentes às funções  $u(t)$  e  $x(t)$ .

A função  $\mathcal{H}$  resulta uma função de  $u$ , se fixarmos os valores de  $\psi$  e de  $x$ . Neste caso, designemos por  $M(\psi, x)$  o extremo superior de  $\mathcal{H}$ , quando  $u$  percorre  $U$ , ou seja

$$M(\psi, x) = \sup_{u \in U} \mathcal{H}(\psi, x, u).$$

Observe-se que se a função contínua  $\mathcal{H}$  atinge seu extremo em  $U$ ,  $M(\psi, x)$  é um valor máximo de  $\mathcal{H}$ , para  $\psi$  e  $x$  fixados.

O teorema 1 (condição necessária de otimização), cujo ponto principal aparece na equação (11), será chamado Princípio do Máximo.

**Teorema 1** - Seja  $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , um controle admissível tal que a correspondente trajetória  $x(t)$  passa pelo ponto  $x_0$  no instante  $t_0$  e em algum instante  $t_1$  passa pelo ponto  $x_1$ . A condição necessária para que  $u(t)$  e  $x(t)$  sejam ótimos é que exista um vetor contínuo não nulo  $\psi(t) = (\psi^0(t), \psi^1(t), \dots, \psi^n(t))$  correspondente a  $u(t)$  e  $x(t)$ , tal que:

- 1) Qualquer que seja  $t$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , a função  $\mathcal{H}(\psi(t), x(t), u)$  da variável  $u$  pertencente a  $U$ , atinge seu máximo no ponto  $u = u(t)$ :

$$\mathcal{H}(\psi(t), x(t), u(t)) = M(\psi(t), x(t)); \quad (11)$$

2) No instante final  $t_1$ , verificam-se as seguintes relações

$$\psi^0(t_1) \leq 0, \quad M(\psi(t_1), x(t_1)) = 0. \quad (12)$$

Além disso, se  $\psi(t)$ ,  $x(t)$  e  $u(t)$  satisfazem os sistemas (9), (10) e a condição 1ª, as funções  $\psi^0(t)$  e  $M(\psi(t), x(t))$  são constantes. Daí, as relações (12) são verificadas qualquer que seja  $t$  no intervalo  $t_0 \leq t \leq t_1$ , e não somente no instante  $t_1$ .

A partir do Teorema 1, pode derivar-se uma condição necessária para o tempo ótimo. Para isto, é necessário somente substituir  $f^0(x, u)$  por 1. Então, segundo o Teorema 1, temos que

$$\mathcal{H} = \psi^0 + \sum_{\nu=1}^n \psi^\nu f^\nu(x, u).$$

Introduzindo o vetor  $n$ -dimensional  $\psi = (\psi^1, \dots, \psi^n)$  e a função

$$H(\psi, x, u) = \sum_{\nu=1}^n \psi^\nu f^\nu(x, u)$$

podemos reescrever as equações (6) e (7) (com exceção de equação (7) para  $i=0$ , que agora é supérflua) na forma de Sistemas Hamiltonianos

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi^i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (13)$$

$$\frac{d\psi^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (14)$$

Fixados  $\psi$  e  $x$ ,  $H$  é função somente de  $u$ . Designemos por  $M(\psi, x)$  o extremo superior de  $H$ :

$$M(\psi, x) = \sup_{u \in U} H(\psi, x).$$

Como  $H(\psi, x, u) = \mathcal{H}(\psi, x, u) - \psi^0$  verifica-se

$$M(\psi, x) = M(\psi, x) - \psi^0,$$

e então (11) e (12) assumem a forma

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = M(\psi(t), x(t)) = -\psi^0 \geq 0.$$

Daí, subsiste o teorema seguinte:

**Teorema 2** - Seja  $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , um controle admissível que transfere os pontos de fase de  $x_0$  a  $x_1$ , e seja  $x(t)$  a correspondente trajetória tal que

$$x(t_0) = x_0$$

e

$$x(t_1) = x_1.$$

Para que  $u(t)$  e  $x(t)$  sejam de tempo ótimo é necessário que exista uma função vetorial contínua não nula

$$\psi(t) = (\psi^1(t), \dots, \psi^n(t))$$

correspondente a  $u(t)$  e  $x(t)$ , tal que:

- 1) Qualquer que seja  $t$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , a função  $H(\psi(t), x(t), u)$  da variável  $u$ , com  $u$  pertencente a  $U$  atinge seu máximo no ponto  $u = u(t)$ :

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = M(\psi(t), x(t)); \quad (15)$$

- 2) No instante final  $t_1$  a relação

$$M(\psi(t_1), x(t_1)) \geq 0 \quad (16)$$

é satisfeita. Além disso, se  $\psi(t)$ ,  $x(t)$  e  $u(t)$  satisfazem os sistemas (13), (14) e a condição 1ª, a função do tempo  $M(\psi(t), x(t))$  é constante. Daí (16) subsiste qualquer que seja  $t$  com  $t_0 \leq t \leq t_1$ , e não somente no ponto  $t_1$ .

Os tópicos matemáticos que acabam de ser expostos serão aplicados no exemplo seguinte.

#### IV - Exemplo Ilustrativo

Conforme mencionou-se na introdução, ilustraremos a teoria vista acima por meio de um exemplo prático. Este exemplo é a utilização do Princípio do Máximo a um problema de tempo mínimo. Podemos, em poucas palavras, descrever o problema sobre o qual nos deteremos, da seguinte maneira:

Consideremos o modelo simplificado de um reator nuclear. Suponhamos conhecida sua potência inicial  $P_0$  no instante  $t=t_0$  e que desejamos aumentar essa potência a uma determinada  $P_d$ , num tempo mínimo, por meio de uma manipulação adequada da barra de controle. Mais especificamente, queremos determinar o instante exato em que devemos inverter a velocidade da barra de controle de tal forma que a potência desejada seja atingida num tempo mínimo.

Motivou este estudo, além de outras razões, o aspecto econômico, por meio da utilização mais eficiente dos combustíveis, e de tempo mínimo exigido para atingir a potência desejada.

#### Formulação do Problema

O modelo matemático geralmente utilizado para descrever um reator nuclear pode ser representado pelas seguintes equações

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\delta k}{l^*} n - \frac{\beta}{l^*} n + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i \quad (1)$$

$$\frac{dC_i}{dt} = -\frac{\lambda_i}{l^*} n - \lambda_i C_i \quad (2)$$

onde

$i$  = índice que representa o número de grupos de nêutrons

$t$  = tempo

$n$  = Número de nêutrons

$$\delta\kappa = \frac{\kappa-1}{\kappa} = \frac{\Delta\kappa}{\kappa} = \text{reatividade}$$

$\kappa$  = fator de multiplicação

$\ell^*$  = vida média dos nêutrons

$\beta$  = fração de nêutrons retardados, a partir do número total de nêutrons

$\beta_i$  = fração de nêutrons retardados do  $i$ -ésimo grupo

$C_i$  = a concentração de nêutrons retardados, emitida pelo  $i$ -ésimo grupo

$\lambda_i$  = constante de decaimento para o  $i$ -ésimo grupo de nêutrons retardados.

O modelo que acabamos de apresentar, onde são considerados 6 grupos de nêutrons, leva-nos ao problema de resolver equações de sétima ordem. Torna-se muito difícil a aplicação do princípio do máximo neste caso, dado o número excessivo de cálculos.

Nosso objetivo, aqui, é ilustrar tal princípio, não sendo então conveniente nos deter em cálculos complicados que nos afastariam do caminho central. Trabalharemos então com o caso em que  $i = 1$ .

Neste caso, somos levados à resolução de um problema de tempo ótimo de um sistema linear.

A este respeito, cabe aqui observar que Pontryagin<sup>(6)</sup> afirmou ser muito importante mas difícil a demonstração da existência de um controle para casos gerais. Esse autor demonstrou a existência de controle para o caso particular de sistemas lineares, no problema de tempo ótimo.

Sendo este o nosso caso, sentimo-nos à vontade para afirmar a existência de, pelo menos, um controle.

Voltando às equações (1) e (2) vê-se, sem maiores dificuldades que para  $i = 1$ , este modelo resulta em um sistema de segunda ordem.

Utilizando técnicas habituais de linearização, pode-se escrever

$$G(s) = \frac{s + a}{s(s + b)} \quad (3)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes determinadas pelos parâmetros do reator.

A equação (3), consiste em um modelo inteiramente aceitável para um pequeno reator, de baixa potência, onde a fissão é obtida por nêutrons de baixa energia.

### Equação de Controle

O primeiro passo para o estudo do problema de tempo mínimo será a apresentação da equação de controle.

Indicaremos por

$m(t)$  = posição da barra de controle em função do tempo.

$\dot{m}(t)$  = velocidade da barra de controle.

$y(t)$  = potência do reator em cada instante.

Recordemos que a variável de controle aqui considerada será  $\dot{m}$  em função do tempo.

Seja

$$G(s) = \frac{Y(s)}{M(s)} \quad (4)$$

onde

$Y(s)$  = a transformada de Laplace da função  $y = y(t)$

$M(s)$  = a transformada de Laplace da função  $m = m(t)$ .

Reunindo (3) e (4), resulta:

$$\frac{Y(s)}{M(s)} = \frac{(s+a)}{s(s+b)}$$

ou

$$\hat{Y}(s) = \frac{M(s)(s+a)}{s(s+b)} \quad (5)$$

Observe que (5) é a transformada de Laplace da seguinte equação diferencial

$$\ddot{y} + b\dot{y} = \dot{m} + am \quad (6)$$

onde

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

Consideremos as variáveis  $Z_1$ ,  $Z_2$  e  $Z_3$ , que serão as coordenadas de fase do sistema de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem que será obtida a partir da equação (6).

Lembramos, neste momento, que normalmente uma equação diferencial de 2ª ordem é equivalente a um sistema de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem, composto de duas equações. Entretanto, segundo um desenvolvimento elaborado por Chang (2)\*, é conveniente, em nosso caso particular, a introdução de uma terceira equação diferencial. Daí, o motivo pelo qual consideramos três coordenadas de fase.

Assim sendo, sejam

$$Z_1(t) = y(t) - y_d \quad (7)$$

onde  $y_d$  é a potência que se deseja atingir,

$$Z_2(t) = \dot{y}(t) \quad (8)$$

---

\* No mencionado trabalho, demonstra-se que é possível considerar somente a velocidade da barra de controle como variável de controle do sistema, encarando-se a posição da barra como coordenada de fase do sistema. Evidentemente, a coordenada de fase representativa da posição da barra de controle é limitada.

e

$$Z_3(t) = m(t), \quad (9)$$

Das (6), (7), (8) e (9) resulta que

$$\dot{Z}_1(t) = \dot{y}(t) = Z_2(t) \quad (10)$$

$$\dot{Z}_2(t) = \ddot{y}(t) = -b\dot{y}(t) + \dot{m}(t) + am(t) = -bZ_2(t) + aZ_3(t) + \dot{m}(t) \quad (11)$$

e

$$\dot{Z}_3(t) = \dot{m}(t) \quad (12)$$

Em resumo, pode-se escrever

$$\dot{Z}_1(t) = Z_2(t).$$

$$\dot{Z}_2(t) = -bZ_2(t) + aZ_3(t) + \dot{m}(t) \quad (13)$$

$$\dot{Z}_3(t) = \dot{m}(t)$$

ou na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_1(t) \\ \dot{Z}_2(t) \\ \dot{Z}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \\ Z_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{m}(t), \quad (14)$$

Chamando de  $\underline{Z}$ ,  $\dot{\underline{Z}}$ ,  $\underline{G}$  e  $\underline{K}$  respectivamente as matrizes definidas pelas expressões

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\underline{Z}} = \begin{bmatrix} \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_2 \\ \dot{Z}_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

podemos escrever (14) sob a forma:

$$\dot{\underline{Z}} = \underline{G} \underline{Z} + \underline{K} \dot{m}. \quad (15)$$

A equação (15) é a equação de controle do sistema.

### Solução do Sistema de Equações Diferenciais (13)

Uma vez conhecida a equação de controle, passemos à determinação de sua solução.

Faremos uso da seguinte notação:

- $P_0$  = valor inicial da potência (estado de equilíbrio)
- $P_d$  = valor da potência final que se deseja atingir
- $CP_d$  = valor da potência, no instante em que será invertido o sentido da barra de controle
- $L$  = valor máximo de  $m$  permitido visando às limitações do reator.
- $K$  = velocidade máxima atingida pela barra de controle
- $k$  = velocidade mínima atingida pela barra de controle.
- $t_1 = 0$  = tempo inicial
- $t_2$  = instante em que a barra de controle atinge sua posição máxima permissível (isto é, quando  $m = L$ )
- $t_3$  = instante em que se inverte o sentido da barra de controle.
- $t_4 = T$  = instante final, quando a potência do reator é igual a potência desejada (isto é,  $y = P_d$ ).

A figura 1 mostra de cima para baixo um gráfico da potência do reator, posição da barra de controle e sua velocidade, em função do tempo,  $t$ .

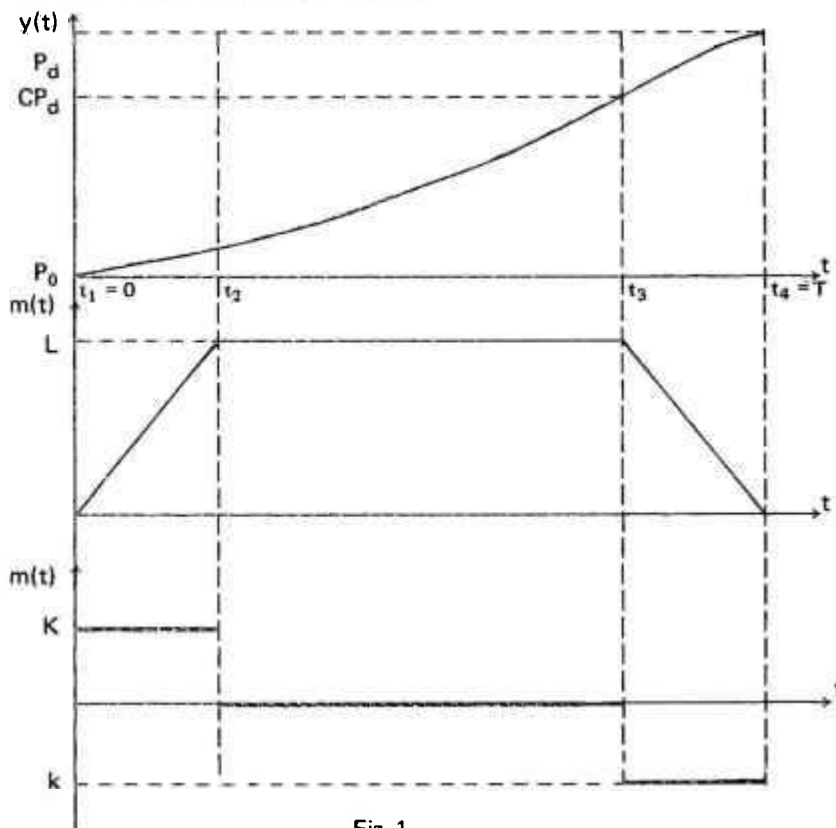


Fig. 1

Esquemáticamente, pode descrever-se o problema de tempo ótimo que se apresenta da seguinte maneira:

Trata-se de resolver a equação de controle, de modo que a inversão da barra de controle se processe no instante  $t = t_3$ . Tal inversão conveniente é considerada de modo que se obtenha a potência  $\gamma = P_d$  num tempo mínimo.

Conhecidos os valores de  $L$  e  $K$ , automaticamente determinamos o valor de  $t_2$  utilizando-se a relação seguinte:

$$t_2 = \frac{L}{K} \quad (16)$$

Passemos, então, à resolução do sistema (13), para condições iniciais fixadas.

Segundo o Teorema 3.2\*, consideremos a função

$$H = (\psi, f) = \psi^1 f^1 + \psi^2 f^2 + \psi^3 f^3 \quad (17)$$

onde

$$\psi = (\psi^1, \psi^2, \psi^3)$$

é uma função incógnita da variável real  $t$ , a ser determinada por meio das relações (3.14).

As funções

$$f^i = f^i(t, Z_1, Z_2, Z_3, \dot{m}), \quad i = 1, 2, 3$$

são definidas nas variáveis  $t, Z_1, Z_2, Z_3, \dot{m}$ , por meio das relações

$$\dot{Z}^i(t) = f^i(t, Z_1, Z_2, Z_3, \dot{m}), \quad i = 1, 2, 3.$$

Nessas condições, podemos escrever

$$\begin{aligned} f^1(t, Z_1, Z_2, Z_3, \dot{m}) &= z_2(t) \\ f^2(t, Z_1, Z_2, Z_3, \dot{m}) &= -bZ_2(t) + aZ_3(t) + \dot{m}(t) \\ f^3(t, Z_1, Z_2, Z_3, \dot{m}) &= \dot{m}(t) \end{aligned} \quad (18)$$

Substituindo as (18) em (17) resulta:

$$H(\psi, Z, \dot{m}) = \psi^1(t) Z_2(t) + [-bZ_2(t) + aZ_3(t) + \dot{m}(t)] \psi^2(t) + \dot{m}(t) \psi^3(t). \quad (19)$$

Por meio da equação (19), verifica-se que  $H$  é uma função linear na variável  $\dot{m}$  e portanto é natural a suposição de que  $H$  atinge um extremo quando  $\dot{m} = k$  ou quando  $\dot{m} = K$ .

---

\* Subseqüentemente, neste trabalho, a referência a teoremas e relações de outras secções será feita como acima, isto é, ao escrevermos Teorema 3.2 estamos nos referindo ao Teorema 2 da secção 3.

Faremos então um estudo do plano de fase das equações (13) em cada um dos casos separadamente. Além disso, por motivos físicos vamos considerar o caso em que  $m = L$ \*

A figura 2 que será mostrada logo após a análise dos 3 casos, representará no plano de fase a trajetória ótima. Cada curva será um segmento de trajetória; cada trajetória será um elemento de uma família de curvas. A variável independente será o tempo e as trajetórias serão geradas variando as condições iniciais.

**Caso I:** Para valores crescentes da potência, a trajetória de fase pode ser obtida resolvendo a equação (13), quando a velocidade da barra de controle assume valor máximo  $\dot{m} = K$ , e as condições iniciais são consideradas no instante  $t_1 = 0$ .

Neste caso a solução do sistema (13) é dado por

$$Z_1(t) = Z_1(0) + \frac{1}{b} Z_2(0) (1 - e^{-bt}) - \frac{a}{b^2} Z_3(0) (1 - e^{-bt}) + \frac{a}{b} Z_3(0) t - \frac{aK}{b^3} (1 - e^{-bt}) - \frac{K}{b^2} (1 - e^{-bt}) + \frac{Kt}{b} + \frac{aK}{2b} t^2 - \frac{aK}{b^2} t \quad (19)$$

$$Z_2(t) = Z_2(0) e^{-bt} + \frac{a}{b} Z_3(0) (1 - e^{-bt}) + \frac{aK}{b^2} (bt - 1) + \frac{K}{b} (1 - e^{-bt}) + \frac{aK}{b^2} e^{-bt} \quad (20)$$

$$Z_3(t) = Z_3(0) + Kt. \quad (21)$$

A porção desta trajetória será representada na figura 2 pelo segmento AB.

**Caso II:** Obter-se-á a porção seguinte da trajetória de fase quando  $\dot{m} = 0$ , ou seja, quando considerarmos  $m = L$ . Neste caso, o instante inicial é  $t_2$ , e esta porção de trajetória será representada na figura 2 pelo segmento BC. A partir da (13), considerando  $\dot{m} = 0$  e  $m = L$ , resulta:

$$Z_1(t) = Z_1(t_2) + \frac{1}{b} Z_2(t_2) (1 - e^{-b(t-t_2)}) + \frac{aL}{b} (t-t_2) - \frac{aL}{b^2} (1 - e^{-b(t-t_2)}) \quad (22)$$

$$Z_2(t) = Z_2(t_2) e^{-b(t-t_2)} + \frac{aL}{b} (1 - e^{-b(t-t_2)}) \quad (23)$$

$$Z_3(t) = L. \quad (24)$$

**Caso III:** A porção final da trajetória de fase será obtida para valores crescentes da potência, considerando-se que a velocidade  $\dot{m}$  assume valor mínimo  $k$ . Neste caso, a solução de (13), será:

---

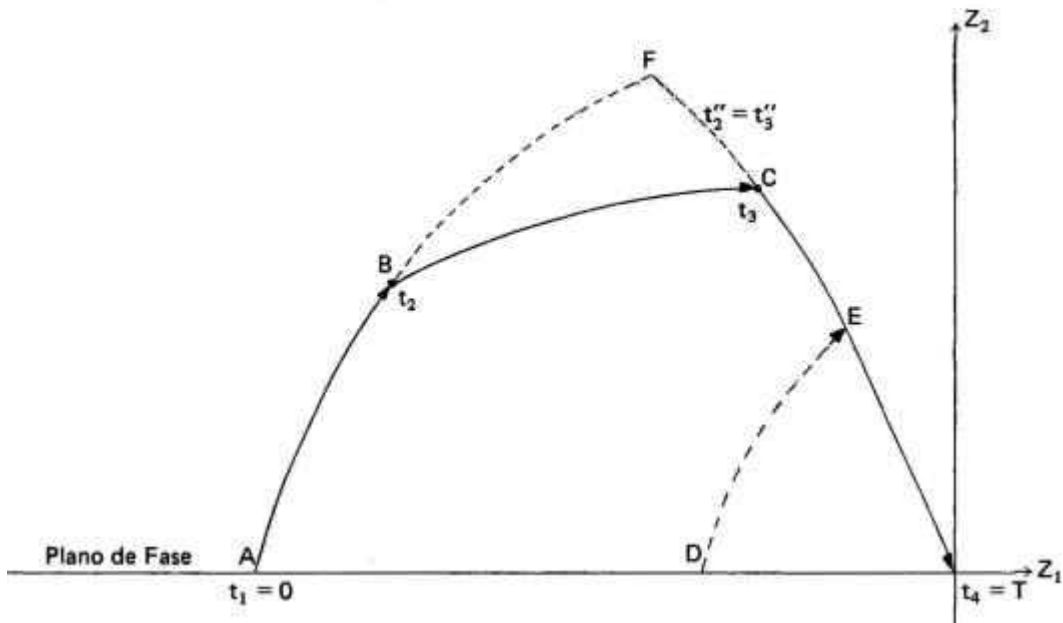
\* As suposições que acabamos de fazer decorreram dos fenômenos físicos e da idéia que H atinge o máximo nos extremos do intervalo, pelo fato de ser linear. Não tivemos a oportunidade neste ponto de basear nossas suposições em demonstrações teóricas pormenorizadas. Entretanto, julgamos oportuno fazer referência a um trabalho elaborado por Chang (3), onde ficou demonstrado o seguinte fato: em sistemas normais, isto é, sistemas da forma  $\dot{Z}(t) = AZ(t) + Bm(t)$  completamente controláveis, a condição necessária é suficiente para o controle de tempo mínimo, será obtido se  $\dot{m}(t)$  é um valor extremo ou se  $m(t)$  é um valor extremo.

$$\begin{aligned}
 Z_1(t) = & Z_1(T) + \frac{1}{b} Z_2(T) (1 - e^{-b(t-T)}) + \frac{a}{b} Z_3(T) (t-T) + \frac{ak}{2b} (t^2 + T^2) \\
 & - \frac{a}{b^2} Z_3(T) (1 - e^{-b(t-T)}) - \frac{ak}{b^2} (t-T) + \frac{ak}{b^3} (1 - e^{-b(t-T)}) + \frac{k}{b} (t-T) \\
 & - \frac{k}{b} (1 - e^{-b(t-T)}) - \frac{akT}{b} t.
 \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 Z_2(t) = & Z_2(T) e^{-b(t-T)} + \frac{a}{b} Z_3(T) (1 - e^{-b(t-T)}) + \frac{ak}{b} (t-T) - \frac{ak}{b^2} (1 - e^{-b(t-T)}) \\
 & + \frac{k}{b} (1 - e^{-b(t-T)}),
 \end{aligned} \tag{26}$$

$$Z_3(t) = Z_3(T) + k(t-T). \tag{27}$$

A porção da trajetória de fase deste caso será representada na figura 2 pela curva CO.



Observemos, na figura 2, que quando o valor máximo de  $m$  não é atingido, a trajetória ótima será dada pela curva DEO: Além disso, caso não houvésemos introduzido o caso III, ou seja, caso não tivéssemos considerado o caso em que  $m = L$ , a trajetória ótima seria ABFCO. Entretanto, a posição máxima que a barra pode atingir é  $m = L$  e corresponde na trajetória ao ponto B.

Os cálculos que efetuaremos a seguir, consistem na determinação do ponto C, correspondente ao instante  $t = t_3$  onde haverá inversão no sentido da barra.

#### Determinação de uma equação transcendente, conveniente para a obtenção do ponto $t_3$

Seguiremos os seguintes passos para a obtenção da equação transcendente nas incógnitas  $t_3$  e  $T$ :

1. Suponhamos  $Z_1 (T) = Z_2 (T) = Z_3 (T) = 0$  e façamos a substituição desses valores em (25), (26) e (27). Esta suposição força a posição final de assumir valor zero.
2. Subtraímos a equação (25) da equação (22).
3. Subtraímos a equação (26) da equação (23).

Estes procedimentos conduzem-nos a

$$e^{-bt_3} (Ae^{bt_2} + Be^{bT}) + t_3 (C+DT) + Et_3^2 + FT + GT^2 + H = 0 \quad (28)$$

$$e^{-bt_3} (Ie^{bt_2} + Je^{bT}) + Mt_3 + NT + P = 0 \quad (29)$$

onde

$$A = -\frac{1}{b} Z_2(t_2) + \frac{aL}{b^2} \quad (30)$$

$$B = \frac{ak}{b^3} - \frac{k}{b} \quad (31)$$

$$C = \frac{aL}{b} + \frac{ak}{b^2} - \frac{k}{b} \quad (32)$$

$$D = \frac{ak}{b} \quad (33)$$

$$E = -\frac{ak}{b} \quad (34)$$

$$F = -\frac{ak}{b^2} + \frac{k}{b} \quad (35)$$

$$G = -\frac{ak}{2b} \quad (36)$$

$$H = Z_1(t_2) + \frac{1}{b} Z_2(t_2) - \frac{aL}{b^2} - \frac{aL}{b} t_2 - \frac{ak}{b^3} + \frac{k}{b} \quad (37)$$

$$I = Z_2(t_2) - \frac{aL}{b} \quad (38)$$

$$J = -\frac{ak}{b^2} + \frac{k}{b} \quad (39)$$

$$M = -\frac{ak}{b} \quad (40)$$

$$N = \frac{ak}{b} \quad (41)$$

$$P = \frac{aL}{b} + \frac{ak}{b^2} - \frac{k}{b} \quad (42)$$

Calculam-se os valores de  $Z_1 (t_2)$  e  $Z_2 (t_2)$  utilizando-se as equações (19) e (20).

Todas as constantes nas equações de (30) a (42) são conhecidas. Trataremos agora de eliminar a constante T, ressaltando que

$$T - t_3 = \frac{L}{|k|} \quad (43)$$

Daí,

$$T = t_3 + \frac{L}{|k|} \quad (44)$$

pode ser substituído nas equações (28) e (29) que poderão ser resolvidas simultaneamente, por meio da seguinte equação transcendente, na variável  $t_3$ :

$$\theta e^{-b(t_3 - t_2)} + \alpha t_3^2 + \eta t_3 + \gamma = 0 \quad (45)$$

onde

$$\theta = \frac{A}{B} - \frac{I}{J} \quad (46)$$

$$\alpha = \frac{D + E + G}{B} \quad (47)$$

$$\eta = \frac{C + F}{B} + \frac{DL + 2GL}{B|k|} - \frac{M + N}{J} \quad (48)$$

$$\gamma = \frac{FL}{B|k|} + \frac{BL^2}{Bk^2} + \frac{H}{B} - \frac{NL}{J|k|} - \frac{P}{J} \quad (49)$$

Pode-se observar que todas as constantes mencionadas são conhecidas e que k é o valor da velocidade mínima atingida pela barra de controle.

Por meio da equação (45), é possível determinar o valor de  $t_3$ , quaisquer que sejam os valores  $Z_1(0)$ , K, n e L (evidentemente tais valores devem ser compatíveis com a realidade).

A equação (45) pode ser resolvida num computador digital.

A título de ilustração, testamos um caso amostra, no qual foram utilizados os seguintes valores:

$$a = 0,07853$$

$$b = 20$$

$$k = -0,1$$

$$K = 0,1$$

$$L = 0,0028$$

$$Z_1(0) = -0,01$$

$$Z_2(0) = 0$$

$$Z_3(0) = 0$$

Designando-se por EQNONL o programa que executa os cálculos\*, obtivemos como solução da equação (45) o valor  $t_3 = 0,7108 E + 01$ .

\* A listagem desse programa encontra-se no apêndice deste trabalho. Foi escrito em FORTRAN IV e rodado no computador IBM/370, modelo 155 do CPD do I.E.A.. Na Programoteca do CPD existe um relatório sobre esse programa.

Utilização da condição necessária apresentada no Princípio do Máximo ao particular exemplo ilustrativo.

Uma vez obtido o valor de  $t_3$  cabe agora verificar se o controle

$$\dot{m}(t) = \begin{cases} K & 0 \leq t \leq t_2 \\ 0 & t_2 < t \leq t_3 \\ k & t_3 < t \leq t_4 = T \end{cases} \quad (50)$$

e a correspondente trajetória  $Z = Z(t)$  são ótimos.

Para tanto, devemos substituir

$$\begin{aligned} \psi &= \psi(t) \\ \dot{m} &= \dot{m}(t) \\ Z &= Z(t) \end{aligned}$$

na função Hamiltoniana  $H(\psi, Z, \dot{m})$  definida em (17) e verificar que ela resulta uma constante positiva qualquer que seja  $t$  pertencente ao intervalo  $0 \leq t \leq T$  (segundo o Teorema 2).

Utilizando as relações (3.14) e (17), vamos determinar inicialmente  $\psi^1, \psi^2, \psi^3$ .

Da (17), temos

$$H(\psi, Z, \dot{m}) = (\psi, f) = \psi^1 f^1 + \psi^2 f^2 + \psi^3 f^3$$

sendo

$$f^1 = Z_2$$

$$f^2 = -bZ_2 + aZ_3 + \dot{m}$$

$$f^3 = \dot{m}$$

portanto

$$H(\psi, Z, \dot{m}) = \psi^1 Z_2 + \psi^2 (-bZ_2 + aZ_3 + \dot{m}) + \psi^3 \dot{m} = \psi^1 Z_2 - b\psi^2 Z_2 + a\psi^2 Z_3 + (\psi^2 + \psi^3) \dot{m}. \quad (51)$$

Por outro lado, das (3.14) tem-se que

$$\frac{d\psi^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Z_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Então:

$$a) \quad \frac{d\psi^1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Z_1}$$

Mas

$$\frac{\partial H}{\partial Z_1} = 0$$

então

$$\psi^1(t) = c_1 \quad (52)$$

onde  $c_1$  é uma constante real.

$$b) \frac{d\psi^2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Z_2} = -[\psi^1 - b\psi^2] = b\psi^1 - c_1$$

então

$$\psi^2(t) = \frac{c_1 + c_2 e^{bt}}{b} \quad (53)$$

onde  $c_2$  é uma constante real.

$$c) \frac{d\psi^3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Z_3} = -[a\psi^2] = -\frac{a}{b}[c_1 + c_2 e^{bt}]$$

então

$$\psi^3(t) = -\frac{a}{b}c_1 t - \frac{ac_2}{b^2} e^{bt} + c_3 \quad (54)$$

onde  $c_3$  é uma constante real.

Passemos então à determinação das constantes  $c_1, c_2, c_3$ .

Considerando as equações (15), (17) e que  $k \leq m \leq K$ , podemos escrever:

$$\psi^2(t) + \psi^3(t) = +1 \quad 0 \leq t < t_2 = 0,028$$

$$\psi^2(t) + \psi^3(t) = 0 \quad t_2 \leq t < t_3 = 7,108$$

$$\psi^2(t) + \psi^3(t) = -1 \quad t_3 \leq t \leq T.$$

Decorre daí o seguinte sistema linear de 3 equações nas 3 incógnitas  $c_1, c_2, c_3$ :

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{b} \right] c_1 + \left[ \frac{1}{b} - \frac{a}{b^2} \right] c_2 + c_3 = 1 \\ & \left[ \frac{1}{b} - \frac{0,028 \cdot a}{b} \right] c_1 + \left[ \frac{e^{b \cdot 0,028}}{b} - \frac{ae^{b \cdot 0,028}}{b^2} \right] c_2 + c_3 = 0 \\ & \left[ \frac{1}{b} - \frac{7,108 \cdot a}{b} \right] c_1 + \left[ \frac{e^{b \cdot 7,108}}{b} - \frac{ae^{b \cdot 7,108}}{b^2} \right] c_2 + c_3 = -1. \end{aligned} \quad (55)$$

A resolução do sistema (55) fornece os valores seguintes:

$$\begin{aligned} c_1 &= 0,909 \cdot 10^4 \\ c_2 &= 0,921 \cdot 10^{-58} \\ c_3 &= -0,454 \cdot 10^3. \end{aligned}$$

Então, substituindo-se em (52), (53) e (54), os valores de  $c_1$ ,  $c_2$ , e  $c_3$ , temos:

$$\begin{aligned}\psi^1(t) &= 0,909 * 10^4 \\ \psi^2(t) &= \frac{0,909 * 10^4 + 0,921 * 10^{-58} * e^{bt}}{b} \\ \psi^3(t) &= -\frac{0,909 * 10^4}{b} ac_1 t - 0,921 * 10^{-58} \frac{e^{bt} a}{b^2} - 0,454 * 10^3.\end{aligned}\tag{56}$$

Tendo em mãos as expressões de  $Z$ ,  $\psi$  e  $\dot{m}$ , fazemos a verificação de que  $H$  é uma constante positiva em  $0 \leq t \leq T$ .

Fizemos esta verificação para diversos valores de  $t$ . Consideremos a expressão geral que define  $H$ , ou seja

$$H = \psi^1(t) Z_2(t) - b\psi^2(t) Z_2(t) + a\psi^2(t) Z_3(t) + [\psi^2(t) + \psi^3(t)] \dot{m}(t).$$

Lembramos que  $c_1, c_2, c_3$ , foi determinado de modo que

$$\psi^2(t) + \psi^3(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } \dot{m}(t) = K \\ 0 & \text{se } \dot{m}(t) = 0 \\ -1 & \text{se } \dot{m}(t) = k. \end{cases}\tag{57}$$

Então, considerando as expressões (19) - (27), reunidas com (50), (56) e (57), verificamos que

$$H = 0,1 \geq 0$$

qualquer que seja  $t$  pertencente ao intervalo  $0 \leq t \leq T$ . Com isto verificamos (mediante a utilização do Princípio do Máximo) que tanto o controle como a trajetória determinados constituem o controle e a trajetória ótima do problema apresentado.

## V - Sumário e Conclusões

A presente secção consiste em um sumário, juntamente com algumas conclusões relativas ao trabalho desenvolvido.

Observe-se, inicialmente, que o objetivo central deste trabalho foi o de introduzir o leitor na "Teoria do Controle Ótimo". Esta teoria é muito útil na solução de uma ampla classe de problemas práticos que não podem ser resolvidos pelos métodos do cálculo das variações clássico. Alguns desses problemas estão relacionados com o controle de reatores nucleares.

Neste sentido, foram tratados os tópicos seguintes:

1. Apresentou-se um retrospecto histórico da Teoria, ressaltando-se o excelente trabalho de Pontryagin ao formular o "Princípio do Máximo", princípio que constitui o fundamento central de toda a teoria.

2. Formulou-se o Princípio do Máximo, sendo discutidas questões a ele concernentes. Examinou-se, em seus pormenores, um caso particular, qual seja, o problema de tempo ótimo. A propósito, é oportuno ressaltar a necessidade de considerar-se as equações que descrevem os sistemas, segundo Carathéodory.
3. Os desenvolvimentos teóricos foram ilustrados, utilizando-se um exemplo em controle de reatores.
4. Aplicou-se o Princípio do Máximo no exemplo mencionado anterior com o objetivo de verificar se um determinado controle admissível é ótimo ou não. Esse exemplo é uma aplicação do Princípio do Máximo a um problema de tempo ótimo que se apresenta em um reator nuclear. Para tanto, usando um modelo simplificado de um reator, discutimos o problema de aumentar o nível de potência do reator, num tempo mínimo, por meio da manipulação da barra de controle.
5. Elaborou-se um exemplo numérico onde o controle ótimo e a trajetória ótima, soluções do problema acima, foram obtidos.

Ao término de nossas conclusões, reafirmamos que por meio do Princípio do Máximo podemos verificar que o controle e a trajetória sugeridos no exemplo por nós ilustrado são ótimos.

## APÊNDICE

## Listagem do programa EQNONL

```

PROGRAM EQNONL 17 0 LEVEL 21                MAIN                DATE = 09/49/15
0001      COMMON ALPHA,ETA,ETA,ETA,GAMA,T,b
0002      DIMENSION Z1(10),Z2(10),Z3(10)
0003      EXTERNAL FCT
      L THIS IS THE MAIN PROGRAM
0004      A=0.07053
0005      b=20.
0006      XK1=-0.1
0007      XK2=-XK1
0008      XL=0.0028
0009      Z1(1)=-0.01
0010      Z2(1)=0.
0011      Z3(1)=0.
0012      T=XL/XK2
0013      Y=1.-EXP(-b*T)
0014      Y1=(A/b)*Z3(1)
0015      Z1(2)=Z1(1)+(Z2(1)/b)*Y-((Y1/b)*Y)+(Y1*T)-((A*XK2/b**3)*Y-((XK2/b
C**2)*Y)+(XK2*T/b)+(A*XK2*T**2)/(2.*b))- (A*XK2*T/(b**2))
0016      Z2(2)=Z2(1)*EXP(-b*T)+(Y1*Y)+(A*XK2/b**2)*(b*-1.+XK2*Y/b+A*XK2*c
LXP(-b*T)/b**2
0017      XA=-Z2(2)/b+A*XL/b**2
0018      Xb=A*XK1/b**3-XK1/b
0019      Xc=A*XL/b+A*XK1/b**2-XK1/b
0020      Xd=A*XK1/b
0021      Xe=-Xd
0022      Xf=-A*XK1/b**2+XK1/b
0023      Xg=Xe/2.
0024      Xh=Z1(2)+Z2(2)/b-A*XL/b**2-A*XL*T/b-A*XK1/b**3+XK1/b
0025      Xi=Z2(2)-A*XL/b
0026      Xj=-A*XK1/b**2+XK1/b
0027      Xm=Xe
0028      Xn=Xd
0029      Xp=A*XL/b+A*XK1/b**2-XK1/b
0030      Ieta=XA/Xb-Xi/Xj
0031      ALFA=(XU+Xe+Xg)/Xb
0032      ETA=(Xc+Xf)/Xb+((XL*Xd+2.*XG*XL)/(Xb*ABS(XK1)))-((Xm+Xn)/Xj)
0033      GAMA=((Xf*XL)/(Xb*ABS(XK1)))+((Xb*AL*XL)/(Xb*XK1*XK1))+((Xi/Xb)-((X
CN*XL)/(Xj*ABS(XK1)))- (XP/XJ)
0034      XLI=0.0
0035      XK1=7.5
0036      EPS=0.0E-5
0037      IEND=20
0038      CALL RTMI(X,F,FCT,XLI,XRI,EPS,IEND,IER)
0039      WRITE(6,3) IER
0040      3 FORMAT('0', 'IER=',14)
0041      WRITE(6,10) X
0042      10 FORMAT('0', 'ROOT OF F(X)=0 IS =',E10.4)
0043      STOP
0044      END

```

```
FURTRAN IV G LEVEL 21          FCT          DATE = 75317          09/49/15
0001          FUNCTION FCT(TOL)
0002          COMMON ALFA,TETA,ETA,GAMA,T,B
0003          FCT=TETA*(EXP(-(TOL-T)*B))+ALFA*TOL**2+ETA*TOL+GAMA
0004          RETURN
0005          END
```



PROGRAM IN G LEVEL 41	RTM1	DATE = 75317	09/49/15
0002	C	PREPARE ITERATION	RTM1 590
0003		IER=0	RTM1 600
0004		XL=KLI	RTM1 610
0005		XR=XRI	RTM1 620
0006		X=XL	RTM1 630
0007		TOL=X	RTM1 640
0008		F=FCT(TOL)	RTM1 650
0009	1	IF(F)1,16,1	RTM1 660
0010		FL=F	RTM1 670
0011		X=XR	RTM1 680
0012		TOL=X	RTM1 690
0013		F=FCT(TOL)	RTM1 700
0014	2	IF(F)2,16,2	RTM1 710
0015		FR=F	RTM1 720
		IF(SIGN(L.,FL)+SIGN(L.,FR))25,3,25.	RTM1 730
	C		RTM1 740
	C	BASIC ASSUMPTION FL*FR LESS THAN 0 IS SATISFIED.	RTM1 750
	C	GENERATE TOLERANCE FOR FUNCTION VALUES.	RTM1 760
0016	3	I=0	RTM1 770
0017		TOLF=100.*EPS	RTM1 780
	C		RTM1 790
	C		RTM1 800
	C	START ITERATION LOOP	RTM1 810
0018	4	I=I+1	RTM1 820
	C		RTM1 830
	C	START BISECTION LOOP	RTM1 840
0019		DO 13 K=1,IEND	RTM1 850
0020		X=.5*(XL+XR)	RTM1 860
0021		TOL=X	RTM1 870
0022		F=FCT(TOL)	RTM1 880
0023		IF(F)5,16,5	RTM1 890
0024	5	IF(SIGN(L.,F)+SIGN(L.,FR))7,6,7	RTM1 900
	C		RTM1 910
	C	INTERCHANGE XL AND XR IN ORDER TO GET THE SAME SIGN IN F AND FR	RTM1 920
0025	6	TOL=XL	RTM1 930
0026		XL=KR	RTM1 940
0027		XR=TOL	RTM1 950
0028		TOL=FL	RTM1 960
0029		FL=FR	RTM1 970
0030		FR=TOL	RTM1 980
0031	7	TOL=F-FL	RTM1 990
0032		A=F*TOL	RTM1 1000
0033		A=A+A	RTM1 1010
0034		IF(A-FR*(FR-FL))8,9,9	RTM1 1020
0035	8	IF(I-IEND)17,17,9	RTM1 1030
0036	9	XR=X	RTM1 1040
0037		FR=F	RTM1 1050
	C		RTM1 1060
	C	TEST ON SATISFACTORY ACCURACY IN BISECTION LOOP	RTM1 1070
0038		TOL=EPS	RTM1 1080
0039		A=ABS(XR)	RTM1 1090
0040		IF(A-1.)11,11,10.	RTM1 1100
0041	10	TOL=TOL*A	RTM1 1110
0042	11	IF(ABS(XR-XL)-TOL)12,12,13	RTM1 1120
0043	12	IF(ABS(FR-FL)-TOLF)14,14,13	RTM1 1130
0044	13	CONTINUE	RTM1 1140
	C	END OF BISECTION LOOP	RTM1 1150
	C		RTM1 1160

FORTRAN IV LEVEL	FL	RTM1	DATE = 75317	09/49/15
		14	NJ CONVERGENCE AFTER IEND ITERATION STEPS FOLLOWED BY IEND	RTM11170
		15	SUCCESSIVE STEPS OF BISECTION OR STEADILY INCREASING FUNCTION	RTM11180
		16	VALUES AT RIGHT BOUNDS. ERROR RETURN.	RTM11190
J045			IER=1	RTM11200
J046		14	IF(ABS(FR)-ABS(FL))16,16,15	RTM11210
J047		15	X=XL	RTM11220
0048			F=FL	RTM11230
0049		16	RETURN	RTM11240
				RTM11250
		17	COMPUTATION OF ITERATED X-VALUE BY INVERSE PARABOLIC INTERPOLATION	RTM11260
J050			A=FR-F	RTM11270
J051			DX=(X-XL)*FL*(1.+F*(A-TOL)/(A*(FR-FL)))/TOL	RTM11280
0052			XM=X	RTM11290
0053			FM=F	RTM11300
0054			X=XL-DX	RTM11310
0055			TOL=X	RTM11320
J056			F=FC(TOL)	RTM11330
0057			IF(F)18,16,18	RTM11340
				RTM11350
		18	TEST ON SATISFACTORY ACCURACY IN ITERATION LOOP	RTM11360
J058			TOL=EPS	RTM11370
0059			A=ABS(X)	RTM11380
0060			IF(A-1.)20,20,19	RTM11390
J061		19	TOL=TOL*A	RTM11400
J062		20	IF(ABS(IX)-TOL)21,21,22	RTM11410
0063		21	IF(ABS(F)-TOLF)16,16,22	RTM11420
				RTM11430
		22	PREPARATION OF NEXT BISECTION LOOP	RTM11440
0064			IF(SIGN(1.,F)+SIGN(1.,FL))24,23,24	RTM11450
0065		23	XR=X	RTM11460
J066			FR=F	RTM11470
0067			GO TO 4	RTM11480
J068		24	XL=X	RTM11490
0069			FL=F	RTM11500
0070			XR=XM	RTM11510
0071			FR=FM	RTM11520
J072			GO TO 4	RTM11530
			END OF ITERATION LOOP	RTM11540
				RTM11550
				RTM11560
		25	ERROR RETURN IN CASE OF WRONG INPUT DATA	RTM11570
0073			IERR=2	RTM11580
J074			RETURN	RTM11590
0075			END	RTM11600

## ABSTRACT

The "theory of optimal processes" is a recent mathematical formalism that is used to solve an important class of problems, in science and in technology, that cannot be solved by classical variational techniques. An example of such processes would be the control of a nuclear reactor.

In the present work certain features of the theory of optimal processes are discussed, emphasizing the central contribution of Pontryagin with his formulation of the "maximum principle". An application of the theory of optimum control is presented. The example is a time optimum problem applied to a simplified model of a nuclear reactor. It deals with the question of changing the equilibrium power level of the reactor in an "optimum time".

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. CARATHÉODORY, C. *Vorlesungen über reelle Funktionen*. 3.Aufl. New York, Chelsea, 1968.
2. CHANG, S. S. L. Minimal time control with multiple saturation limits. *IEEE Trans. autom. Control*, New York, **AC-8**:35-42, 1964.
3. CONTI, R. Contribution to linear control theory. *J. differential Equations*, New York, **1**:427-45, 1965.
4. KNUDSEN, H. K. An iterative procedure for computing time-optimal controls. *IEEE Trans. autom. Control*, New York, **AC-9**:23-30, 1964.
5. PARTAIN, C. L. & BAILEY, R. E. An application of time optimal control theory to the nuclear reactor startup problem. In: THE 1967 JOINT automatic control conference: preprints of papers. New York, L. Winner, 1967. p. 71-8.
6. PONTRYAGIN, L. S. et alii. *The mathematical theory of optimal processes*. New York, Wiley, 1962.
7. ROZONOÉR, L.I. L.S. Pontryagin maximum principle in the theory of optimum systems. I. *Automm. remote Control*, Pittsburgh, **20**:1288-302, 1959.
8. ROYDEN, H.L. *Real analysis*. 2.ed. London, Macmillan, 1971.
9. SCHULTZ, M.A. *Control of nuclear reactors and power plants*. 2.ed. New York, McGraw-Hill, 1961.
10. WEAVER, L. E. *System analysis of nuclear reactor dynamics*. New York, Rowman and Littlefield, 1963.